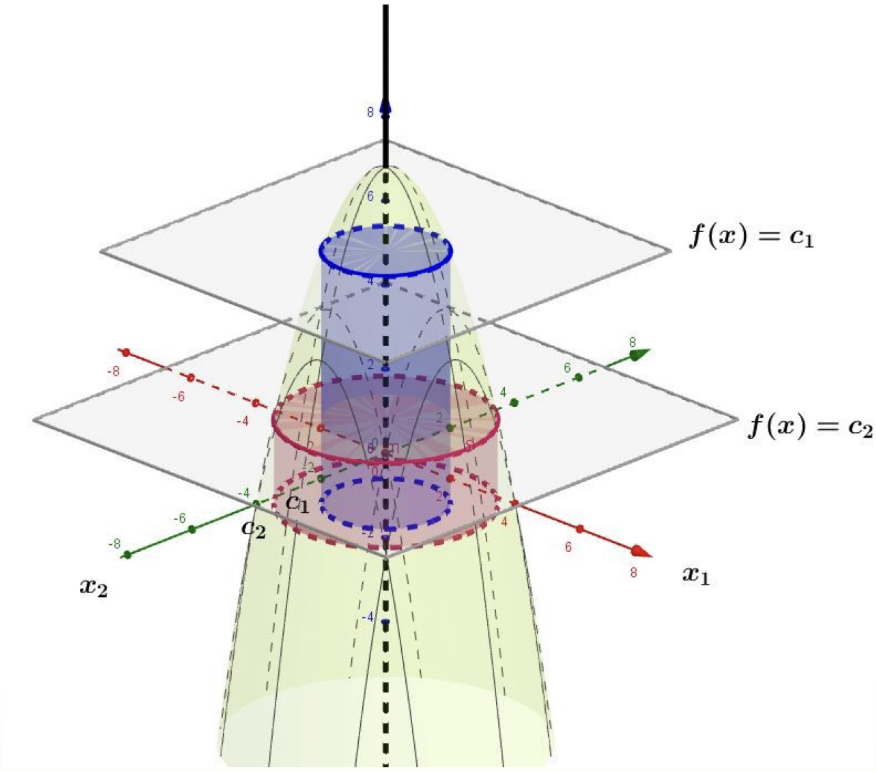
umaeditorial
Universidad de Málaga

Modelos de Optimización en la Economía y la Empresa



Laura Delgado Antequera
Samira El Gibari Ben Said
Trinidad Gómez Núñez
Francisco Ruiz de la Rúa
Rafael Caballero Fernández

© UMA Editorial. Universidad de Málaga
Bulevar Louis Pasteur, 30 (Campus de Teatinos) - 29071
Málaga www.umaeditorial.uma.es

ISBN: 978-84-1335-420-0

Publicado en junio de 2025.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la Programación Matemática

La Programación Matemática se enmarca dentro de la Teoría de la Optimización, que engloba un conjunto de técnicas cuantitativas que tratan de determinar aquellas acciones que, cumpliendo ciertas limitaciones (económicas, técnicas...), maximizan o minimizan un determinado objetivo. Así, a grandes rasgos, la programación matemática es la disciplina que aplica los métodos analíticos apropiados para ayudar en la toma de decisiones. Utiliza resultados de muchas áreas científicas, aunque su base fundamental se encuentra en la Matemática, la Economía y el Cálculo de Probabilidades y Estadística.

Matemáticamente, el problema consiste en determinar qué valores deben tomar ciertas variables, llamadas *variables de decisión*, dentro del *conjunto de oportunidades*, definido por las restricciones que presenta el problema, de modo que se maximice o minimice una función dada, denominada *función objetivo*.

Son diversos los escenarios de la realidad en los que nos encontramos con situaciones de este tipo. Por ejemplo, se enfrentan a problemas de optimización:

- Un médico que desee conocer cuándo la concentración de un medicamento en el sistema circulatorio alcanza su punto álgido.
- Una compañía petrolera que desee conocer la tasa óptima de extracción de un pozo.
- Una administración que desee conocer la localización más adecuada de un determinado número de centros escolares u hospitalarios.
- Una organización que ha de diseñar los turnos de sus trabajadores.
- Los gerentes de un centro comercial que han de determinar el número de cajas activas para minimizar el tiempo de espera de los clientes en la cola.
- Los encargados de un almacén que han de conocer cuándo realizar los pedidos y de qué cuantía.
- Un consumidor que desee conocer las cantidades a consumir de ciertos bienes que maximizan su utilidad para un cierto presupuesto.
- En geometría, cuando se requiere minimizar la distancia.
- En econometría, para calcular estimadores por el método de mínimos cuadrados, o por el de máxima verosimilitud.

Originalmente, en el ámbito económico, la Programación Matemática se utilizaba como marco formalizado del problema básico de análisis económico, es decir, el estudio de cuál es la mejor asignación de recursos escasos entre usos alternativos. Estos problemas reales se remontan muy atrás en el tiempo. No obstante, resulta imposible analizar el origen histórico de la Programación

Matemática aislada de la Investigación Operativa. Es cierto que el fenómeno clave para el impulso de la resolución de problemas de optimización con restricciones deriva de los estudios matemáticos desarrollados en los siglos XVII, XVIII y XIX. A comienzos de este periodo, en 1665, destacan los trabajos de Newton para determinar las raíces de una ecuación o el extremo de una función. Sin embargo, Fermat, ya había aplicado implícitamente la condición necesaria de optimalidad sin necesidad de utilizar el concepto de derivada o límite. Brook Taylor, discípulo de Newton, utilizó las teorías de su maestro para aproximar funciones utilizando polinomios. Joseph-Luis Lagrange (De Lagrange, 1788) presentó su método, como una herramienta para determinar los estados de equilibrio de un sistema dinámico, pero que, en general, es válido para encontrar los extremos de una función en la que sus variables están sujetas a restricciones de igualdad. Para problemas de optimización con restricciones de desigualdad, fue Jean-Baptiste Joseph Fourier, quien se inspiró en el método de eliminación de Gauss para desarrollar un método de eliminación de variables en un sistema de inecuaciones lineales. En 1827, Antoine Augustin Cournot utilizó estos estudios para conjeturar una condición necesaria de optimalidad en ciertos casos particulares de la economía. Finalmente, Mikahil Ostrogradski presentó en 1834 el método para el problema general.

Sin embargo, el interés por los problemas de optimización fue más destacable con la llegada de la Investigación Operativa, durante la Segunda Guerra Mundial. Entre 1936 y 1938, el ministerio del aire británico instaló una estación de investigación militar con el fin de desarrollar tecnología de radar para interceptar aviones de combate del enemigo. Años más tarde, dirigido por Patrick M.S. Blackett, formaron un equipo de trabajo multidisciplinar formado por ingenieros, matemáticos, economistas, físicos, etc. que permitió diseñar un sistema de localización estratégica de cargas de profundidad que ayudó en la destrucción de los famosos submarinos alemanes. El éxito de este primer grupo impulsó la creación de nuevos equipos, dirigidos por científicos de excelencia, con el fin de resolver problemas tácticos y estratégicos. Así, estos grupos dedicados, en origen, a estudiar operaciones militares, dan nombre a la disciplina de Investigación Operativa (*Operations Research*, en inglés). Concluida la guerra, muchos de estos científicos continuaron aplicando las técnicas desarrolladas en trabajos para la industria, administración y universidades, alcanzando un enorme desarrollo fuera del ámbito militar mediante el proyecto *Research and Development (RAND)* en 1945.

Finalmente, el término Programación Matemática fue empleado por vez primera en el primer RAND Symposium celebrado en 1959 en California, para denotar a un conjunto de técnicas matemáticas empleadas en la resolución de problemas de optimización, es decir, para determinar el reparto a realizar de una serie de recursos escasos para alcanzar un objetivo. Estas técnicas evolucionaron de la mano de dos pilares clave de la posguerra:

- Competitividad Industrial: Estos problemas se centraban en el diseño de planes de producción, desarrollando modelos y procedimientos que permitiesen obtener buenas soluciones. En este sentido, se aplicó la Programación Matemática en otros contextos como las refinerías de petróleo, distribución de productos, estudios de mercado, inversión de capital, etc.

- Velocidad de las computadoras: Este factor ha sido clave para el desarrollo de la Programación Matemática, pues el desarrollo de los ordenadores permitió obtener soluciones en un menor tiempo y empleando menos recursos. Es por ello que las computadoras de alta velocidad han permitido la resolución y simulación de sistemas reales cada vez más complejos. Aunque algunos problemas prácticos son lo bastante simples como para que un gestor pueda aplicar su experiencia personal para resolverlos, en el complejo mundo actual muchos problemas no pueden resolverse de esta manera. La evaluación de cada alternativa es demasiado difícil, debido a la cantidad y complejidad de la información que debe ser procesada o porque el número de soluciones alternativas es tan grande que sería inviable evaluarlas todas para seleccionar una apropiada. Por ello, necesitamos de técnicas cuantitativas y, en ocasiones, de paquetes informáticos adecuados para su resolución.

En los últimos años, el volumen creciente de información acumulada, ha llevado al estudio, inicialmente, de su organización y almacenaje, para su posterior explotación y uso. Ello ha permitido el desarrollo acelerado de un nuevo concepto denominado *Big Data*. Las estrategias aplicadas en este campo, surgen tras combinar técnicas de estadística con la inteligencia artificial o *Machine Learning*. Las herramientas desarrolladas en este ámbito, tienen aplicación en la economía, donde cabe resaltar el *Business Analytics*. En general, para lidiar con un gran volumen de información, esta nueva disciplina, está subdividida en 3 grandes fases:

1. Descriptiva: Donde se utilizan técnicas estadísticas simples para describir el contenido de una base de datos. En este estudio, se incluyen las medidas de tendencia central (media, moda, mediana), de dispersión (desviación estándar), gráficos, métodos de ordenación, métodos de muestreo y distribuciones de frecuencia y probabilidad, entre otros, es decir, todo aquello que nos proporcione una visión global sobre el comportamiento de los datos que estamos manejando. Esta fase conlleva identificar posibles tendencias en los datos, así como determinar un criterio para identificar tales tendencias o deducir las posibles relaciones entre las variables que trabajamos, así como los valores que éstas alcanzan.

2. Predictiva: Aplicación de herramientas de la estadística avanzada, como modelos de regresión múltiple o ANOVA, usando información procedente de software o métodos de predicción de Investigación Operativa para identificar variables predictivas y construir modelos con los que identificar tendencias o relaciones que no se aprecian en el análisis descriptivo.

3. Prescriptiva: Aplicación de teoría de la decisión y técnicas de Investigación Operativa para hacer un mejor uso de los recursos disponibles. Todo ello, con el fin de utilizar los recursos de forma óptima para aprovecharse de las técnicas de predicción y futuras oportunidades.

Así, el *Business Analytics* funde la información procedente de informes, bases de datos o datos de la nube. De esta forma, al proceder con la fase descriptiva, podemos dar respuesta a preguntas como ¿qué ha pasado? ¿qué conocemos? para así poder encontrar oportunidades de negocio. A continuación, la fase predictiva nos permite conocer ¿qué está ocurriendo, por qué y cuándo ocurrirá? Esto nos permite predecir oportunidades futuras de las que una determinada empresa pueda sacar ventaja o beneficio. Por último, la fase prescriptiva responde a ¿cómo se debería afrontar el problema?, es decir, localizar los recursos con los que sacar las ventajas en las ocasiones previstas en la fase anterior. En esta ocasión, se pueden plantear distintos escenarios entre los que se ha de seleccionar el proceso óptimo. Este estudio incrementa el valor y mejora, considerablemente, el funcionamiento de muchos negocios.

1.1. Proceso de toma de decisiones

El proceso de aplicación de métodos cuantitativos a la solución de problemas reales requiere una sucesión sistemática de etapas, resumida en la Figura 1.1.

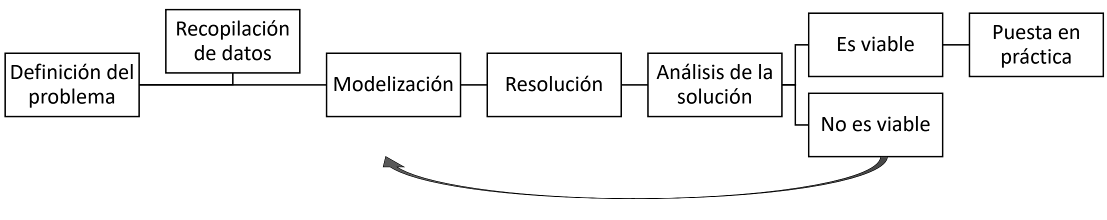


Figura 1.1: Etapas de la aplicación de un método cuantitativo.

Lo primero que hay que hacer es identificar, comprender y describir, en términos precisos, el problema que tratamos de resolver. En algunos casos, el problema está bien definido y es claro. Sin embargo, en otras ocasiones, pueden ser necesarias sucesivas reuniones del grupo de personas implicadas (gestores, técnicos...) para concretar los elementos principales del problema real: el objetivo perseguido, las alternativas de decisión y las posibles limitaciones que pueden darse. Hemos de tener en cuenta que en esta etapa es importante una cooperación estrecha entre el grupo de técnicos o analistas, que son los conocedores de las herramientas matemáticas, y los gestores o tomadores de decisiones, que son los que tienen experiencia y conocimiento práctico del problema real.

Posteriormente, se procede a construir un modelo, es decir, se trata de convertir una descripción cualitativa de un problema real en un conjunto de expresiones matemáticas que conformen un modelo que pueda resolverse con métodos cuantitativos. Esta etapa la podemos compaginar con la búsqueda de datos, algunos de los cuales pueden ser de fácil acceso, mientras que para otros puede ser necesario llevar a cabo estimaciones e incluso es posible que, por la ausencia de alguna información necesaria, tengamos que recurrir a modificar el modelo inicial planteado.

En la elaboración de un modelo de Programación Matemática, podemos distinguir dos puntos clave:

i) Especificar los elementos que lo componen:

   - Las variables de decisión: representan conceptos que pueden tomar distintos valores numéricos, dentro de ciertos límites, y que son controlados por el gestor. En definitiva, son las incógnitas cuyos valores hemos de determinar para solucionar el problema de decisión. A partir de estas variables, se construyen los otros dos elementos que comentamos a continuación.
   - La función objetivo: representa el propósito del problema, en forma de función matemática que liga las variables de decisión. Es la medida que permite ordenar los posibles valores que pueden tomar las variables de decisión. En ocasiones, durante el proceso de modelización se van incluyendo matices que ayudan a una mejor correspondencia entre el objetivo, en términos matemáticos, y los deseos del gestor.
   - Las restricciones: representan las limitaciones o requisitos que han de cumplir las variables para que las decisiones sean aceptables. Formalmente se corresponde con expresiones matemáticas que dependen de las variables de decisión, y que definen la *región factible* o conjunto de oportunidades del problema. Las restricciones pueden darse como desigualdad, para representar la idea de no alcanzar un valor determinado, por exceso (menor o igual), por defecto (mayor o igual) y/o igualdad. En general, estas restricciones se deben a la disponibilidad de los recursos empleados, *limitaciones físicas y/o económicas*, pero también pueden originarse por *motivos legales o impuestas por alguna política económica determinada*. Adicionalmente, pueden aparecer *restricciones debidas al significado de las variables* (por ejemplo, si nuestras variables de decisión representan la distribución porcentual del presupuesto entre una serie de alternativas, su suma ha de ser uno); o bien *restricciones lógicas sobre las variables* (por ejemplo, la variable que representa el número de coches fabricados ha de tomar un valor entero).

   En todo modelo es especialmente importante homogeneizar las unidades de medida para poder operar con las variables. Además, no hay que confundir las variables de decisión con las denominadas *constantes* y *parámetros*. Las primeras hacen referencia a cantidades cuyo valor permanece fijo en el modelo. Por ejemplo, la duración máxima de la jornada laboral. Los parámetros, por su parte, son valores que permanecen fijos para cada particularidad de un modelo. Sirven para analizar el comportamiento de un sistema en distintos escenarios que se construyen modificando estos valores. Por ejemplo, en un sistema de producción puede resultar interesante analizar la respuesta del sistema ante distintos niveles de demanda. Hay que mencionar que, lo que en un modelo se considera como constante, en otro puede ser un parámetro, con la excepción de las constantes predefinidas, es decir, que su valor no varía bajo ninguna circunstancia.

ii) Establecer un escenario: conjunto de suposiciones bajo las que es aplicable el modelo elaborado al problema de decisión.

Una vez construido el modelo, procedemos a su resolución. Para ello, es preciso conocer las técnicas matemáticas disponibles, de acuerdo con las características de dicho modelo. Si éste responde a un tipo de problema estándar, entonces nos podremos ayudar de un paquete de software que lleve implementado un algoritmo apropiado de resolución. En caso contrario, habrá que proceder a implementar un algoritmo específico ("ad-hoc") para la resolución computacional del modelo. Un aspecto importante en esta etapa, tras la resolución, es analizar la *sensibilidad* de la solución encontrada cuando se modifica el valor de algún dato del modelo, sobre todo en el caso de que dicho dato no se conozca con precisión. Se trata de estudiar si la solución obtenida cambia sustancialmente o no ante pequeñas variaciones en algunos de los datos utilizados, detectando así si hay datos que ejerzan gran influencia en la solución final.

Después de resolver el modelo matemático es extremadamente importante validar la solución. Esto implica analizar cuidadosamente la solución para comprobar que no se nos ha olvidado incorporar ningún aspecto importante, o no se han cometido incongruencias serias, de manera que los valores obtenidos tienen sentido, y que las decisiones resultantes pueden llevarse a cabo. En el caso de que la solución obtenida no sea aceptable, como indica la Figura 1.1, habría que reiniciar el proceso de modelización, analizando si hay aspectos del problema que se han omitido o se han incorporado de forma incorrecta, si hay errores en las estimaciones o registro de algunos datos...., y realizar las modificaciones oportunas en el modelo.

La última etapa consiste en la puesta en práctica de la solución obtenida, lo que conlleva su transformación en instrucciones operativas para los equipos de gestión correspondientes. Aquí es importante la supervisión y control, por si se produjeran cambios significativos en los supuestos bajo los cuales se elaboró el modelo, y que puedan requerir revisarlo y/o modificarlo.

Lo habitual, antes de obtener un modelo aceptable, es realizar un buen número de comprobaciones y correcciones. La ventaja de esto es que se van incorporando matices y aspectos del problema que no se habían considerado previamente. Se trata de conseguir una buena abstracción o representación simplificada de la realidad, pero siendo conscientes de que ningún modelo es capaz de representar todos los matices de una problemática económica y/o empresarial, usualmente compleja. Por esta razón, el arte de modelizar reside en diseñar un modelo operativo que sea, de forma equilibrada, representativo de la realidad estudiada pero, a la vez, manejable matemáticamente. Es una habilidad que mejora con la práctica, e incluye una combinación de ingenio e innovación.

En este texto nos centraremos en el desarrollo teórico de las herramientas de Programación Matemática, mostrando su utilidad en diferentes contextos económico-empresariales con ejemplos ilustrativos. Aunque se trata, por tanto, de una parte del proceso que conlleva la resolución de todo problema real, es una fase importante, pues el conocimiento de las herramientas matemáticas y saber interpretar los resultados es imprescindible para su aplicabilidad.

En la resolución de todo modelo de Programación Matemática es importante discriminar la clase o tipología de modelo obtenido, pues las técnicas a aplicar van a depender de ello. Podemos diferenciar distintos tipos de problemas atendiendo a diversos aspectos, entre los cuales resaltamos los siguientes, que serán de aplicación en el presente texto:

- Dependiendo de las restricciones, podemos encontrarnos con problemas de *programación irrestricta o libre*, en los que no hay restricciones, problemas de *programación con restricciones de igualdad*, en los que todas las restricciones vienen dadas por ecuaciones, y problemas de *programación con restricciones de desigualdad*, en los que las restricciones adoptan la forma de inecuaciones.

- Dependiendo de las expresiones matemáticas que definen la función objetivo y las funciones restricción podemos distinguir entre problemas de *programación no lineal*, en los que al menos aparece una función no lineal de las variables de decisión, y problemas de *programación lineal*, en los que todas las funciones que intervienen son lineales.

- Dependiendo del carácter de las variables de decisión, podemos hablar de problemas de *programación continua* en los que las variables pueden tomar valores reales, y problemas de *programación entera* donde algunas o todas las variables han de tomar valores enteros. Un caso particular de estos últimos es el de los problemas de *programación binaria*, en los que hay variables que sólo pueden tomar los valores 0 o 1.

- Dependiendo del número de funciones objetivo, podemos discriminar entre problemas de *programación escalar*, en los que hay una sola función objetivo y se utiliza el planteamiento tradicional, y problemas de *programación multiobjetivo*, en los que hay varias funciones objetivo en conflicto entre sí que interesa analizar de una forma conjunta.

Antes de adentrarnos en las técnicas de resolución para estos tipos de problemas, en los siguientes epígrafes analizaremos los elementos básicos y algunos resultados teóricos que serán aplicables a lo largo de todo del texto.

1.2. Conceptos básicos de Programación Matemática

Muchos problemas económicos y empresariales consisten en determinar una o varias magnitudes para que otra, dependiente de esas primeras, alcance su valor óptimo, máximo o mínimo. Por tanto, se pueden formular bajo un modelo de optimización.

Si el problema en cuestión es independiente del tiempo, se denomina de optimización estática; en el caso en que la variable tiempo aparezca como tal, y la situación en un instante del tiempo depende de nuestras decisiones en instantes anteriores, el problema se denomina de optimización dinámica. En consecuencia, podemos introducir la siguiente definición:

Definición 1.1: Problema de optimización estática

Definimos como problema de optimización estática el "criterio racional de la distribución o asignación de recursos escasos entre fines competitivos en un instante de tiempo determinado".

1.2.1. Planteamiento formal del problema de Programación Matemática

Un problema de optimización estática, que denominaremos a partir de ahora de Programación Matemática (PM), toma la siguiente forma en términos matemáticos:

$$(PM) \quad \begin{cases} Opt & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \end{cases}$$

donde se pueden identificar las siguientes componentes:

a) La **función objetivo**, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que no es más que una descripción matemática del objetivo final del problema planteado. Normalmente la supondremos continuamente diferenciable en una parte de su dominio, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Las **variables de decisión**, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que es un vector n-dimensional cuyas componentes deberemos determinar, dentro de las posibilidades existentes, para que el valor de la función objetivo en las mismas alcance su valor óptimo (máximo o mínimo). Los valores que tomen x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ representan las cantidades de los bienes que utilizaremos en nuestro proceso productivo, o en nuestro consumo, o, como veremos en capítulos posteriores, otras acciones a realizar.

c) El **conjunto de oportunidades**, $X = \{\mathbf{x} \in D \;/\; \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$, que es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dentro del que podemos elegir el valor de nuestras variables de decisión. Este conjunto, inicialmente, estará formado por los puntos de D que satisfacen las restricciones del problema. Supondremos, además, que la función objetivo está bien definida en este conjunto. De esta forma, resulta que las variables de decisión sólo pueden tomar valores en el conjunto de oportunidades y a sus puntos los llamaremos *admisibles* o *factibles*.

d) Las **funciones de restricción**, $\mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que consiste en una función vectorial que recoge aquellas magnitudes para las cuales hay una cierta disponibilidad.

e) Los **términos independientes** o recursos, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Cada expresión $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ determina una limitación sobre las variables de decisión.

Dada la gran importancia que tendrán el conjunto de oportunidades y la función objetivo en los problemas de Programación Matemática, vamos a detenernos, en los siguientes párrafos, en algunas consideraciones sobre los mismos. Con el fin de asegurar la existencia de óptimos globales de un problema, éste ha de cumplir una serie de condiciones. En primer lugar, la función objetivo ha de ser continua, al menos, en el conjunto de oportunidades del problema, lo que se cumple en la gran mayoría de problemas económicos. Respecto al conjunto de oportunidades, un punto pertenece al mismo, $\mathbf{x} \in X$, si verifica todas y cada una de las restricciones del problema. Asimismo, X ha de cumplir las siguientes condiciones:

- ha de ser acotado, es decir, las variables de decisión no pueden tomar valores arbitrariamente grandes. En general, esto no será una preocupación en la práctica, porque es muy habitual en los problemas económicos. De manera genérica, en Economía, resulta muy raro que las variables de decisión tomen valores ilimitados, y como consecuencia, que el conjunto de oportunidades no esté acotado.

- ha de ser cerrado, que se verificará siempre que las desigualdades de todas las restricciones incluyan la igualdad, es decir, que las restricciones sean de la forma $=$, $\leq$, $\geq$. Lo usual en los problemas económicos y empresariales será que el conjunto de oportunidades sea cerrado, ya que lo contrario puede suponer, a veces, que el problema carezca de solución.

- ha de ser no vacío, es decir, al menos contener un elemento. Comprobar esta condición puede suponer una cierta complejidad en algunos problemas, en los que puede ser complicado encontrar un punto factible. Esto puede ser resuelto, bien mediante su representación gráfica cuando sea posible, o con la ayuda computacional en la resolución del problema.

Otros aspectos a tener en cuenta en Programación Matemática se refieren a la convexidad del conjunto de oportunidades y a la convexidad o concavidad de las funciones. Ambos conceptos nos permitirán asegurar, si se cumplen una serie de condiciones que veremos más adelante, la globalidad de todo óptimo local. De todas formas, ambas definiciones están a disposición del lector en el Anexo.

Si, como sucede en algunas funciones utilizadas en Economía, la función objetivo está definida en todo $\mathbb{R}^n$, resulta que el conjunto de oportunidades, X, estará definido únicamente por las restricciones del problema. Cada una de dichas restricciones define un conjunto de valores de las variables, de tal manera que si existe más de una restricción, los valores posibles de las variables deben satisfacer todas ellas. Desde el punto de vista formal, podríamos plantearnos la relación entre el conjunto donde la función objetivo está definida (su dominio, D) y el conjunto marcado por las restricciones de nuestro problema, es decir por el conjunto de oportunidades, X. Supondremos, en general que $X \subset D$ y de esta forma $X = D \cap X$. En el caso que esto no ocurra, deberemos analizar detenidamente la definición de nuestro problema, pues pueden existir algunas incorrecciones.

Vamos a ver a continuación un ejemplo de un conjunto de oportunidades, aunque de momento no tiene una formulación económica:

Ejemplo 1.1: Conjunto de oportunidades

Sean x_1 y x_2 las variables de decisión de un problema de Programación Matemática, donde sus restricciones son:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\leq 9 \quad (R1) \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \quad (R2) \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \quad (R3). \end{aligned}$$

Analice el conjunto de oportunidades y represéntelo.

Solución

Antes de representarlo de manera gráfica, podemos deducir que se trata de un conjunto de oportunidades cerrado (todas las restricciones contienen la igualdad) y no vacío (tiene elementos en su interior). En cuanto a la condición de acotado, en la Figura 1.2, se puede apreciar que no se va al infinito. Asimismo, se trata de un conjunto de oportunidades convexo.

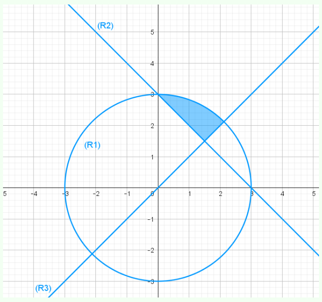


Figura 1.2: Conjunto de oportunidades del problema.

En definitiva, el conjunto de oportunidades de la figura previa cumple todas las condiciones para determinar la existencia de óptimos y la globalidad de todo óptimo local. Sin embargo, cabe recordar que estas conclusiones tendrán lugar siempre que la función objetivo también cumpla una serie de condiciones previamente comentadas.

En algunos casos nos interesará solamente la región del conjunto de oportunidades comprendida en uno de los cuadrantes, en particular, en el primero, ya que es muy frecuente que las variables no puedan tomar valores negativos. Esto viene explicitado por unas restricciones que actúan directamente sobre las variables de decisión y son de la forma:

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0 \; \ldots x_n \geq 0.$$

Tal y como se ha comentado previamente, cuando el conjunto de oportunidades no sea cerrado, el problema puede carecer de solución. Veamos, a continuación, un ejemplo sencillo de este caso:

Ejemplo 1.2: Conjunto de oportunidades abierto o cerrado

Supongamos el problema de Programación Matemática:

$$\begin{cases} Max \quad f(x) = x \\ s.a \quad 0 < x < 1 \quad (R1; R2). \end{cases}$$

Analice si tiene solución y represente el conjunto de oportunidades.

Solución

Dado que $X = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < 1\}$ es abierto, es fácil comprobar que el problema carece de solución (véase la Figura 1.3).

Si, por el contrario, el conjunto definido por la restricción fuese cerrado:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1\},$$

(bastaría en realidad con que x = 1 perteneciera al conjunto), el punto x = 1 sería la solución del problema propuesto.

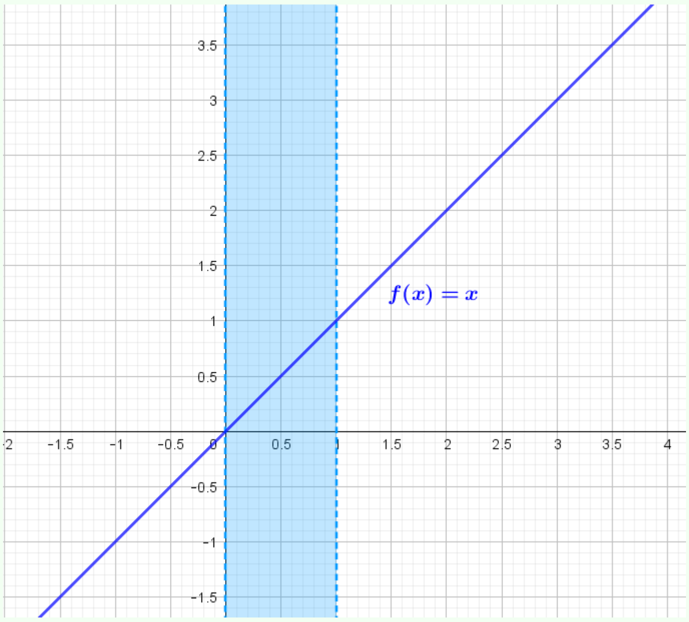


Figura 1.3: Conjunto de oportunidades abierto.

1.2.2. Concepto general de óptimo. Condiciones suficientes. Teorema local global

A lo largo de este subepígrafe, presentaremos el concepto de óptimo, máximo o mínimo, de nuestro problema de *PM*, así como algunos resultados especialmente relevantes para poder asegurar tanto si nuestro problema posee solución como la calidad de la misma.

Decimos que un cierto valor de la variable de decisión, $\mathbf{x}^*$, resuelve el problema (PM) cuando, siendo admisible, ($\mathbf{x}^* \in X$), optimice (maximice o minimice) la función objetivo, f, del problema. Vamos a definir, en primer lugar, los distintos tipos de óptimos de los problemas de *PM*. Lo haremos para el caso concreto de máximo, aunque se pueden definir estos conceptos para mínimo de forma análoga.

Definición 1.2: Máximo local

Un punto $\mathbf{x}^*$ es máximo local del problema general de Programación Matemática si es admisible (es decir, cumple todas las restricciones del problema) y el valor de la función objetivo en dicho punto es mayor o igual al valor alcanzado en todos los puntos admisibles de su entorno, es decir, los puntos próximos a él. Formulado matemáticamente sería como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* \in X \\ \forall\ \mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*) \cap X,\ f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Definición 1.3: Máximo global

Un punto $\mathbf{x}^*$ es máximo global del problema *PM* si es admisible y el valor de la función objetivo, f, en dicho punto es mayor o igual al valor alcanzado en todos los puntos admisibles del conjunto de oportunidades, X. Matemáticamente, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^* \in X \\ \forall \mathbf{x} \in X,\ f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Si, en las definiciones anteriores, sustituimos la desigualdad débil por la estricta, a los máximos los denominaremos estrictos.

A continuación, vamos a ver un ejemplo gráfico de los tipos de óptimos definidos previamente.

Como se puede apreciar en la Figura 1.4, f es la función objetivo que deseamos optimizar y el conjunto de oportunidades es el definido por el intervalo $[x_1, x_6]$. Ayudándonos de la gráfica, se pueden identificar seis óptimos.

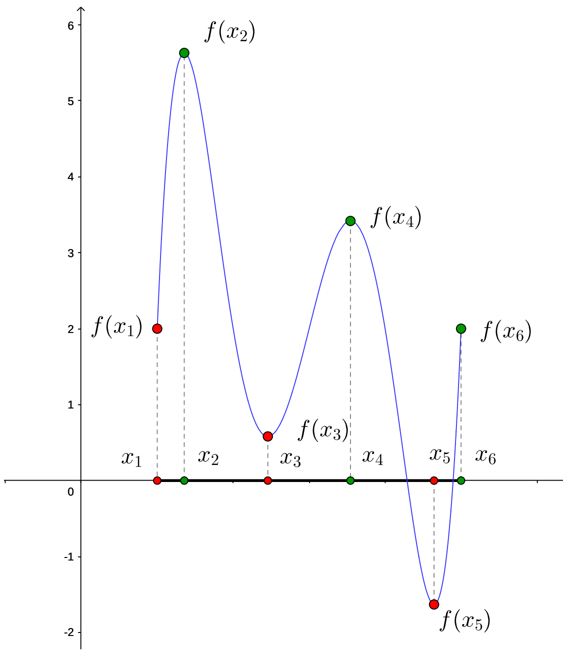


Figura 1.4: Óptimos locales y globales.

Concretamente, nos encontramos ante:

- Tres mínimos (en rojo), x_1, x_3, x_5, donde los valores de la función, $f(x_1)$, $f(x_3)$ y $f(x_5)$, alcanzan el menor valor de todos los puntos admisibles del entorno. Ahora bien, cabe resaltar que entre los tres mínimos, el valor de la función f en el punto x_5 es el menor valor en todo el conjunto de oportunidades, por lo que estamos ante un mínimo global (que a su vez es local), mientras que los puntos x_1 y x_3 son, solamente, mínimos locales. Recordemos que un óptimo global siempre es local, mientras que la inversa no tiene por qué ocurrir.

- Tres máximos (en verde), x_2, x_4, x_6, donde los valores de la función, $f(x_2)$, $f(x_4)$ y $f(x_6)$, alcanzan el mayor valor de todos los puntos admisibles del entorno. En este caso, se puede apreciar que x_4 y x_6 son máximos locales, mientras que x_2 es un máximo global (y a su vez local).

En general, un problema de optimización no tiene por qué tener solución; sin embargo, existe un teorema que establece las condiciones suficientes para poder afirmar si un problema dado la posee:

Teorema 1.1: Teorema de Weierstrass

Dado un problema de Programación Matemática, si el conjunto de oportunidades, X, es compacto (cerrado y acotado) y no vacío, y la función objetivo, f, es continua en X, entonces dicho problema posee un máximo global y un mínimo global.

Es importante resaltar el hecho de que el teorema de Weierstrass da una condición suficiente, no necesaria, para la existencia de óptimo de un problema dado; ello nos va a permitir, para aquellos problemas que verifican las hipótesis de dicho teorema, tener certeza de que poseen valores óptimos globales. Ahora bien, si para el problema no se verifica alguna de las hipótesis, entonces no podemos asegurar que la función carezca de puntos óptimos, pudiendo ocurrir que los posea o no. Existen muchos ejemplos tanto en un sentido como en otro.

Ejemplo 1.3: Óptimos globales mediante el teorema de Weierstrass

Mediante el teorema de Weierstrass, analice la existencia de óptimos globales del siguiente problema:

$$\begin{cases} Opt & x \\ s.a & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Solución

En este problema se cumplen todas las condiciones, salvo que dicho conjunto no es cerrado, y en consecuencia no es posible aplicar el teorema. Es fácil comprobar que sí existe máximo global en $x = 1$, y en cambio no existe mínimo global, pues se alcanzaría en $x = 0$, pero éste no es factible.

Otro problema que muestra otra faceta es:

$$\begin{cases} Min & f(x) = x^2 \\ s.a & x \geq 0. \end{cases}$$

En este caso, el conjunto de oportunidades no es compacto, por no ser acotado y, sin embargo, el problema posee un mínimo global en $x^* = 0$.

Un segundo teorema fundamental en Programación Matemática es el teorema local global; éste va a darnos las condiciones suficientes para que un óptimo local sea global (obsérvese que lo contrario siempre es cierto).

Teorema 1.2: Teorema local global

Sea el problema general de Programación Matemática:

$$\boxed{\begin{cases} Opt & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{x} \in X, \end{cases}}$$

con f continua en X, siendo éste convexo. Entonces, si f es cóncava en X, todo máximo local es global; análogamente, si f es convexa en dicho conjunto, todo mínimo local es global.

Demostración

Realicemos la demostración para f cóncava; demostraremos entonces que si $\mathbf{x}^*$ es máximo local del problema, se va a verificar:

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X,$$

es decir, $\mathbf{x}^*$ es también máximo global.

Sea cualquier punto factible $\mathbf{x} \in X$. Dado que X es convexo, podemos encontrar un λ positivo, lo suficientemente pequeño tal que:

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*),$$

donde $E(\mathbf{x}^*)$ es un entorno de $\mathbf{x}^*$. Como $\mathbf{x}^*$ es un máximo local del problema,

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f((1-\lambda)\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{x}),$$

y al ser f cóncava en X:

$$f((1-\lambda)\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{x}) \geq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^*) + \lambda f(\mathbf{x}), \quad \forall x \in X,$$

luego,

$$f(\mathbf{x}^*) \geq (1-\lambda)f(\mathbf{x}^*) + \lambda f(\mathbf{x}),$$

es decir,

$$\lambda f(\mathbf{x}^*) \geq \lambda f(\mathbf{x}),$$

y como $\lambda > 0$:

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X,$$

como tratábamos de demostrar.

De manera análoga, se podría realizar la demostración para f convexa, la cual se deja para el lector.

El resultado del siguiente teorema es altamente intuitivo:

Teorema 1.3: Concavidad estricta

Si f es estrictamente cóncava sobre X convexo y si existe un máximo global del problema, éste es único.

Demostración

Supongamos, por el contrario, que con las hipótesis del teorema, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son máximos globales; ello implicaría que:

$$f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2).$$

Ahora bien, como X es convexo:

$$\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \quad 0 < \lambda < 1,$$

es un punto de dicho conjunto X.
Calculemos:

$$f(\mathbf{x}^*) = f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) > \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2),$$

pues f es estrictamente cóncava. Ahora bien, al ser $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, lo anterior es equivalente a:

$$f(\mathbf{x}^*) > f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2),$$

lo cual implicaría que en $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ no habría máximos globales, lo que contradice la hipótesis de partida.

La importancia de estos resultados en el ámbito de la economía y la empresa es muy resaltable, pues en general sólo tienen interés los óptimos globales. De hecho, los teoremas de Weierstrass y local global serán de una gran importancia a lo largo de toda la Programación Matemática.

Por último, con el fin de ir familiarizándonos con problemas de enunciado económico y empresarial y problemas de varias variables de decisión, formulamos el siguiente ejemplo, con sólo dos variables de decisión, con el fin de poder representarlo gráficamente. Con él mostraremos, también, ciertas propiedades gráficas en el epígrafe posterior. De momento, sólo veremos cómo aplicar los teoremas previos desde un punto de vista analítico.

Ejemplo 1.4: Ejemplo con enunciado económico

Una empresa produce dos tipos de bienes A y B, cuyas demandas, que serán las cantidades producidas, vienen expresadas en función del precio del producto:

- $D_A = 300 - 0{,}175\ P_A$,
- $D_B = 325 - 0{,}15\ P_B$.

Para la producción de dichos bienes, la empresa utiliza dos materias primas cuyos consumos por unidad producida de cada uno de los dos tipos de bienes, así como su disponibilidad, en toneladas, vienen dadas en la siguiente tabla:

	Bien A	Bien B	Disponibilidad
Materia prima 1	10	20	2000
Materia prima 2	20	10	2500

a) Formalice el problema que maximiza los ingresos de la empresa, determinando tanto los precios de cada producto, como las cantidades producidas de los mismos, sabiendo que, por las características del mercado, el precio unitario del bien A no puede superar los 1.500 €, y el del bien B los 2.000 €.

b) ¿Se puede afirmar que existe solución de este problema?

c) ¿Se puede afirmar para este problema que todo óptimo local es global?

Solución

a) Este problema, aparentemente, posee cuatro variables de decisión que son los precios de venta (en €) de cada bien, P_A y P_B, así como las cantidades producidas. Pero, como las cantidades producidas están expresadas en función del precio, podemos reducir la dimensión de nuestro problema de cuatro a dos variables de decisión. Así pues, los ingresos de la empresa se obtienen multiplicando las demandas por los correspondientes precios:

$$I(P_A, P_B) = P_A \cdot D_A + P_B \cdot D_B =$$
$$P_A\ (300 - 0{,}175\ P_A) + P_B\ (325 - 0{,}15\ P_B)$$

Por otro lado, las restricciones de la empresa vendrán determinadas por el uso y la disponibilidad de las 2 materias primas:

$$\begin{aligned} &\text{Materia prima 1:} \quad 10\ D_A + 20\ D_B \leq 2000, \\ &\text{Materia prima 2:} \quad 20\ D_A + 10\ D_B \leq 2500, \end{aligned}$$

que, expresadas en función de nuestras únicas dos variables de decisión, quedan como:

$$\begin{array}{ll} \text{Materia prima 1:} & 10\,(300 - 0{,}175\ P_A) + 20\,(325 - 0{,}15\ P_B) \leq 2000, \\ \text{Materia prima 2:} & 20\,(300 - 0{,}175\ P_A) + 10\,(325 - 0{,}15\ P_B) \leq 2500. \end{array}$$

Desarrollando los productos y agrupando términos, quedaría:

$$\begin{array}{ll} \text{Materia prima 1:} & 1{,}75\ P_A + 3\ P_B \geq 7500, \\ \text{Materia prima 2:} & 3{,}5\ P_A + 1{,}5\ P_B \geq 6750. \end{array}$$

Además, tendremos las restricciones de no negatividad de los precios y la cota superior marcada sobre ellos por condiciones del mercado. En definitiva, el problema queda modelizado de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Max & I(P_A, P_B) = P_A(300 - 0{,}175P_A) + P_B(325 - 0{,}15P_B) \\ \text{s. a} & 1{,}75P_A + 3P_B \geq 7500 \\ & 3{,}5P_A + 1{,}5P_B \geq 6750 \\ & P_A \leq 1500 \\ & P_B \leq 2000 \\ & P_A, P_B \geq 0. \end{array} \right.$$

b) En cuanto a la existencia de solución, vamos a analizar si se cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass:

1. Estamos ante una función, f, polinómica y que, por tanto, es continua.
2. Asimismo, se trata de un conjunto de oportunidades cerrado, ya que todas las restricciones contienen la igualdad, lo que implica que los puntos de la frontera del conjunto de oportunidades son puntos admisibles del problema.

   La condición de acotado, a veces, es más complicada de determinar, y en muchos casos, es su representación gráfica la que nos lo aclara. Sin embargo, en este problema, como en muchos problemas económicos y empresariales, sus propias características nos marcan esta acotación, pues no podemos elegir valores infinitos en nuestras variables de decisión. En este caso, nuestras variables de decisión son los precios de los bienes, que se encuentran acotados entre el valor 0 y el valor 1.500 ó 2.000 como valores superiores. En consecuencia, nuestro conjunto de oportunidades está acotado.

   Para la condición de conjunto de oportunidades no vacío, basta encontrar un punto que cumpla todas las restricciones, o bien, es lo más sencillo, ayudarse de la gráfica que veremos en la próxima subsección.

En resumen, dado que podemos verificar todas las condiciones del teorema de Weierstrass, podemos asegurar la existencia de un máximo global del problema.

c) En lo que se refiere al teorema local global, vamos, en primer lugar, a estudiar la convexidad del conjunto de oportunidades, que está formado por la intersección de 6 semiespacios (todas las restricciones son lineales). Por tanto, se trata de un conjunto, X, convexo.

Debemos estudiar ahora la convexidad o concavidad de la función objetivo. Calculamos, en primer lugar, las parciales de I:

$$\frac{\partial I(P_A, P_B)}{\partial P_A} = 300 - 0{,}35P_A; \quad \frac{\partial I(P_A, P_B)}{\partial P_B} = 325 - 0{,}3P_B.$$

La matriz hessiana sería:

$$HI(P_A, P_B) = \begin{pmatrix} -0{,}35 & 0 \\ 0 & -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Dado que se trata de una matrix diagonal, con los valores de los elementos de la diagonal principal estrictamente negativos, la forma cuadrática asociada a la misma es definida negativa, y por tanto, la función objetivo es estrictamente cóncava. En conclusión, el teorema local global se cumple para máximo, y por tanto, todo máximo local del problema es global.

Por último queremos dejar patente cómo interpretar, en capítulos posteriores, estos teoremas. El teorema de Weierstrass sólo nos aseguraría la existencia de óptimos, pero no nos dice dónde se encontrarían estos, por lo que deberemos usar procedimientos analíticos o computacionales para determinar los óptimos. El teorema local global, si se verifica, por ejemplo, para un problema de máximo, nos asegura que todos los máximos que encontremos por los procedimientos analíticos o computacionales, serán máximos globales, mientras que si no se cumple el teorema, tendremos que discriminar entre los máximos encontrados si estos son solamente locales, o si alguno de ellos es global.

1.2.3. Clasificación de los problemas de Programación Matemática

Dentro de la estructura general del problema de Programación Matemática, es conveniente clasificar problemas en función de las características de la función objetivo y del conjunto de oportunidades, con el fin de buscar los métodos más apropiados para su resolución.

Si consideramos una única función objetivo, distinguimos inicialmente entre programación no lineal (PNL) y Programación Lineal (PL).

Definición 1.4: Programación no lineal

Un problema de programación no lineal se caracteriza por ser un problema de Programación Matemática donde al menos una de las funciones que intervienen, bien la función objetivo o alguna de las funciones de restricción, es no lineal. De esta forma, el problema general de programación no lineal puede ser escrito como:

$$\begin{array}{ll} Opt & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ s.a & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ & \ldots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m, \end{array}$$

donde o bien la función objetivo, f, o alguna de las funciones de restricción, g_i es no lineal.

Además supondremos que tanto la función objetivo, f, como las funciones restricción, g_i, son continuamente diferenciables, con el fin de poder desarrollar los métodos apropiados para su resolución.

En contraposición a los problemas no lineales se encuentran los problemas lineales, donde todas las funciones que intervienen en el mismo deben ser lineales.

Definición 1.5: Programación lineal

Un problema de programación lineal, es aquel en el que tanto la función objetivo como las restricciones de desigualdad son lineales; de esta forma, el problema general de programación lineal es:

$$\begin{array}{ll} Opt & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.a & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \ldots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0, \end{array}$$

Podemos observar que en el problema lineal hemos añadido, además, restricciones de no negatividad de las variables de decisión, que es lo más usual en la formulación tradicional de este tipo de problemas, pero no es condición obligatoria, ni restrictiva que las mismas aparezcan. Puede ocurrir que, en algunos casos, estén permitidos valores negativos de las mismas, cuya resolución en un problema concreto veremos en el siguiente tema. Asimismo, dichas condiciones de no negatividad pueden aparecer también en los problemas no lineales, pero en dicho caso estarían consideradas como parte del bloque de restricciones. Esta diferencia en el tratamiento del problema viene motivado por el propio procedimiento de resolución.

Por otro lado, tanto en programación lineal como en no lineal hemos definido las restricciones con la desigualdad en el mismo sentido con el fin de hacer más homogénea la formulación; esto no es restrictivo en modo alguno, ya que en el caso de que para algún j:

$$g_j(\mathbf{x}) \geq b_j,$$

multiplicando por - 1 tendríamos:

$$-g_j(\mathbf{x}) \leq -b_j.$$

Además, en el caso en que para algún r:

$$g_r(\mathbf{x}) = b_r,$$

es decir, si tuviésemos una o más restricciones de igualdad, se podría sustituir cada una de ellas por dos desigualdades de la forma:

$$g_r(\mathbf{x}) = b_r \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_r(\mathbf{x}) \leq b_r \\ \\ g_r(\mathbf{x}) \geq b_r \Leftrightarrow -g_r(\mathbf{x}) \leq -b_r \end{array} \right\}.$$

Por tanto, en las formulaciones anteriores, tanto el sentido de las desigualdades como la inclusión o no de las condiciones de no negatividad de las variables de decisión no son restrictivas. Además, no será necesario realizar estas transformaciones cuando deseemos resolver el problema con la ayuda de un programa de ordenador, pues éste incorporará internamente los cambios necesarios, si hubiera que realizarlos.

A pesar de haber clasificado los problemas de Programación Matemática en sólo dos tipos, esto no es exhaustivo. A continuación comentaremos ciertas variantes que modificarán, en algunos casos sustancialmente, los procedimientos de resolución, así como el análisis de los resultados que obtengamos. Estos comentarios los introducimos en el orden en que posteriormente serán abordados a lo largo del texto.

Los dos primeros casos particulares surgen dentro de los problemas no lineales. El primero de ellos está marcado por la ausencia de restricciones, y será denominado *problema no lineal sin restricciones o irrestricto*, que queda formulado como

$$\boxed{\textit{Optimizar } f(x_1, x_2, ..., x_n).}$$

El segundo caso corresponde con aquellos problemas en los que todas las restricciones son de igualdad:

$$\begin{array}{ll} Opt & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ s.a & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ & \ldots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m. \end{array}$$

Estos dos tipos de formulaciones suelen ser denominados como problemas de *Programación Clásica*, debido a que se estudiaron en los siglos XVIII y XIX, mientras que el problema general data de mediados del siglo XX. La resolución de los problemas no lineales, junto con los dos casos particulares expuestos, será objetivo de estudio del siguiente capítulo.

Otra característica especial que pueden tener tanto los problemas lineales como no lineales, son consideraciones sobre nuestras variables de decisión. En concreto, es frecuente exigir que la solución óptima de nuestro problema sean valores enteros para todas o algunas de las componentes, característica muy deseable en muchos problemas económicos y empresariales. Se dice en este caso que se trata de un problema con variable entera, lo que, como veremos en el capítulo 4, afecta levemente a su modelización, pero de manera muy importante al proceso de resolución.

Una variante del problema anterior, desarrollada también en el capítulo 4, corresponde a problemas donde algunas de las variables sean variables binarias, es decir, variables enteras, pero que sólo pueden tomar los valores 0 o 1. Son los conocidos como *problemas con variable binaria* y, en este caso, afecta especialmente a la modelización, pues nos permite expresar matemáticamente acciones a realizar, o no, dentro del mismo.

Finalmente, consideraremos problemas en los que hay más de una función a optimizar, es decir, deseamos optimizar un vector de funciones objetivo. Su estudio corresponde a la *programación multiobjetivo*, desarrollada en el capítulo 5.

1.3. Nota geométrica sobre problemas de optimización

En la práctica serán escasas las ocasiones en las que los problemas de Programación Matemática podrán resolverse geométricamente. De todas formas, con el fin de plasmar gráficamente muchos de los conceptos que desarrollaremos, así como de poder generalizar ideas hacia problemas en espacios de más dimensiones, a partir de dichas gráficas, vamos a ampliar este capítulo dando una visión general, desde el punto de vista geométrico, de los problemas de Programación Matemática.

Dado que el problema de optimizar funciones de una variable, así como los elementos que intervienen en ellos, ya son conocidos, vamos a referirnos al caso de dos dimensiones:

$$\begin{cases} Opt & f(x_1, x_2) \\ s.a & (x_1, x_2) \in X. \end{cases}$$

Una función de dos variables, sería representable en un espacio de tres dimensiones, dos para las variables de decisión x_1 y x_2 y una tercera dimensión para el valor de la función objetivo en los valores de dichas variables de decisión $f(x_1, x_2)$, como puede verse en la Figura 1.5.

Además, también puede representarse en el plano mediante las curvas de nivel. Recordemos que una curva de nivel, de la función objetivo, es la proyección en el plano OX_1X_2 del lugar geométrico de los puntos del plano para los que la función objetivo toma un valor constante, conocido como nivel. En la Figura 1.5 mostramos cómo pueden obtenerse dichas curvas de nivel: hemos trazado planos paralelos a OX_1X_2 a alturas $c_i(i = 1, 2)$ y, lógicamente, la intersección de la gráfica de la función con el plano $X_3 = c_i$ da, en el caso de la figura, una circunferencia que, proyectada en OX_1X_2, puede ser denominada c_i, ya que todos sus puntos tienen la particularidad de estar a la misma altura (c_i) del plano OX_1X_2. Por tanto, todos los puntos que se proyectan en el plano son tales que el valor de la función en dichos puntos es constante e igual a c_i. Además, a medida que modificamos c_i (cortamos por otros planos paralelos), obtenemos, tras la correspondiente proyección, un conjunto de curvas de nivel al que denominamos mapa de curvas de nivel.

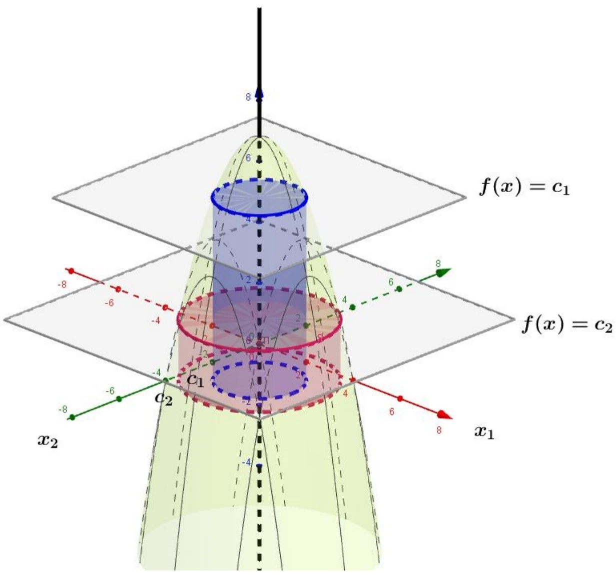


Figura 1.5: Curvas de nivel

Ejemplos de tales mapas son frecuentes en otros ámbitos como los geográficos, cuyas curvas de nivel nos representan altitudes, en meteorología donde nos representan distintas capas de presión, lluvias, nubes, etc.

Si el mapa de curvas de nivel lo combinamos con la representación del conjunto de oportunidades de nuestro problema de Programación Matemática, podremos obtener un buen número de conclusiones. Supongamos un problema planteado gráficamente en la Figura 1.6:

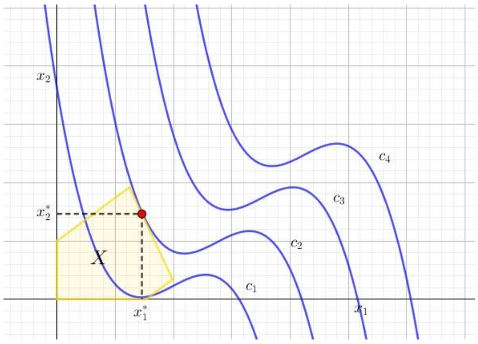


Figura 1.6: Problema gráfico

en la que hemos representado las curvas de nivel de la función objetivo f, donde $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$, así como el conjunto de oportunidades X. Se trata de encontrar un punto $(x_1^*, x_2^*) \in X$ que maximice $f(x_1, x_2)$. Obsérvese que, dado que por cualquier punto de X pasa una curva de nivel, hemos de buscar una curva c_j tal que, pasando por X, no exista otra c_k que también contenga puntos de X y $c_k > c_j$. Obsérvese que esta curva de nivel es c_2 y el punto que maximiza f es (x_1^*, x_2^*). En definitiva, desde el punto de vista geométrico, si buscamos el máximo de una función restringida al conjunto de puntos admisibles X, éste va a ser el correspondiente al mayor valor de la función objetivo en dicho conjunto, y puede observarse como el último punto de contacto de las curvas de nivel si las analizamos en sentido creciente de su valor.

Para determinar cuál es el sentido creciente de las curvas de nivel, podemos utilizar dos procedimientos diferentes. El primero consiste en representar dos de dichas curvas de nivel, supongamos que son los niveles c_1 y c_2, y si $c_1 < c_2$, podemos concluir que la dirección de desplazamiento de la curva de nivel c_1 hacia la curva de nivel c_2 es la dirección de crecimiento. El segundo procedimiento consiste en obtener la dirección de preferencia, que no es más que la dirección en la cual el valor de la función objetivo (la constante de la curva de nivel) se incrementa o decrementa más rápidamente. Es decir, la dirección preferible en la que debemos buscar para encontrar el óptimo de la función objetivo en el conjunto de oportunidades. Dicha dirección está basada en el concepto de gradiente de la función objetivo.

Recordemos que si f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$, existen el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$ y la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ según la dirección $\mathbf{u}$, que viene dada por:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^t \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n).$$

Ahora bien, como sabemos que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ nos da la variación de $f(\mathbf{x})$ según la dirección $\mathbf{u}$, tenemos que:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^t \mathbf{u} = |\nabla f(\mathbf{x})| \, |\mathbf{u}| \cos(\omega),$$

donde ω es el ángulo formado por los vectores gradiente y $\mathbf{u}$. De ello se deduce que $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ será máxima cuando $\omega = 0$. De esta forma, resulta que si $\mathbf{u}$ es un vector en la dirección del gradiente, nos marcará la dirección de máximo crecimiento de nuestra función. En conclusión, la dirección del vector gradiente es la dirección de máximo crecimiento de nuestra función. Como el vector gradiente puede cambiar de valor, y por tanto de dirección en cada punto donde lo evaluemos, si deseamos saber la dirección de máximo crecimiento de nuestra función objetivo en un punto cualquiera $\mathbf{x}$, dicha dirección es la mostrada por el vector gradiente de la función en ese punto y el vector gradiente tendría como origen dicho punto $\mathbf{x}$. Evidentemente, con ambos procedimientos hemos de obtener las mismas conclusiones.

A continuación, retomamos el problema con enunciado económico del epígrafe anterior para mostrar las ventajas de acercarnos gráficamente a la resolución de un problema de optimización restringido en el caso de dos variables.

Ejemplo 1.5: Análisis gráfico del Ejemplo 1.4

Realice el análisis gráfico del Ejemplo 1.4, cuya formulación final viene dada por:

$$\begin{cases} Max & I(P_A, P_B) = P_A(300 - 0{,}175P_A) + P_B(325 - 0{,}15P_B) \\ \text{s. a} & 1{,}75P_A + 3P_B \geq 7500 \quad (R1) \\ & 3{,}5P_A + 1{,}5P_B \geq 6750 \quad (R2) \\ & P_A \leq 1500 \quad (R3) \\ & P_B \leq 2000 \quad (R4) \\ & P_A, P_B \geq 0 \quad (R5; R6), \end{cases}$$

donde las cantidades producidas de cada bien están recogidas por las expresiones de sus funciones de demanda:

- $D_A = 300 - 0{,}175P_A$,
- $D_B = 325 - 0{,}15P_B$.

Solución

En primer lugar, vamos a representar el conjunto de oportunidades con Geogebra:

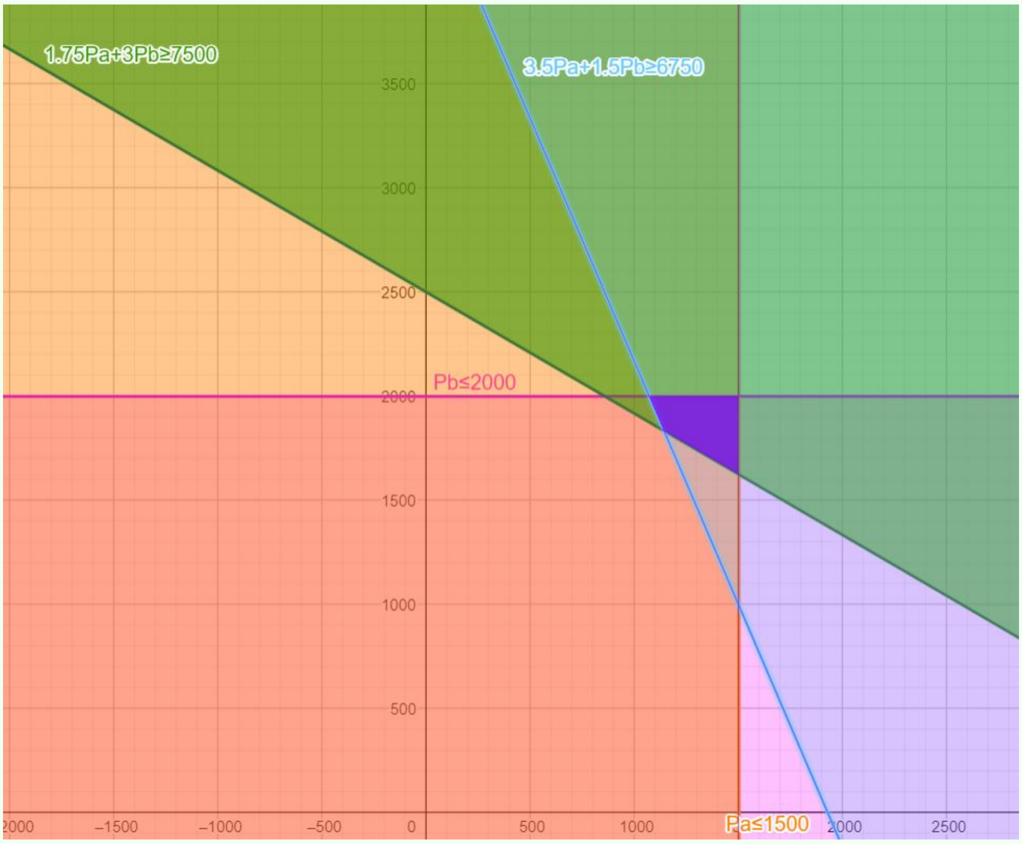


Figura 1.7: Hiperplanos que delimitan el Conjunto de oportunidades.

si sólo nos quedamos con nuestros puntos factibles, ampliando la imagen:

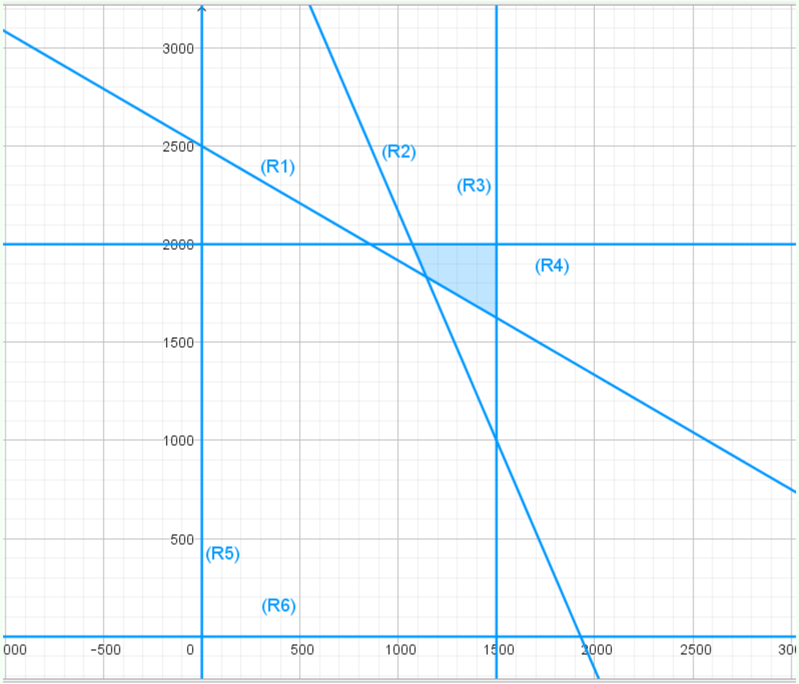


Figura 1.8: Conjunto de oportunidades.

Sobre dicha representación podemos dibujar las curvas de nivel. Si lo hacemos para dos curvas de niveles distintos, ya conoceríamos el sentido de crecimiento de nuestra función objetivo:

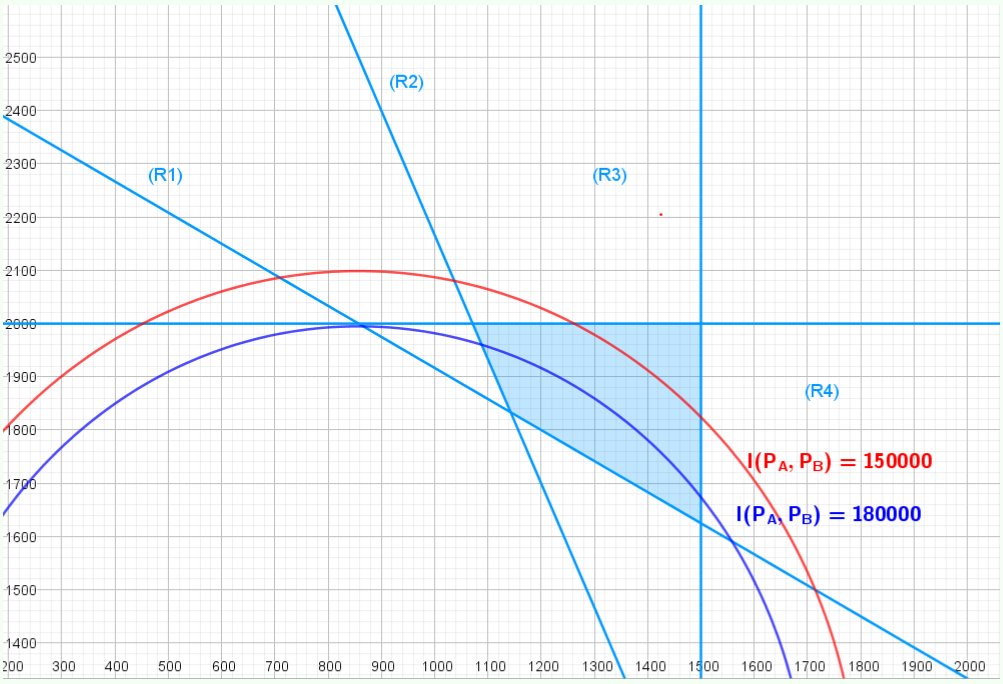


Figura 1.9: Conjunto de oportunidades y curvas de nivel.

También podemos dibujar una única curva de nivel, y determinar el vector gradiente, evaluándolo en un punto de dicha curva. Tomando un vector en la misma dirección del gradiente y representándolo a partir del punto considerado, tenemos:

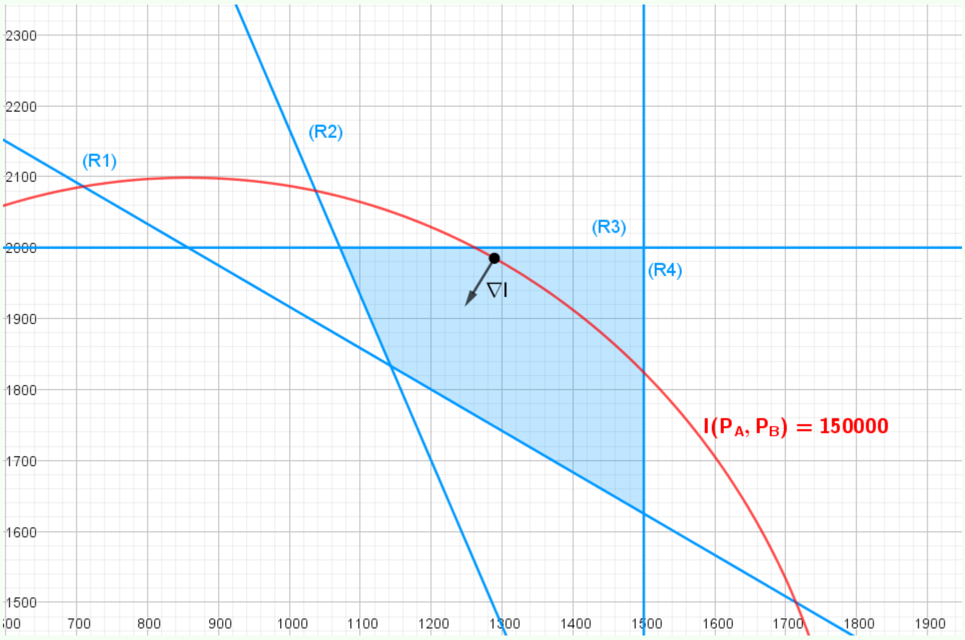


Figura 1.10: conjunto de oportunidades, curva de nivel y gradiente

En cualesquiera de las dos opciones lo que haríamos es observar el sentido de crecimiento, y la última vez que las curvas toquen al conjunto de oportunidades, siguiendo dicho sentido, nos determina la posición del valor máximo global de nuestro problema:

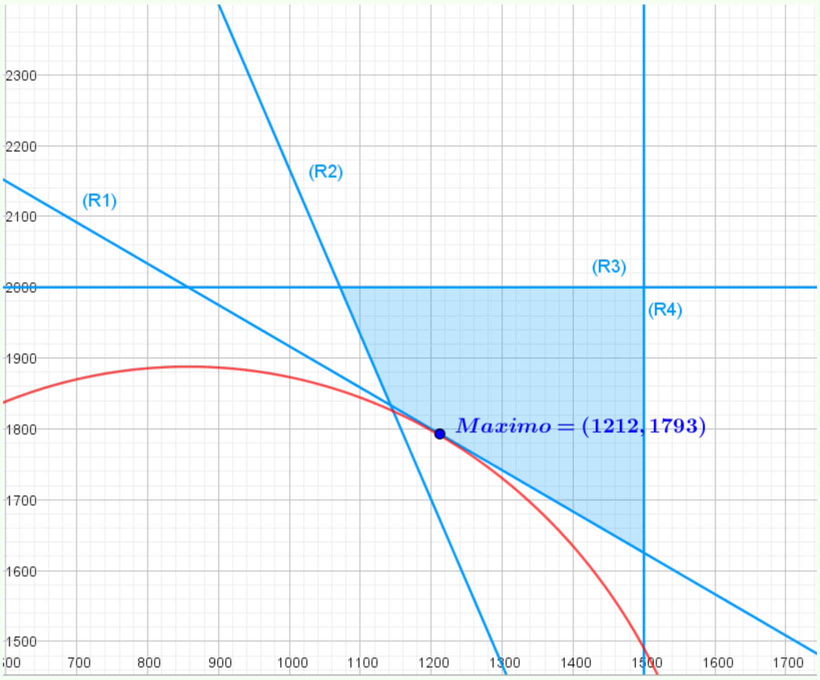


Figura 1.11: Posición del máximo.

De esta forma hemos podido localizar la posición del máximo de nuestro problema sobre el conjunto de oportunidades, aunque no podremos determinar a partir de la gráfica, en múltiples casos, cual será exactamente su valor. No obstante, esto nos será de gran utilidad tanto para aplicar métodos analíticos de determinación de óptimos, como para realizar un acertado análisis de la solución. Esto es debido a que podemos apreciar que en nuestro caso, el punto máximo A, sólo "toca" la frontera de una de las restricciones que delimitan nuestro conjunto de oportunidades, es decir, que de las seis restricciones que definen nuestro conjunto de oportunidades (incluyendo las de no negatividad) sólo se "activa" una igualdad. Todas las demás se verifican con desigualdad estricta en dicho punto máximo. Si denotamos por (P_A^*, P_B^*) a nuestro punto máximo, tendríamos que al sustituir en las restricciones se daría que:

$$\begin{aligned} 1{,}75\ P_A^* + 3\ P_B^* &= 7500 \\ 3{,}5\ P_A^* + 1{,}5\ P_B^* &> 6750 \\ P_A^* &< 1500 \\ P_B^* &< 2000 \\ P_A^*, P_B^* &> 0. \end{aligned}$$

En ese caso diremos que la primera restricción es *activa*, y las otras restricciones, que se verifican con desigualdad estricta, son *inactivas*. Por tanto, sólo la primera materia prima se consume en su totalidad, mientras que de la segunda materia prima quedarán recursos sin utilizar, no se han llegado a los topes marcados por el mercado respecto de los precios, y evidentemente, como era de esperar, los precios no son nulos.

Ese último aspecto que hemos resaltado en el ejemplo anterior es importante en los problemas de optimización, y puede realizarse para cada punto admisible respecto de las restricciones que definen el conjunto de oportunidades, aunque normalmente su análisis se realiza sólo en los puntos óptimos. Definamos dichos conceptos formalmente:

Definición 1.6: Restricción activa

Una restricción es activa en un punto admisible $\mathbf{x}$ si satisface dicha restricción en términos de igualdad.

Definición 1.7: Restricción inactiva

Una restricción es inactiva en un punto admisible $\mathbf{x}$ si satisface dicha restricción en términos de desigualdad estricta.

Si una restricción es inactiva para cualquier punto de un conjunto de oportunidades, diremos que es *superabundante*.

A partir de los conceptos previos podemos observar que:

- Puede suceder que existan restricciones que no influyan en la construcción del conjunto de oportunidades, que son las restricciones superabundantes.

- Las condiciones de restricciones activas e inactivas son propias de cada punto, y es una condición relativa a cada restricción, por lo que deberemos hablar de restricción activa o inactiva en un punto para cada restricción.

En la Figura 1.12, podemos ver que $\mathbf{x}^*$ es tal que las restricciones (1) y (2) son activas, mientras que la (3) y la (4) son inactivas para dicho punto, siendo la restricción (4) superabundante.

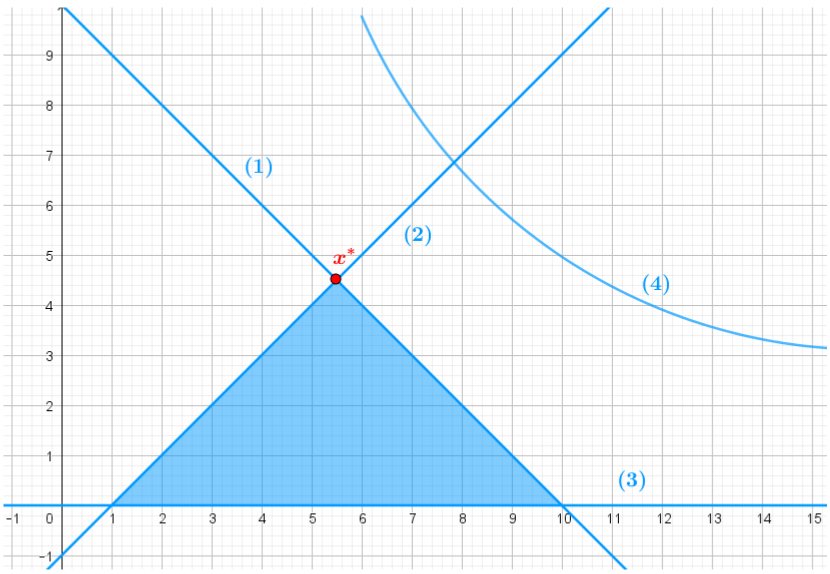


Figura 1.12: Ilustración de los conceptos de restricción activa, inactiva y redundante.

Antes de finalizar el presente capítulo, vamos a representar gráficamente algunos problemas de Programación Matemática que pueden presentar características específicas y que recordaremos en capítulos posteriores.

A continuación mostramos dos soluciones posibles al Problema de programación no lineal; en la Figura 1.13(a) se trata de un punto frontera del conjunto de oportunidades, mientras que en la Figura 1.13(b) se trata de un punto interior del conjunto de oportunidades.

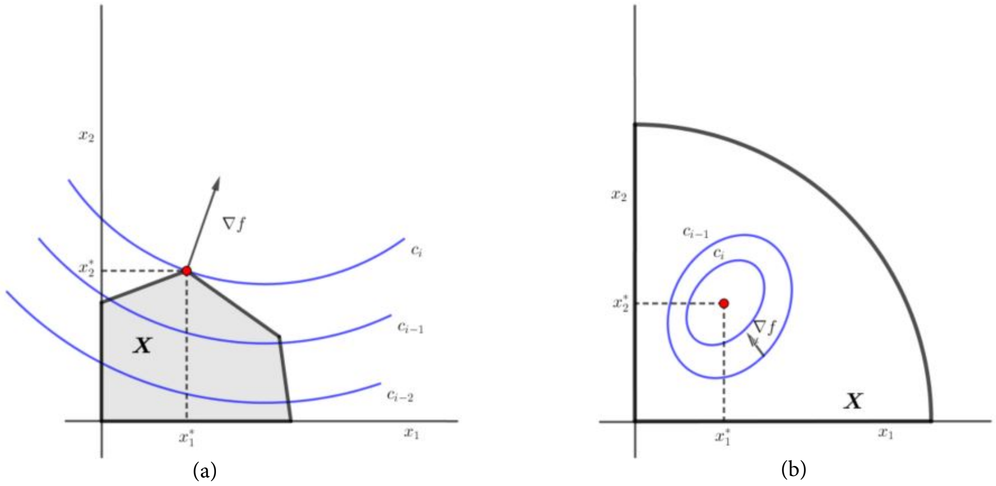


Figura 1.13: Punto óptimo frontera al conjunto de oportunidades y punto óptimo interior al conjunto de oportunidades.

Finalmente, en la Figura 1.14 representamos dos soluciones posibles al problema de programación lineal. Dado que la función objetivo es lineal $\nabla f(\mathbf{x}) = k$ y la dirección ascendente de mayor inclinación es la misma para todos los puntos, no puede existir una solución interior al conjunto de oportunidades, pero puede ocurrir que dicha solución se alcance en un vértice o en toda una arista de dicho conjunto.

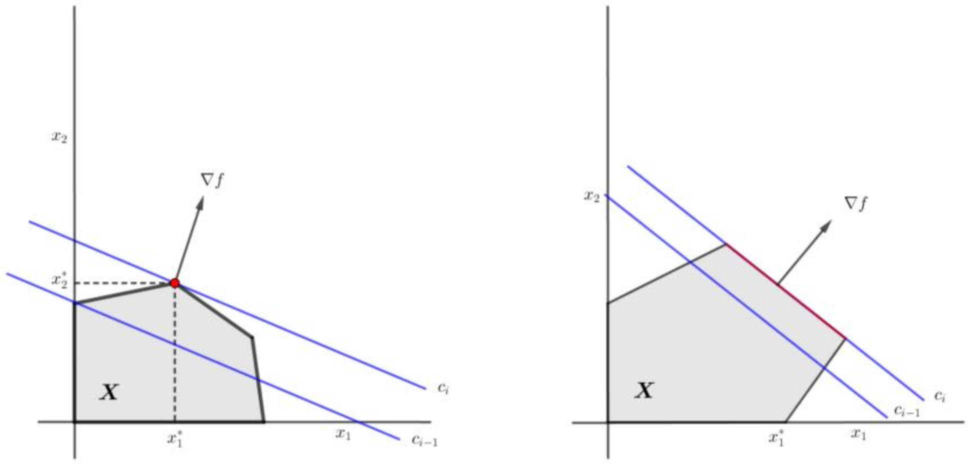


Figura 1.14: Caso con solución en un vértice o en toda una arista.

Referencias

De Lagrange, J.-L. (1788). *Méchanique Analytique*. Kessinger's Legacy Reprints.

Land, A. H. & Doig, A. (1960). An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, *28*(3), 497-520. http://www.jstor.org/stable/1910129

Zeleny, M. (1982). *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill.

Capítulo 2

Programación no lineal

La programación no lineal (PNL) es una parte de la Programación Matemática, cuya misión es proporcionar una serie de resultados y técnicas tendentes a la determinación de puntos óptimos para una función (función objetivo) en un determinado conjunto (conjunto de oportunidades), donde al menos una de las funciones que intervienen en la modelización del problema (función objetivo o funciones que intervienen en las restricciones) es no lineal. Por lo tanto, la estructura de un problema de este tipo puede ser muy diversa, según las funciones que en él intervengan (a diferencia de la programación lineal (PL), donde la forma especial del conjunto de oportunidades y de la función objetivo es siempre la misma y nos permite obtener resultados generales sobre las posibles soluciones, que facilitan los tratamientos algorítmicos de los problemas). Esta diversidad en la (PNL) ocasiona una mayor dificultad, tanto para determinar propiedades de las soluciones óptimas previamente a su búsqueda, como para determinarlas, ya sea por procedimientos exactos o aproximados.

Desarrollaremos las condiciones analíticas que deben cumplir los óptimos de nuestro problema, aunque somos conscientes de que éstas pueden ser válidas sólo para problemas sencillos, o para desarrollos teóricos, como en Teoría Económica. Por ello, es importante conocer y comprender dichas condiciones analíticas, aunque también utilizaremos paquetes informáticos para la resolución de los problemas más complejos. Los procedimientos que éstos llevan a cabo internamente, métodos numéricos iterativos, no serán objeto de estudio aquí, aunque sí comentaremos algunas de sus peculiaridades, para poder analizar correctamente las soluciones.

A lo largo del capítulo, ilustraremos todos los resultados teóricos usando dos problemas distintos, cuyos enunciados iremos extendiendo para adaptarlos a las condiciones del problema que se estudie.

Como se ha visto en el capítulo anterior, al resolver gráficamente los problemas, para cada óptimo local se pueden dar dos casos:

- Que se encuentre en el interior del conjunto de oportunidades. En este caso, el punto sería un óptimo local de la función objetivo sin restringir;

- Que se encuentre en la frontera del conjunto de oportunidades. En este caso, alguna(s) de la(s) restricción(es) será(n) activa(s), y el punto sería un óptimo local del problema en el que sólo se considerase(n) dicha(s) restricción(es) activa(s) como restricción(es) de igualdad pero con ciertas consideraciones especiales que se analizarán posteriormente.

Por este motivo, este capítulo está dividido en cuatro partes. En la Sección 2.2, estudiamos los problemas sin restricciones. Después, en la Sección 2.3, estudiamos los problemas con restricciones de igualdad. El caso general con restricciones de desigualdad se estudiará en la sección 2.4. Además, de forma previa, establecemos una serie de definiciones y resultados teóricos, que son válidos para cualquier problema de Programación Matemática, en la Sección 2.1.

2.1. Elementos generales de un problema de programación no lineal

El problema general de programación no lineal (PNL), que estudiaremos a lo largo de todo el capítulo, toma la siguiente forma:

$$(PNL) \quad \left\{ \begin{array}{l} Max \quad f(\mathbf{x}) \\ \\ s.a \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \end{array} \right.$$

donde:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión.
- $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función objetivo, es decir, aquella que se desea optimizar (en este caso, maximizar), y D su dominio.
- $\mathbf{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función vectorial, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$, compuesta por las funciones de restricción.
- $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de términos independientes, o recursos. Cada expresión $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ determina una restricción sobre las variables de decisión.

Se denomina conjunto de oportunidades del problema, conjunto factible, o conjunto de puntos admisibles, al conjunto de puntos de D que satisfacen las restricciones del problema, es decir,

$$X = \{\mathbf{x} \in D \ / \ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}.$$

Un vector $\mathbf{x}$ se dice que es factible para el problema (PNL) si pertenece a X.

Así pues, el problema (PNL) consiste en encontrar el valor a tomar por las variables de decisión, factibles, para el problema en el que la función objetivo tome el mayor valor posible. Recordando los conceptos introducidos en el capítulo anterior, si para un punto, la función objetivo toma el valor máximo con respecto a todos los puntos situados en algún entorno suyo, se dice que el máximo es local. Si se encuentra un punto donde se alcanza el valor máximo de f en todo el conjunto de oportunidades, entonces el máximo es global.

También es importante recordar que esta formulación del problema no supone pérdida de generalidad, ya que si deseásemos minimizar la función objetivo, se puede maximizar su opuesta. No obstante, también se enunciarán los resultados más importantes para el problema de mínimo. Por otro lado, cualquier restricción de mayor o igual $(\geq)$ se puede convertir en una de menor o igual $(\leq)$, sin más que cambiar de signo, y las restricciones de igualdad se pueden descomponer en dos, con las dos desigualdades.

Antes de pasar a estudiar los diferentes tipos de problemas no lineales, vamos a recordar dos teoremas cuya utilidad es crucial en el tema que nos ocupa, y que ya fueron expuestos en el capítulo anterior: el teorema de Weierstrass y el teorema local global. Ambos están orientados a poder asegurar la globalidad de los óptimos obtenidos. En efecto, veremos que la casi totalidad de métodos y caracterizaciones empleados en la resolución de problemas no lineales sólo nos garantizan la obtención de óptimos locales, que en los problemas de índole económica no son deseables. Por ello, deberemos buscar, entre los óptimos locales que obtengamos, los que sean globales. El primero de dichos teoremas nos da las condiciones bajo las cuales podemos asegurar la existencia de óptimos globales en un problema, incluso antes de aplicar las condiciones para la determinación de óptimos.

Las condiciones que debe cumplir un problema para poder asegurar la existencia de óptimos globales son, en la práctica real, poco restrictivas, pues la condición de continuidad de la función objetivo se cumplirá en la mayoría de problemas. Respecto a que el conjunto de oportunidades cumpla la condición de acotado, esto será muy habitual en los problemas económicos, pues los recursos son limitados. La condición de ser cerrado se verificará siempre que las desigualdades que definen el conjunto de oportunidades tengan incluida la igualdad, es decir, que no sean desigualdades estrictas, lo cual es también lo habitual en problemas reales. Consecuentemente, en la gran mayoría de nuestros problemas se cumplirá este teorema y podremos asegurar que el mismo tiene un máximo y un mínimo globales. Por tanto, deberemos esforzarnos mediante distintos métodos y técnicas para encontrarlos, lo cual puede ser más o menos complicado, dependiendo del problema.

Por otro lado, el teorema local global proporciona las condiciones que permiten afirmar si, determinado un óptimo local, éste será global, o dicho de otra forma, si todos los óptimos que encontremos serán globales. Este segundo resultado tiene su sentido y utilidad debido a que muchos de los métodos y técnicas para la determinación de óptimos sólo nos aseguran, en principio, la obtención de óptimos locales y, como en los problemas económicos lo que buscamos son óptimos globales, deberemos determinar cuáles de los encontrados son globales, si los hubiera, y descartar los locales.

Desafortunadamente, la aplicabilidad de este teorema es mucho menor que la del anterior, debido a que no son condiciones fáciles de cumplir en general. No obstante, en muchos modelos de Teoría Económica se verificarán, lo que hace más fácil la obtención de resultados de este ámbito. Sin embargo, en problemas de índole empresarial, el cumplimiento de las condiciones no se dará habitualmente, como veremos en el capítulo 4.

En general, dado un problema económico o empresarial, y tras el primer paso, que será su modelización en forma de un problema de optimización, siempre y cuando esto tenga sentido, continuaremos analizando el cumplimiento, o no, de los dos teoremas comentados previamente, con el fin de poder abordar su resolución con cierta información previa. Esto es lo que iremos desarrollando en cada uno de los próximos epígrafes, donde estudiaremos los problemas no lineales sin restricciones, posteriormente con restricciones de igualdad, para finalizar con los problemas donde el conjunto de oportunidades viene definido por desigualdades.

2.2. Caso no sujeto a restricciones

Antes de comenzar con los resultados teóricos de este epígrafe, veamos un primer ejemplo al que aplicaremos los resultados de la sección anterior, y que nos servirá de guía a lo largo de esta sección.

Ejemplo 2.1: Kúbica

La empresa Kúbica trabaja con dos tipos de materia prima. La cantidad de producto que obtiene mensualmente viene dada por la siguiente expresión:

$$q(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{4}},$$

donde x e y representan las cantidades utilizadas de dichos tipos de materia prima, medidas en toneladas, y q representa las unidades producidas, medidas en miles.

Las materias primas utilizadas se adquieren a un precio de 2 y 3 unidades monetarias cada tonelada, respectivamente, mientras que el precio de venta por cada mil unidades producidas es de 25 unidades monetarias.

a) Formalice el problema que proporciona las cantidades a utilizar de cada materia prima para maximizar los beneficios de Kúbica, considerando los gastos expuestos.

b) ¿Se puede afirmar que existe solución de este problema? ¿Se puede afirmar para este problema que todo óptimo local es global?

Solución

a) Las variables de decisión del problema son:

- x - toneladas utilizadas de la primera materia prima,
- y - toneladas utilizadas de la segunda materia prima.

Como la empresa produce q miles de unidades de producto, que vende a 25 unidades monetarias por cada mil unidades, su función de ingresos es:

$$I(x,y) = 25 \cdot q(x,y) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}.$$

Por otro lado, los costes totales derivados de la adquisición de materias primas son:

$$C(x,y) = 2x + 3y.$$

Así pues, la función de beneficios de Kúbica es:

$$B(x,y) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y.$$

Por lo tanto, el problema de la empresa Kúbica consiste en maximizar la función de beneficios:

$$\left\{ Max \quad 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y. \right.$$

Nótese que hemos obviado las condiciones de no negatividad sobre las variables de decisión, x e y, por lo que tenemos un problema sin restricciones. Si, tras resolver este problema irrestricto, obtuviésemos un valor negativo para alguna de las variables, habría que introducir estas condiciones de no negatividad en el modelo, y debería ser abordado como un problema no lineal con restricciones de desigualdad, que será analizado posteriormente.

b) En cuanto a la existencia de solución global, al tratarse de un problema irrestricto, no se verifican las condiciones del teorema de Weierstrass, ya que el conjunto de oportunidades no está acotado. Por lo tanto, en un principio, no podemos asegurar la existencia de un máximo global de la función.

En cuanto al teorema local global, el dominio económico de la función objetivo es:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x, y > 0\},$$

que es un conjunto convexo. Debemos estudiar ahora la convexidad o concavidad de la función objetivo. Calculamos, en primer lugar, las parciales de B:

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = \frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2; \quad \frac{\partial B}{\partial y}(x,y) = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}} - 3.$$

La matriz hessiana sería:

$$HB(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{50}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{25}{12}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{25}{12}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{75}{16}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}.$$

Deberemos clasificar la forma cuadrática asociada a la misma, para lo que comprobamos que su primer menor principal es negativo (para valores positivos de x e y), y su segundo menor principal, que coincide con su determinante, viene expresado por

$$\left(-\frac{50}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{75}{16}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{7}{4}}\right) - \left(\frac{25}{12}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{4}}\right)^2 =$$
$$= \left[\left(-\frac{50}{9}\right) \cdot \left(-\frac{75}{16}\right) - \left(\frac{25}{12}\right)^2\right] \cdot x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{6}{4}} =$$
$$= \frac{3125}{144}x^{-\frac{4}{3}}y^{-\frac{6}{4}} \geq 0 \quad (\text{si } x, y > 0).$$

En consecuencia, al ser la hessiana al menos semidefinida negativa en todo su dominio, la función objetivo es cóncava y, por tanto, es aplicable el teorema local global para máximo y podemos asegurar que todo máximo local de la función B, en su dominio, será global.

Una vez modelizado el problema, vamos a pasar a enunciar los resultados que permiten su resolución analítica. Concretamente, a lo largo de este apartado, desarrollaremos una serie de condiciones necesarias y suficientes para la obtención de óptimos locales de una función escalar f (es decir, una función que toma valores reales), definida sobre un subconjunto D abierto de $\mathbb{R}^n$:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Las condiciones que obtendremos son de primer y segundo orden, es decir, basadas en las primeras y segundas derivadas, de forma análoga al caso de una variable. Por ello, vamos a recordar brevemente este caso $n = 1$, para luego pasar al caso general.

Por lo tanto, consideremos un problema de la forma:

$$\boxed{Opt\ f(x),}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supondremos que es una función dos veces derivable sobre un conjunto D, abierto de $\mathbb{R}$. (Nota: La condición de que el campo de definición de la función objetivo, D, sea abierto tiene una utilidad teórica, para asegurarnos la correcta definición de la función derivada).

El conjunto de condiciones necesarias y suficientes para que un punto $x^* \in D$ sea un óptimo local de f se recoge en los dos teoremas siguientes:

Teorema 2.1: Condiciones necesarias para óptimo local. Funciones de 1 variable

a) *Es condición necesaria de primer orden para que x^*, sea un óptimo local de f, que:*

$$f'(x^*) = 0.$$

*En general, a los puntos que anulan la primera derivada de una cierta función f les denominaremos **puntos críticos**, o **puntos estacionarios**, de dicha función.*

b) *Es condición necesaria de segundo orden para que el punto crítico x^* sea máximo local de f que:*

$$f''(x^*) \leq 0.$$

o bien, para mínimo local de f, que:

$$f''(x^*) \geq 0.$$

Teorema 2.2: Condiciones suficientes para óptimo local. Funciones de 1 variable

a) *Si $x^* \in D$ es un punto crítico x^* de f, y $f''(x^*) < 0$, entonces x^* es un máximo local de f.*

b) *Si $x^* \in D$ es un punto crítico x^* de f, y $f''(x^*) > 0$, entonces x^* es un mínimo local de f.*

Así pues, la condición necesaria de primer orden exige que la primera derivada se anule en el punto en cuestión y la de segundo orden que la segunda derivada sea no positiva en el caso de máximo y no negativa en el de mínimo. Por su parte, la condición suficiente exige que los signos correspondientes de las segundas derivadas sean estrictos.

Existen casos posibles no recogidos en los teoremas anteriores como es el caso donde la primera y la segunda derivadas sean nulas en un punto x^*. En ellos, se pueden extender los resultados anteriores, determinando cuál es el orden de la primera derivada no nula. Si el orden es impar, entonces el punto x^* será un punto de inflexión, mientras que si la primera derivada no nula es de orden par, entonces si es positiva, será un mínimo local, y si es negativa será un máximo local.

Seguidamente, veremos que los resultados enunciados para el caso $n = 1$ tienen su extensión natural al caso general de n variables. En efecto, las generalizaciones de los conceptos reales de primera y segunda derivadas al caso de dimensión superior son los de gradiente y hessiana, respectivamente. Así pues, veremos que la condición necesaria de primer orden exige que se anule el gradiente de la función, y las condiciones de segundo orden suponen exigencias sobre el signo de la hessiana, es decir, sobre el signo de la forma cuadrática definida por la matriz hessiana.

El problema general irrestricto (PI) se puede enunciar como:

$$\boxed{\text{(PI)} \quad \{Opt\ f(\mathbf{x})\ ,}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es al menos de clase 2 sobre D (existen las segundas derivadas parciales y éstas son continuas), y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto. Así pues, los resultados que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad de un problema irrestricto son los siguientes:

Teorema 2.3: Condiciones necesarias de primer orden. Funciones de n variables

Si $\mathbf{x}^* \in D$ es un óptimo local de (PI), entonces:

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.}$$

Demostración

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{x}^*$ es un máximo local de (PI). Ello implica, por ser D abierto, que existe un entorno de $\mathbf{x}^*$, $E(\mathbf{x}^*) \subset D$, de forma que, para cualquier $\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*)$, se verifica que $f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})$. Por otro lado, por definición de entorno, sabemos que existe un intervalo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset E(\mathbf{x}^*)$.

Consideremos ahora, para cada $i = 1, ..., n$, la función real:

$$f_i : (a_i, b_i) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f_i(x_i) = f(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*).$$

Pues bien, por la definición de f_i, y por ser $\mathbf{x}^*$ un máximo local de f, para cualquier punto $x_i \in (a_i, b_i)$ se verifica que $f_i(x_i^*) \geq f_i(x_i)$. Por lo tanto, x_i^* es un máximo local de f_i, y, por el Teorema 2.1, tenemos que $f_i'(x_i^*) = 0$. Pero, por otro lado, para cada $i = 1, ..., n$,

$$f_i'(x_i^*) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*),$$

luego, se verifica entonces que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, como pretendíamos demostrar.

Así pues, la condición necesaria de primer orden, que en el caso $n = 1$ consiste en la anulación de la primera derivada de la función en el punto, se extiende de forma natural al caso de dimensión superior, exigiendo que se anule el vector gradiente de la función en el punto, es decir, que todas las derivadas parciales sean 0.

Definición 2.1: Punto crítico o estacionario

Un punto $\mathbf{x}^* \in D$ se dice que es un punto crítico, o punto estacionario, de la función f, si $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Aparte de esta condición necesaria de primer orden, también se puede derivar otra de segundo orden, que si en el caso $n = 1$ dependía del signo de la segunda derivada, en este caso depende del signo de la matriz hessiana como matriz asociada a una forma cuadrática:

Teorema 2.4: Condiciones necesarias de segundo orden. Funciones de n variables

a) Si $\mathbf{x}^* \in D$ es un ***máximo local*** *de (PI), entonces la forma cuadrática inducida por* *la matriz hessiana $Hf(\mathbf{x}^*)$ es, al menos, semidefinida negativa, es decir:*

$$\boxed{\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} \le 0 \quad (\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n),}$$

*b) Si $\mathbf{x}^* \in D$ es un **mínimo local** de (PI), entonces la forma cuadrática inducida por la matriz hessiana $Hf(\mathbf{x}^*)$ es, al menos, semidefinida positiva, es decir:*

$$\boxed{\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} \ge 0 \quad (\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n),}$$

Demostración

Realizaremos la correspondiente a la del apartado a), y de manera análoga se puede mostrar la del b). Si $\mathbf{x}^* \in D$ es máximo local de (PI), sabemos que existe un entorno $E(\mathbf{x}^*)$ tal que:

$$f(\mathbf{x}^*) \ge f(\mathbf{x}) \text{ para todo } \mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*),$$

y además, por el Teorema 2.3,

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Sea ahora un vector $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por ser $E(\mathbf{x}^*)$ un entorno de $\mathbf{x}^*$, sabemos que, para ε suficientemente pequeño,

$$\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{h} \in E(\mathbf{x}^*).$$

Aplicando el desarrollo de Taylor hasta el segundo orden, y de acuerdo a las hipótesis de que el gradiente es nulo, obtenemos que:

$$f(\mathbf{x}^*+\varepsilon\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*)+\varepsilon\mathbf{h}^t\cdot\nabla f(\mathbf{x}^*)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}+o(|\varepsilon^3|) = f(\mathbf{x}^*)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}+o(|\varepsilon^3|).$$

Por ser $\mathbf{x}^*$ un máximo local de f, entonces para ε suficientemente pequeño, se verifica que $f(\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{h}) \le f(\mathbf{x}^*)$. Por otro lado, también para ε suficientemente pequeño, el resto es despreciable con respecto al término cuadrático, por lo que se debe verificar forzosamente que:

$$\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} \le 0.$$

Como $\mathbf{h}$ es arbitrario, la hessiana es semidefinida negativa y queda demostrado el teorema.

En general, no todo punto crítico de f es un óptimo local de (PI).

Definición 2.2: Punto de silla

Un punto $\mathbf{x}^* \in D$ se dice que es un punto de silla de la función f, si es un punto crítico de f, pero no es un óptimo local de la función.

Seguidamente, pasamos a demostrar el teorema que establece las condiciones suficientes para que un punto crítico sea un óptimo local de (PI).

Teorema 2.5: Condiciones suficientes de segundo orden. Funciones de n variables

a) Si $\mathbf{x}^*$ es un punto crítico de (PI), y existe un entorno de $\mathbf{x}^*$, $E(\mathbf{x}^*)$ tal que, para todo $\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*)$, la forma cuadrática inducida por la matriz hessiana de f en $\mathbf{x}$ es, al *menos, semidefinida negativa, es decir,*

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*) \quad \mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x})\mathbf{h} \leq 0 \quad \textit{para todo } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,}$$

entonces $\mathbf{x}^*$ *es un máximo local de* (PI)*.*

b) *Si* $\mathbf{x}^*$ *es un punto crítico de* (PI)*, y existe un entorno de* $\mathbf{x}^*$*,* $E(\mathbf{x}^*)$ *tal que, para todo* $\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*)$*, la forma cuadrática inducida por la matriz hessiana de* f *en* $\mathbf{x}$ *es, al menos, semidefinida positiva, es decir,*

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in E(\mathbf{x}^*) \quad \mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x})\mathbf{h} \geq 0 \quad \textit{para todo } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,}$$

entonces $\mathbf{x}^*$ *es un mínimo local de* (PI)*.*

Demostración

Realizaremos la correspondiente a la del apartado a), y de manera análoga se puede demostrar la del b). Mediante un desarrollo análogo al teorema anterior, pero expresando el error en el término de segundo orden del desarrollo de Taylor, obtenemos, para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ (téngase en cuenta que al ser $\mathbf{x}^*$ un punto crítico, su gradiente se anula en dicho punto):

$$f(\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^* + \theta\varepsilon\mathbf{h})\mathbf{h},$$

con $0 \leq \theta \leq 1$. Por ser $E(\mathbf{x}^*)$ un entorno de $\mathbf{x}^*$, entonces a partir de un ε suficientemente pequeño, podemos asegurar que $\mathbf{x}^* + \theta\varepsilon\mathbf{h} \in E(\mathbf{x}^*)$ para cualquier $\theta \in [0, 1]$. Como, por hipótesis, la matriz hessiana es al menos semidefinida negativa en $E(\mathbf{x}^*)$, obtenemos que:

$$f(\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^*) \leq 0.$$

Como esto se verifica para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y para ε suficientemente pequeño, quedaría demostrado que $\mathbf{x}^*$ es máximo local de (PI).

Obsérvese que la condición del Teorema 2.5 se satisface, en particular, si f es de clase 2, y se verifica que la forma cuadrática inducida por la matriz hessiana de f en $\mathbf{x}^*$ es definida negativa (para el caso de máximo), es decir, si:

$$\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} < 0, \quad \text{para todo } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n,\ h \neq 0,$$

sin más que aplicar criterios de continuidad sobre la matriz hessiana. Con todo ello, resulta inmediato el siguiente teorema, que proporciona condiciones suficientes sobre el signo de $Hf(\mathbf{x})$, donde, al igual que en el caso de una variable, consideramos desigualdades estrictas en las condiciones:

Teorema 2.6: Expresión alternativa de las condiciones suficientes

Sea $\mathbf{x}^* \in D$ *un punto crítico de* f*. Entonces:*

a) $\mathbf{x}^*$ *es máximo (resp. mínimo) local estricto* (PI) *si la forma cuadrática* $\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$ *es definida negativa (resp. positiva).*

b) $\mathbf{x}^*$ *es máximo (resp. mínimo) local de* (PI) *si la forma cuadrática* $\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x})\mathbf{h}$ *es semidefinida negativa (resp. positiva) para todo* $\mathbf{x}$ *en algún entorno de* $\mathbf{x}^*$*.*

c) $\mathbf{x}^*$ *es punto de silla de* (PI) *si la forma cuadrática* $\mathbf{h}^t Hf(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$ *es indefinida.*

Finalmente, dadas las caracterizaciones de segundo orden de la convexidad y la concavidad, es inmediato que si f es una función cóncava (resp. convexa) en D, entonces todo punto crítico de f en D es un máximo (resp. mínimo) local de (PI). Si además D es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, el teorema local global nos permite afirmar que los óptimos, en cada uno de los casos anteriores, son globales.

Ejemplo 2.2: Kúbica. Resolución

Obtenga el óptimo del problema de la empresa Kúbica (Ejemplo 2.1) y analice el resultado.

Solución

Recordemos que la formulación de este problema consiste en maximizar la función de beneficios de la empresa Kúbica:

$$\left\{ Max \quad 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y. \right.$$

Según lo que vimos previamente sobre este ejemplo, sabemos que se cumplirán tanto la condición necesaria de segundo orden como la condición suficiente para máximo, al ser la función objetivo cóncava. Seguidamente, necesitaremos aplicar la condición necesaria de primer orden, mediante la cual, además, podemos determinar el máximo buscando aquel o aquellos puntos que anulen el gradiente de la función objetivo.

Como la función objetivo tiene dos variables, el vector gradiente tiene dos componentes (las dos derivadas parciales). En consecuencia, la condición de anular el gradiente nos genera un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (las cantidades de materias primas):

$$\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) = \frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2 = 0; \quad \frac{\partial B}{\partial y}(x,y) = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}} - 3 = 0.$$

De la primera ecuación podemos obtener:

$$y^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{25}\right) \cdot x^{\frac{2}{3}},$$

y, sustituyendo en la segunda ecuación,

$$\left(\frac{25}{4}\right) x^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{1}{4}}\right)^{-3} - 3 = \left(\frac{25}{4}\right) x^{\frac{1}{3}} \left(\left(\frac{6}{25}\right) \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} - 3 = 0.$$

Operando, resulta:

$$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-2} = 3\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{6}{25}\right)^3,$$

obteniendo que $x = 20{,}27$ (número de toneladas de la primera materia prima). Sustituyendo en la expresión de y en función de x, resulta $y = 10{,}14$ (número de toneladas de la segunda materia prima). Como comentamos anteriormente, se satisfacen la condición necesaria de segundo orden y el teorema local global, por lo que podemos afirmar que el punto obtenido es un máximo global del problema, con un valor óptimo de los beneficios igual a 50,68 unidades monetarias. Además, con estos niveles de uso de materias primas, la producción del bien es de 4.865,04 unidades, los ingresos son de 121,63 unidades monetarias y los costes de producción se elevan a $70,95$ unidades monetarias. En la Figura 2.1 puede verse la representación tridimensional de la función de beneficios de la empresa, y se aprecia claramente su óptimo.

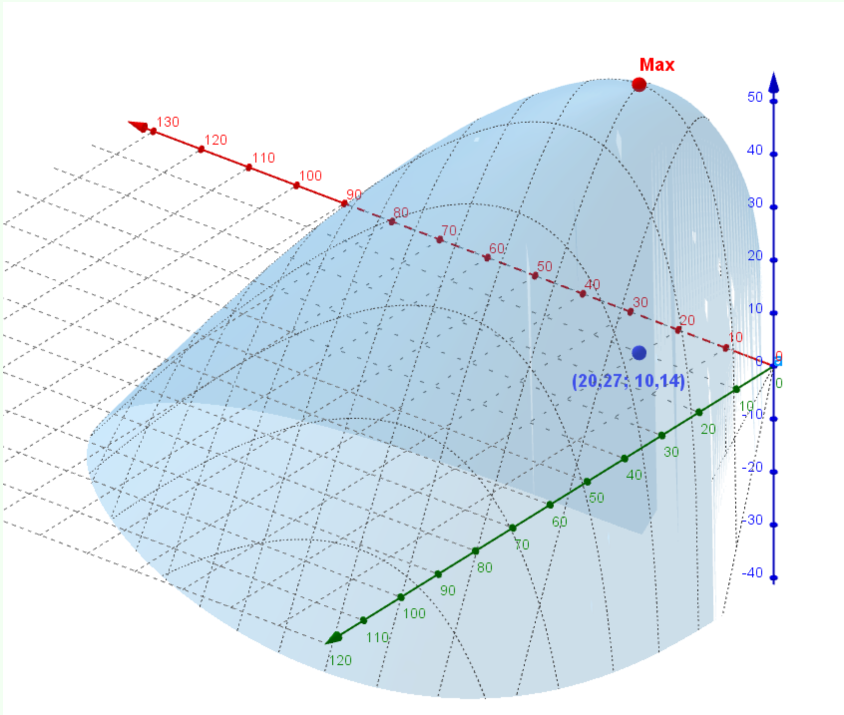


Figura 2.1: Representación gráfica, en 3D, de la función objetivo y su óptimo.

Obsérvese que los Teoremas 2.5 y 2.6 proporcionan condiciones suficientes de optimalidad y, por tanto, no permiten afirmar nada para el caso en que la forma cuadrática definida por la hessiana sea semidefinida en el punto crítico, y no mantenga dicho carácter en ningún entorno del punto. En efecto, en este caso, se puede dar cualquier situación, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3: Mínimo sin verificar la condición suficiente

Consideremos el problema:

$$\left\{ Opt \quad f(x,y) = x^4 + (y - x^2)^2. \right.$$

Calcule sus óptimos locales, utilizando las condiciones necesarias y suficientes.

Solución

El dominio de la función f es todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Por tanto, por el Teorema 2.3, cualquier óptimo local debe ser un punto crítico de f, es decir, anular su gradiente:

$$\nabla f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x^3 - 4xy = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x^2 = 0. \end{cases}$$

Este sistema tiene una única solución, que es el punto $(0,0)$. Éste es, por tanto, el único punto crítico de f. Para comprobar las condiciones suficientes proporcionadas por los Teoremas 2.5 y 2.6, debemos calcular la matriz hessiana de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24x^2 - 4y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial yx}(x,y) = -4x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

Por lo tanto,

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz $Hf(0,0)$ es semidefinida positiva. Sin embargo, en cualquier entorno del punto $(0,0)$ hay puntos de la forma $(0,\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En estos puntos,

$$Hf(0,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -4\varepsilon & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que es una matriz indefinida. Por lo tanto, el carácter semidefinido positivo no se mantiene en ningún entorno de $(0,0)$, por lo que no se satisfacen las condiciones suficientes de segundo orden en este punto crítico. Sin embargo, de la propia definición de la función, sabemos que, para cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^4 + (y - x^2)^2 \geq 0 = f(0,0),$$

por lo que $(0,0)$ es, de hecho, un mínimo global del problema. Así pues, aunque el carácter de la matriz hessiana no se mantiene en ningún entorno, el punto es en este caso un mínimo. En la Figura 2.2 se puede observar la representación tridimensional de la función objetivo, con su mínimo claramente situado en el punto (0,0). En ese punto, las distintas curvaturas de la función, según en qué dirección nos movamos, provocan que la matriz hessiana tenga distintos signos en su entorno.

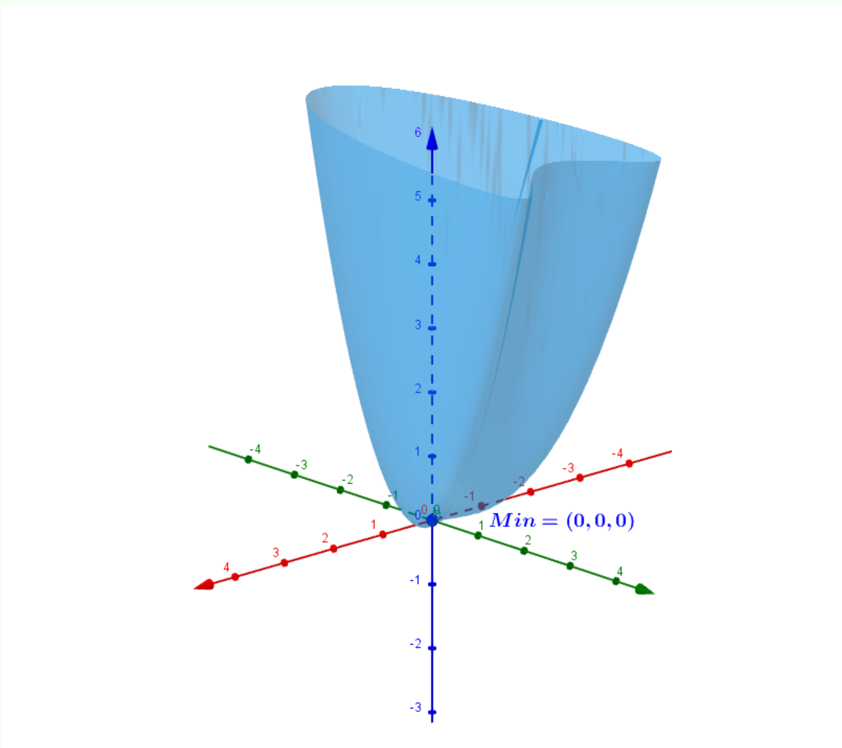


Figura 2.2: Representación gráfica, en 3D, de la función objetivo y su óptimo.

En este momento, al observar que existen casos dudosos, cuestión que no ocurría en problemas de una variable, nos podríamos plantear seguir haciendo derivadas sucesivas como en aquel caso, pero esto no es útil en problemas de varias variables. En el caso de una variable, la primera derivada y las sucesivas son un escalar del que podemos determinar con facilidad su signo. Si embargo, en el caso de varias variables, la primera derivada es un vector, el vector gradiente, las segundas derivadas forman una matriz, la matriz hessiana, y las de órdenes superiores siguen creciendo en dimensiones y su tratamiento se hace poco operativo. Por ello, el análisis de funciones de varias variables debe detenerse en las derivadas de segundo orden.

Además, como cabe suponer, la utilización de las condiciones de primer y segundo orden para la determinación de soluciones óptimas de los problemas se complica a medida que aumenta su dimensión (número de variables). La resolución analítica de sistemas de n ecuaciones no lineales con n incógnitas (derivados de la condición necesaria de primer orden) puede resultar muy difícil, o incluso imposible, para problemas grandes. Por ello, en casos reales se emplean algoritmos o paquetes informáticos que incorporan procedimientos para la resolución de estos problemas. Veamos otro ejemplo para ilustrar este hecho:

Ejemplo 2.4: Fabricando tinta

La empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* se ha hecho con el monopolio de la fabricación de tintas para impresora en el país. Actualmente, fabrica cinco tipos de tinta:

1. Tintas para formato normal fabricadas con colorante (COL);
2. Tintas para formato normal fabricadas mediante pigmentos (PIG);
3. Tintas acuosas para impresión digital en gran formato (ACU);
4. Tintas eco-solventes para impresión digital en gran formato (ECO);
5. Tintas de curado UV (CUV).

La empresa desea replantearse su política de precios, por lo que ha encargado a su departamento de investigación de mercados un análisis de la demanda prevista, en función del precio, de cada tipo de tinta. Tras realizar una análisis de regresión lineal basado en los datos históricos disponibles, los resultados obtenidos son las siguientes cantidades diarias demandadas (q, en litros), en función de su precio (p, precio por litro, en euros):

1. $q_{COL} = 120 - 0{,}06 * p_{COL}$;
2. $q_{PIG} = 135 - 0{,}07 * p_{PIG}$;
3. $q_{ACU} = 50 - 0{,}02 * p_{ACU}$;
4. $q_{ECO} = 75 - 0{,}03 * p_{ECO}$;
5. $q_{CUV} = 100 - 0{,}05 * p_{CUV}$.

Vaya Tintas que Llevas, S.A. desea conocer los precios por litro que debe establecer para cada tipo de tinta, teniendo en cuenta que produce todas las cantidades diarias demandadas, para obtener el máximo ingreso diario. ¿Cuál sería la producción óptima de cada tipo de tinta? ¿Cuál sería el ingreso máximo?

Solución

Este problema tiene 5 variables de decisión, que son los precios (en € por litro) de cada uno de los tipos de tinta, p_{COL}, p_{PIG}, p_{ACU}, p_{ECO} y p_{CUV}. Para unos precios dados, la producción diaria de cada tipo de tinta viene determinada por las expresiones que definen la demanda. Así pues, los ingresos diarios de la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* se obtienen multiplicando la producción por el precio de cada tipo de tinta, y sumando todos estos elementos. Por tanto, el problema de la empresa se modeliza de la forma siguiente:

$$Max\ I(p_{COL}, p_{PIG}, p_{ACU}, p_{ECO}, p_{CUV}) =$$

$$= (120 - 0{,}06 * p_{COL})p_{COL} + (135 - 0{,}07 * p_{PIG})p_{PIG} + (50 - 0{,}02 * p_{ACU})p_{ACU} +$$

$$+(75 - 0{,}03 * p_{ECO})p_{ECO} + (100 - 0{,}05 * p_{CUV})p_{CUV}.$$

Aunque es posible resolver este problema analíticamente, porque las variables están separadas en la función objetivo y las ecuaciones que resultan de la condición necesaria no son complicadas, usaremos el programa *Lingo* en este caso, para ilustrar su funcionamiento.

Lingo: Enunciado del problema

```
[Ingreso] Max = (120-0.06*Pcol)*Pcol+(135-0.07*Ppig)*Ppig+
(50-0.02*Pacu)*Pacu+(75-0.03*Peco)*Peco+(100-0.05*Pcuv)*Pcuv;
```

Las características de *Lingo* nos permiten introducir el modelo de esta otra forma alternativa:

Lingo: Enunciado alternativo

```
[Ingreso] Max = Qcol*Pcol+Qpig*Ppig+Qacu*Pacu+Qeco*Peco+Qcuv*Pcuv;
[Prod_COL] Qcol = 120-0.06*Pcol;
[Prod_PIG] Qpig = 135-0.07*Ppig;
[Prod_ACU] Qacu = 50-0.02*Pacu;
[Prod_ECO] Qeco = 75-0.03*Peco;
[Prod_CUV] Qcuv = 100-0.05*Pcuv;
```

Las líneas que aparecen tras la función objetivo no son restricciones propiamente dichas, sino identidades que nos permitirán conocer los valores de las producciones de cada tipo de tinta al obtener la solución del modelo. Las nuevas variables `Qcol`, `Qpig`, `Qacu`, `Qeco` y `Qcuv` son variables auxiliares o indirectas (no consideradas en este momento como variables de decisión), que miden estas producciones. Nótese que *Lingo* asume por defecto las condiciones de no negatividad, por lo que éstas están incluidas en la formulación anterior, aunque, como veremos, no son necesarias para este modelo, ya que la solución las verifica estrictamente. Resolviendo el problema en *Lingo*, se obtiene la siguiente solución (sólo mostramos los elementos de la salida que podemos interpretar en este momento):

Lingo: Solución del problema

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 253.214,30
```

Precios		Producciones	
Variable	Valor	Variable	Valor
Pcol	1.000,000	Qcol	60
Ppig	964,286	Qpig	67,5
Pacu	1.250,000	Qacu	25
Peco	1.250,000	Qeco	37,5
Pcuv	1.000,000	Qcuv	50

Obsérvese que *Lingo* nos informa de que se ha encontrado un óptimo (en este caso, máximo) global del problema. Por lo tanto, la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* debe vender cada litro de tinta *COL* a 1.000 €, cada litro de tinta *PIG* a 964,29 €, cada litro de tinta *ACU* a 1.250 €, cada litro de tinta *ECO* a 1.250 € y cada litro de tinta *CUV* a 1.000 €. Con ello, obtendrá unos ingresos diarios de 253.214,30 €. Con estos precios, la empresa producirá diariamente 60 litros de tinta *COL*, 67,5 litros de tinta *PIG*, 25 litros de tinta *ACU*, 37,5 litros de tinta *ECO* y 50 litros de tinta *CUV*.

2.3. Caso sujeto a restricciones de igualdad

Como paso previo al tratamiento del problema general de Programación Matemática, vamos a estudiar el caso especial en el que todas las restricciones sean de igualdad. Ello nos permitirá, cuando abordemos el estudio del caso general, distinguir el caso en que el óptimo sea interior al conjunto de oportunidades (análogo al caso irrestricto), y el caso en que el óptimo esté en la frontera (análogo a este problema con restricciones de igualdad, si se consideran sólo aquellas que se satisfacen con igualdad). Así pues, los resultados obtenidos en este apartado serán tanto un punto de partida para el estudio del caso general, como un punto al que reducir, en algunos casos, los problemas del caso general.

El problema que estudiamos en esta sección corresponde a la siguiente formulación:

$$(PRI) \quad \begin{cases} Opt & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \end{cases}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son, al menos, de clase 2. El conjunto de oportunidades X es el conjunto en el cual maximizamos la función, es decir, la intersección entre el dominio de las funciones del problema y el conjunto determinado por las restricciones. Así,

$$X = \{\mathbf{x} \in D / \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\},$$

donde

$$\mathbf{b} = (b_1, ..., b_m).$$

A las componentes del vector de términos independientes ($\mathbf{b}$) de las restricciones, se las denomina tradicionalmente *recursos*, debido al origen del problema en la formulación económica. Otra forma de denominarlos es *"right-hand side"* (RHS), cuya traducción es lado derecho, refiriéndose al lado derecho de las restricciones.

La primera idea que podría surgir para resolver este problema consistiría en resolver el sistema de ecuaciones que delimitan el conjunto de oportunidades, que deberá ser, en general, un sistema compatible indeterminado y posteriormente sustituir las variables que han resultado ser dependientes en dicha resolución en la función objetivo. De esta forma, obtendríamos un problema sin restricciones y en menos variables, concretamente en $n - m$ variables, si todas las restricciones son independientes. Esta idea puede funcionar en algunos problemas, básicamente cuando el sistema definido por $g_i(\mathbf{x}) = b_i$, $i = 1, ..., m$, sea un sistema lineal. En este caso, su resolución cumple todas las condiciones debidas para realizar la sustitución en la función objetivo, sin que perdamos posibles puntos óptimos en el proceso, y asegurándonos de que se cumplen todos los condicionantes de nuestro problema inicial. Sin embargo, esto no se puede asegurar para sistemas más generales (no lineales). Por ello, tendremos que buscar una alternativa general para este tipo de problemas. Como veremos a continuación, esta alternativa pasa por la construcción de una nueva función.

2.3.1. La función de Lagrange

Para el tratamiento de los problemas de Programación Matemática con restricciones, es de vital importancia la definición de la llamada *función de Lagrange* asociada. Ésta es una función que, de alguna forma, engloba todo el problema, al añadir a la función objetivo las restricciones, cada una de ellas multiplicada por una nueva variable, que denominaremos *multiplicador de Lagrange*:

Definición 2.3: Función de Lagrange

Se denomina función de Lagrange asociada al problema (PRI) a la función:

$$\mathcal{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}] = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i(g_i(x) - b_i),$$

donde $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ es el vector de multiplicadores asociados al bloque de restricciones del problema, también denominados multiplicadores de Lagrange.

Ejemplo 2.5: Kúbica. Restricción de igualdad

La empresa Kúbica del Ejemplo 2.1 se encuentra con ciertos problemas de suministro y almacenamiento, por lo que, consultados sus departamentos correspondientes, acuerda que el pedido mensual de la segunda materia prima sea exactamente un 50 % mayor que el de la primera materia prima.

a) Plantee el problema resultante.

b) Compruebe si el problema resultante verifica las hipótesis de los teoremas de Weierstrass y local global.

c) Formule el problema irrestricto que resulta al resolver el sistema que define el conjunto de oportunidades y sustituir en la función objetivo inicial.

d) Formule la función de Lagrange correspondiente.

Solución

En el Ejemplo 2.1, La empresa Kúbica deseaba maximizar sus beneficios:

$$\left\{ Max \quad 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y. \right.$$

a) La cantidad de la segunda materia prima, y, tiene que ser un 50 % mayor que la de la primera, x:

$$y = \frac{3}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad y - \frac{3}{2}x = 0.$$

Por lo tanto, el problema de la empresa Kúbica queda de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Max & B(x,y) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y \\ \\ s.a & y - \frac{3}{2}x = 0. \end{array} \right.$$

b) En cuanto al teorema de Weierstrass, las condiciones siguen sin satisfacerse, ya que la restricción

$$y = \frac{3}{2}x,$$

da lugar a un conjunto no acotado (x e y pueden tomar valores infinitamente grandes, verificándola). Por tanto, no podemos garantizar la existencia de un máximo global del problema.

En cuanto al teorema local global, vimos anteriormente (Ejemplo 2.1) que la función de beneficios es cóncava. Por otra parte, la restricción del problema es lineal, por lo que el conjunto de oportunidades es convexo. Por lo tanto, podemos afirmar que cualquier máximo local del problema es global.

c) Para expresar nuestro problema como un problema sin restricciones, dado que nuestra restricción es de dos variables y lineal, es posible despejar una variable en función de otra, y sustituir $y = \frac{3}{2}x$ en la función objetivo inicial, quedando nuestro problema como:

$$\left\{ \; Max \quad B(x) = 25x^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{4}} - 2x - 3\left(\tfrac{3}{2}x\right). \right.$$

Este problema se puede resolver mediante los procedimientos expuestos en el apartado anterior, para problemas de una única variable. Una vez resuelto, se puede calcular el correspondiente valor de y, a partir de la relación anteriormente sustituida. No obstante, como ha sido expresado previamente, este procedimiento no es válido en todos los problemas, y por ello, salvo casos excepcionales, no lo utilizaremos. El procedimiento general vendrá definido a partir de la función de Lagrange.

d) Según la expresión (2.3.1), la función de Lagrange asociada a este problema es:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y - \lambda\left(y - \frac{3}{2}x\right),$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción sobre las cantidades disponibles de las materias primas.

En lo que sigue, se demostrará que las condiciones de primer y segundo orden en este caso son análogas al caso irrestricto, pero exigiéndolas sobre la función de Lagrange en lugar de sobre la función objetivo f. Es decir, de alguna forma, intentaríamos optimizar la función de Lagrange en lugar de la función f, aunque como veremos, esto será cierto parcialmente, pues en las condiciones suficientes deberemos realizar algunas matizaciones. Antes de entrar en las condiciones de optimalidad propiamente dichas, vamos a estudiar algunas propiedades interesantes de la función de

Lagrange.

La primera nos asegura que cuando trabajamos con puntos factibles, el valor de la función de Lagrange coincide con el de la función objetivo. La segunda nos permite afirmar que cualquier punto crítico de la función de Lagrange es factible para el problema (PRI):

Teorema 2.7: Propiedad 1 de la función de Lagrange

Dados el problema (PRI) y la función de Lagrange definida en (2.3.1), se verifica:

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in X \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}).}$$

Demostración

Si $\mathbf{x}$ es un punto arbitrario de X:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

de donde:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{0} = f(\mathbf{x}).$$

Antes de enunciar la siguiente proposición, expresemos el gradiente de la función de Lagrange de una forma más operativa:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}],$$

resultando que:

$$\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \\ \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Ahora bien:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})] = \nabla f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[J\mathbf{g}(\mathbf{x})]^t.$$

Luego, en definitiva:

$$\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[J\mathbf{g}(\mathbf{x})]^t \\ \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.8: Propiedad 2 de la función de Lagrange

Si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es punto crítico de la función de Lagrange asociada a (PRI), entonces $\mathbf{x}^*$ pertenece al conjunto de oportunidades.

Demostración

Si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es punto crítico de $\mathcal{L}$, entonces, por la forma de su gradiente, deberá cumplirse que:

$$\nabla\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\lambda}^{*t}[J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)]^t \\ \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

de donde se deduce que $\mathbf{x}^* \in D$, pues existen $f(\mathbf{x}^*)$ y $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)$, y además:

$$-\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Luego $\mathbf{x}^* \in X$, como queríamos demostrar.

2.3.2. Condiciones de optimalidad

Según hemos visto, la función de Lagrange incorpora tanto la función objetivo del problema original, como sus restricciones. Además, también se verifica que todo punto crítico de la función de Lagrange es factible para el problema (PRI), y, en esta situación, el valor de $\mathcal{L}$ coincide con el de f. En estas circunstancias, cabe preguntarse si existirá alguna relación entre los óptimos locales de (PRI) y los puntos críticos de $\mathcal{L}$. El siguiente teorema demuestra que, en efecto, bajo ciertas condiciones poco exigentes, todo óptimo local de (PRI) produce un punto crítico de la lagrangiana:

Teorema 2.9: Condición necesaria de primer orden para PRI

Si $\mathbf{x}^*$ es un óptimo local del problema (PRI) tal que:

$$rg\left(J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\right) = m,$$

entonces existe un vector de multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}^*$ tal que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es punto crítico de la función de Lagrange asociada al problema.

Es conveniente, en este momento, realizar algunos comentarios importantes relativos a la condición de rango completo (o cualificación de restricciones), que es como se suele llamar a la hipótesis impuesta en el teorema anterior, $rg\left(J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\right) = m$. En general, esta condición se suele verificar en casos reales, por lo que no nos causa mayores problemas en la aplicación del resultado anterior. De cualquier forma, a veces no se da y debemos saber qué problemas nos podrá causar en ese caso.

En primer lugar, la condición de rango completo hace sobreentender que el número de restricciones de nuestro problema es menor que el número de variables, $m < n$. De esa forma, es posible aplicar el teorema de la función implícita y despejar unas variables, m, en función de las restantes $n - m$, lo que es necesario para demostrar el teorema anterior. Si $n = m$ y se da la condición de rango completo, nuestro punto $\mathbf{x}^*$ es el único punto del conjunto de oportunidades, o bien es un punto "aislado" de otros puntos del mismo y por tanto, su entorno consiste únicamente en él, careciendo de sentido los conceptos de máximo o mínimo local. El caso de $m > n$ no es posible, a no ser que haya restricciones que dependen de las demás, por lo que no aportarían nada y se podrían eliminar. Por otro lado, si no se cumple la condición de rango completo, puede ocurrir que determinemos valores de $\boldsymbol{\lambda}^*$, pero que no sean únicos.

Al igual que ocurre en el caso irrestricto, también en el problema restringido existen condiciones de segundo orden que pueden garantizar la optimalidad para la función f de los puntos que hemos obtenido a partir de los puntos críticos de la función de Lagrange. Inicialmente podríamos pensar que esa condición suficiente debería aplicar las condiciones suficientes de los problemas irrestrictos a la propia función de Lagrange, es decir, exigir que la matriz hessiana de la función de Lagrange tuviese el signo correspondiente. Esta matriz hessiana viene dada por:

$$H\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \begin{bmatrix} H_x\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) & J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \\ J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dada la forma especial de esta matriz, debido a la caja nula de la parte inferior derecha, se puede demostrar que siempre es indefinida. Por ello, no es posible trabajar únicamente con la función de Lagrange. De cualquier forma, hay que tener en cuenta que sólo necesitamos exigir condiciones de convexidad en un entorno factible de nuestro punto. Por ello, la condición de segundo orden, también supone condiciones sobre la matriz hessiana, pero sólo en la parte que corresponde a las variables originales del problema $(\mathbf{x})$. Además, como sólo nos interesan las direcciones factibles a partir del punto $\mathbf{x}^*$, la forma cuadrática generada por dicha matriz se tomará restringida a una condición que garantiza que comparamos el candidato a óptimo sólo con los puntos de su entorno que pertenecen al conjunto de oportunidades del problema.

Teorema 2.10: Condición suficiente para PRI

Si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto crítico de la función de Lagrange asociada al problema (PRI), una condición suficiente para que $\mathbf{x}^*$ sea un máximo (resp. mínimo) local del problema es que la forma cuadrática:

$$\mathbf{h}^t H_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) h_i h_j$$

$$\textit{restringida a:} \qquad J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

sea definida negativa (resp. positiva).

Veamos la utilidad de dichas condiciones necesarias y suficientes sobre el ejemplo de la empresa Kúbica:

Ejemplo 2.6: Kúbica. Resolución del problema con restricción de igualdad

Dado el problema de la empresa Kúbica, con la condición impuesta en el Ejemplo 2.5, debida a problemas de suministro y abastecimiento, se pide:

a) Obtenga el(los) punto(s) crítico(s) del problema, a partir de la función de Lagrange.

b) Compruebe si dicho(s) punto(s) crítico(s) cumple(n) las condiciones suficientes.

Solución

a) Recordemos que la función de Lagrange viene expresada por:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y - \lambda\left(y - \frac{3}{2}x\right).$$

Para la determinación de los puntos críticos, deberemos calcular su gradiente, respecto de las tres variables x, y y λ, e igualarlo a cero. De aquí, obtendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, del que podremos obtener los puntos críticos, si los hay:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x}(x, y, \lambda) = \frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2 + \frac{3}{2}\lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y}(x, y, \lambda) = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}} - 3 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = -\left(y - \frac{3}{2}x\right) = 0. \end{cases}$$

En las dos primeras ecuaciones podemos despejar λ en función de x e y. Por otra parte, de la tercera ecuación podemos despejar y en función de x:

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{2}{3}\left(\frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2\right), \\ \lambda = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}} - 3, \\ y = \frac{3}{2}x. \end{cases}$$

Igualando las dos primeras y sustituyendo en la misma el resultado de la tercera:

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{4}} - 2\right) = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2}x\right)^{-\frac{3}{4}} - 3.$$

A partir de esta ecuación, obtenemos $x = 8,8699$, $y = 13,3048$ y $\lambda = -1,142857$, que es el punto crítico de la función de Lagrange y, por tanto, candidato a óptimo de nuestro problema.

b) Una vez obtenido el único punto crítico, deberemos comprobar si cumple la correspondiente condición suficiente para máximo, ya que deseamos maximizar nuestra función de beneficios. La matriz hessiana de la función de Lagrange, con respecto a las variables originales del problema, (x, y), sería:

$$H_{(x,y)}\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{50}{9}x^{-\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{4}} & \frac{25}{12}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{25}{12}x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{3}{4}} & -\frac{75}{16}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{7}{4}} \end{pmatrix}.$$

En este caso, la matriz coincide con la matriz hessiana de nuestra función original. Este hecho no tiene por qué ocurrir siempre: sólo se dará cuando todas las restricciones sean lineales, como en nuestro caso, y ya conocíamos que la hessiana de la función de beneficios generaba una forma cuadrática definida negativa. La condición suficiente consiste en restringir esta forma cuadrática, sustituida en el punto crítico, a la restricción $J\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{h} = \mathbf{0}$, que en nuestro caso se transforma en:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Como la matriz inicial, sin restringir, es definida negativa, al restringirla lo continuará siendo, y en consecuencia, podemos concluir que dicho punto es máximo local de nuestro problema. Por otra parte, vimos anteriormente que este problema satisface las condiciones del teorema local global, por lo que el máximo que hemos obtenido es global.

Así pues, la política óptima de Kúbica consiste en utilizar 8,87 toneladas de la primera materia prima y 13,30 toneladas de la segunda materia prima. Con ello, se consigue un beneficio óptimo de 41,18 unidades monetarias. Además, con estos niveles de uso de materias primas, la producción del bien es de 3.953,44 unidades, los ingresos son de 98,84 unidades monetarias y los costes de producción se elevan a 57,65 unidades monetarias. En la Figura 2.3 puede verse la representación tridimensional del problema. La restricción lineal es el plano, cuyo corte con el contorno de la función objetivo forma la curva negra. El nuevo óptimo está en el punto más alto de esa curva. La proyección de la curva sobre el plano xy es la recta azul.

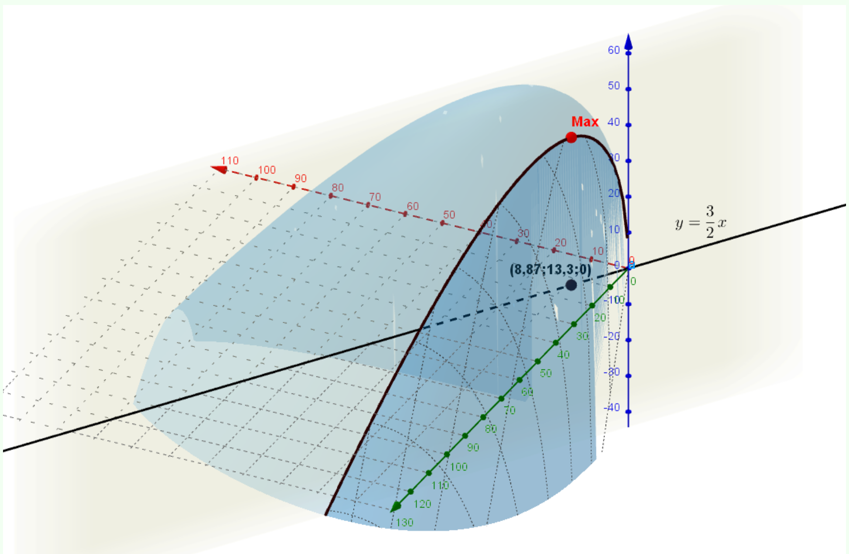


Figura 2.3: Representación gráfica, en 3D, de la función objetivo y la restricción.

Podemos ver también el problema mediante las curvas de nivel y la restricción sobre el plano, ya que es un problema de dos variables. Podemos observar en la Figura 2.4 que nuestra restricción es una recta, que sólo consideraremos en el cuadrante positivo pues (aunque no están explícitas las condiciones de no negatividad) el problema sólo tiene sentido en esa zona. Por otro lado, las curvas de nivel van creciendo desde CN15, CN30, CN45... y obtenemos nuestro máximo en el último punto de contacto de la restricción con las curvas de nivel, cuando éstas se mueven en sentido creciente de su valor.

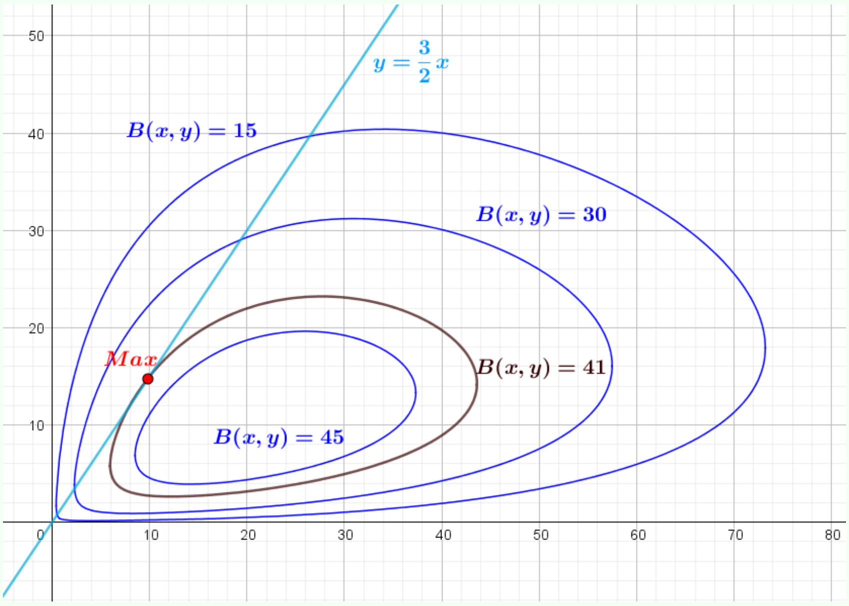


Figura 2.4: Representación gráfica, en 2D, de las curvas de nivel de la función objetivo y la restricción.

En la práctica, cuando se trabaja con problemas de unas dimensiones más grandes que en el ejemplo anterior, las condiciones de primer y segundo orden anteriormente expuestas dejan de ser operativas como forma de determinar analíticamente los óptimos de los problemas. En estos casos, tendremos que recurrir a programas que incluyan los métodos de optimización (exactos o aproximados) que más se ajusten a cada problema. Veamos a continuación un ejemplo del uso del programa *Lingo* sobre el problema de la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.*

Ejemplo 2.7: Fabricando tinta. Restricciones de igualdad

La empresa del Ejemplo 2.4, *Vaya Tintas que Llevas, S.A.*, estima que el coste de los pigmentos y colorantes para cada tipo de tinta (en euros por litro producido) es el que aparece en la Tabla 2.1. La empresa desea destinar exactamente 60.000 € a la adquisición de los pigmentos y colorantes. ¿Cuáles serían ahora los precios, producciones e ingreso óptimos?

Tipo de Tinta	**Coste (€/l)**
COL	350
PIG	400
ACU	200
ECO	250
CUV	300

Tabla 2.1: Coste de adquisición de pigmentos y colorantes

Solución

Como los costes de los pigmentos y colorantes dependen de las cantidades producidas, la restricción que asegura que se satisfaga exactamente la cuantía destinada a su adquisición es la siguiente:

$$350(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 400(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) + 200(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) +$$
$$+250(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + 300(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) = 60000.$$

Por lo tanto, el nuevo modelo para este problema queda como sigue:

$$\left\{\begin{array}{ll}
Max & I(p_{COL}, p_{PIG}, p_{ACU}, p_{ECO}, p_{CUV}) = \\
& = (120 - 0{,}06 * p_{COL})p_{COL} + (135 - 0{,}07 * p_{PIG})p_{PIG} + \\
& +(50 - 0{,}02 * p_{ACU})p_{ACU} + (75 - 0{,}03 * p_{ECO})p_{ECO} + \\
& +(100 - 0{,}05 * p_{CUV})p_{CUV}, \\
s.a & 350(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 400(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) + \\
& +200(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) + 250(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + \\
& +300(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) = 60000.
\end{array}\right.$$

Introduzcamos el modelo en *Lingo*, siguiendo la notación que usamos en el Ejemplo 2.4:

Lingo: Enunciado (restricción de igualdad)

```
[Ingreso] Max = Qcol*Pcol+Qpig*Ppig+Qacu*Pacu+Qeco*Peco+Qcuv*Pcuv;
[Costes_materias_primas] 350*Qcol+400*Qpig+200*Qacu+250*Qeco+300*Qcuv
= 60000;
[Prod_COL] Qcol = 120-0.06*Pcol;
[Prod_PIG] Qpig = 135-0.07*Ppig;
[Prod_ACU] Qacu = 50-0.02*Pacu;
[Prod_ECO] Qeco = 75-0.03*Peco;
[Prod_CUV] Qcuv = 100-0.05*Pcuv;
```

Nótese que en la modelización previa, se han mantenido las restricciones auxiliares que definen las variables que se emplean para definir la función objetivo

Resolviendo el problema, obtenemos los siguientes resultados en *Lingo*:

Lingo: Solución del problema con restricción de igualdad

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 241.479,00
```

Precios		Producciones	
Variable	Valor	Variable	Valor
Pcol	1.236,395	Qcol	45,816
Ppig	1.234,451	Qpig	48,588
Pacu	1.385,083	Qacu	22,298
Peco	1.418,853	Qeco	32,434
Pcuv	1.202,624	Qcuv	39,869

Nuevamente, *Lingo* nos informa de que se ha encontrado un máximo global del problema. En este caso, la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* debe vender cada litro de tinta *COL* a 1.236,40 €, cada litro de tinta *PIG* a 1.234,45 €, cada litro de tinta *ACU* a 1.385,08 €, cada litro de tinta *ECO* a 1.418,85 € y cada litro de tinta *CUV* a 1.202,62 €. Con ello, obtendrá unos ingresos diarios de 241.479 €. Con estos precios, la empresa producirá diariamente 45,82 litros de tinta *COL*, 48,59 litros de tinta *PIG*, 22,30 litros de tinta *ACU*, 32,43 litros de tinta *ECO* y 39,87 litros de tinta *CUV*.

Comparando este resultado con el del problema irrestricto del Ejemplo 2.4, podemos observar que el ingreso máximo, como es lógico, ha disminuido. Además, han aumentado los precios óptimos de venta de todos los tipos de tinta, por lo que, consecuentemente, han disminuido las cantidades demandadas.

2.3.3. Interpretación de los multiplicadores de Lagrange

Uno de los resultados más importantes de la Programación Matemática, que desarrollamos a continuación, es que la valoración marginal de los recursos, cuyo uso está fijado por las restricciones, viene dada por los multiplicadores de Lagrange, también denominados variables duales, asociados a las mismas. Dado el problema *PRI*,

$$\begin{cases} Max & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \end{cases}$$

para distintos valores del término independiente de las restricciones (vector $\mathbf{b}$), se obtendrían, lógicamente, distintas soluciones óptimas del problema. Consideremos entonces la solución óptima como una función del vector $\mathbf{b}$, que será diferenciable si se verifican las condiciones suficientes de optimalidad:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{b}),$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{b}).$$

Por lo tanto, los valores óptimos de la función objetivo pueden considerarse, como una función de $\mathbf{b}$, $f(\mathbf{x}(\mathbf{b}))$, e igualmente la función vectorial de las restricciones, $\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{b}))$. Con estas notaciones, podemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 2.11: Interpretación de los multiplicadores óptimos

Si $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *es una solución óptima del problema* (PRI)*, entonces, para cada* $i = 1, \ldots, m$*,*

$$\boxed{\lambda_i^* = \frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{b}))}{\partial b_i}.}$$

Por lo tanto, la variación del valor óptimo de la función objetivo $f(\mathbf{x}^*)$ producida por variaciones infinitesimales del término independiente de una restricción, está representada por el multiplicador óptimo de Lagrange λ_i^* asociado a la misma. En otras palabras, el valor óptimo del multiplicador de Lagrange asociado a una determinada restricción nos proporciona una medida de la sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo ante cambios en el recurso de dicha restricción.

Esta interpretación general tendrá su traducción económica concreta según sean la función objetivo y la expresión de las restricciones. Si la función objetivo consiste, por ejemplo, en maximizar la función de utilidad del consumidor, sometido a una restricción presupuestaria de igualdad, el multiplicador de Lagrange se interpreta como la utilidad marginal por unidad monetaria. Si el problema consiste en determinar el plan de producción compatible con la función de producción de la empresa y tal que el coste de producción resulte mínimo, el multiplicador de Lagrange se interpretará como el coste marginal de producción del producto. En general, el multiplicador óptimo puede interpretarse como la medida del "pago" máximo que podría efectuarse a cambio de un desplazamiento de la restricción. Supongamos, por ejemplo, que el problema consiste en maximizar el beneficio eligiendo los niveles de factores productivos y de producción, sujetos a la limitación impuesta por la cantidad disponible de un factor, b. En este problema, λ^* mide la rentabilidad marginal del factor o la tasa a la que aumenta el beneficio máximo como consecuencia de un pequeño incremento en la cantidad fija del factor. Por consiguiente, λ^* mide la cantidad máxima que la empresa estaría dispuesta a pagar por el incremento en el factor, ya que, si pagase menos, el resultado sería un incremento neto en el beneficio, pero si pagase más, se produciría una reducción neta del mismo. Por esta razón, a λ^* se le puede denominar *precio sombra* del factor, utilizándose dicho adjetivo para indicar que el precio puede diferir del precio real del mercado.

En cualquier caso, del Teorema 2.11 se derivan las siguientes interpretaciones del multiplicador óptimo de Lagrange, según su signo:

$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } \lambda_i^* > 0 & \begin{cases} \text{si } b_i \text{ crece} & f \text{ crece,} \\ \text{si } b_i \text{ decrece} & f \text{ decrece,} \end{cases} \\ \\ \text{Si } \lambda_i^* < 0 & \begin{cases} \text{si } b_i \text{ crece} & f \text{ decrece,} \\ \text{si } b_i \text{ decrece} & f \text{ crece.} \end{cases} \end{cases}}$$

Interpretemos seguidamente los multiplicadores óptimos obtenidos en los Ejemplos 2.6 y 2.7 que hemos tratado en esta sección:

Ejemplo 2.8: Interpretando los multiplicadores óptimos

a) En el Ejemplo 2.6, vimos que el multiplicador de Lagrange óptimo asociado a la restricción del problema es $\lambda^* = -1,142857$. Recordemos que la restricción relaciona las cantidades utilizadas de ambas materias primas (el pedido mensual de la segunda materia prima sea exactamente un 50 % mayor que el de la primera materia prima):

$$y - \frac{3}{2}x = 0.$$

Por lo tanto, la interpretación del valor del multiplicador óptimo nos diría que si incrementamos ligeramente el término independiente de la restricción, 0, y pasara a ser un valor algo mayor (por ejemplo, $0,1$), entonces el valor óptimo de la función objetivo decrecerá, por ser el multiplicador negativo. ¿En cuánto decrecerá? Pues, aproximadamente, en $-1,14 * 0{,}1$ unidades monetarias. La razón de usar la palabra "aproximadamente" en la afirmación anterior es que estamos usando el valor de una derivada y la interpretamos como un cociente de incrementos finitos. De hecho, si resolvemos el problema nuevamente con la restricción $y = \frac{3}{2}x + 0{,}1$ comprobamos que el nuevo valor óptimo de la función objetivo es 41,07 en lugar del obtenido previamente, que era 41,18. Por lo tanto, nuestra pérdida es de 0,11 unidades monetarias, que no coincide exactamente con $-1,14 * 0{,}1$, aunque son valores muy parecidos, y lo serán aún más cuanto menor sea el incremento considerado. Desde el punto de vista de la empresa, el multiplicador óptimo nos permite extraer dos conclusiones.

- El primer lugar, pasar de utilizar justo un 50 % más de la segunda materia prima que de la primera, a utilizar un poco más de ese 50 %, sería perjudicial para la empresa, ya que disminuiría su beneficio óptimo.
- En segundo lugar, de lo anterior se deduce que a la empresa le interesaría utilizar menos de ese 50 % más de la primera materia prima que de la segunda para aumentar su beneficio.

b) Por otro lado, la salida que proporciona el programa *Lingo* es más completa que la que se mostró en el Ejemplo 2.7. Concretamente, tras las información sobre las variables óptimas, hay otro bloque relativo a las restricciones del problema. En este caso, tendríamos los datos siguientes (hemos omitido los correspondientes a las restricciones instrumentales, ya que no son restricciones originales del problema):

Lingo: Solución del problema con restricción de igualdad

Fila	Holgura	Precio dual
INGRESO	241.479,0	1,000000
COSTES_MATERIAS_PRIMAS	0,000000	1,350826

La fila `INGRESO` se refiere a la función objetivo, y devuelve su valor óptimo, que ya habíamos visto anteriormente. En cuanto a la fila de la restricción `COSTE_MATERIAS_PRIMAS`, la holgura igual a 0 nos indica que dicha restricción se satisface con igualdad, cosa que es obvia en este caso (veremos en la sección siguiente que las holguras nos permitirán identificar las restricciones activas e inactivas en el óptimo del problema). Finalmente, el precio dual es el multiplicador de Lagrange óptimo de la restricción. En este caso, su valor es $\lambda^* = 1,35$. Por lo tanto, si la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* decide destinar más de 60.000 € a la adquisición de pigmentos y colorantes, el ingreso óptimo crecerá. Aunque, como ya hemos visto, el multiplicador óptimo es el ingreso marginal, su valor mayor que 1 puede hacernos pensar que merece la pena aumentar esa cantidad, ya que los ingresos tienden a aumentar en mayor proporción que el gasto en materias primas. En efecto, si resolvemos el mismo problema con una restricción presupuestaria de 60.001 €, veremos que el ingreso óptimo es de 241.480,30 €, es decir, 1,30 € por encima del óptimo anterior. En cualquier caso, como el multiplicador es un concepto local dado por una derivada, no se puede extrapolar de forma general su interpretación para incrementos "grandes" del recurso correspondiente, debiendo comprobarse el efecto de dicho incremento resolviendo el problema de nuevo.

Nota. En los problemas de mínimo, podemos tomar dos acciones alternativas. La primera, y posiblemente la más recomendable para sólo tener que usar unos resultados teóricos, consiste en cambiar el signo de la función a minimizar, y maximizar la resultante. En este caso, los valores de las variables de decisión que maximizan el problema cambiado de signo son los mismos que para nuestra función a minimizar original, aunque el valor óptimo de la función objetivo se obtendrá con el signo contrario al real. La segunda posibilidad consiste en definir la función de Lagrange como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}],$$

en cuyo caso, cambiarán los resultados obtenidos y se verifica que $\lambda_i^* = -\frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{b}))}{\partial b_i}$.

No obstante, para los problemas con restricciones de igualdad, no es necesaria la resolución de ambos problemas, pues los óptimos se obtienen sin más que considerar la condición suficiente apropiada para los problemas de maximizar y minimizar, tal como fue expuesta en el Teorema 2.10. Esto no ocurrirá en el problema general que será estudiado en el próximo epígrafe y deberán resolverse dos problemas distintos si deseamos minimizar y maximizar nuestra función, a fin de evitar ciertas complicaciones en la aplicación de los resultados teóricos.

2.4. Caso sujeto a restricciones de desigualdad

El objetivo de la presente sección es aportar conceptos, ideas y procedimientos para la resolución del problema general de (PNL). En primer lugar, recordamos su formulación y haremos diversas consideraciones sobre ella. El problema general de programación no lineal consiste en encontrar los valores de ciertas variables que maximizan o minimizan una función dada, dentro de un conjunto definido por una serie de restricciones de desigualdad, de forma que no hay condiciones de linealidad sobre la función a optimizar o sobre alguna de las funciones que definen el conjunto de oportunidades, dentro del cual buscamos dicho óptimo. Es decir, el problema consiste en:

$$\left\{\begin{array}{ll} Max & f(x_1, x_2, ..., x_n) \\ s.a & \left\{\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_2 \\ \cdots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_m, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

o, de forma abreviada,

$$\boxed{(PNL) \quad \left\{\begin{array}{ll} Max & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \end{array}\right.}$$

El conjunto de oportunidades X es el que sigue:

$$X = \{\mathbf{x} \in D/\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\},$$

Supondremos, al igual que en el epígrafe anterior, que las funciones f y g son de clase 2 en D y que éste es un conjunto abierto.

Los problemas de programación no lineal son muy representativos de las circunstancias en las que se desenvuelve la actividad económica y empresarial. Normalmente, se dispone de cantidades limitadas de recursos, pero sin la obligación de emplearlas en su totalidad, si ello no resultase adecuado. Por consiguiente, es posible pensar en soluciones factibles y óptimas que no saturen necesariamente todas las restricciones, dejando un excedente inutilizado del recurso cuya disponibilidad limitan.

Se debe tener en cuenta que la formulación dada para (PNL) engloba todo tipo de problemas:

1. La función objetivo ha sido formulada para maximizar. Si nuestro problema es de minimizar, y con el fin de no repetir formulaciones y resultados, simplemente cambiaremos el signo de la función objetivo y maximizaremos la función resultante.

2. El sentido de las desigualdades $(\leq)$ es únicamente cuestión de convenio. Una restricción con la desigualdad contraria puede reducirse a una del tipo anterior sin más que multiplicar por (-1). Por otra parte, una restricción de igualdad puede reemplazarse por dos de desigualdad. Por ejemplo, $g(\mathbf{x}) = b$ se convierte en $g(\mathbf{x}) \leq b$ y $-g(\mathbf{x}) \leq -b$. Cuando trabajemos con *Lingo*, debemos tener en cuenta que admite todo tipo de restricción, sin necesidad de que éstas sean modificadas, como veremos posteriormente.

3. En ocasiones, para que el problema sea económicamente significativo, es necesario que las variables de decisión sean no negativas, es decir, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Estas restricciones las trataremos como el resto de las restricciones.

Para resolver nuestro problema analíticamente, será imprescindible el uso de la ya definida función de Lagrange, que para nuestro problema de maximizar con restricciones de desigualdad queda como sigue:

$$\mathcal{L} : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}],$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector de multiplicadores asociado al bloque de restricciones del problema, también denominados, en este caso, *multiplicadores de Kuhn-Tucker*.

Puede verse que esta función mantiene muchas de las propiedades expresadas en el epígrafe anterior. Una de las propiedades que nos será de gran ayuda en la interpretación de nuestros procedimientos de resolución, así como en el análisis de soluciones, es la referente a la sensibilidad del valor óptimo de nuestra función objetivo ante cambios en el vector de recursos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{b}))}{\partial b_j} = \lambda_j^* \quad j = 1, ..., m.$$

Al objeto de analizar en profundidad las propiedades y posibilidades de resolución del problema de PNL, será necesario en algunos casos distinguir entre las restricciones que se verifican con igualdad en el óptimo y las que se verifican con desigualdad estricta. Así, recordemos que la restricción $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$ es activa en un punto factible $\mathbf{x}_0$ (también decimos que $\mathbf{x}_0$ satura dicha restricción), si verifica $g_i(\mathbf{x}_0) = b_i$.

En lo que resta de este epígrafe, expondremos las condiciones necesarias y suficientes para encontrar los óptimos de nuestro problema. Veremos que dichas condiciones pueden dar lugar a procesos complejos para la determinación práctica de los óptimos, especialmente cuando crece el número de variables y, sobre todo, el número de restricciones. Por ello, se buscarán procedimientos alternativos para la resolución del problema. Uno de ellos es conocer, previamente a la resolución, las restricciones que son activas en el óptimo. Obviamente, esto es difícil de saber en un problema de más de dos variables, pero en el caso de dos variables, podemos basarnos en la representación gráfica de las restricciones y las curvas de nivel de la función objetivo. Este análisis gráfico no sólo nos permitirá conocer las restricciones activas en el óptimo de estos problemas, sino que también nos permitirá analizar y comprender qué ocurre realmente en la optimización de problemas más grandes. En el caso en que se puedan identificar estas restricciones activas en el óptimo, reduciremos el problema al tipo estudiado en los epígrafes anteriores, aunque, como veremos, con ciertos condicionantes. Otro de los procedimientos alternativos, posiblemente el más cómodo, y el que utilizaremos más frecuentemente, es el uso de un programa de ordenador para su resolución.

2.4.1. Cualificaciones de restricciones.

Recordemos que en el Teorema 2.9, la denominada condición de rango completo nos permitía obtener condiciones necesarias para el problema con restricciones de igualdad. Pues bien, en el caso del problema general, veremos que necesitaremos algo similar. Así, para que se verifiquen ciertas propiedades deseables en ciertas zonas del conjunto de oportunidades, será necesario formular condiciones similares a aquellas, pero ahora para problemas con restricciones de desigualdad. Estas condiciones reciben el nombre genérico de *cualificaciones de restricciones*. En esta sección enunciaremos dos de las más empleadas en la literatura.

En el caso en que no tuviéramos asegurada la diferenciabilidad de las funciones que definen las restricciones, la cualificación más usada es la denominada cualificación de restricciones de Slater tipo 1:

Definición 2.4: Cualificación de restricciones de Slater tipo 1

Dado el problema (PNL), se dice que se satisface la cualificación de restricciones de Slater tipo 1 (en X) si $\mathbf{g}$ es convexa en X y existe un $\bar{\mathbf{x}} \in X$ tal que $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{b}$ (es decir, el conjunto de oportunidades tiene interior no vacío).

El caso en el que las funciones de restricción $\mathbf{g}$ son diferenciables ofrece muchas más posibilidades. Como expusimos en el caso anterior, conviene centrar la atención en un punto en particular $\mathbf{x}^*$ del conjunto de oportunidades. Denotaremos por $I_{\mathbf{x}^*}$ el conjunto de índices correspondientes a las restricciones activas en $\mathbf{x}^*$ y por $J_{\mathbf{x}^*}$ el de las inactivas:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{x}^*} &= \{i \in \{1, ..., m\} / g_i(\mathbf{x}^*) = b_i\}, \\ J_{\mathbf{x}^*} &= \{i \in \{1, ..., m\} / g_i(\mathbf{x}^*) < b_i\}. \end{aligned}$$

Esta distinción se debe a que, al estudiar un problema cerca de un posible óptimo, nos interesará determinar las direcciones en las que podremos movernos sin salirnos del conjunto de oportunidades (direcciones factibles), y parece claro que ningún movimiento suficientemente pequeño causará la violación de una restricción no activa. La cualificación de restricciones que utilizaremos en el caso diferenciable es:

Definición 2.5: Cualificación de Restricciones de la Independencia Lineal

Dado el problema (PNL), se dice que se satisface la cualificación de restricciones de la independencia lineal en $\mathbf{x}^*$ si el conjunto D es abierto, g_i, para $i \notin I_{\mathbf{x}^*}$, son continuas en $\mathbf{x}^*$ y los vectores $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$, para $i \in I_{\mathbf{x}^*}$, son linealmente independientes.

Esta cualificación es, de hecho, la más usada en Programación Matemática ya que resulta ser, con diferencia, la más fácil de verificar, toda vez que se reduce a calcular el rango de la matriz jacobiana de las funciones de restricciones activas en el punto, y que éste sea completo. Además, impone condiciones sólo de carácter local, ya que conlleva únicamente un requisito sobre los gradientes de las restricciones activas en el punto en cuestión, contrastando con el carácter global de la otra cualificación. En general es difícil comprobar en un problema real que se satisface la cualificación de restricciones en todos los puntos, o detectar aquellos en los que no. En los problemas que se utilizan en este capítulo, siempre se satisfacen, y no lo comprobaremos. En la práctica, los programas informáticos utilizados encontrarán los óptimos del problema, aunque éste esté en un punto que no satisfaga estas cualificaciones.

2.4.2. Puntos estacionarios.

Procedemos entonces, tras haber establecido ciertos conceptos básicos en la sección anterior, a establecer condiciones necesarias y suficientes de optimalidad para nuestro problema (PNL). Empezaremos definiendo el concepto de punto estacionario de Kuhn-Tucker para nuestra función de Lagrange $\mathcal{L}$. Tras ello, estudiaremos su relación con las soluciones del problema (PNL). Como veremos, la cualificación de restricciones se utilizará en la condición necesaria, mientras que las propiedades de convexidad se usarán en los teoremas de suficiencia.

Así pues, definimos:

Definición 2.6: Punto estacionario de Kuhn-Tucker

Dados el problema (PNL) y la función de Lagrange $\mathcal{L}$ asociada a él, $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \in D \times \mathbb{R}^m$ es un punto estacionario de Kuhn-Tucker si verifica las llamadas condiciones de Kuhn-Tucker, dadas de dos formas equivalentes:

$$
\begin{array}{llll}
\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \nabla_x f(\mathbf{x}^0) - J\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)\boldsymbol{\lambda}^0 = \mathbf{0}; & (a) \\
\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \geq \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \leq \mathbf{b}; & (b) \\
\lambda^{0t}\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\lambda}^{0t}(\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) - \mathbf{b}) = \mathbf{0}; & (c) \\
\boldsymbol{\lambda}^0 \geq \mathbf{0} & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{0}} \geq \mathbf{0}. & (d)
\end{array}
$$

Una vez definido el concepto de punto estacionario de Kuhn-Tucker, podemos formular la condición necesaria que deben cumplir las soluciones del problema (PNL), es decir, el teorema en el que se establece qué condiciones deben verificar necesariamente los óptimos de (PNL).

Teorema 2.12: Condición necesaria de óptimo de (PNL)

Sea $\mathbf{x}^*$ un óptimo local de (PNL) en el que se verifica la cualificación de restricciones de independencia lineal. Entonces, existe un vector de multiplicadores $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$, tal que $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ es un punto estacionario de Kuhn-Tucker para la función de Lagrange asociada al problema.

Gracias a la formulación de punto estacionario de Kuhn-Tucker, este teorema afirma que, si se verifica la cualificación de restricciones de independencia lineal en $\mathbf{x}^*$, entonces necesariamente todo óptimo local del problema es un punto estacionario de Kuhn-Tucker. Por lo tanto, es posible, aunque poco probable en casos prácticos, que el óptimo del problema se encuentre en un punto que no satisface la cualificación de restricciones, y que no es un punto estacionario.

Antes de exponer las condiciones suficientes para nuestro problema, vamos a detenernos en estudiar ciertos detalles, tanto de la definición de punto estacionario, como del teorema que nos ofrece las condiciones necesarias para (PNL), relacionándolo con los conceptos equivalentes para el problema (PRI) expuesto en el epígrafe anterior, para comprobar la similitud entre ellos.

- Es fácil comprobar la similitud de la condición (a) con la condición $\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ del problema (PRI).

- Respecto de la condición (b), recordemos que, en el problema (PRI), la condición $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$ nos devolvía las restricciones de igualdad del problema. Análogamente, ahora la condición (b) nos devuelve las restricciones de desigualdad del problema (PNL).

- La condición (d) exige que todos los multiplicadores deben ser no negativos, lo cual, si lo analizamos detenidamente, es fácil de justificar. Si existiera algún $\lambda_j^* < 0$, de acuerdo con la expresión

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(\mathbf{b}))}{\partial b_j} = \lambda_j^* \quad j = 1, ..., m,$$

una disminución del valor de b_j originaría un aumento del valor de la función objetivo en el máximo. Si la disminución de b_j es suficientemente pequeña, el conjunto de oportunidades resultante es un subconjunto del de partida. Luego si el valor óptimo de la función objetivo aumentase en dicho subconjunto, ello estaría en contradicción con que $\mathbf{x}^*$ fuera el máximo del problema original.

- La condición (c), denominada condición de *holgura complementaria*, puede parecer, inicialmente, la que más difiere de las condiciones vistas para el problema (PRI). Sin embargo, lo que hace realmente es aclararnos el comportamiento del punto óptimo respecto de las restricciones activas. En efecto, la condición (c) implica que:

$$\boldsymbol{\lambda}^{*t}(\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(g_i(x^*) - b_i) = 0.$$

Por otro lado, de las condiciones (b) y (d) se deduce que todos los sumandos de la suma anterior son no positivos, ya que el primer factor es no positivo por (b) y el segundo es no negativo por (d). Por lo tanto, si la suma es igual a 0, cada uno de los sumandos debe ser 0:

$$\lambda_i^*(g_i(x^*) - b_i) = 0 \quad i = 1, ..., m.$$

De estas condiciones de holgura complementaria podemos extraer las siguientes conclusiones:

  - Si la restricción i-ésima es activa, $(g_i(x^*) - b_i) = 0$, entonces se deberá determinar el valor del multiplicador óptimo correspondiente a través del resto de las ecuaciones resultantes de las condiciones de punto estacionario de Kuhn-Tucher, sabiendo que $\lambda_i^* \geq 0$. En este caso, es muy usual que λ_i^* sea estrictamente mayor que cero.
  - Si la restricción i-ésima es inactiva, $(g_i(x^*) - b_i) < 0$, entonces el valor del multiplicador es nulo, $\lambda_i^* = 0$.

Analizadas las condiciones de punto estacionario de Kuhn-Tucker, formularemos las condiciones suficientes, es decir, el teorema que afirma bajo qué condiciones un punto estacionario de Kuhn-Tucker es máximo global del problema.

Teorema 2.13: Condición suficiente de óptimo de (PNL)

Supongamos que D es un conjunto abierto y no vacío en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}^*$ un punto factible. Supongamos que f es cóncava en D y que el conjunto de oportunidades $X = \{\mathbf{x} \in D / g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i = 1, ..., m\}$, es un conjunto convexo. Además, supongamos que se verifican las condiciones de Kuhn-Tucker en $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Entonces, $\mathbf{x}^*$ es una solución global del problema (PNL).

Este teorema admite una formulación similar para el problema de mínimo, con las correspondientes definiciones de los puntos estacionarios, y suponiendo que la función f sea convexa.

Con el fin de mostrar el proceso en la resolución de un problema no lineal con desigualdades, exponemos a continuación un ejemplo, aunque en este caso no posea enunciado económico:

Ejemplo 2.9: Problema no lineal

Resuelva el siguiente problema utilizando las condiciones de punto estacionario de la función de Lagrange para problemas con restricciones de desigualdad:

$$\begin{cases} Max & xy \\ s.a & y \leq -x^2+4 \quad (R1) \\ & y \geq x-1 \quad (R2) \\ & x \geq 0 \quad (R3) \\ & y \geq 0 \quad (R4). \end{cases}$$

Solución

Aunque el enunciado no nos pide analizar el cumplimiento de los teoremas de Weierstrass y local global, siempre debe hacerse para poder avanzar con algún conocimiento de lo que nos podemos encontrar.
El conjunto de oportunidades es cerrado, puesto que las desigualdades contienen la igualdad, y es acotado puesto que (R1), (R2) y (R3) no nos permiten alejarnos hasta el infinito, o dicho más formalmente, puesto que se puede encerrar en una bola de radio finito (en la Figura 2.5 aparece el conjunto de oportunidades sombreado en azul). La función objetivo es continua. Por todo ello, podemos decir que se verifica el teorema de Weierstrass y tenemos asegurada la existencia de solución global.
Por otra parte, el conjunto factible es convexo, puesto que cada restricción define un conjunto convexo. Pero la función objetivo no es cóncava, ya que su matriz hessiana no es definida negativa, sino indefinida, con lo cual no podemos aplicar el teorema local global para máximo. Por lo tanto, pueden existir máximos locales que no sean globales.
Vamos a aplicar las condiciones de punto estacionario, sin tener en cuenta, de momento, la representación gráfica del conjunto de oportunidades y las curvas de nivel de la función objetivo, aunque como veremos posteriormente, en estos casos nos facilitará bastante la labor.
Para determinar los puntos estacionarios de Kuhn-Tucker, hemos de construir la función de Lagrange y aplicar las condiciones necesarias de punto estacionario. Pero antes, hemos de convertir todas las restricciones en desigualdades del tipo $\leq$, con lo cual el problema quedaría:

$$\begin{cases} Max & xy \\ s.a & y \leq -x^2+4 \quad (R1) \\ & x-y \leq 1 \quad (R2) \\ & -x \leq 0 \quad (R3) \\ & -y \leq 0 \quad (R4). \end{cases}$$

La función de Lagrange asociada es:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = xy - \lambda_1(y+x^2-4) - \lambda_2(x-y-1) - \lambda_3(-x) - \lambda_4(-y),$$

y las condiciones necesarias de punto estacionario correspondiente a los bloques (a) y (b)

serían:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial x} = y - 2\lambda_1 x - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial y} = x - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = -(y + x^2 - 4) \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2} = -(x - y - 1) \geq 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_3} = -(-x) \geq 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_4} = -(-y) \geq 0. \tag{2.6}$$

Las condiciones de holgura complementaria son:

$$\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = -\lambda_1(y + x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ y + x^2 = 4 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2} = -\lambda_2(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\lambda_3 \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_3} = -\lambda_3(-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\lambda_4 \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_4} = -\lambda_4(-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = 0 \\ y = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

y, por último:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0.$$

Por tanto, para obtener todos los puntos estacionarios de Kuhn-Tucker, deberemos determinar aquellos valores de $(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ que cumplan tanto las restricciones de igualdad como de desigualdad. El procedimiento a seguir consistirá en considerar únicamente, por el momento, las condiciones de igualdad generadas y resolver dicho sistema de ecuaciones, comprobando con posterioridad que se cumplen las desigualdades restantes (que aseguran que el punto pertenezca al conjunto de oportunidades y que los multiplicadores de Kuhn-Tucker sean no negativos).

Si nos centramos en las restricciones de igualdad, vemos que son 6, el mismo número que variables a determinar. Este hecho siempre se dará. Las 6 ecuaciones corresponden a las dos primeras:

$$y - 2\lambda_1 x - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \tag{2.11}$$

$$x - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \tag{2.12}$$

junto con las 4 condiciones de holgura complementaria. Sin embargo, observamos que cada una de estas últimas se descompone en dos. Por ejemplo, para cumplirse la primera de ellas, $-\lambda_1(y + x^2 - 4) = 0$ puede ocurrir que $\lambda_1 = 0$, o bien que $(y + x^2 - 4) = 0$. Esto además nos informa de dos posibles opciones: que la restricción sea inactiva o bien que se obligue a que dicha restricción sea activa. Todo esto hace que nuestro sistema inicial a resolver se desdoble en 2^4 sistemas distintos (2 debido a las opciones en la que se descompone cada condición de holgura complementaria y 4 por ser el número de condiciones de holgura complementaria que poseemos):

$Sistema1$	$Sistema2$	$Sistema3$	$Sistema4$	$Sistema5$	$Sistema6$
(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)
(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$x - y = 1$	$x - y = 1$
$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 0$	$x = 0$	$x = 0$	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 0$
$\lambda_4 = 0$	$y = 0$	$\lambda_4 = 0$	$y = 0$	$\lambda_4 = 0$	$y = 0$

$Sistema7$	$Sistema8$	$Sistema9$	$Sistema10$	$Sistema11$	$Sistema12$
(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)
(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)
$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$	$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$
$x - y = 1$	$x - y = 1$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 = 0$
$x = 0$	$x = 0$	$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$\lambda_4 = 0$	$y = 0$	$\lambda_4 = 0$	$y = 0$	$\lambda_4 = 0$	$y = 0$

$Sistema13$	$Sistema14$	$Sistema15$	$Sistema16$
(2.1)	(2.1)	(2.1)	(2.1)
(2.2)	(2.2)	(2.2)	(2.2)
$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$	$y + x^2 = 4$
$x - y = 1$	$x - y = 1$	$x - y = 1$	$x - y = 1$
$\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$\lambda_4 = 0$	$y = 0$	$\lambda_4 = 0$	$y = 0$

Como puede comprobarse, el trabajo puede ser muy laborioso, incluso cuando no sea muy complicado. Aunque en este ejercicio simple muchos de los sistemas son fáciles de resolver, no siempre tiene por qué ocurrir lo mismo. Dejamos al lector la resolución de los sistemas. Cuando deseamos comprobar si los puntos estacionarios obtenidos son las soluciones óptimas de nuestro problema, aplicando las condiciones suficientes, no podemos concluir nada pues nuestra función objetivo no es cóncava. Sin embargo, si la resolución de los sistemas diese como resultado un único punto estacionario, podríamos deducir que éste es un óptimo global del problema, ya que el teorema de Weierstrass nos asegura su existencia.

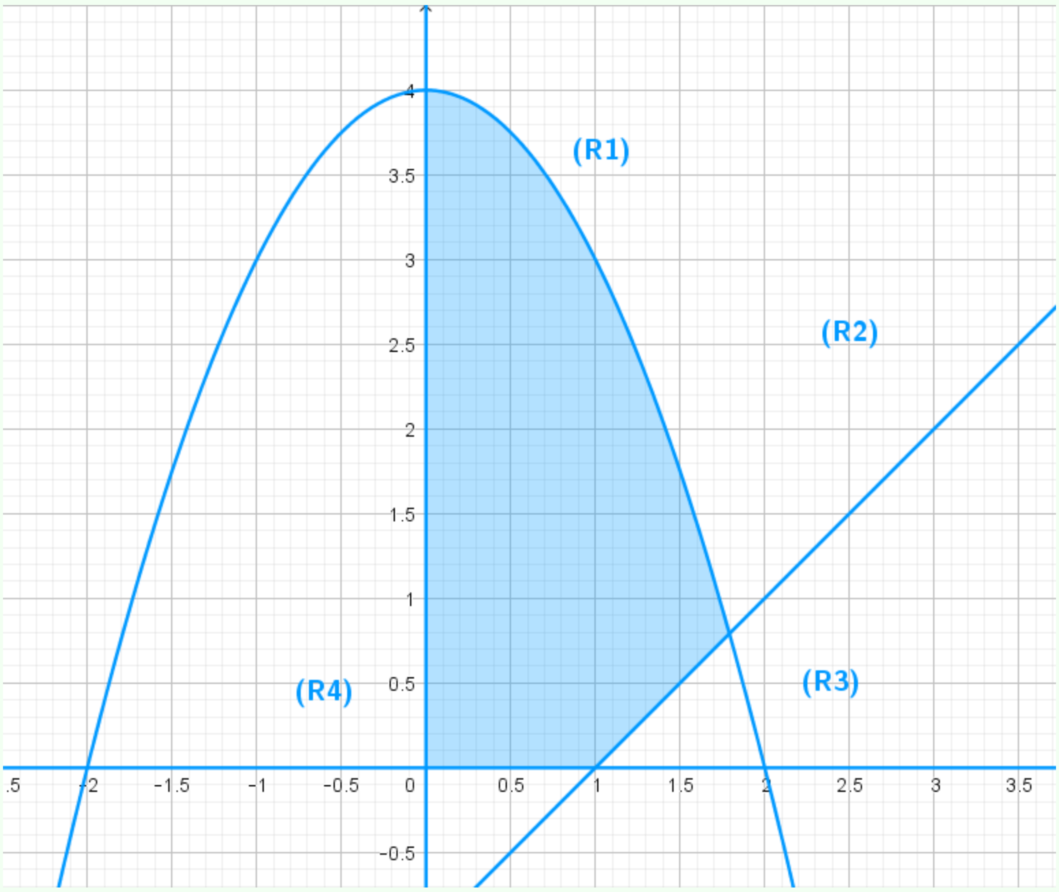


Figura 2.5: Conjunto de oportunidades.

Si observamos la gráfica del conjunto de oportunidades en la Figura 2.5, podemos observar una correspondencia entre cada uno de los sistemas generados con una parte del conjunto de oportunidades. Veamos algunos ejemplos:

- El Sistema 1 implicaría que todos los multiplicadores fueran nulos, es decir, todas las restricciones inactivas y por tanto estaríamos buscando una solución interior de nuestro conjunto de oportunidades.
- El Sistema 5 implicaría que el óptimo se encontraría en la zona factible donde la segunda restricción fuera activa $x - y = 1$, con las demás inactivas, es decir el óptimo estaría sobre ese trozo de la recta que es frontera de nuestro conjunto de oportunidades.
- El Sistema 13 corresponde al punto de corte de la recta y la parábola.
- Existen otros sistemas imposibles de cumplir, como el Sistema 16.
- etc.

Como conclusiones del ejemplo anterior, podemos observar dos cuestiones. En primer lugar, el número de sistemas de ecuaciones a resolver es alto (incluso con problemas de dimensiones muy pequeñas) para ser un procedimiento operativo de resolución de problemas. Esta labor se simplificaría mucho si conociéramos en qué región de nuestro conjunto de oportunidades se encuentra nuestro óptimo, pues sólo sería necesario resolver uno de dichos sistemas de ecuaciones. En segundo lugar, una vez determinado el punto estacionario, las condiciones suficientes del Teorema 2.13 son especialmente exigentes para cumplirse, aunque bien es cierto que su cumplimiento nos aseguraría un óptimo global. Pero es posible que tengamos un óptimo global aunque no se cumplan dichas condiciones suficientes. Sería conveniente encontrar condiciones de suficiencia local más fáciles de cumplir, aunque nos aportarían menor información. Abordaremos estas cuestiones en el resto de este epígrafe.

2.4.3. Condiciones de suficiencia local

En primer lugar veremos condiciones de suficiencia local en la misma línea de lo mostrado en el Teorema 2.4.2. Posteriormente, conduciremos nuestro estudio a dar respuesta conjunta a las dos cuestiones planteadas al final del epígrafe anterior, incluyendo tanto las condiciones necesarias como las suficientes.

A lo largo de los apartados anteriores, hemos visto que es muy importante el concepto de restricción activa en el punto óptimo. Es más, parece claro que, en un análisis local, podemos ignorar aquellas que no lo son, debido a que están lo suficientemente lejos del punto como para no influir en su carácter de óptimo local. El hecho de que a las restricciones no activas se le asignen multiplicadores de Kuhn-Tucker nulos, eliminándolos así de la función lagrangiana, no hace sino corroborar esta idea. Un primer resultado de condiciones suficientes locales es el siguiente teorema (recordemos que $I_{\mathbf{x}^*}$ es el conjunto de restricciones activas en el punto $\mathbf{x}^*$).

Teorema 2.14: Condiciones de suficiencia local sobre las funciones de (PNL)

Supongamos que D es un conjunto abierto y no vacío en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{x}^*$ un punto factible y supongamos que f es cóncava en $\mathbf{x}^*$ y que las funciones $g_i, i \in I_{\mathbf{x}^*}$, son convexas y diferenciables en $\mathbf{x}^*$. Además, supongamos que se verifican las condiciones de punto estacionario de Kuhn-Tucker en $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Entonces, $\mathbf{x}^*$ es un máximo local del problema (PNL).

Si observamos las condiciones suficientes formuladas hasta ahora, tanto la global como la local, vemos que exigen la concavidad (global o local) de la función objetivo, por lo que no podremos asegurar nada de nuestro punto estacionario si esta condición no se cumple. Pues bien, ahora vamos a deducir condiciones suficientes de optimalidad local, basadas en la función de Lagrange, que relajan algo estas condiciones de concavidad.

Partiendo del problema (PNL), sea $\mathbf{x}^*$ un punto factible, y supongamos que las restricciones activas en él, $g_i, i \in I_{\mathbf{x}^*}$, son diferenciables, y que las no activas $g_j, j \in J_{\mathbf{x}^*}$, son continuas. Para analizar la optimalidad de $\mathbf{x}^*$, en primer lugar, habrá que caracterizar de alguna forma los puntos factibles que hay en un entorno suyo. Dicho de otra forma, ¿en qué dirección podremos movernos a partir de $\mathbf{x}^*$ para asegurar que no nos vamos a salir del conjunto de oportunidades, si el movimiento es suficientemente pequeño? Es claro que si $g_j(\mathbf{x}^*) < b_j, j \in J_{\mathbf{x}^*}$, entonces para todo $\mathbf{x}$ en un entorno suficientemente pequeño de $\mathbf{x}^*$, por la continuidad de g_j, se verificará $g_j(\mathbf{x}) < b_j$. Por tanto, ningún movimiento suficientemente pequeño en ninguna dirección causará la violación de la restricción no activa g_j.

Podemos deducir entonces que sólo las restricciones activas $g_i, i \in I_{\mathbf{x}^*}$, imponen alguna restricción efectiva sobre los movimientos factibles. Además, al ser las restricciones, en general, no lineales, un movimiento rectilíneo puede no ser admisible, por lo que supondremos que nos movemos a lo largo de un arco factible (al que también llamaremos perturbación factible) $\boldsymbol{\alpha}(\theta), \theta \in [0, \gamma)$, es decir, a lo largo de un arco en $\mathbb{R}^n$, parametrizado por la variable real θ, de forma que $\boldsymbol{\alpha}(0) = \mathbf{x}^*$. Denotemos por $\mathbf{p}$ la tangente a este arco en $\theta = 0$:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha}'(0).$$

La variación de las funciones g_i a lo largo del arco se medirá por las derivadas:

$$\frac{d}{d\theta} g_i(\boldsymbol{\alpha}(\theta)).$$

En particular, en el punto $\theta = 0$,

$$\frac{d}{d\theta} g_i(\boldsymbol{\alpha}(\theta))\bigg|_{\theta=0} = \nabla g_i(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{p}.$$

Para que los puntos del arco sean factibles, es necesario que esta derivada sea menor o igual que cero, ya que g_i no puede crecer a lo largo de dicho arco. Así, si denotamos por $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t$ la matriz cuyas filas están formadas por los gradientes $\nabla g_i(\mathbf{x}^*), i \in I_{\mathbf{x}^*}$, esta condición se traduce en:

$$J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{p} \leq \mathbf{0}.$$

Sin embargo, esta condición no caracteriza plenamente a los arcos factibles. Para que esto sea así, es necesario incluir alguna cualificación de restricciones. En este caso, utilizaremos la de la independencia lineal, que en el problema que nos ocupa equivale a que la matriz $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t$ tenga rango completo por filas. Si esto sucede, entonces la condición dada es también suficiente, en el sentido de que toda dirección $\mathbf{p}$ que la satisfaga es tangente a algún arco factible con origen en $\mathbf{x}^*$. Por tanto, dado que se verifica la cualificación de restricciones, la expresión anterior caracteriza la tangente de los arcos factibles.

Podemos así distinguir entre dos tipos de perturbaciones factibles a partir de $\mathbf{x}^*$. Aquellas para las que $\mathbf{p}$ verifica $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} = \mathbf{0}$ se denominarán vinculantes, mientras que aquellas en las que $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} < \mathbf{0}$ recibirán el nombre de no vinculantes.

Si nos movemos a lo largo de una perturbación vinculante, para que $\mathbf{x}^*$ sea óptimo local, es fácil comprobar que f debe ser estacionaria a lo largo de dicha dirección, es decir, se debe verificar que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i \in I_{\mathbf{x}^*}} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0,$$

donde λ^* es el vector de multiplicadores de Kuhn-Tucker asociado a $\mathbf{x}^*$.

Ahora bien, si nos movemos a lo largo de una perturbación no vinculante, podría darse el caso de un arco $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$, tal que $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} < \mathbf{0}$. Para que $\mathbf{x}^*$ sea máximo local del problema, no puede suceder que f crezca a lo largo del arco $\boldsymbol{\alpha}(\theta)$, puesto que ello contradiría la maximalidad de $\mathbf{x}^*$. Debemos pues asegurar que si $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} < \mathbf{0}$, f no pueda crecer, hecho que queda asegurado cuando $\lambda^* \geq 0$.

Así pues, las condiciones necesarias de máximo local de $\mathbf{x}^*$ obtenidas hasta ahora son:

i) $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}$,

ii) $\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i \in I_{\mathbf{x}^*}} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$,

iii) $\lambda_i^* \geq 0, \quad i \in I_{\mathbf{x}^*}$,

que son, precisamente, las condiciones de Kuhn-Tucker.

Estas son condiciones necesarias de primer orden, puesto que en ellas sólo se utilizan derivadas de primer orden de las funciones que intervienen en el problema. Se puede llegar más allá y establecer condiciones necesarias de segundo orden (en las que también intervengan segundas derivadas de las funciones). Dichas condiciones necesarias de segundo orden para que $\mathbf{x}^*$ sea un máximo local de f, provienen del hecho de que f tenga curvatura no positiva en $\mathbf{x}^*$ a lo largo de cualquier arco factible tal que $J\mathbf{g}_A(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} = \mathbf{0}$ (y así f no crece a lo largo de dichos arcos). En este caso, puede probarse (Gill, Murray y Wright, 1981) que las condiciones necesarias locales de segundo orden para punto máximo son:

i) $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}, \quad g_i(\mathbf{x}^*) = b_i, \ (i \in I_{\mathbf{x}^*})$,

ii) $\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i \in I_{\mathbf{x}^*}} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$,

iii) $\lambda_i^* \geq 0, \quad i \in I_{\mathbf{x}^*}$,

iv) la forma cuadrática $\mathbf{p}^t H_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)\mathbf{p}$, restringida a $J\mathbf{g}_{I\mathbf{x}^*}(\mathbf{x}^*)^t\mathbf{p} = \mathbf{0}$, es semidefinida negativa.

Para obtener las condiciones suficientes locales y relajar la condición de convexidad y concavidad de los Teoremas 2.13 y 2.14, se han de tener en cuenta dos detalles:

a) Debemos exigir que la forma cuadrática restringida sea definida negativa, para así tener asegurado que lo sigue siendo (por continuidad) cerca de $\mathbf{x}^*$, y, por tanto, aseguramos que f no crece en un entorno del óptimo.

b) El multiplicador de Lagrange correspondiente a la i-ésima restricción activa mide, como se ha visto (hasta el primer orden), el cambio que tendría lugar en la función objetivo a lo largo de un arco factible que no fuera vinculante con respecto a la j-ésima restricción y sí lo fuera con respecto a las demás restricciones activas. Cuando $\lambda_i^* > 0$, entonces f decrece a lo largo de dicho arco. Pero si $\lambda_i^* = 0$, entonces no podríamos asegurar nada sobre el comportamiento de f. Así, las condiciones de suficiencia local toman la forma:

   i) $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}, \quad g_i(\mathbf{x}^*) = b_i, \ (i \in I_{\mathbf{x}^*})$,

   ii) $\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i \in I_{\mathbf{x}^*}} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$,

   iii) $\lambda_i^* > 0, \quad i \in I_{\mathbf{x}^*}$,

   iv) la forma cuadrática $\mathbf{p}^t H_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{p}$, restringida a $J\mathbf{g}_{I\mathbf{x}*}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{p} = \mathbf{0}$, es definida negativa.

Por último, para poder admitir multiplicadores nulos, será necesario garantizar de otra forma que f tenga curvatura negativa a lo largo de las correspondientes perturbaciones. Ello se consigue, de forma obvia, no reduciendo la hessiana de la lagrangiana para estas restricciones. Así, si llamamos $J\mathbf{g}_{A+}(\mathbf{x}^*)^t$ a la matriz que contiene, por filas, los gradientes de las restricciones activas con multiplicadores de Kuhn-Tucker estrictamente positivos, las condiciones suficientes quedan como sigue:

i) $\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{b}, \quad g_i(\mathbf{x}^*) = b_i, \ (i \in I_{\mathbf{x}^*})$,

ii) $\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i \in I_{\mathbf{x}^*}} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$,

iii) $\lambda_i^* \geq 0, \quad i \in I_{\mathbf{x}^*}$,

iv) la forma cuadrática $\mathbf{p}^t H_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \mathbf{p}$, restringida a $J\mathbf{g}_{A+}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{p} = \mathbf{0}$, es definida negativa.

En resumen, el proceso se podría interpretar de la siguiente forma: en primer lugar, se identifican las restricciones activas en el punto en cuestión. Posteriormente, se formulan las condiciones de primer orden para problemas con restricciones de igualdad, teniendo en cuenta sólo las mencionadas restricciones activas (que, en el punto bajo estudio, se pueden considerar de igualdad). Finalmente, se añade la condición adicional de no negatividad sobre los multiplicadores óptimos, según vimos previamente. En este caso, no sería necesario plantear la cantidad de sistemas que vimos en el Ejemplo 2.9, ya que bastaría con considerar nuestro problema con las restricciones activas en el óptimo. Además podríamos desear obtener unas condiciones suficientes un poco más suaves que la convexidad global, aunque perdiéramos la seguridad de obtener un óptimo global. Veamos el procedimiento sobre el ejemplo mencionado:

Ejemplo 2.10: Problema no lineal. Resolución con apoyo gráfico

Consideremos el Ejemplo 2.9 y resolvamos el mismo por el procedimiento de restricciones activas. Finalmente, comprobaremos los resultados con el programa *Lingo*.

Solución

Recordemos que la formulación del problema del Ejemplo 2.9 es como sigue:

$$
\begin{cases}
Max & xy \\
s.a & y \leq -x^2 + 4 \quad (R1) \\
 & y \geq x - 1 \quad (R2) \\
 & x \geq 0 \quad (R3) \\
 & y \geq 0 \quad (R4).
\end{cases}
$$

En primer lugar, debemos identificar la(s) restricción(es) activa(s) de nuestro problema, para lo que representamos las curvas de nivel sobre el conjunto de oportunidades. Las curvas de nivel de la función objetivo son $xy = k$. Si $k = 0$, se convierten en las rectas $x = 0$ e $y = 0$. Para $k > 0$, son hipérbolas situadas en el primer y tercer cuadrantes, mientras que para $k < 0$, son hipérbolas en el segundo y cuarto cuadrantes. Ahora bien, como las variables del problema son no negativas, sólo nos interesa la parte de las hipérbolas que están en el primer cuadrante. En tal caso, a medida que le damos a k un valor superior, la parte de la hipérbola resultante en dicho cuadrante está más alejada del origen de coordenadas, luego el crecimiento de la función objetivo es hacia fuera. En consecuencia, la última curva de nivel que toque nuestro conjunto de oportunidades, siguiendo dicha dirección de crecimiento, determinará el máximo de nuestro problema.

En la Figura 2.6 aparecen en rojo las distintas curvas de nivel. Por ejemplo, la curva marcada 0,8 indica que, en cualquier punto del conjunto factible (en azul) que esté sobre la curva, la función objetivo valdría lo mismo, 0,8. En la curva de nivel de valor 1,2, ocurriría algo similar, en todos los puntos del conjunto factible que están en esa curva, la función objetivo vale 1,2. Por todo ello, si seguimos el sentido de crecimiento de esas curvas de nivel, el máximo del problema se encuentra en la última curva que toque el conjunto de oportunidades. Como puede verse en la figura, esto sucede en un punto que está en la frontera y sobre la primera restricción, es decir, sobre la parábola. En consecuencia, la parábola es una restricción activa, mientras que la recta no es una restricción activa, ni tampoco lo son las dos condiciones de no negatividad de las variables.

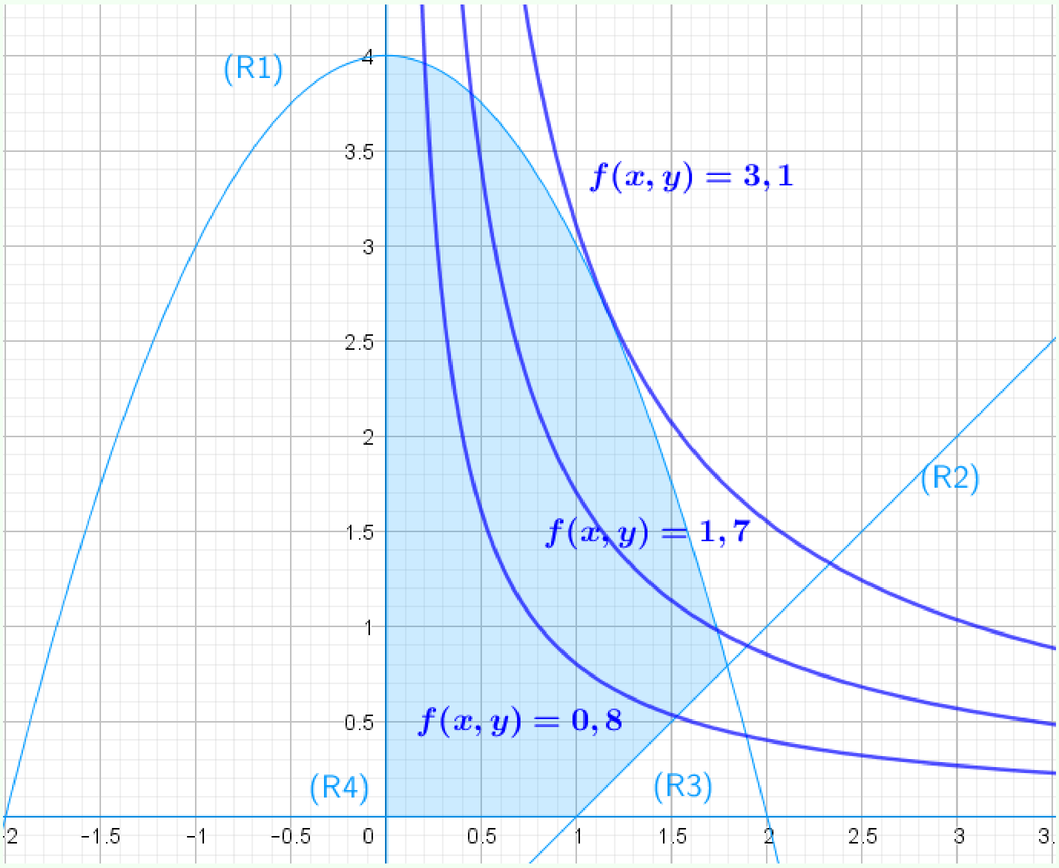


Figura 2.6: Conjunto de oportunidades y curvas de nivel.

En consecuencia, de las opciones que se derivan de las condiciones de holgura complementaria, hemos de utilizar las siguientes:

$$y + x^2 = 4,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = 0.$$

Sustituyendo los valores de estos multiplicadores en las dos primeras ecuaciones de las condiciones necesarias, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} y - 2\lambda_1 x &= 0 \\ x - \lambda_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \lambda_1,\ y = 2x^2,$$

y utilizando la ecuación $y + x^2 = 4$, podemos despejar la variable x:

$$2x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

De los dos valores resultantes, nos quedamos con el positivo, ya que el otro nos llevaría a un punto no factible. Ya podemos calcular el resto de las variables:

$$y = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

En consecuencia, el punto obtenido es:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}; \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0\right).$$

Para concluir que se trata de un punto estacionario, faltaría comprobar que verifica la desigualdad que no hemos utilizado:

$$x - y = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3} = \frac{6 - 8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = -1,51 \leq 2.$$

En consecuencia, el punto anterior es punto estacionario. Para determinar si es el máximo que buscamos, tendremos que aplicar alguna condición suficiente. No podemos utilizar la condición suficiente global o local sobre la función objetivo puesto que ésta no es cóncava. Su matriz hessiana es:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que es indefinida y, por tanto, la función no es cóncava ni convexa.

Vamos a analizar si se verifican las condiciones de suficiencia local sobre la función de Lagrange. Para ello, necesitamos la matriz hessiana reducida de la función de Lagrange, es decir, sólo con respecto a las variables originales del problema, evaluada en el punto estacionario, y el gradiente o la matriz jacobiana de las funciones que determinen las restricciones activas y con multiplicador estrictamente positivo (en nuestro caso, sólo la restricción 1). Por tanto, tenemos:

$$H\mathcal{L}_{(x,y)}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{3}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \nabla g_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{8}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática a clasificar es:

$$(h_1\ h_2)\begin{pmatrix} \frac{-4}{\sqrt{3}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{-4}{\sqrt{3}}h_1^2 + 2h_1h_2$$

$$s.a \quad \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 1\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}}h_1 + h_2 = 0.$$

Esta forma cuadrática sin restringir no tiene signo estricto y, por tanto, hemos de pasar a clasificar la restringida. Para ello, despejamos h_2 de la restricción y sustituimos en la función:

$$h_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}h_1 \Rightarrow \phi_R(h_1) = \frac{-4}{\sqrt{3}}h_1^2 + 2h_1\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}h_1\right) = -\frac{12}{\sqrt{3}}h_1^2,$$

de lo que se desprende que la forma cuadrática restringida es definida negativa y el punto, en consecuencia, es un máximo local para el problema. Como vimos anteriormente, se verifica el teorema de Weierstrass, que garantiza la existencia de un óptimo global. Por lo tanto, si sabemos que sólo existe un máximo local del problema, podemos asegurar que éste es un máximo global. De la misma forma, si tuviésemos la seguridad de haber encontrado todos los máximos locales, el mejor de ellos (aquel con el mayor valor de la función objetivo) sería el máximo global. En nuestro caso, podemos asegurar que el problema sólo tiene el máximo local que hemos encontrado (con la ayuda de la gráfica, aunque hubiésemos llegado a la misma conclusión resolviendo analíticamente todos los sistemas derivados de las condiciones de punto estacionario). Por lo tanto, podemos asegurar que el máximo obtenido es global.

Si resolvemos el problema mediante *Lingo*, debemos introducir el siguiente modelo:

Lingo: Enunciado

```
[FunObj] Max = x*y;
[R1] y+x^2 <= 4;
[R2] y-x >= 1;
[NNegx]x >= 0;
[NNegy]y >= 0;
```

La solución obtenida es la siguiente:

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 3,079201
```

Variable	Valor
X	1,154701
Y	2,666667

FILA	Holgura	Precio dual
FUNOBJ	3,079201	1,000000
R1	0,000000	1,154701
R2	0,5119661	0,000000
NNEGX	1,154701	0,000000
NNEGY	2,666667	0,000000

Debemos hacer dos observaciones. La primera es que las últimas dos restricciones se pueden obviar, si en las opciones de *Lingo* imponemos las condición de no negatividad de las variables (opción que *Lingo* asume por defecto). La segunda, más importante, consiste en observar que *Lingo* nos dice que nuestro máximo es local, cuando realmente es global. Podemos pedirle a *Lingo* que lo verifique, siempre que pueda, marcando en *Solver*→*Options*→*Global Solver*, para que use dicho *Global Solver* en la resolución. En ese caso, para este problema nos informaría de que el máximo es global.

Volvamos a retomar los ejercicios que venimos desarrollando desde el inicio de este tema.

Ejemplo 2.11: Kúbica. Restricciones de desigualdad

La empresa Kúbica, tras considerar el problema con restricciones de igualdad del Ejemplo 2.6, y a la vista de las limitaciones que la restricción imponía sobre sus beneficios, decide negociar con los proveedores para mejorar las condiciones de compra. Como resultado de dicha negociación, se acuerda que la compra de la segunda materia prima no puede rebasar el 150 % de la cantidad comprada de la primera, pero tampoco puede ser inferior a un 110 %. Asimismo, el total de cantidad comprada de ambas materias primas no puede superar las 30 toneladas. Obtenga el máximo beneficio de la empresa tras esta negociación y analice la solución obtenida.

Solución

Al incorporar las nuevas restricciones, el problema de la empresa Kúbica queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Max & B(x,y) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y & \\ s.a & y - \frac{3}{2}x \leq 0 & (R1) \\ & y - 1{,}1 \cdot x \geq 0 & (R2) \\ & x + y \leq 30 & (R3) \\ & x \geq 0 & (R4) \\ & y \geq 0 & (R5). \end{cases}$$

Si resolvemos este problema analíticamente, usando las condiciones de punto estacionario de Kuhn-Tucker, deberemos resolver un conjunto de 2^5 sistemas de 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Sin embargo, al tratarse de un problema de dos variables, es posible realizar un análisis gráfico previo y determinar cuáles son las restricciones activas en el óptimo, para poder calcular el punto estacionario resolviendo un único sistema y posteriormente analizar si cumple las condiciones de suficiencia global o local. Por tanto representamos el conjunto de oportunidades, delimitado por las restricciones (R1), (R2) y (R3) dentro del primer cuadrante, debido a las condiciones de no negatividad de las variables.
La representación del conjunto de oportunidades del problema puede verse en la Figura 2.7, sombreado en azul.

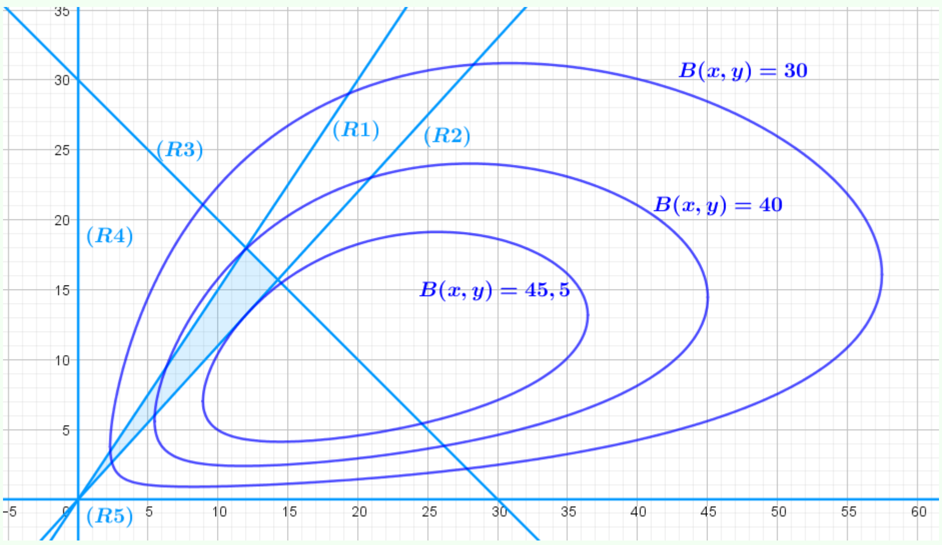


Figura 2.7: Conjunto de oportunidades y curvas de nivel.

Al representar las curvas de niveles 30, 40 y 45,5 (líneas rojas [CN1], [CN2] y [CN3], respectivamente), vemos cuál es el sentido de crecimiento y que la última curva que contacta con el conjunto de oportunidades lo hace sobre la restricción (R2). Por tanto, esta restricción es activa en el óptimo, e inactivas todas las demás. En consecuencia, nuestro problema ha quedado reducido a un único sistema, o bien, a considerar el problema con una única restricción de igualdad, (R2), debiéndose cumplir que su multiplicador óptimo asociado sea no negativo. En este último caso, la función de Lagrange viene expresada por:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 25x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2x - 3y - \lambda\,(y - 1{,}1x)\,.$$

Para la determinación de los puntos estacionarios, deberemos calcular su gradiente, respecto de las tres variables x, y y λ, e igualarlo a cero. De aquí, obtendríamos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, del que podremos obtener los puntos críticos de $\mathcal{L}$, si los hay:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{25}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} - 2 + 1{,}1\lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{25}{4}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{3}{4}} - 3 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -\,(y - 1{,}1x) = 0. \end{cases}$$

Operando de manera similar al Ejemplo 2.6, obtenemos $x = 12,01793$, $y = 13,21973$ y $\lambda = 0,9350649$, que es el único punto crítico de la función de Lagrange y, por tanto, candidato a óptimo de nuestro problema, ya que cumple la condición de que su multiplicador de Kuhn-Tucker asociado sea mayor que cero. Además, dicho punto es máximo global de nuestro problema pues ya vimos que la función objetivo es cóncava y el conjunto de oportunidades convexo.

En dicha solución óptima, el beneficio obtenido es $45,50$, que es mejor que el que teníamos con las condiciones de igualdad, donde era $41,18$. Por tanto las negociaciones con los proveedores han sido productivas. La política óptima de Kúbica consiste ahora en utilizar 12,02 toneladas de la primera materia prima y 13,22 toneladas de la segunda materia prima. Con estos niveles de uso de materias primas, la producción del bien es de 4.367,66 unidades, los ingresos son de 109,19 unidades monetarias y los costes de producción se elevan a 63,70 unidades monetarias.

Por último, el valor óptimo del multiplicador asociado a la restricción activa, $0,94$, nos informa de que si la cantidad utilizada de la segunda materia prima pudiera ser inferior a un 110 % de la cantidad utilizada de la primera, el beneficio óptimo de la empresa Kúbica aumentaría.

Ejemplo 2.12: Fabricando tinta. Restricciones de desigualdad

La empresa del Ejemplo 2.4, *Vaya Tintas que Llevas, S.A.*, decide que el presupuesto de 60.000 € destinado a la adquisición de los pigmentos y colorantes (véase el Ejemplo 2.7) sea un coste máximo, que no se tenga que agotar necesariamente. La fabricación de las tintas se lleva a cabo en dos plantas, que cuentan cada una con una serie de máquinas operadas por trabajadores cualificados. La Planta 1 tiene una capacidad de 210 horas diarias (teniendo en cuenta todas sus máquinas y operarios) y la Planta 2 tiene una capacidad diaria de 280 horas. La empresa produce las tintas *COL* y *PIG* en la Planta 1, y las otras tres en la Planta 2. La Tabla 2.2 muestra el número de horas necesarias para fabricar un litro de cada tipo de tinta. Además, se detecta en la sociedad una mayor aceptación de las tintas menos contaminantes (*ECO* y *CUV*), por lo que decide que su producción conjunta sea al menos de 80 litros diarios.

¿Cuáles serían ahora los precios, producciones e ingreso óptimos? Interprete todos los elementos de la solución óptima.

Tipo de Tinta	**Horas**
COL	2
PIG	2,5
ACU	3,5
ECO	3
CUV	3

Tabla 2.2: Horas necesarias para fabricar las tintas

Solución

En cuanto a los costes de adquisición de los pigmentos y colorantes, la restricción es la misma que el Ejemplo 2.7, pero con desigualdad en lugar de igualdad:

$$350(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 400(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) + 200(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) +$$
$$+250(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + 300(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \leq 60000.$$

Por otra parte, añadimos ahora tres nuevas restricciones:

- Capacidad máxima de la Planta 1:

$$2(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 2,5(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) \leq 210;$$

- Capacidad máxima de la Planta 2:

$$3,5(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) + 3(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + 3(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \leq 280;$$

- Producción mínima de tintas ecológicas:

$$(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + (100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \geq 80.$$

A estas restricciones, hay que añadir las condiciones de no negatividad sobre las variables del problema. Por lo tanto, el nuevo modelo para este problema queda como sigue:

$$
\begin{cases}
Max & I(p_{COL}, p_{PIG}, p_{ACU}, p_{ECO}, p_{CUV}) = \\
 & = (120 - 0{,}06 * p_{COL})p_{COL} + (135 - 0{,}07 * p_{PIG})p_{PIG} + \\
 & +(50 - 0{,}02 * p_{ACU})p_{ACU} + (75 - 0{,}03 * p_{ECO})p_{ECO} + \\
 & +(100 - 0{,}05 * p_{CUV})p_{CUV}, \\
s.a & 350(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 400(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) + \\
 & +200(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) + 250(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + \\
 & +300(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \leq 60000; \\
 & 2(120 - 0{,}06 * p_{COL}) + 2,5(135 - 0{,}07 * p_{PIG}) \leq 210; \\
 & 3,5(50 - 0{,}02 * p_{ACU}) + 3(75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + \\
 & +3(100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \leq 280; \\
 & (75 - 0{,}03 * p_{ECO}) + (100 - 0{,}05 * p_{CUV}) \geq 80; \\
 & p_{COL}, p_{PIG}, p_{ACU}, p_{ECO}, p_{CUV} \geq 0.
\end{cases}
$$

Introduzcamos el modelo en *Lingo*, siguiendo la metodología que usamos en los ejemplos anteriores:

Lingo: Enunciado (restricciones de desigualdad)

```
[Ingreso] Max = Qcol*Pcol+Qpig*Ppig+Qacu*Pacu+Qeco*Peco+Qcuv*Pcuv;
[Prod_COL] Qcol = 120-0.06*Pcol;
[Prod_PIG] Qpig = 135-0.07*Ppig;
[Prod_ACU] Qacu = 50-0.02*Pacu;
[Prod_ECO] Qeco = 75-0.03*Peco;
[Prod_CUV] Qcuv = 100-0.05*Pcuv;
[Costes_materias_primas] 350*Qcol+400*Qpig+200*Qacu+250*Qeco+300*Qcuv
<= 60000;
[Planta_1] 2*Qcol+2.5*Qpig <= 210;
[Planta_2] 3.5*Qacu+3*Qeco+3*Qcuv <= 280;
[Tintas_eco] Qeco+Qcuv >= 80;
```

Recordemos que *Lingo* asume por defecto las condiciones de no negatividad, por lo que no es necesario introducirlas en el modelo. Esto implica que también las asume sobre las variables instrumentales que hemos definido para las producciones, lo cual también es conveniente. Resolviendo el problema, obtenemos los siguientes resultados en *Lingo*:

Lingo: Solución del problema con restricción de igualdad

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 234.148,40
```

Precios		Producciones	
Variable	Valor	Variable	Valor
Pcol	1.232,472	Qcol	46,052
Ppig	1.254,876	Qpig	47,159
Pacu	1.928,571	Qacu	11,429
Peco	1.343,750	Qeco	34,688
Pcuv	1.093,750	Qcuv	45,313

Fila	Holgura	Precio dual
INGRESO	234.148,4	1,000000
COSTES_MATERIAS_PRIMAS	467,1109	0,000000
PLANTA_1	0,000000	232,4723
PLANTA_2	0,000000	387,7551
TINTAS_ECO	0,000000	-975,7653

Según la solución obtenida, la empresa *Vaya Tintas que Llevas, S.A.* debe vender cada litro de tinta *COL* a 1.232,47 €, cada litro de tinta *PIG* a 1.254,88 €, cada litro de tinta *ACU* a 1.928,57 €, cada litro de tinta *ECO* a 1.343,75 € y cada litro de tinta *CUV* a 1.093,75 €. Con ello, obtendrá unos ingresos diarios de 234.148,40 €. Con estos precios, la empresa producirá diariamente 46,05 litros de tinta *COL*, 47,16 litros de tinta *PIG*, 11,43 litros de tinta *ACU*, 34,69 litros de tinta *ECO* y 45,31 litros de tinta *CUV*.

Comparando este resultado con el del problema con restricción de igualdad del Ejemplo 2.7, podemos observar que el ingreso máximo ha disminuido, debido a las nuevas restricciones, mientras que los precios y producciones han variado de forma distinta (unos han aumentado y otros han disminuido) para adaptarse a estas nuevas restricciones.

A la vista de la tabla que contiene los datos de las restricciones, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- No se agota por completo el presupuesto destinado a la adquisición de pigmentos y colorantes, del que sobran 467,11 €.
- Se utilizan por completo las capacidades productivas de las dos plantas. Los multiplicadores óptimos de ambas restricciones son positivos, por lo que los ingresos óptimos aumentarían si se aumentasen las horas disponibles en las dos plantas. Además, pode-

mos ver que resultaría más provechoso aumentar la capacidad productiva de la Planta 2, ya que su multiplicador óptimo es mayor.

- Se producen exactamente los 80 litros diarios en total de las tintas *ECO* y *CUV*. Además, vemos que la producción de estas tintas a estos niveles no está resultando rentable, ya que el multiplicador óptimo de la restricción es negativo, por lo que los ingresos óptimos aumentarían si disminuyese la cantidad mínima exigida de esas tintas.

- Cabe resaltar que al usar *Lingo*, puede resultar un multiplicador negativo, pues la restricción se ha mantenido de mayor o igual. Además, en caso de trabajar con restricciones de igualdad, el multiplicador puede resultar positivo o negativo[a]. En todo caso, la interpretación es igualmente válida.

[a]En general, el valor óptimo de los multiplicadores que arroja *Lingo* se interpreta como mejora de la función objetivo si éste es positivo, o empeoramiento si es negativo. Por tanto, en caso de minimizar la función objetivo, un multiplicador positivo significa que, si aumenta el término independiente, el valor de la función objetivo disminuye.

Capítulo 3

Programación lineal

La programación lineal (*PL*) es un caso particular de la programación no lineal (*PNL*) estudiada en el capítulo anterior, y por tanto todos los resultados y métodos desarrollados anteriormente son válidos para el tipo de problemas que estudiamos en este capítulo. La pregunta que nos podríamos plantear sería ¿qué sentido tiene estudiar este tipo de problemas si se puede aplicar todo lo visto previamente? La respuesta a esta pregunta tiene varias vertientes que fundamentan la necesidad de su estudio:

- Los métodos de resolución analíticos de (*PNL*) son muy complejos cuando los problemas adquieren una cierta dimensión, mientras que, para los modelos de programación lineal, los métodos analíticos tienen una complejidad menor y se pueden aplicar a problemas con mayores dimensiones.

- Las propiedades especiales de los problemas lineales hacen que se puedan obtener potentes resultados, tanto con respecto a sus soluciones óptimas, como referentes a los *análisis de post-optimización*, que permiten realizar un análisis muy completo de estos modelos.

- Los problemas lineales fueron formulados y usados para la resolución de modelos con anterioridad a los no lineales con restricciones de igualdad. En concreto, en los años 40 del siglo pasado, ya fueron desarrollados esos métodos, e implementados en los ordenadores de aquella época, por poseer un algoritmo iterativo y relativamente simple que era capaz de determinar la solución cuando existía, o de informarnos cuándo nuestro problema carecía de ella.

- En el ámbito de la Economía y la Empresa, los modelos no lineales son más propios de los desarrollos de la Teoría Económica donde, muchas veces, sólo es necesario obtener resultados y relaciones teóricas entre las variables y funciones implicadas. El uso de los modelos lineales es más propio del ámbito de la Economía Aplicada y de la Empresa, donde el número de variables y condiciones son mayores y se necesitan resultados concretos para los problemas formulados. Por ello, se han desarrollado métodos y procedimientos para abordar estos problemas, como veremos en este capítulo, así como para problemas más complejos, como veremos en el capítulo posterior. Con el paso de los años, esos procedimientos para los problemas lineales complejos también se fueron extendiendo a problemas no lineales.

El método más tradicional para la determinación de la solución de un problema lineal es el *Método del Símplex*, del que se han ido desarrollando mejoras de tipo computacional con el paso del tiempo. Sin embargo, este documento no se centra en el aprendizaje del algoritmo de este método, sino en saber modelizar los problemas económicos y empresariales y obtener conclusiones a partir de la solución obtenida.

El resto del presente capítulo formulará, en primer lugar, el problema lineal, para exponer en el siguiente epígrafe las características generales del modelo y sus soluciones. En el tercer epígrafe, se estudiará el problema dual asociado a un problema lineal, así como la interpretación de las variables duales (multiplicadores). A continuación, se abordan los aspectos relacionados con el análisis post-óptimo de la solución obtenida, especialmente la sensibilidad de nuestra solución óptima ante cambios en ciertos datos del problema. Finalmente, se presenta un ejemplo de mayores dimensiones.

De igual forma que en el capítulo anterior, iremos desarrollando los distintos conceptos introducidos sobre dos problemas, uno con sólo dos variables para poder ver un análisis gráfico del que podamos obtener conclusiones, y otro con un mayor número de variables que nos permita modelizar una situación más próxima a la realidad.

3.1. Formulación del problema lineal.

Dentro del marco general de los problemas de Programación Matemática estudiados en el capítulo anterior:

$$\begin{cases} Max & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in D, \end{cases}$$

existen una gran cantidad de casos, de mucha utilidad en aplicaciones prácticas, donde tanto la función objetivo como las restricciones son funciones lineales. Estos problemas reciben el nombre de problemas de programación lineal (PL) y siguen el siguiente modelo general:

$$\boxed{(PL) \quad \begin{cases} Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ s.a & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases}}$$

donde:

a) La función objetivo f es lineal:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Los coeficientes de la función objetivo, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, se denominan *costes*.

b) La matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ representa los coeficientes de las restricciones, que, en general, las consideraremos de desigualdad:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{gathered}$$

Los elementos a_{ij} de la matriz A se denominan *coeficientes técnicos* y a los términos independientes de las restricciones, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, los llamamos *recursos*.

c) Finalmente, es habitual debido al origen de los modelos iniciales donde se formularon estos problemas lineales, incluir las restricciones correspondientes a la no negatividad de las variables:

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; \ldots, x_n \geq 0,$$

aunque estas condiciones se pueden considerar como restricciones del bloque anterior.

Este modelo (al que se suele llamar modelo en *forma estándar*) recoge cualquier otra posible formulación, en lo que se refiere a que la función sea de minimizar, que el sentido de las restricciones sea distinto, o que no aparezcan restricciones de no negatividad en las variables de decisión, como ya comentamos en el capítulo anterior.

La transformación de un problema a formato estándar es necesaria cuando el problema lineal se resuelve mediante algoritmos tradicionales como el Método del Símplex (Dantzig, 1949). Éste exige que los recursos y las variables sean no negativos. No obstante, en nuestro contexto, tal como se ha comentado previamente, no utilizaremos analíticamente este método mediante las tradicionales tablas para encontrar la solución del problema. Es posible que alguno de los procedimientos computacionales que trabajaremos utilice internamente el Método del Símplex original o alguna de sus variantes, pero en general, no será necesario formular el problema en forma estándar.

En el próximo epígrafe, veremos características generales del problema de programación lineal, referentes a los teoremas local global y de Weierstrass, así como sobre la ubicación de las soluciones óptimas en el conjunto de oportunidades.

3.2. Características generales del problema de programación lineal.

De la definición del problema general de programación lineal dada en el apartado anterior, se desprenden numerosas consecuencias que van a ser muy importantes para su resolución. En primer lugar, la función objetivo, al ser lineal, es continua en todo $\mathbb{R}^n$ y además, es tanto cóncava como convexa.

Respecto del conjunto de oportunidades:

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

éste resulta ser cerrado y convexo, dado que todas las desigualdades contienen la igualdad y viene dado por la intersección de semiespacios. Además, lo supondremos siempre no vacío, ya que, en caso contrario, (PL) carecería de sentido. Consecuentemente, si un problema de programación lineal posee solución óptima, ésta es siempre global, ya que se dan las hipótesis del teorema local global.

Por su parte, no podemos asegurar que el problema general de programación lineal posea solución, ya que el conjunto de oportunidades no siempre va a estar acotado. Ésta es la condición que faltaría para la verificación de las condiciones del teorema de Weierstrass. No obstante, como ya se ha comentado anteriormente, en los problemas económicos y empresariales es usual que el conjunto sea acotado, debido a la limitación de recursos.

Además, en caso de existir, la solución óptima de nuestro problema nunca podrá ser un punto interior del conjunto de oportunidades. Para ello, como vimos en el capítulo anterior, el gradiente de la función objetivo tendría que anularse en algún punto (interior al conjunto de oportunidades). En el caso de los problemas lineales, la función objetivo es lineal y su gradiente, por tanto, es el vector formado por sus coeficientes, que es constante y no nulo.

Veamos un primer ejemplo, con dos variables de decisión, para ilustrar la estructura del conjunto de oportunidades. Además, mediante su resolución gráfica con el desplazamiento de las curvas de nivel sobre el conjunto de oportunidades, observaremos que la(s) solución(es) óptima(s) se encuentra(n) en alguno de sus vértices.

Ejemplo 3.1: Producción de vehículos

Una compañía del sector automovilístico posee dos plantas para producir un mismo modelo de coches, una en la ciudad A y otra en la ciudad B. Desea planificar la producción del próximo mes teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los beneficios por cada unidad producida en la ciudad A son de 2.000 € mientras que los obtenidos por cada unidad de la planta B son de 3.000 €.
- Por la capacidad productiva de las plantas, en la planta A no se pueden producir más

de 70.000 unidades, en la B no se pueden producir más de 40.000 unidades.

- Por acuerdos con el comité de empresa, el nivel de empleo puede oscilar entre 1.000 y 2.000 jornales totales para el mes considerado. Debido a los requerimientos de las plantas, por cada mil unidades producidas en la planta A, se necesitan 20 jornales y el doble en la planta B.
- Asimismo, y con independencia del plan de producción, todos los vehículos deben pasar por un control de calidad final, donde, por cada mil unidades, se usa un total de 18 horas del sistema de control para los vehículos producidos en la planta A y 24 horas para los vehículos producidos en la planta B. Se dispone de un total de 1.440 horas, para ser distribuidas entre ambas plantas, al ser un servicio con control central online.

Se desea formular el modelo que maximice el beneficio en el periodo considerado.

Solución

Las variables de decisión del problema son:

- x_A - miles de unidades del modelo producido en la planta A,
- x_B - miles de unidades del modelo producido en la planta B.

Modelicemos a continuación las restricciones del problema:

- Por la capacidad productiva de las plantas, en la planta A no se pueden producir más de 70.000 unidades, en la B no se pueden producir más de 40.000 unidades.

  $$x_A \leq 70, \quad x_B \leq 40.$$

  Este tipo de restricciones son denominadas cotas simples (en este caso, superiores), y nos marcan niveles mínimos o máximos que pueden tomar nuestras variables de decisión.

- Por acuerdos con el comité de empresa, el nivel de empleo puede oscilar entre 1.000 y 2.000 jornales totales para el mes considerado. Debido a los requerimientos de las plantas, por cada mil unidades producidas en la planta A, se necesitan 20 jornales y el doble en la planta B.

  $$1000 \leq 20x_A + 40x_B \leq 2000.$$

  Esta expresión dará lugar a dos restricciones diferentes en nuestro modelo.

- Asimismo, y con independencia del plan de producción, todos los vehículos deben pasar por un control de calidad final, donde, por cada mil unidades, se usa un total de 18 horas del sistema de control para los vehículos producidos en la planta A y 24 horas para los vehículos producidos en la planta B. Se dispone de un total de 1.440 horas, para ser distribuidas entre ambas plantas, al ser un servicio con control central online.

  En este caso al ser un recurso conjunto, igual que el de los jornales, se agregan los recursos consumidos tanto por la planta A como por la planta B:

  $$18x_A + 24x_B \leq 1440.$$

- Además de las restricciones anteriores, tendríamos las naturales condiciones de no negatividad, considerando el significado de las variables.

Para terminar de modelizar nuestro problema, sólo nos quedaría formular nuestra función objetivo, que sería:
$$B(x_A, x_B) = 2{,}000{,}000x_A + 3{,}000{,}000x_B.$$
Esta formulación se debe a que los beneficios son por unidad y las variables están expresadas en miles de unidades. No obstante, podemos expresarla de manera más simplificada como:
$$B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B,$$
recordando que, en este caso, el beneficio viene expresado en millones de euros.

Así pues, el problema se puede modelizar como el siguiente problema de programación lineal:
$$\left\{\begin{array}{lll} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B & \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\ & x_A \leq 70 & (R4) \\ & x_B \leq 40 & (R5) \\ & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7). \end{array}\right.$$
Si tratamos este problema gráficamente, sabemos que las restricciones corresponden a semiespacios. Para su representación, utilizamos los segmentos de las rectas que lo limitan, que determinarán un conjunto de oportunidades que será, como se ha visto antes, en todos los problemas lineales, convexo y cerrado:

- **Convexo**, por ser intersección de semiespacios. Como los semiespacios son conjuntos convexos y la intersección de conjuntos convexos también es conjunto convexo, podemos asegurar que nuestro conjunto de oportunidades es un conjunto convexo.
- **Cerrado**, ya que todas las desigualdades que definen el conjunto incluyen la igualdad, y por tanto contienen a la recta que delimita el semiespacio.
- En este problema, el conjunto es, además, **acotado**, por incluir cotas simples, tanto superiores como inferiores, para nuestras variables de decisión. Al ser el conjunto acotado, se verifica el teorema de Weierstrass, y por tanto tendremos asegurada la existencia de óptimos globales.

Todas estas características se aprecian en la siguiente figura, donde se muestra gráficamente el conjunto de oportunidades del problema.

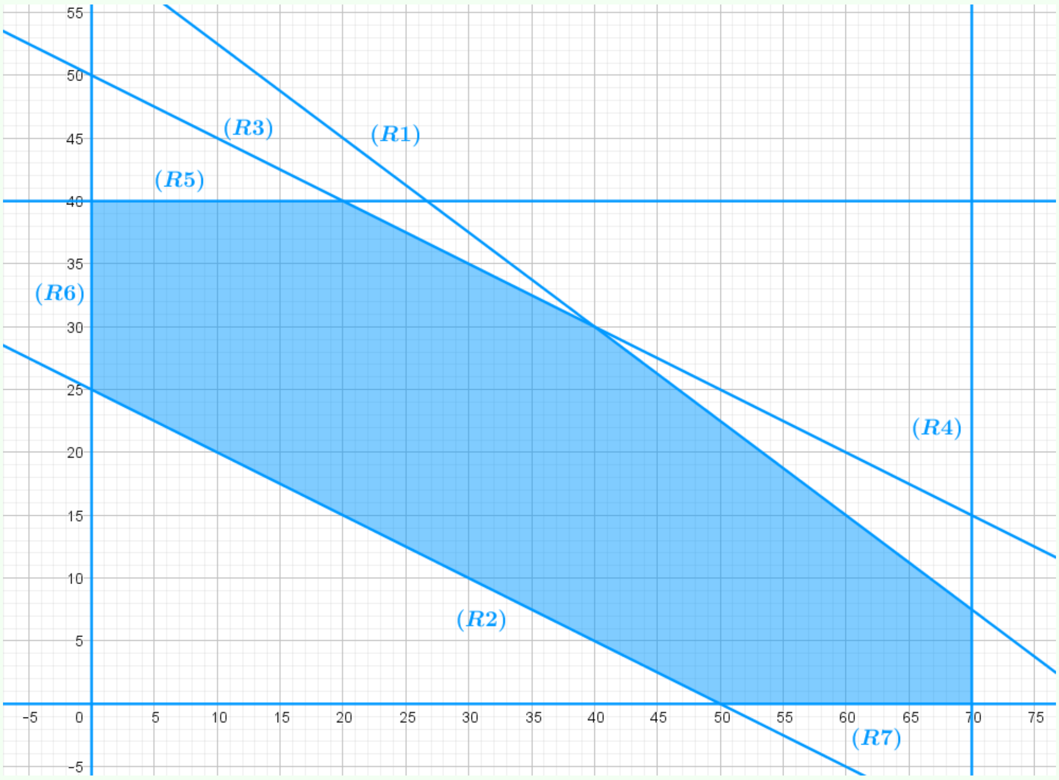


Figura 3.1: Conjunto de oportunidades.

Como ya se ha comentado, por las características del conjunto de oportunidades y de la función objetivo, no pueden existir óptimos interiores al conjunto de oportunidades. Veamos a continuación que el(los) óptimo(s) de nuestro problema serán siempre vértices, o tramos frontera, del conjunto de oportunidades. Para ello, representaremos las curvas de nivel, $2x_A + 3x_B = k$. Éstas determinan un conjunto de rectas paralelas, cada una de las cuales muestra el conjunto de puntos del conjunto de oportunidades para los que la función objetivo alcanza el correspondiente valor k. A medida que las desplazamos sobre el conjunto de oportunidades, en sentido creciente del valor de k, el(los) último(s) punto(s) de contacto determina(n) el(los) máximo(s) de nuestro problema.

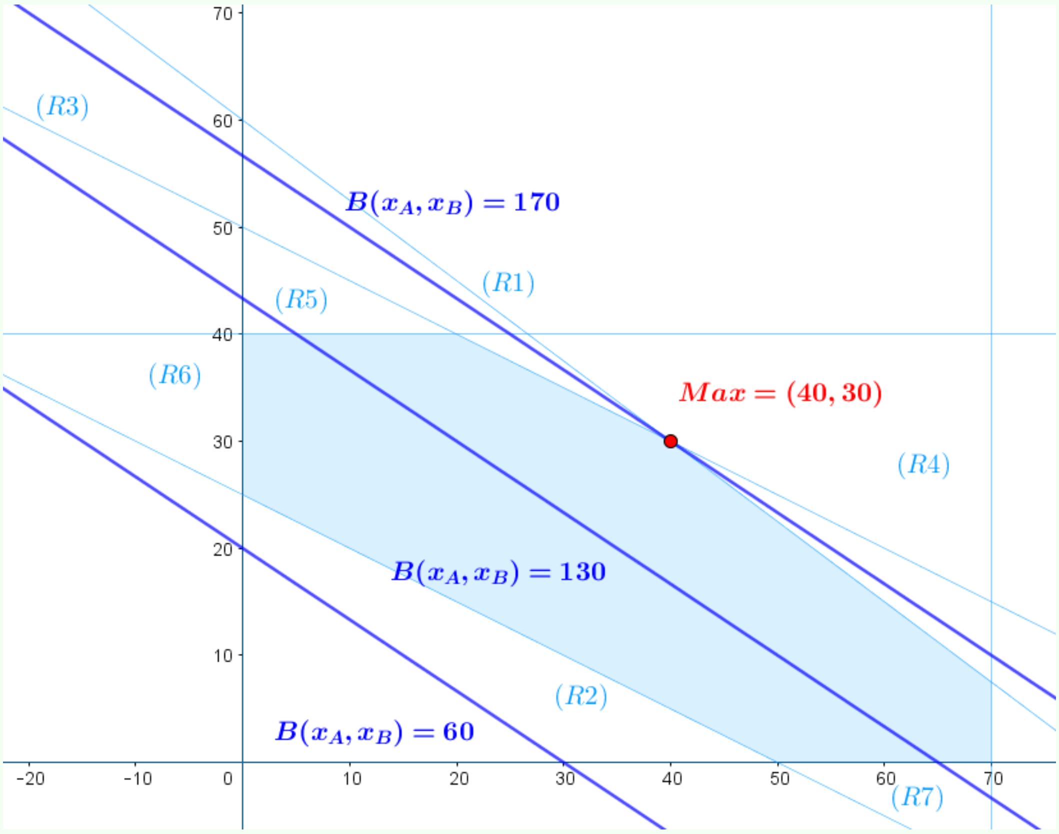


Figura 3.2: Curvas de nivel y óptimo.

En este ejemplo podemos observar, mediante análisis gráfico, que la solución se encuentra en un vértice. Dependiendo de la inclinación de las curvas de nivel, podría ocurrir que existiesen infinitos óptimos situados en los puntos de un segmento que une dos vértices adyacentes. La pregunta es ¿se verificará esa intuición gráfica en todos los casos? El siguiente teorema asegura que, en efecto, será así debido a la convexidad del conjunto de oportunidades.

Teorema 3.1: Óptimos sobre los vértices

La solución de (PL) es un vértice del conjunto de oportunidades de dicho problema. Además, si dicha solución se alcanza en dos o más vértices de dicho conjunto, la alcanza también en cualquier combinación lineal convexa de los mismos.

Demostración

Realicemos la demostración por reducción al absurdo. Denotemos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ los vértices del conjunto X. Supongamos que $\mathbf{x}^*$, solución óptima del problema, no es vértice del conjunto de oportunidades X. Entonces $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{f}(\mathbf{v_i})$, para cualquier vértice. Entonces, $\mathbf{x}^*$ se podrá expresar como combinación convexa de los vértices:

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \text{con} \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Por lo tanto, por ser la función objetivo f lineal,

$$f(\mathbf{x}^*) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i).$$

Sea $f(\mathbf{v}_m) = Max_{i=1,\dots,k}\{f(\mathbf{v}_i)\}$. Entonces,

$$f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{v}_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) f(\mathbf{v}_m) = f(\mathbf{v}_m).$$

Si la desigualdad es estricta, contradice que $\mathbf{x}^*$ sea el máximo del problema, y si es una igualdad, entonces $\mathbf{v}_m$ también sería un máximo del problema. Por lo tanto, la solución de todo problema de programación lineal es un vértice.
Sean x^* y x^{**} dos óptimos, que son globales y con el mismo valor de la función objetivo:

$$f(x^*) = f(x^{**}) = M$$

Entonces, $\forall x = \lambda x^* + (1-\lambda)x^{**}$ con $\lambda \in [0,1]$:

$$f(x) = f(\lambda x^* + (1-\lambda)x^{**})$$

y como f es lineal:

$$f(x) = \lambda f(x^*) + (1-\lambda) f(x^{**}) = \lambda M + (1-\lambda)M = M$$

Por tanto, x también es máximo global $\forall \lambda \in [0,1]$.

Este resultado es importante a la hora de buscar los posibles puntos óptimos, ya que, en principio, bastaría con encontrar todos los vértices de X (al ser éste un poliedro convexo, tiene un número finito de vértices), calcular el valor de la función objetivo en cada uno de ellos y elegir el que tenga el mayor valor para la función objetivo. Por tanto, la primera cuestión que surge es cómo caracterizar los vértices de X. Gráficamente, parece claro que cada vértice se obtiene mediante la intersección de las restricciones que lo determinan, considerando éstas como igualdades. En el ejemplo anterior, al estar en dos dimensiones, necesitaremos la intersección de dos rectas, si fuera un problema de tres variables, necesitaríamos la intersección de tres planos y en general, en $\mathbb{R}^n$ necesitaremos intersecar n hiperplanos. Dicho de otra forma, en todo vértice de X, hay al menos n restricciones activas.

Volviendo a nuestro ejemplo, veamos gráficamente los vértices del conjunto de oportunidades:

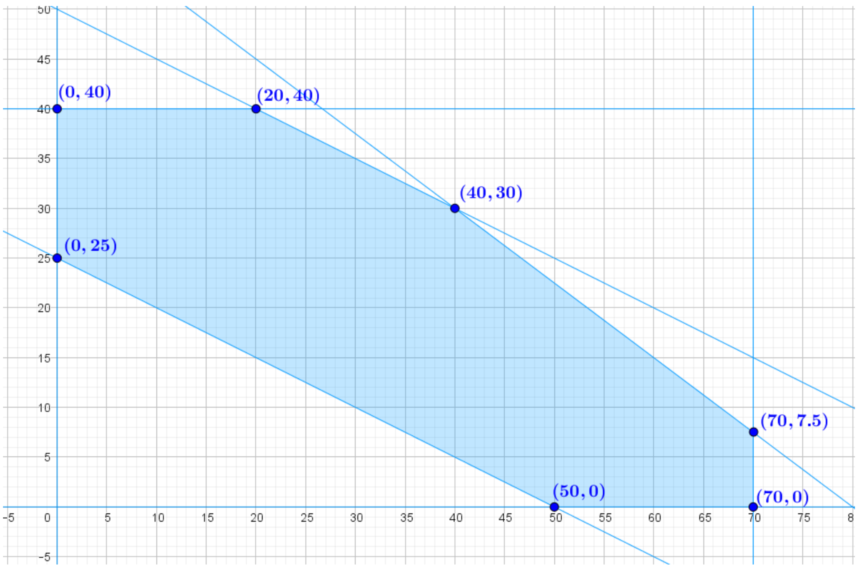


Figura 3.3: Vértices del conjunto de oportunidades.

Si bien todos los vértices de X se determinan como puntos de corte de dos de las rectas que definen el conjunto de oportunidades, podemos ver en la siguiente gráfica que no todo punto obtenido así es un vértice factible del problema. Por ejemplo, la intersección de la segunda y tercera restricciones, $20x_A + 40x_B = 1.000$ y $18x_A + 24x_B = 1.440$, determina un vértice que no está en el conjunto de oportunidades, ya que no cumple la condición de no negatividad de la variable de decisión x_B. Éste y algunos más pueden verse en la siguiente figura:

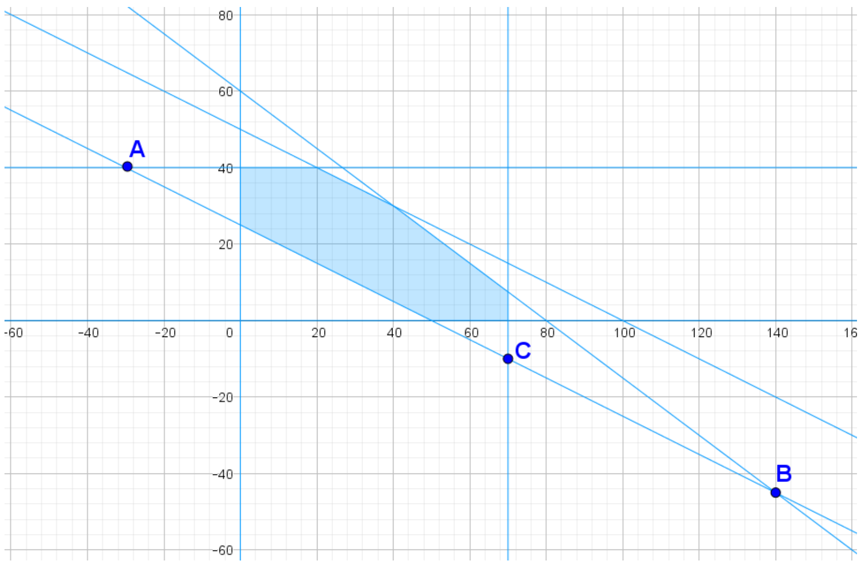


Figura 3.4: Vértices no admisibles.

Por ello, el siguiente paso es caracterizar la factibilidad de los vértices obtenidos mediante la intersección de 2 (n, en general) restricciones activas. Para esto, utilizaremos las denominadas *variables de holgura*, que miden, en cada punto, la desviación de la restricción con respecto a su correspondiente término independiente. Concretamente, si la restricción es de $\leq$, la variable de holgura mostrará cuánto nos quedamos por debajo del valor del término independiente y si la restricción es de $\geq$, mostrará cuánto superamos el valor del término independiente. En todo caso, serán variables no negativas, que entrarán en la correspondiente restricción sumando en el caso $\leq$, y restando en el caso $\geq$. Obviamente, las restricciones de igualdad no llevan variables de holgura. Así, en nuestro ejemplo, las restricciones quedarían como sigue, al introducir las variables de holgura:

$$\begin{cases} 20x_A + 40x_B + h_1 = 2000 \quad (R1) \\ 20x_A + 40x_B - h_2 = 1000 \quad (R2) \\ 18x_A + 24x_B + h_3 = 1440 \quad (R3) \\ x_A + h_4 = 70 \quad (R4) \\ x_B + h_5 = 40 \quad (R5) \\ x_A, x_B, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \geq 0 \quad (R6; R7; R8; R9; R10; R11; R12). \end{cases}$$

Para las condiciones de no negatividad originales sobre las variables de decisión de nuestro problema no es necesario definir las variables de holgura, pues en realidad, el valor de las variables de decisión nos muestran dicha holgura. Así en nuestro caso los vértices, incluyendo sus correspondientes variables de holgura, vienen definidos por:

- Vértice $(50, 0;\ 1000, 0, 540, 20, 10)$, intersección de $R2$ y $x_B = 0$. Las dos primeras componentes nos expresan que se producen 50 mil unidades en la planta A y nada en la planta B. Las restricciones activas son aquellas cuyas variables de holgura se anulan, es decir, la restricción de mínimo empleo ($R2$) y la cota inferior de la variable x_B (condición de no negatividad). El resto de las restricciones son inactivas y podemos leer el significado de las variables de holgura. Sobran 1.000 jornales del máximo total disponible, sobran 540 horas del total disponibles para el control de calidad, producimos 20.000 unidades menos del máximo posible en la ciudad A y 10.000 menos del máximo disponible en la ciudad B. Podemos hacer un análisis similar para el resto de los vértices, que son:

- Vértice $(70, 0;\ 600, 400, 180, 0, 40)$, intersección de $R4$ y $x_B = 0$
- Vértice $(70, 7{,}5;\ 300, 700, 0, 0, 32{,}5)$, intersección de $R3$ y $R4$
- Vértice $(40, 30;\ 0, 1000, 0, 30, 10)$, intersección de $R1$ y $R3$
- Vértice $(20, 40;\ 0, 1000, 120, 50, 0)$, intersección de $R1$ y $R5$
- Vértice $(0, 40;\ 400, 600, 480, 70, 0)$, intersección de $x_A = 0$ y $R5$
- Vértice $(0, 25;\ 1000, 0, 840, 70, 15)$, intersección de $x_A = 0$ y $R2$.

Si denotamos por n el número de variables de decisión y por m el número de restricciones originales del problema, podemos observar que hemos convertido nuestro sistema original de inecuaciones en un sistema de m ecuaciones de igualdad, con $n + m$ variables. Como hemos visto en el ejemplo anterior, en todos los vértices del problema hay (al menos) n variables nulas (2, en el ejemplo). Cada variable nula es, de hecho, una variable de holgura nula, que implica que la correspondiente restricción es activa. Obviamente, al estar trabajando en el espacio $\mathbb{R}^n$, necesitamos al menos n ecuaciones lineales para determinar un punto (vértice) de forma unívoca, es decir, necesitamos que al menos n restricciones sean activas. Obviamente, puede darse el caso de que por un mismo vértice pasen más de n restricciones activas. Desde el punto de vista del sistema de ecuaciones de igualdad, generado al introducir las variables de holgura, la existencia de n variables nulas reducen el sistema a uno cuadrado, de tamaño $m \times m$, que por tanto, puede caracterizar de forma única a un vértice.

Por otro lado, veamos la expresión de alguno de los "vértices" no factibles que veíamos en la Figura 3.4. Por ejemplo, el vértice A, intersección de $R2$ y $R5$ es $(-30, 40;\ 1000, 0, 1020, 100, 0)$. Como podemos ver, una de las variables es negativa. En general, en un vértice no factible serán negativas las variables de holgura correspondientes a las restricciones que se violan en el punto (que, por lo tanto, lo hacen no factible). En el vértice considerado, se viola la condición de no negatividad de la variable x_A. Así pues, una vez introducidas las variables de holgura, hemos caracterizado un vértice factible como aquel punto en el que hay, al menos, n variables nulas, entre las variables de holgura entendidas en sentido amplio (es decir, las variables de holgura de las restricciones propias de nuestro problema y las variables de holgura de las condiciones de no negatividad de nuestras variables de decisión, que corresponden, exactamente, con el valor de nuestras variables de decisión) y todas las demás son no negativas.

Formalicemos ahora esta idea. En general, para determinar los vértices del conjunto de oportunidades a partir de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, en vez del original de inecuaciones, necesitamos una nueva expresión, basada en la incorporación de las variables de holgura. Éstas miden la diferencia existente entre el primer y segundo miembro de la inecuación y convierten cada inecuación en una ecuación. Como ya hemos visto, las variables de holgura entrarán sumando en las restricciones de $\leq$, y restando en las restricciones de $\geq$. Por lo tanto, si en las m restricciones originales hay un bloque de restricciones de $\leq$ y otro de restricciones de $\geq$,

$$
(PLG)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\
s.a & A_l\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_l \\
 & A_u\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_u \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},
\end{array}
\right.
$$

podemos reescribir el problema, al incluir nuestras variables de holgura, como:

$$(PLG)\quad \begin{cases} Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ s.a & A_l\mathbf{x} + \mathbf{h}_l = \mathbf{b}_l \\ & A_u\mathbf{x} - \mathbf{h}_u = \mathbf{b}_u \\ & \mathbf{x}, \mathbf{h}_l, \mathbf{h}_u \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Basándonos en todo lo anterior, podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 3.2: Caracterización de Vértice Factible

Un elemento del conjunto de oportunidades del problema (PLG) es un vértice factible del mismo si y sólo si es una solución del sistema de ecuaciones, con, por lo menos, n componentes nulas, y con el resto de componentes (a lo sumo, m) no negativas.

Por lo tanto, todo vértice factible tiene $n+m$ componentes. Las n primeras contienen los valores que toman en ese vértice las variables de decisión, por lo que también son las holguras con respecto a las condiciones de no negatividad de dichas variables. Las m últimas componentes reflejan las holguras correspondientes a las m restricciones originales de nuestro problema. El Teorema 3.2 nos dice que, por lo menos, n de esas $n+m$ componentes son nulas (por lo que, a lo sumo m de ellas son mayores que cero). Las variables nulas identifican las restricciones activas en el vértice, y determinan las ecuaciones que necesitamos para determinar un punto en $\mathbb{R}^n$. Si el vértice presenta más de n componentes nulas, se habla de solución degenerada, porque por ese vértice pasan más de n restricciones activas.

Definición 3.1: Estructura de un vértice

Denominaremos estructura de un vértice factible a la relación de componentes que son nulas en él, es decir, a la relación de restricciones que son activas en el punto.

Así, por ejemplo, en el vértice $(40, 30;\ 0, 1000, 0, 30, 10)$, son activas las restricciones $R1$ y $R3$, o lo que es lo mismo, las componentes nulas son h_1 y h_3, y esto es lo que define la estructura de ese vértice factible.

Considerando de nuevo la Figura 3.3, podemos ver gráficamente que hay vértices factibles que están uno a continuación del otro si nos movemos sobre la frontera del conjunto de oportunidades. Es el caso, por ejemplo, de $(20, 40;\ 0, 1000, 120, 50, 0)$ y $(0, 40;\ 400, 600, 480, 70, 0)$. Es lo que llamamos *vértices adyacentes*, concepto de gran utilidad en el desarrollo del Método del Símplex. Este concepto está claro cuando trabajamos en $\mathbb{R}^2$ y podemos representar el conjunto de oportunidades, pero puede ser más confuso en dimensiones superiores. ¿Qué caracteriza, por tanto, dos vértices adyacentes? Considerando de nuevo los dos vértices citados, vemos que una de las componentes nulas del primero ha pasado a ser no nula en el segundo (la tercera componente ha pasado de 0 a 400) y a la vez, una de las componentes no nulas ha pasado a ser nula (la primera, ha pasado de 20 a 0). Esto quiere decir que una de las restricciones activas en el primer vértice, ha pasado a ser inactiva en el segundo (en este caso, $R1$), y por el contrario una restricción que era inactiva en el primero ha pasado a ser activa en el segundo (en este caso, la condición de no negatividad de x_A).

Definición 3.2: Vértices factibles adyacentes

Dos vértices factibles se denominan adyacentes cuando sus estructuras se diferencian en que una componente nula del primero pasa a ser no nula en el segundo, y además, una componente no nula del primero pasa a ser nula en el segundo.

Todos los elementos de análisis de vértices vistos previamente se analizarán en este apartado. Para ello, vamos a continuación a resolver el problema del ejemplo, con la ayuda del programa *Lingo*:

Ejemplo 3.2: Producción de vehículos. Solución óptima

Resuelva el problema del Ejemplo 3.1, utilizando *Lingo*.

Solución

Recordemos que el modelo del ejemplo 3.1 es la siguiente:

$$\begin{cases} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B & \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\ & x_A \leq 70 & (R4) \\ & x_B \leq 40 & (R5) \\ & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7). \end{cases}$$

Luego, su formulación con *Lingo* sería:

Lingo: Enunciado

```
[Beneficios] Max = 2*xA+3*xB;
[EmpleoMax] 20*xA+40*xB <= 2000;
[Empleomin] 20*xA+40*xB >= 1000;
[ContCalid] 18*xA+24*xB <= 1440;
[ProducMaxA] xA <= 70;
[ProducMaxB] xB <= 40;
```

Recordemos que no es necesario incorporar las condiciones de no negatividad de las variables de decisión, que *Lingo* asume por defecto. La solución que nos muestra el programa es:

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor de la función objetivo: 170,0000
```

Variable	Valor
XA	40,00000
XB	30,00000

Fila	Holgura
BENEFICIOS	170,0000
EMPLEOMAX	0,000000
EMPLEOMIN	1.000,000
CONTCALID	0,000000
PRODUCMAXA	30,00000
PRODUCMAXB	10,00000

El primer bloque nos proporciona información técnica relativa al problema y su resolución. En primer lugar, nos dice que se ha alcanzado una solución óptima global. Esto no nos debe sorprender, pues sabíamos que nuestro problema estaba acotado y por tanto se verifica el teorema de Weierstrass, y en consecuencia ese óptimo global existía. Además se verifica el teorema local global y por tanto todo óptimo encontrado es global. La línea siguiente muestra el valor óptimo alcanzado por la función objetivo. Posteriormente, nos dice que el punto óptimo encontrado satisface todas las restricciones del problema, no existen infactibilidades. La cuarta línea nos informa del número de iteraciones realizadas por el método iterativo usado para obtener la solución. Sobre este punto realizaremos unas consideraciones posteriormente. A continuación, muestra el tiempo usado para encontrar la solución y, en la última línea, nos informa de que *Lingo* ha reconocido el problema como un problema de programación lineal, lo cual es correcto y coherente, y confirma que no hemos cometidos ciertos errores a la hora de formular el problema.

La tabla del segundo bloque muestra la solución óptima y su estructura. Además del valor óptimo de la función objetivo (el beneficio óptimo del mes asciende a 170.000.000 €), sabemos que la política óptima consiste en producir 40 mil unidades en la planta de la ciudad A y 30 mil en la de la ciudad B. Además, en cuanto a la estructura de la solución óptima, vemos que son activas las restricciones de `Empleo Máximo` y de `Control de Calidad`, es decir, se utiliza el número máximo de jornales disponibles (2.000) y se agotan las 1.440 horas disponibles para el control de calidad. Por otro lado, el resto de las restricciones son inactivas, cumpliéndose con desigualdad estricta. En concreto, se utilizan 1.000 jornales por encima del mínimo disponible y se producen 30.000 unidades menos de la producción máxima disponible en A, y 10.000 unidades menos en B.

A continuación, aclararemos dos cuestiones relativas a la resolución del problema anterior. La primera se refiere al método iterativo empleado por *Lingo* para resolver el problema. La segunda, mucho más importante, tiene que ver con los multiplicadores de Lagrange o Kuhn Tucker, vistos en el capítulo anterior para los problemas no lineales y que hasta ahora no se han mencionado aquí, pese a su gran utilidad en el análisis de la solución obtenida. Comentaremos el primer aspecto a continuación, y dedicaremos el siguiente epígrafe al segundo.

Idea del procedimiento del Método del Símplex

El Método del Símplex es un procedimiento desarrollado en los años 40 del siglo pasado por el matemático norteamericano George Dantzig. Fundamentándose en las características específicas de los problemas lineales, formula y desarrolla sus propiedades con álgebra matricial. Merced a ello, se define el procedimiento de búsqueda de la solución óptima mediante un algoritmo iterativo, que era posible implementar en los ordenadores de la época y que encontraba la solución óptima en un número finito de iteraciones. Sus ideas fundamentales son las siguientes:

- Se inicia el proceso en un vértice factible del conjunto de oportunidades. Esto es sencillo cuando el vértice con todas las variables de decisión nulas es admisible, es decir, cumple todas las restricciones, y puede, por tanto, emplearse como vértice inicial del procedimiento. En el caso que esto no ocurra, cosa bastante frecuente (como se ha visto en el ejemplo utilizado en este capítulo), existe una fase previa que consiste en encontrar un vértice admisible. Este procedimiento puede llevar, en problemas complejos, una buena parte del tiempo de cómputo.

- Desde cada vértice factible, el método pasa a otro vértice adyacente. En caso de existir varios, se escoge aquel que más mejore la función objetivo.

- El procedimiento finaliza cuando se alcanza la solución óptima, o bien cuando el propio algoritmo detecta que el problema no posee solución óptima, por no estar acotado.

Como se ha dicho, el método fue diseñado para ser implementado en un ordenador. Si hubiéramos deseado resolver el ejemplo de la producción de vehículos con este procedimiento de forma manual, hubiésemos necesitado algunas horas, siempre que no hubiéramos cometido algún error de cálculo en el proceso. A lo largo de todos estos años, se han ido introduciendo mejoras en el algoritmo inicial, con el fin de lograr un procedimiento computacional más eficiente, atendiendo a aspectos como la memoria necesaria para el almacenamiento de información o tiempo de proceso. Además se han desarrollado otros procedimientos relacionados con el algoritmo inicial y sus propiedades, como el método dual (método basado en el problema dual de nuestro problema original, como comentaremos posteriormente), o algoritmos basados en otras ideas y fundamentos, como los métodos barrera o métodos de punto interior, entre otros. Algunos de ellos están incorporados en *Lingo*, y es posible decidir sobre estos aspectos en las opciones avanzadas del programa, aunque nosotros dejaremos que el propio programa lo decida, así como otras estrategias internas del método.

3.3. Dualidad en programación lineal

Como ya vimos, en los problemas no lineales se define la función de Lagrange asociada y se obtienen, a partir de las condiciones de Kuhn-Tucker, tanto las variables de decisión óptimas de nuestro problema, como sus multiplicadores asociados, que poseen una importante interpretación económica. Obviamente, el problema lineal es un caso particular del problema no lineal, por lo que también existen dichos multiplicadores, con la misma interpretación. En el caso no lineal, esos multiplicadores se obtenían en el propio proceso de resolución, mientras que, en el caso de problemas lineales, al utilizar otros procedimientos alternativos al uso de la función de Lagrange, no se obtienen directamente. No obstante, las características del problema permiten determinarlos, aunque no se hayan utilizado en la determinación de la solución óptima, mediante cálculos sencillos una vez determinada dicha solución óptima. Por lo tanto, cualquier programa de ordenador, incluido el visto aquí, mostrará los multiplicadores óptimos, a la vez que la solución óptima y las variables de holgura. Como se ha dicho, su interpretación es la misma que en el caso no lineal, e incluso, como mostraremos posteriormente, proporcionan una información más completa, merced a las propiedades específicas del problema.

Ejemplo 3.3: Producción de vehículos. Multiplicadores óptimos

Analice los multiplicadores óptimos del Ejemplo 3.1, utilizando *Lingo*.

Solución

Recordemos que el modelo del ejemplo de producción de vehículos viene dado por:

$$
\begin{cases}
Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B & \\
s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\
 & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\
 & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\
 & x_A \leq 70 & (R4) \\
 & x_B \leq 40 & (R5) \\
 & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7).
\end{cases}
$$

Si resolvemos el Ejemplo 3.1 utilizando *Lingo*, además de la solución mostrada anteriormente (Ejemplo 3.2), aparece, por defecto, una nueva columna (Precio dual) mostrando el valor de los multiplicadores:

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor de la función objetivo: 170,0000
```

Variable	Valor
XA	40,00000
XB	30,00000

Fila	Holgura	Precio dual
BENEFICIOS	170,0000	1,000000
EMPLEOMAX	0,000000	0,25E-01
EMPLEOMIN	1.000,000	0,000000
CONTCALID	0,000000	0,833333E-01
PRODUCMAXA	30,00000	0,000000
PRODUCMAXB	10,00000	0,000000

Veamos una serie de consideraciones sobre dichos multiplicadores:

- Podemos ver que los valores de los multiplicadores óptimos son coherentes, pues toman el valor 0 para aquellas restricciones que son inactivas, como ya vimos en el capítulo 2. En efecto, un aumento pequeño en el recurso correspondiente tiene un efecto nulo sobre nuestro beneficio óptimo, pues la solución óptima no agota por completo los recursos existentes en dicha restricción.
- Los valores relativos a coste reducido, en la tercera columna de la primera parte de la tabla, se interpretan como los multiplicadores asociados a las condiciones de no negatividad de las variables de decisión. En este caso son nulos, pues las condiciones de no negatividad se cumplen con holgura.
- Por último, los multiplicadores óptimos son no nulos para las restricciones activas en el óptimo (el asociado a la función objetivo no tendrá interpretación).

Analicemos ahora los valores de los multiplicadores óptimos de las restricciones activas en la solución obtenida:

- La restricción del `EMPLEOMAX` tiene un multiplicador óptimo con valor $0{,}25E-01 = 0{,}025$, lo que nos expresa que nuestra función objetivo mejoraría en esa cuantía si incrementamos en una unidad el empleo máximo. Es decir, por cada jornal adicional del que se disponga, el beneficio óptimo aumentará en 25.000 € (recordemos que la función objetivo está medida en millones).
- El multiplicador óptimo de la restricción del `Control de Calidad` es $0{,}83E-01 = 0{,}083$. Por lo tanto, por cada hora adicional de la que se dispusiera para este fin, el beneficio óptimo aumentaría en 83.333 €.

Podría argumentarse que la interpretación de los multiplicadores de Lagrange, al obtenerse a partir de una derivada, según vimos en el capítulo , es un concepto límite y por lo tanto, se refiere a incrementos infinitesimales. Efectivamente, en un problema no lineal general, estos multiplicadores simplemente marcan tendencias y no se pueden interpretar como incrementos de unidades. Sin embargo, las características del problema lineal nos permiten extender esta interpretación, y entender el valor óptimo del multiplicador de Lagrange como la variación que experimentará el valor óptimo de la función objetivo por cada unidad adicional de recurso de la que se disponga. Esto será así mientras se mantenga la estructura de la solución óptima. Por tanto, es conveniente conocer los intervalos en los que podrá variar cada recurso para que se mantenga esa estructura. Esa información la obtendremos en el siguiente epígrafe, a raíz del *análisis de sensibilidad* del problema.

3.4. Análisis de sensibilidad

Tradicionalmente, en programación lineal se han estudiado tres aspectos importantes tras resolver el problema. Todos ellos se refieren al estudio de las variaciones en la solución óptima, ante variaciones en alguno de los elementos del modelo. Algunos de ellos han quedado desfasados a día de hoy, dada la posibilidad de resolver los problemas fácilmente con programas de ordenador. Otros necesitan un estudio más en profundidad del que abordaremos en esta sección. En cualquier caso, mencionamos estos tres aspectos a continuación.

1. *Análisis postóptimo*. Estudia la estabilidad de la solución óptima de un problema de programación lineal ante un cambio concreto del valor de algún parámetro (c_j, b_i, a_{ij}), o la introducción de nuevas variables o restricciones. Este estudio puede tener sentido cuando, por las características del problema (por ejemplo, por sus elevadas dimensiones), sea complicado resolver el problema de nuevo con los nuevos datos. Además, si el problema no se ha resuelto por el Método del Símplex (o alguno que ofrezca una información equivalente), puede ser complicado realizar este análisis. En problemas de dimensiones pequeñas y con la potencia actual de los programas de ordenador, es preferible modificar los datos y volver a ejecutar el programa. Es por ello que no abordaremos este caso.

2. *Análisis de sensibilidad* propiamente dicho. Consiste en determinar, para ciertos elementos del problema, los intervalos en los que éstos pueden variar sin que se modifique la estructura de la solución óptima (es decir, la relación de restricciones activas en el óptimo). Hay que tener en cuenta que esta información es cierta si sólo uno de los datos se modifica dentro del intervalo correspondiente y los demás permanecen constantes.

3. *Programación lineal paramétrica*. Aborda el comportamiento de la estructura de la solución óptima y los distintos cambios que experimenta cuando algunos de los elementos del problema (principalmente, costes o recursos) presentan una expresión paramétrica, por ejemplo, en función del tiempo o de otro elemento no intrínseco al modelo. Este enfoque presenta propiedades de gran interés y en los últimos años existen estudios profundos sobre el tema. Lamentablemente, la complejidad de este estudio queda fuera del alcance del presente documento.

En consecuencia, nos centraremos en el *análisis de sensibilidad* de un problema lineal y determinaremos intervalos, denominados intervalos de sensibilidad, para cada uno de los coeficientes de la función objetivo (costes, c_i) y para cada uno de los términos independientes de las restricciones (recursos, b_j). Como se ha comentado antes, si sólo uno de los datos se mueve dentro de su intervalo de sensibilidad, la estructura de la solución óptima del problema se mantiene. Además, realizaremos un estudio detallado en los extremos de los intervalos, sobre el cambio que experimenta la estructura de la solución óptima en ellos.

Es natural preguntarnos qué ocurre si dos o más datos se mueven a la vez dentro de sus intervalos de sensibilidad. En general, no se puede asegurar que la estructura de la solución óptima se mantenga si dos o más elementos varían simultáneamente. La rama que estudia esos aspectos se denomina *análisis de robustez* del modelo, que no se abordará en este documento.

Veamos los aspectos relativos al *análisis de sensibilidad*, directamente sobre el ejemplo de fabricación de vehículos.

Ejemplo 3.4: Producción de vehículos. Análisis de sensibilidad

Obtenga los intervalos de sensibilidad del Ejemplo 3.1, utilizando *Lingo*.

Solución

Si resolvemos el Ejemplo 3.1 utilizando *Lingo*, es posible obtener el informe de intervalos de sensibilidad para los costes y recursos del modelo, además de los otros elementos previamente comentados. Sin embargo, *Lingo* no hace este análisis por defecto, por lo que hay que especificar esta opción. Concretamente, antes de resolver el modelo, deberemos ir a "*Solver→Options→General Solver→Dual Computations*" y, dentro del desplegable, escoger "*Prices/Ranges*". Tras aceptar el cambio de opciones, procedemos a resolver el problema. Aunque el informe inicial de la resolución del problema no nos mostrará nada diferente a lo que ya nos mostraba previamente, el algoritmo implementado ha resuelto el problema calculando lo solicitado. Para que nos muestre dicha información, debemos volver a la ventana que contiene el modelo del problema y seleccionar "*Solver→Range*". Entonces, aparecerá una pantalla que muestra los intervalos de sensibilidad:

Lingo: Informe de Intervalos

`Intervalos en los que la base no cambia:`

`Intervalos de los coeficientes de la función objetivo:`

Variable	Coeficiente actual	Incremento permitido	Decremento permitido
XA	2,00000	0,25000	0,50000
XB	3,00000	1,00000	0,33333

`Intervalos de los términos independientes de las restricciones:`

Restricción	Valor actual	Incremento permitido	Decremento permitido
EMPLEOMAX	2.000,00	133,3333	300,000
EMPLEOMIN	1.000,00	1.000,00	INFINITY
CONTCALID	1.440,00	180,000	120,000
PRODUCMAXA	70,0000	INFINITY	30,0000
PRODUCMAXB	40,0000	INFINITY	10,0000

Analicemos la información que aporta *Lingo* sobre los intervalos de sensibilidad de los distintos coeficientes. Esta información viene dividida en dos bloques, uno para los coeficientes de la función objetivo (costes) y otro bloque para los términos independientes de las restricciones (recursos):

- La primera línea del primer bloque nos informa de que el valor actual del coeficiente de la variable x_A es 2, y su intervalo de sensibilidad tiene como extremo superior el valor actual más el máximo incremento posible, es decir, $2 + 0,25 = 2,25$. Por otro lado, el extremo inferior vendrá dado por el valor actual menos el máximo decremento posible, es decir $2 - 0,5 = 1,5$. Así, el intervalo es $[1,5\ ;\ 2,25]$ y tenemos la seguridad que si el coeficiente de x_A se modifica, a partir de su valor actual, 2, a un valor dentro de ese intervalo, la solución óptima seguirá teniendo la misma estructura. En los términos de nuestro problema, eso quiere decir que si el beneficio por unidad producida en la ciudad A se mueve entre 1.500 € y 2.250 €, la estructura de la solución óptima no cambia. Por lo tanto, en este intervalo, las restricciones activas (los elementos nulos y no nulos de la solución) seguirán siendo los mismos. Es importante tener en cuenta que, en el caso en que movemos un coeficiente de la función objetivo, el conjunto factible no varía, por lo que en realidad no cambian los valores concretos de la solución óptima. Dicho de otra forma, si el beneficio por unidad producida en la ciudad A se mantiene dentro del intervalo encontrado, la solución óptima seguirá consistiendo en producir 40 mil unidades en la planta de la ciudad A y 30 mil en la de la ciudad B, con las mismas restricciones activas y holguras. Lo que sí cambiaría sería el valor de la función objetivo en el óptimo.

- El intervalo de sensibilidad del coeficiente de la variable x_B sería $[3 - 0{,}33\ ;\ 3 + 1] = [2,67\ ;\ 4]$, y se puede realizar un análisis similar al anterior, para beneficios por unidad producida en la ciudad B entre 2.666,67 € y 4.000 €.

- En el segundo bloque aparece la información relativa a los intervalos de sensibilidad de los términos independientes de las restricciones. En la primera línea de este bloque, se encuentra la restricción `EMPLEOMAX`. De manera similar a lo comentado anteriormente, podemos obtener el intervalo de sensibilidad del término independiente de esta restricción, que será $[2000 - 300\ ;\ 2000 + 133,33] = [1700\ ;\ 2133,33]$. Así pues, podemos afirmar que si el máximo de jornales disponibles varía entre 1.700 y 2.133, la estructura de la solución óptima no varía. En estos casos en los que sí estamos modificando el conjunto de oportunidades y además estamos moviendo una restricción activa, es muy probable que los valores concretos de las variables óptimas cambien, aunque las mismas restricciones seguirán siendo activas e inactivas. Por otro lado, en este caso podemos combinar esta información con la proporcionada por el multiplicador de Lagrange, que ya vimos en el capítulo 2. Recordemos que el multiplicador obtenido en el ejemplo 3.3 resulta $\lambda^* = 0,025$. Podemos entonces afirmar que el beneficio óptimo aumentará en 25.000 € por cada jornal adicional, hasta llegar a los 2.133 jornales. A partir de ahí, la variación ya puede ser distinta. De la misma forma, el beneficio óptimo disminuirá en 25.000 € por cada jornal menos disponible, hasta llegar a los 1.700 jornales.

- El resto de los intervalos para los términos independientes de las siguientes restricciones serán:

  - `EMPLEOMIN`: $[1000 - \infty\ ;\ 1000 + 1000] = (-\infty\ ;\ 2000]$. Esta restricción seguirá siendo inactiva en todo el intervalo. Al salirnos de él, es muy probable que se active.
  - `CONTCALID`: $[1440 - 120\ ;\ 1440 + 180] = [1320\ ;\ 1620]$. Al moverse el número de horas disponibles para el control de calidad dentro de este intervalo, el beneficio óptimo aumentará en 83.333 € por cada hora adicional disponible (y disminuirá en 83.333 € por cada hora de menos).
  - `PRODUCMAXA`: $[70 - 30\ ;\ 70 + \infty] = [40\ ;\ \infty)$. Esta restricción seguirá siendo inactiva en todo el intervalo.

- `PRODUCMAXB`: $[40 - 10 \; ; \; 40 + \infty] = [30 \; ; \; \infty)$. Esta restricción seguirá siendo inactiva en todo el intervalo.

Por último, vamos a realizar un pequeño análisis de lo que sucede cuando los valores de nuestros datos toman exactamente los valores de los extremos del intervalo. Distinguiremos dos casos:

- **Coeficiente de la función objetivo**. En esta situación, cuando uno de los coeficientes de la función objetivo se mueve en su intervalo de sensibilidad, lo que estamos realizando es un cambio en la pendiente de las curvas de nivel. El óptimo se mantendrá hasta que llegamos a una curva de nivel que coincida con una de las restricciones, teniendo en ese caso una situación de infinitas soluciones, que son todas las de la artista correspondiente. Sobre nuestro problema, si modificamos el coeficiente de la variable x_A desde el valor 2 hasta el extremo $1,5$, la pendiente se va modificando hasta coincidir con una arista, tal y como como se muestra en la Figura 3.5.

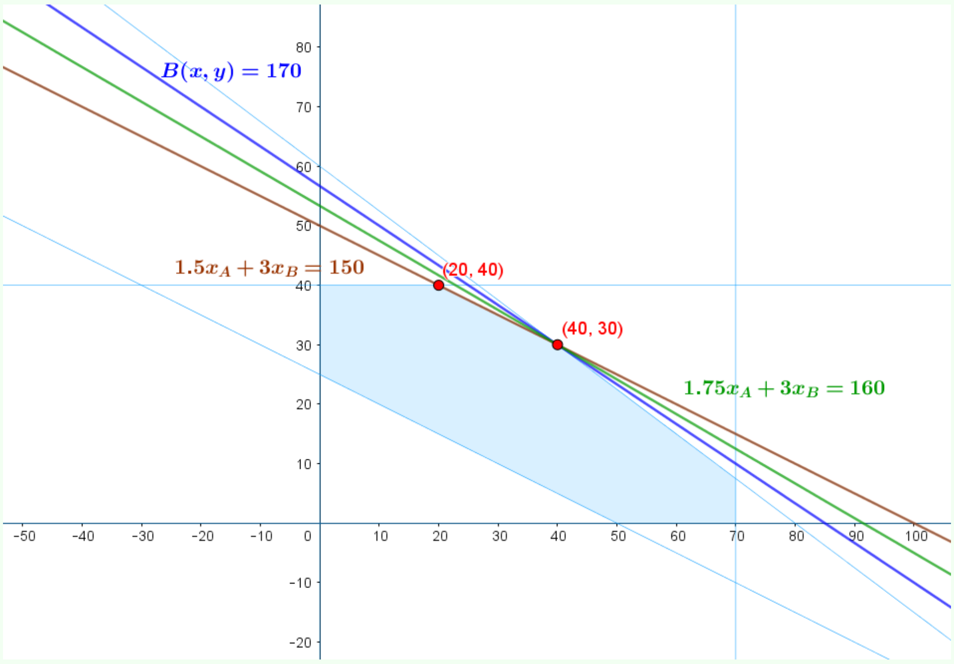


Figura 3.5: Sensibilidad de coeficientes de la función objetivo.

  En lo que respecta a la salida de *Lingo*, ¿cómo podemos determinar la existencia de infinitas soluciones? Obsérvese que en la solución óptima de partida, con el coeficiente de x_A igual a 2, el número de ceros entre las variables, debido a las restricciones activas (incluyendo las condiciones de no negatividad), es 2, que es el número de variables de decisión de nuestro problema. Y además, los multiplicadores óptimos de esas restricciones activas son no nulos. Éste es el caso de una solución óptima "normal". Sin embargo, cuando el coeficiente de x_A está en el extremo del intervalo, 1,5, la salida de *Lingo* muestra lo mismo con respecto a las restricciones activas, pero en este caso, para una de las restricciones activas, `CONTCALID`, el multiplicador óptimo es nulo. Esto indica que nos encontramos en un caso de infinitas soluciones óptimas. Para determinar el nuevo vértice, bastaría tomar el coeficiente de x_A igual a un valor fuera de ese intervalo pero muy próximo al extremo, por ejemplo, $1,49$. Veremos que en el siguiente vértice, la restricción `CONTCALID` se desactiva.

- **Términos independientes de las restricciones**. En esta situación, cuando el término independiente de una de las restricciones se mueve en su intervalo de sensibilidad, lo que estamos realizando es un cambio en el conjunto de oportunidades, ampliándolo o reduciéndolo según el caso.

Si esta restricción es activa en el óptimo, éste se va modificando, aunque la estructura de la solución óptima se mantiene, hasta que llegamos a una situación donde ésta cambie, que será en el extremo del intervalo de sensibilidad. Sobre nuestro problema, si modificamos el término independiente de la restricción `EMPLEOMAX` desde el valor 2.000 hasta el extremo 1.700, el conjunto de oportunidades se va modificando, y con él la solución óptima, como se muestra en la Figura 3.6.

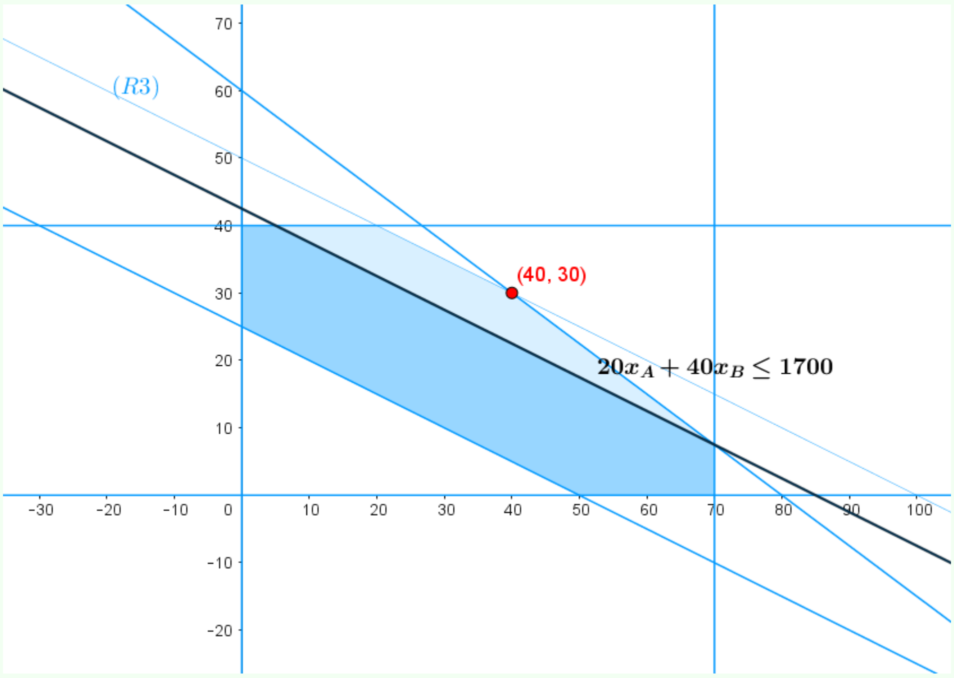


Figura 3.6: Sensibilidad de recursos de una restricción activa.

En lo que respecta a la salida de *Lingo*, ¿cómo podemos determinar esta situación? Observemos ahora que en la solución óptima de partida, con el término independiente de `EMPLEOMAX` igual a 2.000, hay sólo dos variables nulas (entre las variables de decisión y las de holgura). Éstas corresponden a las variables de holgura de las dos restricciones que son activas en el óptimo (`EMPLEOMAX` y `CONTCALID`), y tienen multiplicadores no nulos. Esto es lo que corresponde a una solución óptima "normal". Sin embargo, cuando el término independiente de `EMPLEOMAX` se sitúa en el extremo del intervalo, 1.700, la salida de *Lingo* nos muestra un cero más, que en este caso corresponde a la variable de holgura de la restricción `PRODUCMAXA`, además de las dos anteriores. En ese momento, por el óptimo pasan tres restricciones activas (lo que llamábamos *solución degenerada*), siendo además uno de los multiplicadores (el de `CONTCALID`) nulo. Para determinar la nueva estructura de la nueva solución óptima tras abandonar el intervalo, bastaría tomar el término independiente de `EMPLEOMAX` igual a un valor fuera de ese intervalo, pero muy próximo al extremo, por ejemplo, 1.699,99. Veremos que ahí, se desactiva la restricción `CONTCALID`, por lo que su variable de holgura pasa a ser estrictamente positiva.

Anteriormente hemos considerado el caso en el que modificamos el recurso de una restricción activa, lo que conlleva que las componentes del óptimo vayan cambiando.

Analicemos ahora el caso en el que el recurso que se modifica dentro de su intervalo de sensibilidad corresponde a una restricción no activa. En este caso, dicha restricción se seguiría manteniendo como no activa en todo el intervalo de sensibilidad y el óptimo se mantendrá en el mismo punto. Al llegar a uno de los extremos, esa restricción se volvería activa. Más allá del intervalo puede suceder que se desactive alguna otra restricción, o incluso que el conjunto factible sea vacío. En nuestro ejemplo, consideremos ahora la restricción `PRODUCMAXB`, cuyo recurso vale actualmente 40, y su intervalo de sensibilidad es $[30\ ;\ \infty)$. Si vamos reduciendo el valor del recurso hasta el extremo inferior del intervalo (pues al extremo superior no podremos llegar nunca), nuestro conjunto de oportunidades va reduciéndose, como se muestra en la Figura 3.7, pero se sigue manteniendo el óptimo en el mismo lugar en el que se encontraba, hasta que llegamos al valor 30. En este momento, la restricción `PRODUCMAXB` también se activa y lo que ocurre es que llegamos a una solución degenerada como en el caso anterior.

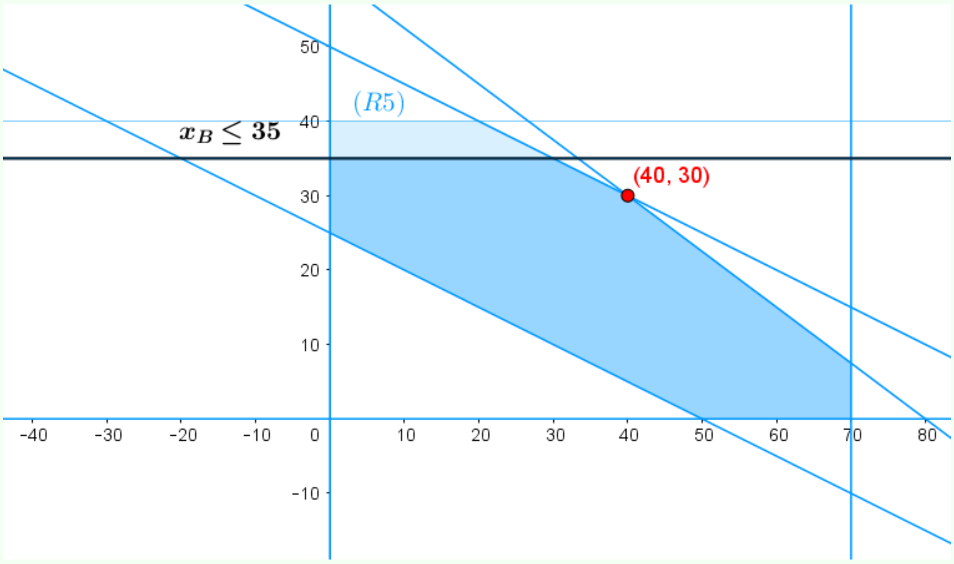


Figura 3.7: Sensibilidad de recursos de una restricción no activa.

3.5. Un ejemplo de mayores dimensiones

Para terminar este capítulo, aplicaremos todos los conceptos aprendidos a un ejemplo con dimensiones mayores, en el que no disponemos del apoyo gráfico, como sucede en la inmensa mayoría de los problemas reales.

Ejemplo 3.5: Cultivos tropicales

Un agricultor posee una finca de 100 hectáreas, que desea dedicar al cultivo de aguacates y mangos. Concretamente, decide cultivar las siguientes variedades:

- Aguacates, variedad Hass,
- Aguacates, variedad Bacon,
- Mangos, variedad Osteen,
- Mangos, variedad Keitt.

La siguiente tabla muestra, para cada variedad, la productividad de la tierra (en kg de fruta obtenidos anualmente por hectárea cultivada), el precio obtenido por el agricultor (en euros por kg) y los costes de producción (en euros por hectárea). El agricultor no desea destinar más de 550.000 € anuales a costes de producción. Además, dado que la demanda de aguacate es mayor que la de mango, decide destinar al menos 65 ha a esa fruta (incluyendo las dos variedades). A fin de diversificar los cultivos para asumir menos riesgos, decide destinar a cada variedad al menos 10 ha y no más de 40. Finalmente, no desea dejar terreno sin cultivar.

Variedad	**Productividad**	**Precio**	**Costes**
A - Hass	12.000	2,00	5.120
A - Bacon	11.000	2,25	5.230
M - Osteen	20.000	1,08	6.250
M - Keitt	25.000	1,00	6.500

El agricultor desea determinar la distribución óptima de la finca entre las cuatro variedades, de forma que se respeten todos los requisitos previamente descritos, y que se maximice el ingreso anual total.

a) Modelice matemáticamente el problema.

b) Resuelva el problema con el programa *Lingo*. Interprete los valores óptimos de las variables del problema, las variables de holgura y la función objetivo.

c) El propietario de la finca colindante, le propone a nuestro agricultor cederle el número de hectáreas que desee (hectáreas completas, hasta un máximo de 20), por un alquiler anual de 15.000 €. ¿Le convendría al agricultor aceptar la propuesta? Si es así ¿cuántas hectáreas sería conveniente alquilar?

d) Interprete los valores óptimos de los multiplicadores de Lagrange del resto de las restricciones activas, junto con sus intervalos de sensibilidad.

Solución

a) Las variables de decisión del problema son:

- $Hass$ - hectáreas dedicadas al cultivo de aguacate Hass,
- $Bacon$ - hectáreas dedicadas al cultivo de aguacate Bacon,
- $Osteen$ - hectáreas dedicadas al cultivo de mango Osteen,
- $Keitt$ - hectáreas dedicadas al cultivo de mango Keitt.

Modelicemos a continuación las restricciones del problema:

- Hectáreas cultivadas. Se dispone de 100 hectáreas, que el agricultor desea cultivar en su totalidad:

$$Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100.$$

- Costes de producción. La tabla nos muestra los costes de producción por hectárea cultivada de cada variedad, y sabemos que el agricultor no desea destinar más de 550.000 € a dichos costes:

$$5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000.$$

- Producción mínima de aguacates. El agricultor decide destinar al menos 65 ha al cultivo de aguacates (incluyendo las dos variedades):

$$Hass + Bacon \geq 65.$$

- Producciones mínimas. El agricultor decide destinar al menos 10 ha a cada una de las cuatro variedades:

$$Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10.$$

  Obsérvese que estas restricciones hacen innecesarias, por redundantes, las condiciones de no negatividad de las variables.

- Producciones máximas. El agricultor no desea destinar más de 40 ha a ninguna de las cuatro variedades:

$$Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40.$$

Finalmente, modelicemos la función objetivo del problema. La tabla nos muestra los kilos de fruta obtenidos de cada variedad por hectárea cultivadas, así como los precios de venta por kilo. Por lo tanto, la función de ingresos del agricultor será:

$$I(Hass, Bacon, Osteen, Keitt) = 2 \cdot 12000Hass + 2,5 \cdot 11000Bacon +$$

$$1,08 \cdot 20000Osteen + 1 \cdot 25000Keitt = 24000H + 24750B + 21600O + 25000K.$$

Así pues, el problema del agricultor se modeliza mediante el siguiente problema de programación lineal:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Max & I(Hass, Bacon, Osteen, Keitt) = 24000Hass + 24750Bacon + \\ & 21600Osteen + 25000Keitt \\ s.a & Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\ & 5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\ & Hass + Bacon \geq 65 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40. \end{array} \right.$$

Podemos hacer dos consideraciones iniciales sobre este problema. En primer lugar, la existencia de cotas inferiores y superiores sobre todas las variables del modelo nos asegura que el conjunto de oportunidades es acotado. Además, todas las restricciones incluyen la igualdad y la función objetivo es continua, por lo que el teorema de Weierstrass nos asegura la existencia de un óptimo (en este caso, máximo) global para nuestro problema. Por otro lado, como en todos los problemas lineales, se satisfacen las condiciones del teorema local global (por ser todas las funciones lineales), por lo que no existirán máximos locales que no sean globales.

b) El modelo para resolver este problema en *Lingo* es el siguiente:

Lingo: Enunciado

```
[Ingreso] Max = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
```

Obsérvese que se ha dividido la restricción relativa a los costes de producción en dos. La primera es una restricción auxiliar en la que calculamos los costes totales de producción y se almacenan en la variable `Coste`. En la segunda, establecemos la restricción propiamente dicha sobre los costes máximos. De esta forma, al resolver el problema, tendremos directamente el valor de los costes de producción, que es una información interesante.

Una vez resuelto el problema en *Lingo*, obtenemos los siguientes resultados (sólo mostramos aquí los que atañen a este apartado):

Lingo: Solución. Variables de decisión y de holgura

```
Solución óptima global encontrada
Valor de la función objetivo: 2.422.159
```

Variable	Valor
HASS	33,84058
BACON	40,00000
OSTEEN	10,00000
KEITT	16,15942
COSTE	550.000,0

Fila	Holgura	Fila	Holgura
INGRESO	2.422.159	PROD_MIN_OSTEEN	0,000000
HECTAREAS	0,000000	PROD_MIN_KEITT	6,159420
COSTES_PROD	0,000000	PROD_MAX_HASS	6,159420
COSTE_MAX	0,000000	PROD_MAX_BACON	0,000000
PROD_AGUACATE	8,840580	PROD_MAX_OSTEEN	30,00000
PROD_MIN_HASS	23,84058	PROD_MAX_KEITT	23,84058
PROD_MIN_BACON	30,00000		

Así pues, *Lingo* ha encontrado el óptimo global del problema lineal. La distribución óptima de la tierra cultivable consiste en dedicar 33,84 ha al cultivo de aguacate Hass, 40 ha al cultivo de aguacate Bacon, 10 ha al cultivo de mango Osteen y 16,16 ha al cultivo de mando Keitt. Con ello, el ingreso óptimo obtenido anualmente es de 2.422.159 €. La variable auxiliar `Coste` nos informa de que los costes de producción anuales ascienden a 550.000 €. En cuanto a las holguras, podemos concluir lo siguiente:

- Se cultivan las 100 ha disponibles. Esto es obvio, porque la restricción era originalmente de igualdad.
- Se agota por completo el presupuesto máximo destinado a los costes de producción (550.000 €).
- Se destinan a la producción total de aguacate 8,84 ha por debajo del mínimo asignado (65).
- En cuanto a las superficies mínimas de 10 ha de cada variedad, el aguacate Hass la supera en 23,84 ha, el aguacate Bacon la supera en 30 ha y el mango Keitt la supera en 6,16 ha, mientras que el mango Osteen está justo en la cantidad mínima.
- En cuanto a las superficies máximas de 40 ha de cada variedad, al aguacate

Hass se destinan 6,16 ha menos, al mango Osteen 30 ha menos y al mango Keitt 23,84 ha menos, mientras que se cultiva la máxima superficie posible de aguacate Bacon.

Obsérvese que la solución tiene 4 restricciones activas (si obviamos la auxiliar del coste), que son las hectáreas totales disponibles, los costes de producción máximos, el cultivo mínimo de mango Osteen y el máximo de aguacate Bacon. Se trata, por tanto, de una solución no degenerada.

c) Para contestar a esta pregunta, vamos a observar el valor óptimo del multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de las hectáreas disponibles, así como el intervalo de sensibilidad de su término independiente:

Lingo: Solución. Análisis post-óptimo de la restricción de hectáreas disponibles

Fila	Precio Dual	Incremento permitido	Decremento permitido
HECTAREAS	20.289,86	1,307692	1,876923

El multiplicador óptimo nos indica que, por cada hectárea adicional de la que se disponga, los ingresos óptimos anuales crecerán en 20.289,86 €. Por lo tanto, como el coste de cada hectárea adicional es de 15.000 € anuales, sí merecería la pena hacer la operación. Sin embargo, vemos que el intervalo de sensibilidad sólo permite aumentar las hectáreas en 1,31 sin que se modifique la estructura de la solución óptima. Como el propietario de la finca colindante sólo quiere ceder un número entero de hectáreas, sólo tenemos asegurada la viabilidad de la operación para una hectárea adicional. Si resolvemos el problema con 102 hectáreas, vemos que no hay solución admisible para el problema. Es decir, es imposible cultivar 102 hectáreas con las restricciones actuales del problema. Es más, estudiando la solución que produce *Lingo* en este caso, vemos que la infactibilidad se produce en la restricción del coste máximo. Podemos entonces deducir que no se pueden cultivar más de 101 hectáreas, manteniendo los costes anuales de producción por debajo de 550.000 €. Por tanto, para plantearnos el alquiler de 2 ó más hectáreas adicionales, habría que estudiar el impacto que tendría sobre los costes de producción, y si el incremento del ingreso óptimo compensa el incremento de los costes y el precio del alquiler.

d) En el apartado anterior, hemos estudiado la restricción de las hectáreas disponibles. Veamos ahora los valores del multiplicador óptimo y los intervalos de sensibilidad de las otras tres restricciones activas.

Lingo: Solución: Análisis post-óptimo de las restricciones activas

Fila	Precio Dual	Incremento permitido	Decremento permitido
COSTE_MAX	0,7246377	12.200,00	8.500,000
PROD_MIN_OSTEEN	-3.218,841	7,522124	10,00000
PROD_MAX_BACON	670,2899	25,90551	6,692913

Interpretemos ahora estos datos para cada una de las restricciones:

- En cuanto a los costes de producción, el multiplicador óptimo nos dice que por cada euro adicional destinado a los costes de producción, los ingresos óptimos crecerán en 72 céntimos. Por lo tanto, no trae cuenta aumentarlos, por lo menos por debajo de 12.200 €, que es el incremento máximo de intervalo de sensibilidad. Sí sería conveniente disminuirlos, hasta en 8.500 €, ya que por cada euro menos de coste de producción, los ingresos sólo disminuyen en 72 céntimos. Si intentamos resolver el problema con un tope de costes de producción menor que 541.500 (=550.000 - 8.500), vemos que no hay solución factible, es decir, es imposible cultivar las 100 hectáreas por debajo de ese coste de producción.
- En lo que respecta a la producción mínima de mango Osteen, vemos que los ingresos óptimos suben en 3.218,84 € por cada hectárea menos que dediquemos a este cultivo, y eso sería así hasta disminuir ese mínimo hasta 0, es decir, no cultivar nada de esa variedad. Por lo tanto, estamos cultivando mango Osteen para mantener la diversificación de los cultivos, pero no nos resulta rentable.
- Finalmente, la conclusión con el aguacate Bacon es la contraria: sería rentable cultivar más de las 40 hectáreas permitidas de esa variedad, y el ingreso óptimo anual se incrementa en 670,29 € por cada hectárea de más cultivada. Esta situación se mantiene hasta llegar a las 65,91 hectáreas. Resolviendo el problema con un valor ligeramente por encima de esa cantidad, vemos que la restricción se desactiva, por lo que ya no conviene seguirla aumentando.

Capítulo 4

Programación entera y binaria

Existen situaciones en las que las variables continuas no son capaces de representar la realidad del problema. Los métodos y técnicas desarrolladas hasta ahora correspondían a problemas donde las variables de decisión eran variables continuas, es decir, debían cumplir las restricciones impuestas pero sus valores no tenían que cumplir la condición de ser valores enteros. Pues bien, será en este momento donde comentaremos algunos de los aspectos que surgen cuando deseamos o necesitamos imponer esa condición de forma explícita. Comprobaremos que incorporar esa condición en la modelización del problema será simple, aunque llevará incorporada una mayor complejidad computacional que, aunque nosotros no tendremos que implementar, será muy conveniente conocer algunos aspectos.
Posteriormente, mostraremos uno de los problemas más tradicionales de programación lineal entera, conocido como problema de transporte, con algunas de sus variantes. Finalmente, presentaremos la gran potencialidad del uso de variables binarias en nuestros modelos. Las variables binarias serán variables, como su nombre nos puede hacer intuir, que sólo pueden tomar dos valores, normalmente los valores 0 y 1, y aunque podríamos pensar que no es más que un caso particular del problema con variable entera, tiene un uso más amplio.

4.1. Programación lineal entera

En este epígrafe introduciremos los problemas en variable entera y daremos una idea intuitiva sobre su resolución.

Definición 4.1: Problema de programación lineal entera

Un problema de programación lineal con variable entera, será aquel problema lineal con, al menos, una de sus variables entera.

Consideremos el marco general de los problemas de programación lineal estudiados en el capítulo anterior:

$$(PL)\quad \left\{ \begin{array}{ll} Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ s.a & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{array} \right.$$

donde la función objetivo es lineal, al igual que la formulación de sus restricciones. Existen situaciones en las que las soluciones deben tener alguna variable entera y esta condición debe ser incluida en el modelo. En estos casos, el problema se formularía de la siguiente forma:

$$
(PLE) \quad \begin{cases} Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ s.a & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ & x_j \in \mathbb{Z},\ j \in J, \end{cases}
$$

donde la función objetivo es lineal, al igual que la formulación de sus restricciones y, además de la no negatividad de las variables, se indica que la variable x_j toma valores enteros, para un subconjunto J de las variables. Nótese que puede haber una o más variables enteras en un problema de este tipo.

Uno podría pensar que la mejor forma de resolver los problemas de programación lineal entera sería resolver, en primer lugar, el problema de programación lineal y redondear la solución al entero más próximo. Sin embargo, este proceso puede llevar a soluciones fuera del conjunto factible o pueden no llegar a ser soluciones óptimas, como podremos comprobar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1: Fábrica de muebles

Una empresa fabrica sillas y mesas utilizando para ello láminas de madera y mano de obra. Las cantidades de recurso, medidas en m^2, que se utilizan para la fabricación de cada silla y mesa, así como las cantidades disponibles de cada uno de ellos y los ingresos unitarios de las sillas y mesas, vienen recogidos en la tabla siguiente:

	Sillas	Mesas	Recursos Disponibles
Madera	4	6	24
Mano de obra	8	3	24
Ingreso unitario	8	10	

La empresa desea saber la cantidad de sillas y mesas que debe fabricar para maximizar el ingreso total.

Solución

Para resolver el problema, en primer lugar, definimos sus elementos:

- Variables de decisión: x indica el número de sillas a fabricar; mientras y denota el número de mesas.
- Función objetivo: Se trata de maximizar los ingresos obtenidos, por lo que atendiendo al ingreso unitario por producto, el ingreso total sería:

$$Max\ 8 \cdot x + 10 \cdot y$$

- Las restricciones del problema vienen dadas por las limitaciones en los recursos disponibles. De esta forma, se debe tener en cuenta la madera y la mano de obra disponibles. Matemáticamente, estas condiciones se pueden escribir como sigue:
  - Limitación de madera: $4x + 6y \leq 24 \quad (R1)$
  - Limitación de mano de obra: $8x + 3y \leq 24 \quad (R2)$

- Por último, las condiciones de no negatividad para ambas variables.

$$x, y \geq 0 \quad (R3; R4)$$

En la Figura 4.1 se muestra la solución gráfica del problema:

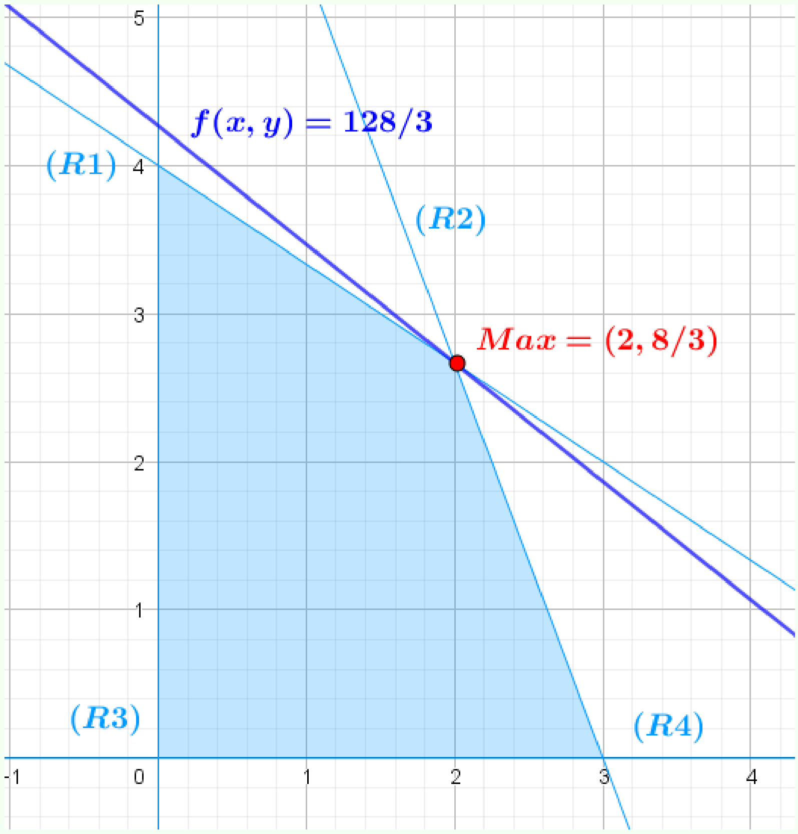


Figura 4.1: Resolución gráfica del ejemplo.

donde la región factible está sombreada en azul y la curva de nivel óptima está señalada en rojo. De esta forma, la solución del problema sugiere construir 2 sillas y $\frac{8}{3}$ mesas con un ingreso total de $8 \cdot 2 + 10 \cdot \frac{8}{3} = 42,666$ €. Esta solución carece de sentido práctico, pues no se pueden construir $\frac{8}{3}$ mesas. Esto se debe a que no hemos considerado que las variables deben tomar valores enteros, es decir: $x, y \in \mathbb{Z}$. Entonces ¿cómo resolvemos el problema?
En la siguiente imagen, se resaltan en azul los puntos que forman la región factible, considerando las variables enteras:

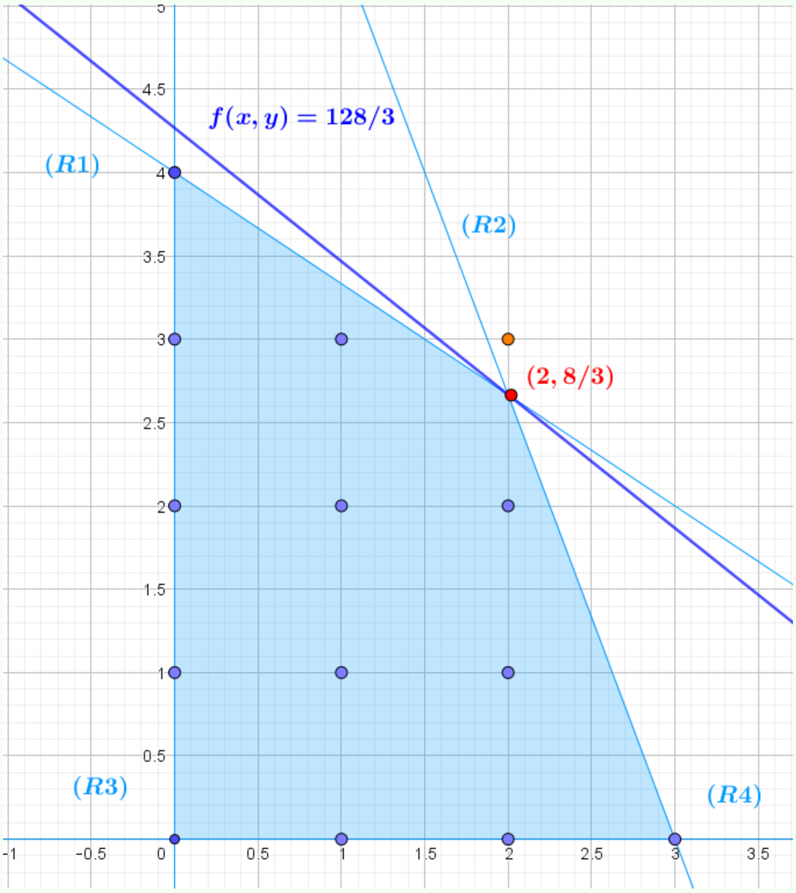


Figura 4.2: Región factible con variables enteras.

Como hemos mencionado antes, para resolver el problema, la respuesta que podría ser más intuitiva consiste en redondear los valores de la solución que no son enteros a su entero más próximo. En este ejemplo, y aplicando esta estrategia, obtendríamos el punto (2,3), resaltado en naranja, que queda fuera de la región factible marcada por las condiciones del problema, por lo que no podría ser solución. Asimismo, se puede observar que si redondeamos por defecto, el punto que obtenemos (2,2) no es máximo, puesto que en el punto (1,2), por ejemplo, se alcanzaría un mayor valor de la función objetivo.

Dado que es cuestionable redondear la solución no entera para obtener una solución entera, se han diseñado estrategias propias para la resolución de estos problemas en variable entera, como es el caso de los métodos de ramificación y acotación (en inglés, *Branch and bound*, Land y Doig, 1960) o ramificación y corte (en inglés, *Branch and cut*). Como su nombre indica, estos métodos se apoyan en un esquema de árbol, en el que se realiza una exploración por sus ramas, incorporando restricciones al modelo. Habrá ramas que no interese explorar, y el criterio para ello es la acotación. Esto quiere decir que la exploración continuará, si estamos maximizando, por aquella rama que aporta un valor mayor de la función objetivo (resp. para un problema a minimizar). A continuación, se muestra cómo funcionan estos algoritmos, resolviendo el ejemplo anterior.

Ejemplo 4.2: Fábrica de muebles. Resolución por ramificación y acotación

Resuelva el problema del Ejemplo 4.1 mediante el método de ramificación y acotación.

Solución

Partiendo del planteamiento con variables enteras, el problema quedaría definido por el siguiente modelo:

$$\left\{\begin{array}{ll} Max & 8x+10y \\ s.a & 4x+6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x+3y \leq 24 \quad (R2) \\ & x,y \geq 0 \quad (R3;R4) \\ & x,y \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

donde la región factible viene dada por los puntos de color azul que aparecían en la Figura 4.2. En primer lugar, resolvemos el problema sin tener en cuenta las condiciones de variable entera, esto es:

$$\left\{\begin{array}{ll} Max & 8x+10y \\ s.a & 4x+6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x+3y \leq 24 \quad (R2) \\ & x,y \geq 0 \quad (R3;R4) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

La solución proporcionada por esta aproximación (4.2) toma un valor no entero para el número de mesas (y). En concreto: $y=\frac{8}{3}$. Este número se puede descomponer como:

$$y=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$$

por lo que, considerando valores enteros, se podría decir que $y \leq 2$ ó $y \geq 3$. Aplicamos esta nueva condición y resolvemos los dos problemas resultantes:

$$\text{(Subproblema 1)} \quad \left\{\begin{array}{ll} Max & 8x+10y \\ s.a & 4x+6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x+3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \geq 3 \quad (R3) \\ & x,y \geq 0 \quad (R4;R5). \end{array}\right.$$

$$\text{(Subproblema 2)} \quad \left\{\begin{array}{ll} Max & 8x+10y \\ s.a & 4x+6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x+3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \leq 2 \quad (R3) \\ & x,y \geq 0 \quad (R4;R5). \end{array}\right.$$

Gráficamente, la región factible de ambos problemas quedaría separada de la siguiente forma (obsérvese que no se ha dejado fuera de los subconjuntos considerados ninguna solución entera del problema):

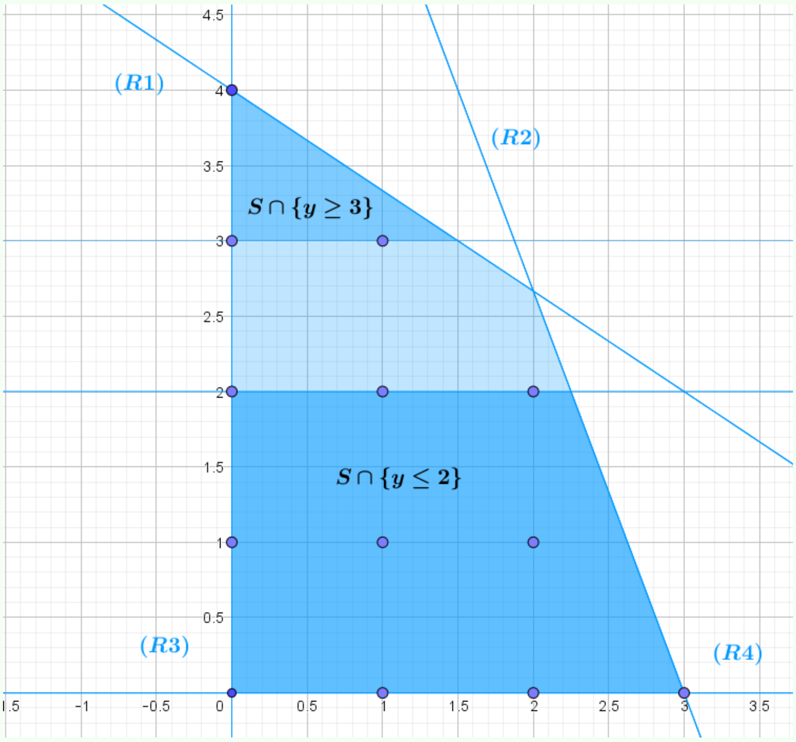


Figura 4.3: Región factible con variables enteras. Ramificación.

Ahora, podemos resolver cada problema por separado:

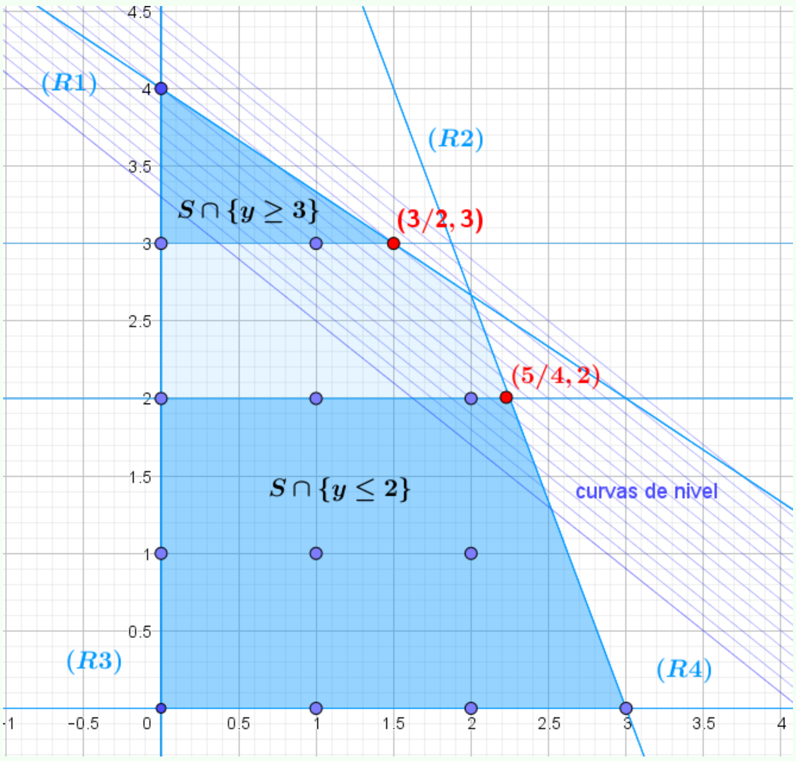


Figura 4.4: Resolvemos cada problema de la ramificación.

Como se aprecia en la figura, la solución para el *subproblema 1* sugiere fabricar 3/2 sillas y 3 mesas. Esto, evaluado en la función objetivo, supone un ingreso de: $8 \cdot \frac{3}{2} + 10 \cdot 3 = 42$ €; mientras que la solución para el *subproblema 2* supone fabricar $\frac{9}{4}$ sillas y 2 mesas, con un ingreso de: $8 \cdot \frac{9}{4} + 10 \cdot 2 = 38$ €. Ninguna de las soluciones nos proporciona un resultado coherente, pues ambas sugieren fabricar un número no entero de sillas. Es por ello que el procedimiento debe continuar. Como se trata de un problema a maximizar, continuamos por la rama o subproblema que proporcione un mayor valor de la función objetivo. En este caso, continuamos apoyándonos en el *subproblema 1*. Ahora, repetimos el proceso de ramificación con la variable x, pues ha resultado no entera en la solución obtenida:

$$x = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \rightarrow x \leq 1 \text{ ó } x \geq 2$$

Lo que nos deja los siguientes subproblemas a estudiar:

$$\text{(Subproblema 1.1)} \quad \begin{cases} Max & 8x + 10y \\ s.a & 4x + 6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x + 3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \geq 3 \quad (R3) \\ & x \leq 1 \quad (R4) \\ & x, y \geq 0 \quad (R5; R6). \end{cases}$$

$$\text{(Subproblema 1.2)} \quad \begin{cases} Max & 8x + 10y \\ s.a & 4x + 6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x + 3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \geq 3 \quad (R3) \\ & x \geq 2 \quad (R4) \\ & x, y \geq 0 \quad (R5; R6). \end{cases}$$

Gráficamente, la región factible de ambos problemas quedaría separada de la siguiente forma:

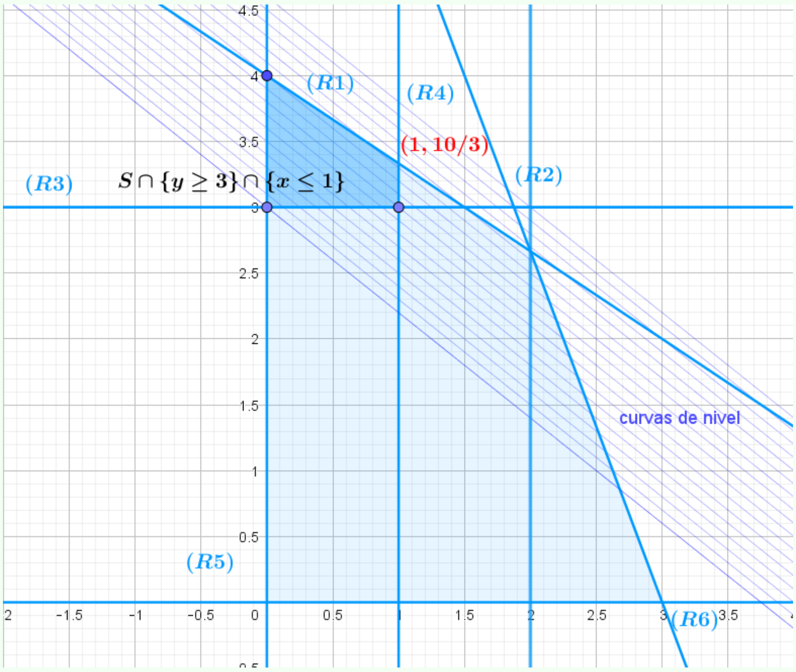


Figura 4.5: Región factible con variables enteras. Segunda ramificación.

En la figura se observa cómo el *subproblema 1.2* tiene una región factible vacía y por tanto no es un problema factible. Analíticamente habría que intentar resolverlo para ver que no hay puntos factibles. Así que sólo resolvemos el *subproblema 1.1*. Tal y como se observa en la figura, obtenemos una solución en el punto $(1, \frac{10}{3})$ con un valor de ingresos de $41,33$ €. Una vez más, obtenemos una solución con valores no enteros, por lo que repetimos el procedimiento de ramificación con la variable y, apoyándonos en el *subproblema 1.1*.

$$y = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} \rightarrow y \leq 3 \text{ ó } y \geq 4.$$

Lo que nos deja los siguientes subproblemas a estudiar:

$$\text{(Subproblema 1.1.1)} \quad \begin{cases} Max & 8x + 10y \\ s.a & 4x + 6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x + 3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \geq 3 \quad (R3) \\ & x \leq 1 \quad (R4) \\ & y \leq 3 \quad (R5) \\ & x, y \geq 0 \quad (R6; R7). \end{cases}$$

En esta ocasión, las restricciones $(R3)$ y $(R5)$ se reducen a una restricción de igualdad:

$y = 3$.

$$\text{(Subproblema 1.1.2)} \quad \begin{cases} Max & 8x + 10y \\ s.a & 4x + 6y \leq 24 \quad (R1) \\ & 8x + 3y \leq 24 \quad (R2) \\ & y \geq 3 \quad (R3) \\ & x \leq 1 \quad (R4) \\ & y \geq 4 \quad (R5) \\ & x, y \geq 0 \quad (R6; R7). \end{cases}$$

Ahora, ambas regiones factibles se reducen a un punto.

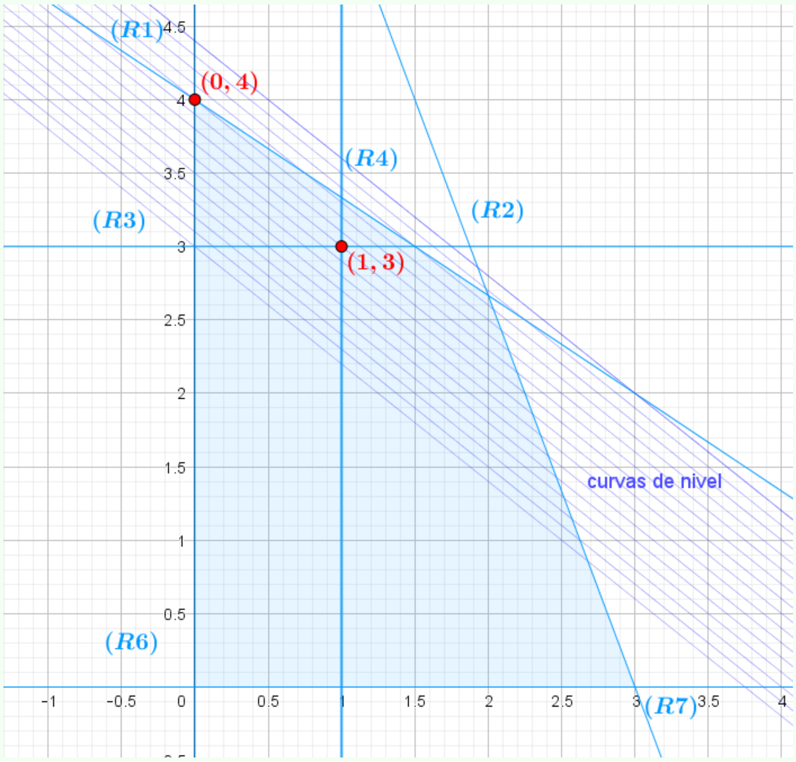


Figura 4.6: Región factible con variables enteras. Tercera ramificación.

Como se puede ver en la figura, la región factible del *subproblema 1.1.1* se reduce al punto $(1, 3)$, solución de este subproblema, con un valor de la función objetivo de 38; mientras el punto $(0, 4)$ es la solución del *subproblema 1.1.2* con un ingreso de 40 u.m. Esto, en comparación con lo obtenido en el *subproblema 2* en el que hemos obtenido una solución no entera con un valor de la función objetivo inferior (38), nos lleva a descartar el análisis de la rama derivada del *subproblema 2*.
Por tanto, ya hemos encontrado una solución factible con variables enteras, que consiste en fabricar 4 mesas y ninguna silla.

Una vez visto cómo funciona el algoritmo de ramificación y acotación para problemas de variable entera, podemos esbozar un procedimiento general siguiendo el siguiente esquema:

1. Resolvemos el problema planteado, sin considerar las condiciones de que las variables sean enteras.
   - Si la solución toma valores enteros en las variables enteras, hemos acabado. Es la solución del problema.
   - Si la solución no toma valores enteros en las variables enteras, procedemos al paso 2.
2. Para aquellas variables x_i que no son enteras en la solución de la rama, las descomponemos de la siguiente forma:
$$x_i : \begin{cases} x_i \geq [x_i] + 1 \\ x_i \leq [x_i] \end{cases} \tag{4.3}$$
donde $[x_i]$ denota la parte entera de x_i.
3. Añadimos una de las restricciones (4.3) y resolvemos los problemas resultantes.
   - Si la solución, para alguno de los problemas construidos, toma valores enteros en las variables enteras, habríamos acabado el análisis por esa rama. Ahora, podemos ”podar” otras por acotación y continuar analizando. Esto es equivalente a estudiar si hay otras ramas con mayor valor de la función objetivo por las que interesa seguir.
   - Si la solución no toma valores enteros en las variables enteras, volvemos al paso 2. Para ello, continuamos con el subproblema generado que ha obtenido un mejor valor de la función objetivo: el mayor si el problema es a maximizar, o el menor en caso contrario.

Como se aprecia, el esfuerzo de estos métodos iniciales era elevado, por lo que a lo largo de todos estos años se han incorporado distintas variantes, algunas de ellas implementadas en *Lingo*, que permiten indicar las variables enteras y modificar otras opciones avanzadas del programa.

A continuación, veremos un caso particular de problema en variable entera conocido como el problema del transporte.

4.1.1. El problema del transporte, un modelo con variables enteras

El problema del transporte es un problema clásico de la programación lineal entera. Se quiere determinar qué cantidad de mercancía enviar, en lotes indivisibles, desde m puntos de origen, donde se almacena, a n puntos de destino, al menor coste. Es un modelo que se usa muy a menudo en la industria, aunque atendiendo a particularidades en el proceso de modelización. En el problema estándar, las variables de decisión se definen como x_{ij}, que denota las unidades de mercancía transportada del origen i al destino j. Para expresar formalmente el modelo matemático, se conocen:

- c_{ij}: Los costes de transportar una unidad o lote del origen i al destino j. Este coste puede estar dado en distintas unidades, siendo las más usuales la distancia o la duración del recorrido o unidades monetarias.
- e_i: Las cantidades de producto disponible en cada origen i.
- d_j: La cantidad demandada en cada punto de destino j.

Así, suponiendo que la demanda es menor o igual que la oferta, se deduce la siguiente formulación del problema:

$$\text{(Modelo transporte)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} Min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ s.a & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq e_i \ (i = 1, 2, ...m) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \ (j = 1, 2, ...n) \\ & x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, ...m, \ j = 1, 2, ...n) \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z} \ (i = 1, 2, ...m, \ j = 1, 2, ...n), \end{array} \right.$$

donde:

- La función objetivo recoge la función de costes de transporte de todas las mercancías.
- La primera restricción contempla que la cantidad total de productos transportados desde cada origen i $(i = 1, 2, \cdots m)$ a los destinos $(j = 1, 2 \cdots n)$ debe ser inferior a la oferta disponible en dicho origen.
- Además, se añade una restricción análoga para la demanda. En este caso, se indica que, al menos, debe satisfacerse la demanda de mercancía enviada desde cualquier origen i $(i = 1, 2, \cdots m)$ a cada uno de los destinos j $(j = 1, 2, \cdots n)$.
- Por último, se contemplan las condiciones de no negatividad y que sean enteras las variables del problema ,ya que indican el número de lotes de mercancía a transportar.

Hay situaciones en las que la cantidad demandada es igual a la oferta disponible (C). En este caso tenemos un problema equilibrado, donde la oferta es igual a la demanda y ambas son positivas.

$$\sum_{i=1}^{m} e_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = C > 0$$

Así, si el problema está *equilibrado* las desigualdades se pueden convertir en restricciones de igualdad.

Normalmente, siempre que se estén minimizando costes,la solución proporcionada por el modelo consistirá en enviar justamente lo demandado, sin excederse. Sin embargo, en el caso de maximizar utilidades, si tenemos suficiente oferta, podremos enviar más productos de los demandados al destino. Si esto no es lo que se desea, estas condiciones adicionales deben verse reflejadas en el modelo. Por ejemplo, imponiendo que las demandas se satisfagan con igualdad.

Para resolver el problema del transporte, se han desarrollado algunos algoritmos como los métodos de la Esquina Noroeste y Vogel REFERENCIA. Sin embargo, utilizando *Lingo* también es posible resolver estos modelos como un problema de programación lineal.

Veamos un ejemplo básico para aclarar la situación:

Ejemplo 4.3: Transporte de aceite

Una empresa local de aceites debe distribuir cajas de aceite a 3 tiendas: T_1, T_2 y T_3. La demanda es de 15 cajas por parte de la tienda T_1 y 10 en las otras dos tiendas. Actualmente, la empresa tiene 15 cajas en el centro de distribución CD_1 y 20 en el centro CD_2. Además, la siguiente tabla (diseñada por la empresa) resume los gastos de transporte unitario (en unidades monetarias) desde cada centro de distribución a cada tienda:

	T_1	T_2	T_3
CD_1	1	5	10
CD_2	10	1	5

Así, la pregunta que se hace la empresa es ¿cómo se ha de realizar el transporte de las cajas al menor coste posible? Modelice el problema y obtenga su solución con *Lingo*.

Solución

En primer lugar, se definen las variables de decisión:

CD_iT_j = número de unidades transportadas desde el centro de distribución CD_i a la tienda T_j.

Estas variables son enteras y no negativas, es decir: $CD_iT_j \geq 0$ y $CD_iT_j \in \mathbb{Z}$. Así, por ejemplo, CD_1T_3 determina el número de unidades transportadas desde CD_1 hasta la tienda T_3.
A continuación, se definen las restricciones en función de las variables de decisión. En este caso, debemos tener en cuenta:

- La disponibilidad u oferta de unidades que se encuentran en cada centro de distribución:

$$\begin{cases} [dispCD_1] \quad CD_1T_1 + CD_1T_2 + CD_1T_3 \leq 15 \\ [dispCD_2] \quad CD_2T_1 + CD_2T_2 + CD_2T_3 \leq 20. \end{cases}$$

- La demanda de unidades de cada tienda:

$$\begin{cases} [demT_1] \quad CD_1T_1 + CD_2T_1 \geq 15 \\ [demT_2] \quad CD_1T_2 + CD_2T_2 \geq 10 \\ [demT_3] \quad CD_1T_3 + CD_2T_3 \geq 10. \end{cases}$$

En este caso, las desigualdades en las restricciones podrían ser sustiuidas por igualdades, ya que la oferta y la demanda coinciden.
Por último, para determinar cuál es la forma más económica de distribuir las cajas, se define la siguiente función objetivo:

$$Min\ CD_1T_1 + 5CD_1T_2 + 10CD_1T_3 + 10CD_2T_1 + CD_2T_2 + 5CD_2T_3$$

Ahora, aunque existen algoritmos particulares para resolver el problema del transporte, planteamos el modelo con *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Min = CD1T1+5*CD1T2+10*CD1T3+10*CD2T1+CD2T2+5*CD2T3;
[dispCD1] CD1T1+CD1T2+CD1T3 <= 15;
[dispCD2] CD2T1+CD2T2+CD2T3 <= 20;
[demT1] CD1T1+CD2T1 >= 15;
[demT2] CD1T2+CD2T2 >= 10;
[demT3] CD1T3+CD2T3 >= 10;
@Gin(CD1T1);
@Gin(CD2T1);
@Gin(CD1T2);
@Gin(CD2T2);
@Gin(CD1T3);
@Gin(CD2T3);
```

Obsérvese que la orden @Gin (x) indica que la variable x es de tipo entero.

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 75,00000
```

Variable	Valor
CD1T1	15,00000
CD1T2	0,000000
CD1T3	0,000000
CD2T1	0,000000
CD2T2	10,00000
CD2T3	10,00000

Así, se deduce que la estrategia óptima para portar la mercancía es llevar 15 unidades del centro de distribución CD_1 a la tienda T_1 y desde el centro de distribución CD_2, satisfacer la demanda de las tiendas T_2 y T_3 portando 10 unidades a cada una. Como la oferta coincide con la demanda, en este caso, todas las restricciones se verifican con igualdad. El coste mínimo asciende a 75 unidades monetarias.

Los problemas de transporte pueden complicarse de distintas formas, por ejemplo:

- Cuando el total de demanda no coincide con la oferta. En este caso, como hemos comentado, se dice que el problema no está equilibrado. Y se podría penalizar el almacenaje de la mercancía sobrante en el almacén (si la oferta es menor que la demanda) o la falta de mercancía (si la demanda es mayor que la oferta).
- Si los vehículos de transporte tienen una capacidad limitada.
- Si algunos nodos son, simultáneamente, puntos de demanda y origen de mercancías para otros destinos. También conocidos como puntos de transbordo. Veamos un caso práctico de este último punto mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4: Transporte de medicamentos con transbordo.

Una farmacéutica tiene 3 centros de fabricación de medicamentos, que llamaremos F_1, F_2 y F_3. En concreto, F_1 produce un total de 3200 de unidades al día, F_2 produce 3000 y, por último, F_3, 2400 unidades. Una vez fabricados los lotes de medicamentos, éstos se transportan y almacenan en dos naves, N_1 y N_2, con una capacidad de 4000 y 5000 unidades, respectivamente. Los costes de transporte de las fábricas a las naves están recogidos en la siguiente tabla:

	N_1	N_2
F_1	15	10
F_2	10	9
F_3	11	7

En estos puntos se realiza un control de calidad, antes de su reparto a 5 farmacias distintas: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Los costes de transporte de las naves a las farmacias, así como la demanda en cada farmacia vienen dados por la siguiente tabla:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
N_1	5	6	4	7	4
N_2	3	5	7	4	3
Demanda (miles de unidades)	1	1,5	1,5	2,2	2,3

Dada esta situación, los gerentes quieren conocer cuál es la estrategia óptima para enviar la mercancía desde las fábricas hasta las farmacias, de forma que la demanda quede completamente cubierta, al menor coste posible.

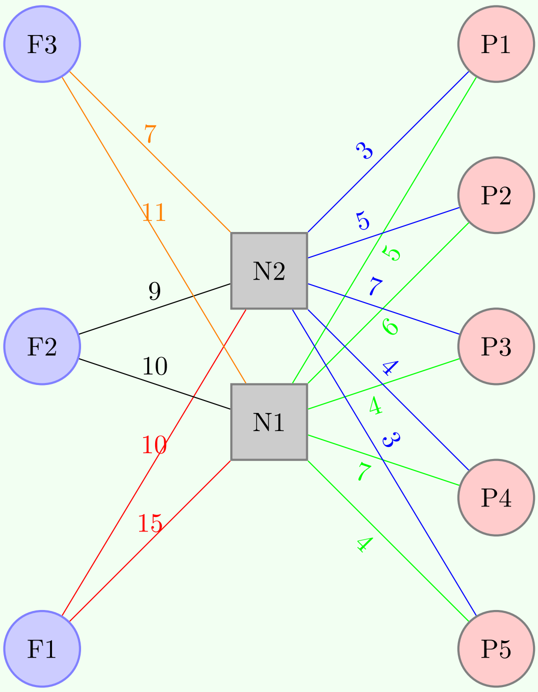
Solución

Vamos a definir las variables de decisión como:

$$F_iN_j = \{\text{número de unidades transportadas desde el centro de fabricación } i \text{ a la nave } j\}$$

$$N_jP_k = \{\text{número de unidades transportadas desde la nave } j \text{ a la farmacia } k\}$$

Estas variables son enteras y no negativas, es decir: $F_iN_j, N_jP_k \geq 0$ y $F_iN_j, N_jP_k \in \mathbb{Z}$. En este caso, las fábricas ($i = 1, 2, 3$) son los orígenes del problema y las farmacias ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) los destinos finales. Además, las naves ($j = 1, 2$) participan como destino de las fábricas, y como origen hacia las farmacias. La siguiente figura muestra la representación en red de este problema.



Una vez definidas las variables de decisión, formalizamos las restricciones, teniendo en cuenta:

- La disponibilidad u oferta de unidades que se encuentran en cada fábrica:

$$\begin{cases} [F_1] \quad F_1N_1 + F_1N_2 \leq 3200 \\ [F_2] \quad F_2N_1 + F_2N_2 \leq 3000 \\ [F_3] \quad F_3N_1 + F_3N_2 \leq 2400. \end{cases}$$

- La oferta en cada nave no puede superar la capacidad del mismo:

$$\begin{cases} [N_1] \quad N_1P_1 + N_1P_2 + N_1P_3 + N_1P_4 + N_1P_5 \leq 4000 \\ [N_2] \quad N_2P_1 + N_2P_2 + N_2P_3 + N_2P_4 + N_2P_5 \leq 5000. \end{cases}$$

- En cada nave, la cantidad que sale, no puede superar la cantidad que llega:

$$\begin{cases} [desN_1] \quad F_1N_1 + F_2N_1 + F_3N_1 - (N_1P_1 + N_1P_2 + N_1P_3 + N_1P_4 + N_1P_5) \geq 0 \\ [desN_2] \quad F_1N_2 + F_2N_2 + F_3N_2 - (N_2P_1 + N_2P_2 + N_2P_3 + N_2P_4 + N_2P_5) \geq 0. \end{cases}$$

  Con las restricciones actuales, podría llegar a una nave una cantidad mayor a su capacidad. Sin embargo, como la función objetivo minimiza, tenemos asegurado que llega justo lo necesario para continuar el proceso.

- La demanda en cada farmacia ha de ser cubierta desde las naves:

$$\begin{cases} [P_1] \quad N_1P_1 + N_2P_1 \geq 1000 \\ [P_2] \quad N_1P_2 + N_2P_2 \geq 1500 \\ [P_3] \quad N_1P_3 + N_2P_3 \geq 1500 \\ [P_4] \quad N_1P_4 + N_2P_4 \geq 2200 \\ [P_5] \quad N_1P_5 + N_2P_5 \geq 2300. \end{cases}$$

Para resolver el problema, entonces planteamos el modelo con *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Min = 15*F1N1+10*F1N2+10*F2N1+9*F2N2+11*F3N1+7*F3N2+5*N1P1+6*N1P2+
4*N1P3+7*N1P4+4*N1P5+3*N2P1+5*N2P2+7*N2P3+4*N2P4+3*N2P5;
[F1] F1N1+F1N2 <= 3200;
[F2] F2N1+F2N2 <= 3000;
[F3] F3N1+F3N2 <= 2400;
[N1] N1P1+N1P2+N1P3+N1P4+N1P5 <= 4000;
[N2] N2P1+N2P2+N2P3+N2P4+N2P5 <= 5000;
[desN1] F1N1+F2N1+F3N1-N1P1-N1P2-N1P3-N1P4-N1P5 >= 0;
[desN2] F1N2+F2N2+F3N2-N2P1-N2P2-N2P3-N2P4-N2P5 >= 0;
[P1] N1P1+N2P1 >= 1000;
[P2] N1P2+N2P2 >= 1500;
[P3] N1P3+N2P3 >= 1500;
[P4] N1P4+N2P4 >= 2200;
[P5] N1P5+N2P5 >= 2300;
@Gin(F1N1);
@Gin(F1N2);
@Gin(F2N1);
@Gin(F2N2);
@Gin(F3N1);
@Gin(F3N2);
@Gin(N1P1);
@Gin(N1P2);
@Gin(N2P1);
@Gin(N2P2);
@Gin(N1P3);
@Gin(N1P4);
@Gin(N1P5);
@Gin(N2P1);
@Gin(N2P2);
@Gin(N2P3);
@Gin(N2P4);
@Gin(N2P5);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 114.400,0
```

Variable	Valor
F1N2	3.100,000
F2N1	3.000,000
F3N1	500,0000
F3N2	1.900,000
N1P2	1.500,000
N1P3	1.500,000
N1P5	500,0000
N2P1	1.000,000
N2P4	2.200,000
N2P5	1.800,000

Fila	Holgura
F1	100,0000
N1	500,0000

En los resultados de *Lingo* sólo se han resaltado aquellos que no son nulos. La solución encontrada supone un coste total del transporte de medicamentos de 114.400 u.m. La interpretación de dicha solución, es la siguiente:

- Al almacén N_1 llegan 3000 unidades de la fábrica F_2 y 500 de F_3.
- A la nave N_2 llegan 3100 unidades de la fábrica F_1 y 1900 de F_3.
- De la nave N_1 salen 1500 unidades hacia la farmacia P_2, 1500 hacia P_3 y 500 hacia P_5.
- De la nave N_2 salen 1000 unidades hacia la farmacia P_1, 2200 hacia P_4 y 1800 hacia P_5.
- En cuanto a las holguras, hacen referencia al cumplimiento de las restricciones. En este caso, todas las restricciones son activas (pues sus holguras son 0) salvo las denotadas por $[F1]$ y $[N1]$. En particular, la holgura de la restricción $[F1]$ contempla que la fábrica 1, que tiene una capacidad de oferta de hasta 3200, no es alcanzada sino que aún tiene disponibilidad de ofertar 100 unidades más. Esto supone que la suma de la cantidad transportada a la naves 1 y 2 no debe superar las 3200 unidades. Dicho de

otra forma, la solución muestra que la fábrica 1 sólo transporta 3100 unidades a la nave 2 y ninguna a la nave 1 ($F1N2 = 3100, F1N1 = 0$). Esto implica que la fábrica 1 tiene aún capacidad para producir o almacenar 100 unidades más.

- Por otro lado, que la holgura de la restricción $[N1]$ sea de 500, indica que la nave 1 tiene capacidad para 500 unidades más, por lo que sólo transportará 3500 unidades a las 5 farmacias, en lugar de las 4000 para las que tendría capacidad.
- Además, cabe destacar el hecho de que el resto de holguras son nulas, por lo que las restricciones se verifican con igualdad. Esto implica que de la fábrica 2 y fábrica 3, toda la producción se transporta a las naves. Por otro lado, por ser la holgura de restricción $[N2]$ nula, se entiende que toda la mercancía que hay almacenada en la nave 2 es trasladada a las farmacias.

4.2. Programación lineal binaria

Un caso particular de variables enteras es considerar variables binarias o dicotómicas.

Definición 4.2: Variable binaria

Se dice que una variable es binaria si sólo puede tomar los valores $V = \{0, 1\}$.

Este tipo de variables se emplea en muy diversas situaciones para modelizar aquellos casos en los que se quiere señalar si se cumple, o no, un determinado escenario. Además, en ocasiones, el empleo de variables binarias es clave para transformar un problema en lineal. A continuación se presentan algunas ideas para abordar estas situaciones.

4.2.1. Cómo usar variables binarias. Algunas ideas

Las variables binarias no siempre desempeñan un papel protagonista en la modelización de problemas de optimización. Hay ocasiones en las que se definen como variables auxiliares para representar condiciones lógicas. A continuación, se expone un ejemplo que recoge una de estas situaciones:

Ejemplo 4.5: Fabricación de golosinas con condiciones

Una fábrica produce 3 tipos distintos de golosinas A, B y C. La producción de cajas de golosinas de tipo A y C tiene, cada una, dos procesos alternativos, $s_A^1, s_A^2 y s_C^1, s_C^2$, respectivamente. Sólo puede emplearse un proceso por producto. Sin embargo, para producir B sólo tiene un proceso s_B. La fábrica dispone de 3 máquinas (M_1,M_2,M_3) con una capacidad limitada a 100, 200 y 300 unidades respectivamente. El tiempo necesario (medido en horas al día) para fabricar una unidad de producto está descrito en la siguiente tabla:

	s_A^1	s_A^2	s_B	s_C^1	s_C^2
M_1	2	0	2	3	2
M_2	0	4	7	2	1
M_3	6	5	1	5	9
Capacidad máxima de producción	200	100	150	100	200

Los beneficios unitarios obtenidos por la venta de cajas de tipo A, B y C ascienden a 4,3 y 6 u.m. respectivamente. Por último, la fábrica se propone fabricar sólo 2 de estos productos obteniendo el máximo beneficio posible. ¿Cuántas cajas de cada tipo de golosinas se deben producir? ¿En qué procesos?

Solución

Para resolver esta cuestión, definimos las variables que representan el número de cajas de cada tipo de golosina a fabricar (A, B ó C) y el proceso: x_A^1, x_A^2, x_B y x_C^1, x_C^2. De esta forma, x_A^1 indica el número de cajas producidas de tipo A en el proceso s_A^1.
La función objetivo consiste en maximizar los beneficios

$$Max\ 4 \cdot (x_A^1 + x_A^2) + 3x_B + 6 \cdot (x_C^1 + x_C^2)$$

Ahora, modelizamos las condiciones dadas por la capacidad limitada:

$$\begin{cases} [M_1] \quad 2 \cdot x_A^1 + 2 \cdot x_B + 3 \cdot x_C^1 + 2 \cdot x_C^2 \quad \leq 100 \\ [M_2] \quad 4 \cdot x_A^2 + 7 \cdot x_B + 2 \cdot x_C^1 + \cdot x_C^2 \quad \leq 200 \\ [M_3] \quad 6 \cdot x_A^1 + 5 \cdot x_A^2 + x_B + 5 \cdot x_C^1 + 9 \cdot x_C^2 \quad \leq 300 \end{cases}$$

Para indicar que sólo puede usarse un proceso por tipo de golosina es necesario definir unas variables binarias auxiliares:

$$\delta_A^1 = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el proceso 1 para producir golosinas de tipo A} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\delta_A^2 = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el proceso 2 para producir golosinas de tipo A} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así, la condición para las golosinas de tipo A quedaría:

$$\delta_A^1 + \delta_A^2 \leq 1$$

Nótese cómo esta expresión engloba las distintas situaciones que podrían darse para asignar un proceso al tipo de golosina A. En particular, puede ocurrir:

- Si se usa el proceso 1 (δ_A^1=1) entonces, forzosamente, no se puede utilizar el proceso 2 (δ_A^2=0) ya que en caso contrario la suma no sería inferior a la unidad. Una situación completamentamente análoga ocurre si δ_A^2=1
- Por otra parte, esta expresión “respeta” la condición si la golosina A no se produce por ningún proceso (δ_A^1=0 y δ_A^2=0).

Además, cada proceso, según informa la tabla, tiene una limitación, que queda reflejado en las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \delta_A^1 \leq \quad x_A^1 \leq \quad 200 \cdot \delta_A^1 \\ \delta_A^2 \leq \quad x_A^2 \leq \quad 100 \cdot \delta_A^2 \end{cases}$$

Con el fin de especificar, como veremos más adelante, que sólo se pueden fabricar 2 de los productos, definiremos también una variable binaria para el producto B.

$$\delta_B = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el proceso para producir golosinas de tipo B} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para las golosinas de tipo B no se requiere restricción adicional, pues sólo existe un proceso disponible.

$$\delta_B \leq \quad x_B \leq \quad 150 \cdot \delta_B$$

$$\delta_C^1 = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el proceso 1 para producir golosinas de tipo C} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\delta_C^2 = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el proceso 2 para producir golosinas de tipo C} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Así, la condición para las golosinas de tipo C, tal y como ocurría para las golosinas de tipo A, quedarían:

$$\delta_C^1 + \delta_C^2 \leq 1$$

Además, dadas las limitaciones de cada uno de los procesos asociados a las golosinas de tipo C, se deben añadir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \delta_C^1 \leq & x_C^1 \leq & 100 \cdot \delta_C^1 \\ \\ \delta_C^2 \leq & x_C^2 \leq & 200 \cdot \delta_C^2 \end{cases}$$

Por último, la empresa se propone fabricar 2 líneas de producto. De la restricción anterior, se deduce que $\delta_A^1 + \delta_A^2$ toman los valores 0 ó 1 ($\delta_A^1 + \delta_A^2 \in \{0, 1\}$) y $\delta_C^1 + \delta_C^2 \in \{0, 1\}$. Por lo que la suma de todas las variables binarias definidas debe ser menor que 2:

$$\delta_A^1 + \delta_A^2 + \delta_B + \delta_C^1 + \delta_C^2 \leq 2$$

Estas condiciones hay que incluirlas en el modelo, que se formula como sigue:

$$\left\{\begin{array}{ll}
Max & 4\cdot(x_A^1+x_A^2)+3x_B+6\cdot(x_C^1+x_C^2) \\
s.a & 2\cdot x_A^1+2\cdot x_B+3\cdot x_C^1+2\cdot x_C^2\leq 100 \\
 & 4\cdot x_A^2+7\cdot x_B+2\cdot x_C^1+x_C^2\leq 200 \\
 & 6\cdot x_A^1+5\cdot x_A^2+x_B+5\cdot x_C^1+9\cdot x_C^2\leq 300 \\
 & \delta_A^1+\delta_A^2\leq 1 \\
 & \delta_A^1\leq x_A^1\leq \quad 200\cdot\delta_A^1 \\
 & \delta_A^2\leq x_A^2\leq \quad 100\cdot\delta_A^2 \\
 & x_B\leq \quad 150\cdot\delta_B \\
 & \delta_C^1+\delta_C^2\leq 1 \\
 & \delta_C^1\leq x_C^1\leq \quad 100\cdot\delta_C^1 \\
 & \delta_C^2\leq x_C^2\leq \quad 200\cdot\delta_C^2 \\
 & \delta_A^1+\delta_A^2+\delta_B+\delta_C^1+\delta_C^2\leq 2 \\
 & \delta_A^1,\delta_A^2,\delta_B,\delta_C^1,\delta_C^2\in\{0,1\} \\
 & x_A^1,x_A^2,x_B,x_C^1,x_C^2\in\mathbb{Z}.
\end{array}\right.$$

El planteamiento en *Lingo* de este problema es como sigue:

Lingo: Enunciado

```
Max = 4*xA1+4*xA2+3*xB+6*xC1+6*xC2;
[M1] 2*xA1+2*xB+3*xC1+2*xC2<=100;
[M2] 4*xA2+7*xB+2*xC1+xC2<=200;
[M3] 6*xA1+5*xA2+xB+5*xC1+9*xC2<=300;
[Rest_A] dA1+dA2<=1;
[dispo_SA1] xA1<=dA1*200;
[dispo_SA2] xA2<=dA2*100;
[dispo_SB] xB<=dB*150;
[Rest_C] dC1+dC2<=1;
[dispo_SC1] xC1<=dC1*100;
[dispo_SC2] xC2<=dC2*200;
[Rest_max] dA1+dA2+dB+dC1+dC2<=2;
@Gin(xA1);
@Gin(xA2);
@Gin(xB);
@Gin(xC1);
@Gin(xC2);
@Bin(dA1);
@Bin(dA2);
@Bin(dB);
@Bin(dC1);
@Bin(dC2);
```

donde la orden @Bin(xij) indica que estas variables son binarias.

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 306,0000
```

Variable	Valor
XA2	27,00000
xC1	33,00000
dA2	1,000000
dC1	1,000000

Fila	Holgura
M1	1,000000
M2	26,000000
dispo_SA2	73,00000
dispo_SC1	67,00000

La solución indica un beneficio máximo de 306 u.m., con la que se propone que 27 cajas de golosinas de tipo A sean producidas por el proceso 2, mientras 33 del tipo C sean producidas por su proceso 1. Las variables binarias añadidas, coinciden con la activación de estos procesos. En la solución ofrecida por *Lingo*, se resaltan las holguras no nulas del modelo. Esto significa que la máquina 2 podría fabricar 26 cajas más de las que fabrica, ya que la holgura de la restricción $[M2]$ es 26. Por otro lado, el que la holgura de la restricción de las golosinas tipo A y C ($[Rest\_A]$ y $[Rest\_C]$) sean nulas implica que se fabrican golosinas de estos tipos, por alguno de los procesos productivos disponibles. En el caso de A, se usa el procedimiento 2 ($dA2 = 1$) y en el caso de C el proceso 1($dC1 = 1$). Por otro lado, como el proceso 1 no se utiliza para fabricar golosinas de tipo A ($dA1 = 0$), por la restricción $[dispo_S A1]$, $xA1$ también se anula. Análogamente, al no producirse golosinas de tipo B en la solución, tanto la variable xB como dB son nulas. Sin embargo, que la holgura en la restricción $[dispo\_SC2]$ sea 73, significa que ese procedimiento (que tiene capacidad limitada a 100 unidades) da cabida a la producción de 73 cajas menos por esa vía. De la misma forma, la capacidad del procedimiento 1 de producir golosinas de tipo C, permitiría producir 67 cajas más (dado que la holgura de la restricción $[dispo\_SC1]$ es 67).

En este ejemplo, se han considerado variables binarias auxiliares para representar una situación en la que, como mucho, puede ocurrir un escenario. A continuación, el siguiente ejemplo utiliza variables auxiliares para una situación diferente:

Ejemplo 4.6: Impartición de clases

Actualmente, el reglamento de la Universidad exige que, para impartir una asignatura optativa, debe haber un mínimo de 10 alumnos matriculados y un máximo de 50. Modelice esta situación.

Solución

Para representar esta condición se definen 2 variables:

- x = número de alumnos matriculados en la asignatura. Se trata de una variable entera y positiva: $x \in \mathbb{Z}^+$.
- $\delta = 1$ si se imparte la asignatura optativa, y 0 en caso contrario. Es, por tanto, una variable binaria.

Así, usando estas variables, esta restricción se puede definir como sigue:

$$10 \cdot \delta \leq x \leq 50 \cdot \delta$$

De esta forma, si no se imparte docencia en la asignatura optativa ($\delta = 0$), entonces el número de alumnos matriculados en esa asignatura (x) ha de ser 0. De lo contrario, si $\delta = 1$ entonces x debe ser un valor entre 10 y 50.

Por otro lado, si queremos escribir una expresión que formule la idea de que "dadas dos variables binarias, si ocurre x entonces no ocurre y", podemos definirlo, aprovechando que ambas variables son binarias, como sigue:

$$x \leq 1 - y$$

.

Esto implica que si x toma el valor 0, la variable y puede tomar el valor 0 ó 1. Sin embargo, si x toma el valor 1, y no tiene más remedio que tomar el valor 0, y viceversa. Una aplicación práctica podría verse en incompatibilidades de personalidad para trabajar en un turno concreto, o dos máquinas que no puedan funcionar simultáneamente. Un ejemplo extenso, relacionado con problemas de coste fijo, se encuentra desarrollado en el siguiente epígrafe.

A continuación, se describen algunos modelos populares que necesitan definir variables binarias para su desarrollo habitual.

4.2.2. Algunos problemas conocidos

Aunque a continuación se presentan las definiciones de los problemas originales, la similitud de su formulación con otros problemas de otras áreas es lo que los hacen tan atractivos. Cabe resaltar que estos problemas pueden alterar su función objetivo y añadir restricciones adicionales según la situación lo requiera.

El problema de asignación

Supongamos que tenemos un conjunto T, formado por n tareas que deben ser asignadas a n trabajadores, de forma que cada trabajador realice sólo una tarea y todas las tareas deben ejecutarse. En este caso, denotamos por c_{ij} el coste que conlleva asignar la tarea j al trabajador i. Así, el problema consiste en determinar la asignación óptima de trabajador-tarea que minimice el coste de la operación. Esta función de coste debe entenderse en sentido amplio. Una situación común es que el tiempo necesario por un trabajador para realizar una tarea esté representado por dicho coste.

Este tipo de situaciones está presente en multitud de problemas de logística, como puede ser la asignación de las puertas de embarque de un aeropuerto, oficinas a personal, máquinas y tareas, vehículos a rutas de entrega y/o recogida, turnos de un hospital, alineación de equipo deportivo etc.

En general, siguiendo el esquema planteado, este tipo de problemas se formula definiendo la variable binaria x_{ij} que toma el valor 1 si el trabajador i realiza la tarea j. Así, el modelo queda definido como:

$$
\begin{cases}
Min & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
s.a & \sum_i x_{ij} = 1 \ \forall j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\
 & \sum_j x_{ij} = 1 \ \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{cases}
$$

El primer bloque de restricciones recoge la condición de que cada tarea debe ser realizada por un solo trabajador; mientras que el segundo bloque nos indica que cada trabajador realiza una única tarea.

Así, nos encontramos ante un problema lineal con $n \times n$ variables binarias y sujeto a $2n$ restricciones.

Ejemplo 4.7: Asignación de tareas

En una empresa contamos con un equipo de 4 personas: Marta, Juan, Pedro y Lidia. En el proyecto en el que trabajan, tienen que cubrir 4 tareas independientemente, de forma que una tarea debe ser ejecutada por un único trabajador y un trabajador no puede ejecutar más de una tarea. Tras varios años de trabajo, el jefe conoce el rendimiento de cada uno de los trabajadores para desempeñar cada una de las tareas. Es por ello que ha construido una tabla con el tiempo (en minutos) que tardaría cada uno en realizar cada una de las tareas propuestas:

Trabajador	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
Marta	10	5	12	4
Juan	12	7	15	6
Pedro	8	4	15	7
Lidia	10	6	12	5

¿Cuál sería la asignación óptima a llevar a cabo en el trabajo para realizar las tareas en el menor tiempo posible?

Solución
El planteamiento de este problema consiste en que tenemos 4 trabajadores y 4 tareas, de modo que tenemos que asignar una tarea a cada uno de ellos. El esquema de posibilidades viene dado por la siguiente figura:

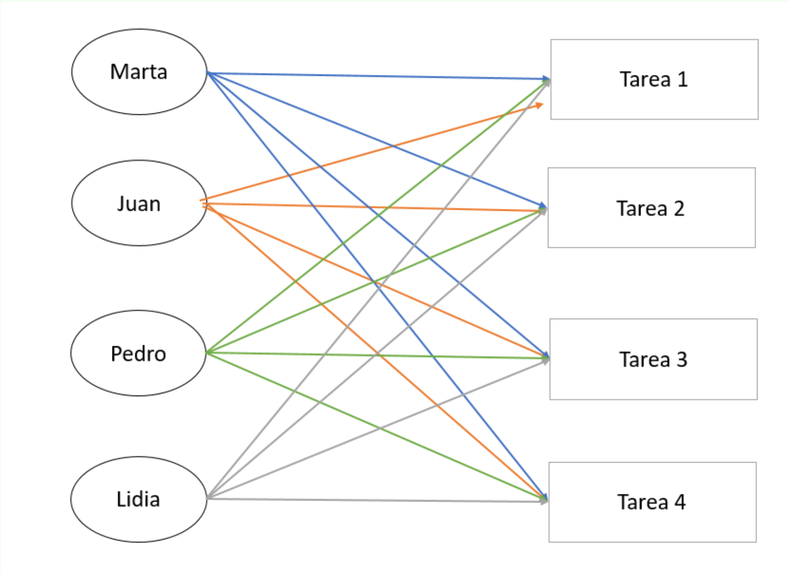


Figura 4.7: Esquema del problema.

Para resolver el problema, conviene definir las variables de decisión:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajador } i \text{ realiza la tarea } j \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $i = \{Marta(1), Juan(2), Pedro(3), Lidia(4)\}$ y $j = \{1, 2, 3, 4\}$. Ahora, podemos formular los elementos del problema, como las restricciones y la expresión de la función objetivo:

- Cada trabajador realiza una única tarea:

$$\begin{cases} [\text{Marta}] & x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} = 1 \\ [\text{Juan}] & x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} = 1 \\ [\text{Pedro}] & x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} = 1 \\ [\text{Lidia}] & x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} = 1. \end{cases}$$

- Cada tarea puede ser realizada una única vez:

$$\begin{cases} [\text{Tarea 1}] & x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} = 1 \\ [\text{Tarea 2}] & x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} = 1 \\ [\text{Tarea 3}] & x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} = 1 \\ [\text{Tarea 4}] & x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} + x_{4,4} = 1. \end{cases}$$

- La formulación para minimizar el tiempo necesario para realizar todas las tareas viene dada por:

$$\begin{cases} Min & 10 \cdot x_{1,1} + 5 \cdot x_{1,2} + 12 \cdot x_{1,3} + 4 \cdot x_{1,4} + 12 \cdot x_{2,1} + 7 \cdot x_{2,2} + 15 \cdot x_{2,3} + \\ & +6 \cdot x_{2,4} + 8 \cdot x_{3,1} + 4 \cdot x_{3,2} + 15 \cdot x_{3,3} + 7 \cdot x_{3,4} + \\ & +10 \cdot x_{4,1} + 6 \cdot x_{4,2} + 12 \cdot x_{4,3} + 5 \cdot x_{4,4} \end{cases}$$

Veamos ahora cómo resolvemos el problema planteándolo con *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Min = 10*x11+5*x12+12*x13+4*x14+12*x21+7*x22+15*x23+6*x24+8*x31+4*x32+
15*x33+7*x34+10*x41+6*x42+12*x43+5*x44;
[Marta] x11+x12+x13+x14 = 1;
[Juan] x21+x22+x+23+x24 = 1;
[Pedro] x31+x32+x33+x34 = 1;
[Lidia] x41+x42+x43+x44 = 1;
[Tarea1] x11+x21+x31+x41 = 1;
[Tarea2] x12+x22+x32+x42 = 1;
[Tarea3] x13+x23+x33+x43 = 1;
[Tarea4] x14+x24+x34+x44 = 1;
@Bin(x11);   @Bin(x12);
@Bin(x13);   @Bin(x14);
@Bin(x21);   @Bin(x22);
@Bin(x23);   @Bin(x24);
@Bin(x31);   @Bin(x32);
@Bin(x33);   @Bin(x34);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 31,00000
```

Variable	Valor
X12	1,000000
X24	1,000000
X31	1,000000
X43	1,000000

Esta solución indica que la estrategia óptima a seguir, requiere un tiempo total de 31 minutos y sugiere que Marta realice la Tarea 2, Juan la Tarea 4, Pedro la Tarea 1 y Lidia la Tarea 3. El resto de variables tiene valor nulo, obviamente, ya que todas las restricciones del modelo son de igualdad.

Un caso particular del problema de asignación es el *problema de emparejamiento*. Para este tipo de problemas, debemos formar parejas con los elementos de un mismo conjunto dado con n elementos. Veamos su funcionamiento con un ejemplo:

Ejemplo 4.8: Emparejamiento

Supongamos que tenemos 6 jugadores y queremos crear parejas para participar en una pool de pádel. Tras varias temporadas, se ha comprobado la afinidad entre los miembros del equipo y se ha generado una tabla con los partidos ganados por cada pareja:

Jugadores	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4	Jugador 5	Jugador 6
Jugador 1	0	5	3	4	2	5
Jugador 2	5	0	4	2	2	1
Jugador 3	3	4	0	2	3	2
Jugador 4	4	2	2	0	5	1
Jugador 5	2	2	3	5	0	2
Jugador 6	5	1	2	1	2	0

¿Cuáles son las parejas que deberían crearse para esperar el máximo de partidos ganados por el equipo?

Solución

En primer lugar, definimos las variables de decisión:

$$J_iJ_j = \begin{cases} 1 & \text{si el jugador } i \text{ está emparejado con el jugador } j (j > i) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Nótese que la tabla anterior es simétrica, puesto que si un jugador i gana 4 partidos con el jugador j como pareja, es obvio que el jugador j también gana 4 partidos emparejado con el jugador i. Por tanto, la tabla de preferencias o en este caso, de partidos ganados, es simétrica. Esto nos permite considerar un menor número de variables y reducir la extensión de nuestro modelo.
Este problema se puede plantear como un problema de asignación donde nadie es emparejado consigo mismo lo que nos permite no definir las variables para $i > j$, ya que $J_iJ_j = J_jJ_i$. Así, el planteamiento de nuestro problema quedaría resuelto en *Lingo* como sigue:

Lingo: Enunciado

```
Max = 5*J1J2+3*J1J3+4*J1J4+2*J1J5+5*J1J6+4*J2J3+2*J2J4+2*J2J5+
+2*J2J6+2*J3J4+3*J3J5+2*J3J6+5*J4J5+1*J4J6+
+2*J5J6;
[Opc1] J1J2+J1J3+J1J4+J1J5+J1J6 = 1;
[Opc2] J1J2+J2J3+J2J4+J2J5+J2J6 = 1;
[Opc3] J1J3+J2J3+J3J4+J3J5+J3J6 = 1;
[Opc4] J1J4+J2J4+J3J4+J4J5+J4J6 = 1;
[Opc5] J1J5+J2J5+J3J5+J4J5+J5J6 = 1;
[Opc6] J1J6+J2J6+J3J6+J4J6+J5J6 = 1;
@Bin(J1J2);   @Bin(J1J3);   @Bin(J1J4);   @Bin(J1J5);   @Bin(J1J6);
@Bin(J2J3);   @Bin(J2J4);   @Bin(J2J5);   @Bin(J2J6);
@Bin(J3J4);   @Bin(J3J5);   @Bin(J3J6);
@Bin(J4J5);   @Bin(J4J6);   @Bin(J5J6);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 14,00000
```

Variable	Valor
J1J6	1,000000
J2J3	1,000000
J4J5	1,000000

Esta solución indica que las parejas para competir serían Jugadores 1 y 6; Jugadores 4 y 5; y Jugadores 3 y 2. Con este emparejamiento de jugadores, se espera que el equipo ganaría 14 partidos.

El problema de la mochila

La finalidad del problema original es maximizar el valor de lo que un montañero introduce en su mochila, sujeto a una restricción de máximo peso admisible. Para ello, en general, se dispone de un conjunto de n elementos, cada uno de los cuales tiene un peso definido por c_i para cada $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ y tiene una importancia b_i, que se puede considerar como el valor que aporta llevar el elemento i en la mochila. Como es de esperar, la mochila debe tener una limitación en el peso cargado, P, que será la restricción del problema. Así, para el desarrollo del problema se consideran las variables de decisión: x_i, que tomarán el valor 1 si el objeto i (para cualquier $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$) es seleccionado, y 0 en caso contrario. El fin del problema es diseñar la composición óptima de la mochila, sujeto a su límite de carga, de forma que se obtenga un beneficio máximo. Este planteamiento se puede formular, de forma general, como sigue:

$$\left\{\begin{array}{ll} Max & \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i \\ s.a & \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot c_i \leq P \\ & x_i \in \{0,1\}(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{array}\right.$$

Su símil con diversos ámbitos de la economía han contribuido a un estudio amplio de este problema.

Nótese que, si todos los elementos tienen la misma importancia, se toma $b_i = 1\ \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Como se mencionaba anteriormente, esta situación también se puede dar en situaciones económicas. Así, supongamos que una empresa cuenta con un presupuesto que debe distribuir entre varios proyectos posibles. Cada uno de estos proyectos supone un coste económico y reporta un beneficio a la empresa. La cuestión es qué proyectos llevar a cabo de forma que no se exceda el presupuesto y se maximicen los beneficios.

Ejemplo 4.9: Selección de exámenes

Llega el temido periodo de exámenes del cuatrimestre. Me he matriculado de 8 asignaturas y tengo 20 días para organizarme. Veo que no me da tiempo y necesito aprobar el máximo número de asignaturas para mantener la beca. Con los datos de años anteriores, me han pasado la probabilidad de aprobar cada una de las asignaturas. Según los días que tengo estimado dedicarle a cada una, exclusivamente, la siguiente tabla recoge las probabilidades de aprobar:

Asignatura	Dedicación (días)	Probabilidad de aprobar
Asignatura 1	10	0,8
Asignatura 2	8	0,7
Asignatura 3	3	0,3
Asignatura 4	7	0,9
Asignatura 5	4	1
Asignatura 6	5	0,6
Asignatura 7	5	0,4
Asignatura 8	8	1

Dada la limitación de tiempo que tienes, ¿qué asignaturas dejarías para otra convocatoria para maximizar tu esperanza (estadística) de aprobar?

Solución

Para resolver el problema, conviene definir las variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si me preparo la asignatura } i \\ 0 & \text{si no me preparo la asignatura } i, \end{cases}$$

donde $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 8$. Una vez definidas las variables de decisión, procedemos a formular el resto de elementos del problema:

- La única condición a tener en cuenta es la dedicación total al estudio. Como tenemos 20 días, la restricción queda:

$$10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 5 \cdot x_6 + 5 \cdot x_7 + 8 \cdot x_8 \leq 20$$

- La función objetivo persigue maximizar la esperanza estadística de aprobar el máximo número de asignaturas:

$$Max\ 0,8 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 + 0,9 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0,6 \cdot x_6 + 0,4 \cdot x_7 + 1 \cdot x_8$$

Así, para resolverlo, planteamos el problema en *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Max = 0.8*x1+0.7*x2+0.3*x3+0.9*x4+1*x5+0.6*x6+0.4*x7+1*x8;
[Rest] 10*x1+8*x2+3*x3+7*x4+4*x5+5*x6+5*x7+8*x8 <= 20;
@Bin(x1);
@Bin(x2);
@Bin(x3);
@Bin(x4);
@Bin(x5);
@Bin(x6);
@Bin(x7);
@Bin(x8);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 2,900000
```

Variable	Valor
X4	1,000000
X5	1,000000
X8	1,000000

Fila	Holgura
F	2,900000
Rest	1,000000

Esta solución indica que la estrategia óptima a seguir es estudiar exclusivamente las asignaturas 4, 5 y 8. En esta línea, tendríamos un valor de la función objetivo de 2,9. Esto se puede interpretar como que la esperanza matemática es aprobar 2,9 asignaturas, lo que equivale a una alta probabilidad de aprobar las 3 asignaturas a las que me presento. De esta forma, sobraría un día de estudio ($[Rest] = 1$), pero te dejarías 5 asignaturas para otra convocatoria.

Veamos a continuación un ejemplo de la aplicación del planteamiento de la mochila al ámbito económico.

Ejemplo 4.10: Fichaje

El Club Balonmano Femenino Málaga Costa del Sol quiere contratar jugadoras nuevas; para ello, ha sondeado el mercado y ha encontrado a 5 jugadoras que pueden adaptarse a lo requerido por el entrenador. Para reforzar el equipo el club dispone de un presupuesto máximo de 50.000 €/ mes. En la siguiente tabla aparece una relación de las candidatas a ser fichadas junto con su aportación esperada y el sueldo que percibirían:

Jugadora	Sueldo	Aportación
Jugadora 1	23.500 €	15
Jugadora 2	15.200 €	8
Jugadora 3	25.000 €	15
Jugadora 4	27.000 €	17
Jugadora 5	12.000 €	7

Modelice el problema para determinar las jugadoras a fichar de manera que se maximice la aportación al club de las mismas.En el modelo, tenga en cuenta que las jugadoras 1 y 3 no son compatibles.

Solución

Como puede apreciarse en este caso, estamos aplicando el problema de la mochila a una situación de índole económica. Nuestra intención es elegir las mejores jugadoras, es decir, aquellas cuya aportación es mayor y proporcionan una mayor utilidad para el equipo, optimizando también el desembolso que conlleva una nueva contratación. No debemos olvidar la restricción de 50.000 €.

Si llamamos J_i a la selección de la jugadora "i",tenemos un conjunto de 5 variables binarias, que tomarán el valor 1 si la jugadora i-esima es elegida y 0 en caso contrario. Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} Max & 15J_1 + 8J_2 + 15J_3 + 17J_4 + 7J_5 \\ s.a & 23500J_1 + 15200J_2 + 25000J_3 + 27000J_4 + 12000J_5 \leq 50000 \\ & J_1 + J_3 \leq 1 \\ & J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

donde la función objetivo es la suma de las utilidades que reporta cada jugadora y representa, por tanto, la utilidad que percibirá Club Balonmano Femenino Málaga Costa del Sol en función de la combinación de jugadoras que elija. En este caso, la utilidad estará medida por el número de partidos que la jugadora haga ganar o en los que tenga un peso importante, por lo que al club de balonmano le interesará que sea lo mayor posible. De ahí que el objetivo sea maximizar la función que agrega las utilidades de todas las candidatas.

En cuanto a las restricciones, vienen dada por el presupuesto del equipo, es decir, son los 50.000 € mensuales de los que puede disponer Club Balonmano Femenino Málaga Costa del Sol para remunerar a sus nuevas jugadoras. La otra restricción hace referencia a la incompatibilidad de las jugadoras 1 y 3. Con ella se modeliza el hecho de que, en caso de ser elegida una de ellas, la otra no podría ser fichada.

A continuación, planteamos y resolvemos este modelo con *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Max = 15*J1+8*J2+15*J3+17*J4+7*J5;
[Presup] 23500*J1+15200*J2+25000*J3+27000*J4+12000*J5 <= 50000;
[Compatib] J1+J3 <= 1;
@Bin(J1);
@Bin(J2);
@Bin(J3);
@Bin(J4);
@Bin(J5);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 25,00000
```

Variable	Valor
J1	0,000000
J2	1,000000
J3	0,000000
J4	1,000000
J5	0,000000

Fila	Holgura
F	25,00000
Presup	7.800,000
COMPATIB	1,00000

Esta solución indica que la estrategia óptima a seguir es contratar a las jugadoras J2 y J4, lo cual implica que sobrarían 7.800€ del presupuesto mensual y se obtendría una valoración aportada de 25.

El problema de recubrimiento

El problema de recubrimiento consiste en determinar una estrategia de coste mínimo para satisfacer una serie de necesidades distribuidas geográficamente mediante la localización de distintos puntos de servicio con distintas características. Esto puede ser el caso de idear la localización óptima de un conjunto de colegios para satisfacer la demanda de un municipio. Otro ejemplo visual sería: en un parque, conocidos los radios de alcance de un regadío giratorio, plantear dónde colocar un número de aparatos para cubrir la máxima superficie de césped (y así desperdiciar la mínima cantidad de agua).

Formalmente, supongamos que tenemos M puntos ($M = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$) distribuidos de manera heterogénea. Sea C una colección de n subconjuntos de M ($n < m$). Cada elemento i de C tiene un coste asociado, c_i, si se selecciona el conjunto $i \in C$. Para gestionar los elementos que cubre cada subconjunto, se diseña una matriz de incidencia A:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\ \ldots,\ m; j=1,\ \ldots,\ n}$$

donde a_{ij} indica si el elemento i está en el subconjunto j ($a_{ij} = 1$) y 0 en otro caso. Se persigue minimizar el coste de los subconjuntos seleccionados tales que su unión cubren todos los ítems, al menos una vez, o dicho de otra forma: cada ítem debe estar, al menos, en un subconjunto. Para definir el modelo, se considera la variable binaria x_j que nos indica si el subconjunto j es elegido ($x_j = 1$). Dada esta definición del problema, la formulación del modelo básico vendría dado por:

$$\begin{cases} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \\ & x_j \in \{0,1\} (j = 1, 2 \cdots n) \end{cases}$$

donde el conjunto de restricciones representa la condición de que cada elemento debe estar cubierto por, al menos, un subconjunto.

Ejemplo 4.11: Recubrimiento:Aplicación de respuesta a catástrofe natural

Tras una catástrofe natural, el gobierno ha solicitado presupuesto a 4 entidades distintas: E_1, E_2, E_3 y E_4, para dar respuesta a 6 zonas catastróficas distribuidas por una de las ciudades más afectadas. Cada una de éstas entidades ha indicado un coste (en miles de euros), señalando las zonas que alcanzaría a cubrir:

$Zona/Entidad$	E_1	E_2	E_3	E_4
$Coste$	23	31	17	13
Z_1	Sí	No	Sí	Sí
Z_2	Sí	Sí	No	No
Z_3	No	Sí	Sí	Sí
Z_4	No	Sí	No	Sí
Z_5	No	No	Sí	Sí
Z_6	No	No	Sí	Sí

¿Qué entidades debería contratar el gobierno para cubrir todas las zonas al menor coste?

Solución

Para resolver este problema, debemos definir previamente las variables de decisión implicadas:

$$E_j = \begin{cases} 1 & \text{si el gobierno contrata la entidad } i \\ \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $j = 1, 2, 3, 4$. Una vez definida las variables de decisión, procedemos a formular el resto de elementos del problema:

- Han de cubrirse todas las zonas($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), por lo que debemos definir una restricción que garantice la cobertura de cada una:

$$[cobZ_1] \quad E_1 + E_3 + E_4 \geq 1$$

$$[cobZ_2] \quad E_1 + E_2 \geq 1$$

$$[cobZ_3] \quad E_2 + E_3 + E_4 \geq 1$$

$$[cobZ_4] \quad E_2 + E_4 \geq 1$$

$$[cobZ_5 \text{ y } cobZ_6] \quad E_3 + E_4 \geq 1.$$

- La función objetivo persigue minimizar el coste de recuperación de todas las zonas catastróficas:

$$Min \quad 23 \cdot E_1 + 31 \cdot E_2 + 17 \cdot E_3 + 13 \cdot E_4$$

Para resolverlo, planteamos el problema en *Lingo*:

Lingo: Enunciado

```
Min = 23*E1+31*E2+17*E3+13*E4;
[cobZ1] E1+E3+E4 >= 1;
[cobZ2] E1+E2 >= 1;
[cobZ3] E2+E3+E4 >= 1;
[cobZ4] E2+E4 >= 1;
[cobZ5y6] E3+E4 >= 1;
@Bin(E1);
@Bin(E2);
@Bin(E3);
@Bin(E4);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 36,00000
```

Variable	Valor
E1	1,000000
E2	0,000000
E3	0,000000
E4	1,000000

Fila	Holgura
F	36,00000
cobZ1	1,000000

La solución propone seleccionar las entidades 1 y 4 a un coste mínimo de 36 mil euros. Con esta selección, la zona Z_1 quedaría cubierta por las dos entidades, de ahí que la holgura de la restricción [$cobZ1$] sea 1.

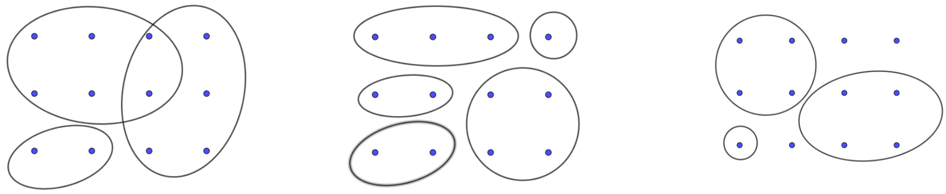
El problema de recubrimiento se encuentra en distintas situaciones reales, principalmente en la asignación de horarios y viajes a plantillas de transporte. En particular en la asignación de los trabajadores a los vuelos es donde se centra la mayor parte de los estudios, debido a la cantidad de dinero invertida para mejorar los métodos de resolución. Esto implica que sea uno de los problemas para los que existen los algoritmos más eficientes. Otro campo de aplicación es la informática, donde este tipo de problemas se muestra clave para situaciones como el testeo, la construcción óptima de circuitos lógicos o la búsqueda de virus; o por ejemplo en situaciones donde se requiere localizar un servicio concreto como comisarías, hospitales, colegios, etc. con el fin de cubrir las necesidades de un área.

Puede ocurrir que varíen las condiciones del problema. Por ejemplo, se puede requerir que cada elemento esté cubierto por un único subconjunto, en cuyo caso, estaríamos ante el *problema de la partición* y la restricción sería de igualdad. En la misma línea, la condición impuesta puede venir dada por una cota superior, es decir:

$$\begin{cases} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq K \quad \forall j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \\ & x_j \in \{0,1\} (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \end{cases}$$

Esto indicaría que no todos los elementos deben ser cubiertos, necesariamente y, además, un mismo elemento puede ser cubierto hasta por $K (K \geq 0, K \in \mathbb{Z})$ subconjuntos. El caso $K = 1$, se conoce como el *problema de empaquetado*.

En la siguiente figura se muestra gráficamente la diferencia entre recubrimiento, partición y empaquetado:



(a) Recubrimiento (b) Partición (c) Empaquetamiento

El problema de coste fijo

El problema del coste fijo encajaría con una situación en la que tenemos una serie de actividades demandadas por un conjunto de clientes. Las actividades se pueden realizar o no, pero el llevarlas a cabo supone un coste fijo, además de uno variable. Se debe determinar qué actividades realizar a un coste mínimo, a la vez que se satisface la demanda de los clientes.

En esta situación encaja, por ejemplo, la apertura de fábricas en determinados enclaves para satisfacer la demanda de productos a un conjunto de clientes. En este caso, no sólo habría que tener en cuenta el coste de construir la fábrica (coste fijo), sino también el coste de transportar la mercancía demandada a cada cliente (coste variable). Parece obvio, en este caso, deducir que cuantas más fábricas se construyan, menor será el coste variable de transporte generado y mayor el coste fijo.

Formalmente, supongamos que tenemos un conjunto C de m elementos distribuidos. Para dar servicio a todos y cada uno de estos puntos, queremos localizar un número determinado de centros logísticos, para los cuales existen $N = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ localizaciones posibles ($n < m$). El coste de abrir cada centro logístico viene dado por c_j ($j = 1, 2, 3 \cdots n$) y éste tiene una capacidad limitada de b_j. Además, existe una demanda asociada a cada uno de los elementos, d_i y se conoce el coste de transportar una unidad desde el punto i hasta el centro logístico j (t_{ij}). El *problema de coste fijo* consiste en diseñar un modelo que satisfaga todas las demandas al mínimo coste. Para ello, es necesario tener en cuenta que no todas las tareas tienen que realizarse de forma obligatoria. Sin embargo, si uno decide realizarla, ha de saber que esto incurre, además de en un coste fijo (la apertura y mantenimiento del centro logístico), en un coste variable (el trasporte). Es por ello, que se definen dos tipos de variables:

- x_j es una variable binaria que toma el valor 1 si se da servicio en j y 0 en caso contrario.
- y_{ij} es una variable entera que indica el número de unidades enviadas desde i hasta j.

Así, para definir la función objetivo, deberán contemplarse los costes fijos, que dependen si una tarea es realizada o no ($\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$). Además, el transporte del número de mercancías de un punto i a j (y_{ij}) también genera un coste de transporte, dado por t_{ij}. Así, la formulación de la función objetivo se reduce a minimizar la siguiente expresión, que incluye tanto los costes fijos, como los variables:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_{ij}$$

En este tipo de problemas hay que resaltar que la demanda en los puntos de destino debe ser satisfecha, para ello, el total de unidades enviadas a cada centro logístico i (d_i) debe ser, al menos, igual que d_i:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq d_i \quad (i = 1, 2, ...m)$$

Por último, el número total de unidades que se transportan desde el centro logístico i al destino j está limitado por la capacidad de dicho centro, en caso de que se instale. Esta condición se puede expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq b_j \cdot x_j \quad (j = 1, 2, ...n)$$

En este caso, la variable x_j juega un papel importante, pues si no se da el servicio para un j concreto ($x_{j^*} = 0$) obliga a que no se ofrezca nada desde dicha localización, lo cual equivale a que $y_{ij^*} = 0$ para todo destino i.

Por tanto, el modelo general queda formulado de la siguiente forma:

$$\begin{cases} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot y_{ij} \\ s.a & \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq d_i \quad (i = 1, 2, ...m) \\ & \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leq b_j \cdot x_j \quad (j = 1, 2, ...n) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \\ & y_{ij} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m; j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo 4.12: Coste fijo: Fábrica de tejidos

Una fábrica antigua de tejidos quiere actualizar su producción. La nueva gerente abre nuevos horizontes con el planteamiento de diseñar nuevos productos más actuales. Para ello, debe decidir qué tipo de producto lanzar, en base a 3 propuestas. El coste de cada una de estas propuestas (P_1,P_2,P_3) depende de un coste fijo (por lanzamiento de una nueva línea de producto) y un coste variable (por unidad producida). La siguiente tabla resume estos costes (en euros):

Propuestas	P_1	P_2	P_3
Coste fijo (C_i)	640	635	635
Coste var. (c_i)	4	5	4,5

En cualquier caso, para fabricar los 3 productos propuestos se requiere de dos materias primas esenciales: algodón y poliéster. En total, la fábrica tiene una disponibilidad media de 180 kg de algodón y 235 kg de poliéster. Además, los cálculos apuntan a que la fábrica dispone de una capacidad para producir, a lo sumo, 200 unidades de P_1, 305 de P_2 y 265 unidades de P_3. Para fabricar cada unidad de producto se necesita una cantidad determinada (en kg) de cada materia prima. Esta información queda recogida en la siguiente tabla:

Materia prima	P_1	P_2	P_3
Algodón	0,4	0,2	0,3
Poliéster	0,6	0,5	0,45

Además, se desean fabricar, al menos, 450 unidades en total ¿Qué opción recomendarías a la gerente?¿Qué coste total le supone?

Solución

Para resolver el problema necesitamos definir dos tipos de variables:

- Variable entera: q_i que indica la cantidad de unidades a fabricar del producto P_i, con $i = 1, 2, 3$.

- Variable binaria: y_i que toma el valor 1 si se decide fabricar el producto P_i, con $i = 1, 2, 3$; y 0 en caso contrario.

El planteamiento de este problema en particular, no persigue una demanda a satisfacer sino que está sujeto a la disponibilidad de las materias primas y las producciones máximas de cada tipo de producto. Es por ello que las restricciones pueden formularse de la siguiente forma:

- Limitación de algodón:

$$0,4 \cdot q_1 + 0,2 \cdot q_2 + 0,3 \cdot q_3 \leq 180.$$

- Limitación de poliéster:

$$0,6 \cdot q_1 + 0,5 \cdot q_2 + 0,45 \cdot q_3 \leq 235.$$

- Producción máxima por producto:

$$\begin{array}{ll} [P_1] & q_1 \leq 200 \cdot y_1 \\ [P_2] & q_2 \leq 305 \cdot y_2 \\ [P_3] & q_3 \leq 265 \cdot y_3. \end{array}$$

- Desea producir una cantidad mínima de 450 unidades:

$$q_1 + q_2 + q_3 \geq 450.$$

- Por último, recordar la no negatividad de las variables y mencionar que las y_i son variables binarias, mientras las q_i son enteras:

$$q_i \geq 0$$

$$q_i \in \mathbb{Z};\ y_i \in \{0, 1\}.$$

- De esta forma, la función objetivo persigue minimizar el coste (fijo y variable):

$$Min\ 640 \cdot y_1 + 4 \cdot q_1 + 635 \cdot y_2 + 5 \cdot q_2 + 635 \cdot y_3 + 4,5 \cdot q_3$$

El planteamiento en *Lingo* de este problema es como sigue:

Lingo: Enunciado

```
Min = 640*y1+4*q1+635*y2+5*q2+635*y3+4.5*q3;
[Algodon] 0.4*q1+0.2*q2+0.3*q3 <= 180;
[Poliester] 0.6*q1+0.5*q2+0.45*q3 <= 235;
[P1] q1 <= 200*y1;
[P2] q2 <= 305*y2;
[P3] q3 <= 265*y3;
[ProduccionMin] q1+q2+q3 >= 450;
@Bin(y1);
@Bin(y2);
@Bin(y3);
@Gin(q1);
@Gin(q2);
@Gin(q3);
```

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 3.200,000
```

Variable	Valor
Y1	1,000000
Q1	200,0000
Y2	0,000000
Q2	0,000000
Y3	1,000000
Q3	250,0000

Fila	Holgura
Algodon	25,00000
Poliester	27,50000
P1	0,000000
P2	0,000000
P3	15,00000
ProduccionMin	0,000000

La solución propone remodelar la fábrica de forma que se abran líneas de producción para los productos P_1 ($y_1 = 1$) y P_3 ($y_3 = 1$). Esto, junto con la materia prima disponible, permitiría producir las unidades mínimas necesarias ($q_1 = 200$ y $q_3 = 250$) con un coste de 3.200 u.m. Además, la solución nos indica que le sobran unos 25 kg de algodón (la holgura de la restricción $[Algodon]$ es de 25) y 27,5 de poliéster, pues la holgura de la restricción $[Poliester]$ es de 27,5.

Para finalizar, planteamos un ejemplo de coste fijo, en el que debemos emplear variables binarias para modelizar de la forma más adecuada:

Ejemplo 4.13: Recogida de basura

Una empresa de recogida de basura ha sido contratada para el tratamiento de 600 kg de residuos ubicados en un vertedero. Para ello, existen 6 vehículos distintos V_i $i = 1, ..., 6$ con un coste fijo, C_i, de mantenimiento de cada vehículo y un coste variable que depende de la cantidad recogida por cada vehículo (S_i). Este coste está asociado a un tratamiento previo de prensado por el que pasan los residuos en cada vehículo.

Vehículo	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
Mantenimiento (C_i)	650	720	580	640	725	630
Coste variable (S_i)	3,8	4	4,5	3,7	5	4,1

Para cada vehículo, todos los residuos que recogen deben pasar por 2 de los 4 puntos de tratamiento ($P_j, j = 1, 2, 3, 4$) posibles, donde estos puntos serían comunes para todos los vehículos y residuos recogidos. La siguiente tabla muestra los costes asociados (T_{ij}, en euros por kg) para que un 1 kg recogido por el vehículo V_i pase por cada uno de los puntos de tratamiento (P_j), así como la capacidad máxima (CM_i) que tiene cada vehículo y la limitación de coste de tratamiento (€) por punto de tratamiento (L_j).

P_j	$(€/kg)V_1$	$(€/kg)V_2$	$(€/kg)V_3$	$(€/kg)V_4$	$(€/kg)V_5$	$(€/kg)V_6$	L_j
P_1	0,6	0,4	0,5	0,7	0,6	0,3	225
P_2	0,3	0,5	0,7	0,4	0,2	0,5	220
P_3	0,5	0,3	0,3	0,6	0,7	0,4	230
P_4	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3	0,6	270
CM_i	150	175	210	260	235	270	

Así, se desea conocer la cantidad a recoger por cada vehículo y qué tratamiento deben seguir de forma que el coste sea mínimo.

Solución

Para afrontar el problema, se consideran distintas variables de decisión. Por un lado, se define v_i que indica si se utiliza o no el vehículo V_i, con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Además, denotamos por p_j que indica si se utiliza o no el punto de tratamiento P_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Por último, definimos r_i como las variables que denotan los kg transportados por el vehículo. Nótese que las variables v_i y p_j son binarias, mientras r_i son continuas.
A continuación, formulamos las restricciones del problema, dadas por los siguientes puntos:

- Para que el total de los residuos pasen por 2 de los 4 puntos, debemos emplear la variable binaria p_j:

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el punto } P_j \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

  así, la restricción viene dada por:

$$\sum_{j=1}^{4} p_j = 2.$$

- Limitación de coste de tratamiento por punto de tratamiento (L_j):

$$\sum_{i=1}^{6} T_{ij} \cdot r_i \leq L_j \cdot p_j + U \cdot (1 - p_j) \ \forall j = 1, 2, 3, 4$$

donde L_j indica el límite del coste permitido en cada punto y U es una constante que toma un valor muy grande, de forma que si una planta se utiliza ($p_j = 1$ para algún j) la restricción correspondiente a la limitación del coste del uso de ese punto de tratamiento, debe verificarse en la solución. Por ejemplo, si $p_2 = 1$ supone que ese punto de tratamiento se utiliza y por tanto, las variables r_i pueden tomar valores limitados por la restricción de costes dada por L_2. En caso contrario, si $p_j = 0$ (para algún j) entonces, se otorga libertad a los vehículos para recoger cualquier volumen de residuos (r_i) y llevarlos a otro punto de tratamiento, ya que no sería necesario cumplir la restricción de coste correspondiente al punto de tratamiento P_j.

- Capacidad máxima por vehículo (CM_i): En esta ocasión, debemos hacer uso de la variable binaria v_i ($i = 1, 2, .., 6$):

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{si se utiliza el vehículo } V_i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y la restricción es:

$$r_i \leq CM_i \cdot v_i \ \forall i = 1, 2, .., 6$$

donde CM_i indica el límite de carga para cada vehículo.

- Finalmente, la cantidad total a tratar: Según el problema, debemos tener en cuenta que el volumen total de residuos tratados debe ser de 600kg. Por lo que debemos incorporar la restricción:

$$\sum_{i=1}^{6} r_i = 600$$

Continuamos definiendo la función objetivo:
Según se observa en el enunciado, cada vehículo tiene un coste fijo, dado por el coste de utilizar un vehículo V_i, y uno variable asociado al coste asociado al transporte de cada kg de residuo según el vehículo (S_i). En este caso, el coste variable viene dado por la ecuación:

$$CosteVariable = \sum_{i=1}^{6} S_i \cdot r_i$$

Mientras el coste fijo viene dado por:

$$CosteFijo = \sum_{i=1}^{6} C_i \cdot v_i$$

Así, la función objetivo resultante, quedaría:

$$Min\ CosteFijo + CosteVariable = \sum_{i=1}^{6} C_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{6} S_i \cdot r_i$$

El planteamiento en *Lingo* de este problema es como sigue:

Lingo: Enunciado

```
Min = 3.8*r1+4*r2+4.5*r3+3.7*r4+5*r5+4.1*r6+650*v1+720*v2+580*v3+640*v4+
+725*v5+630*v6;
[NumPuntos] p1+p2+p3+p4 = 2;
[LimiteCosteP1] 0.6*r1+0.4*r2+0.5*r3+0.7*r4+0.6*r5+0.3*r6 <= 225*p1+
+U*(1-p1);
[LimiteCosteP2] 0.3*r1+0.5*r2+0.7*r3+0.4*r4+0.2*r5+0.5*r6 <= 220*p2+
+U*(1-p2);
[LimiteCosteP3] 0.5*r1+0.3*r2+0.3*r3+0.6*r4+0.7*r5+0.4*r6 <= 230*p3+
+U*(1-p3);
[LimiteCosteP4] 0.4*r1+0.3*r2+0.5*r3+0.2*r4+0.3*r5+0.6*r6 <= 270*p4+
+U*(1-p4);
[CapacidadMaximaV1] r1 <= 150*v1;
[CapacidadMaximaV2] r2 <= 175*v2;
[CapacidadMaximaV3] r3 <= 210*v3;
[CapacidadMaximaV4] r4 <= 260*v4;
[CapacidadMaximaV5] r5 <= 235*v5;
[CapacidadMaximaV6] r6 <= 270*v6;
[CantidadTotal] r1+r2+r3+r4+r5+r6 = 600;
U = 1000000;
@Bin(v1);
@Bin(v2);
@Bin(v3);
@Bin(v4);
@Bin(v5);
@Bin(v6);
@Bin(p1);
@Bin(p2);
@Bin(p3);
@Bin(p4);
```

La salida de *Lingo* que se presenta a continuación ofrece sólo las variables de decisión cuyo valor es no nulo, y las restricciones no activas (holguras distintas de cero).

Lingo: Solución

```
Solución óptima global encontrada
Valor objetivo: 4.497,000
```

Variable	Valor
r1	150,0000
r4	260,0000
r5	190,0000
V1	1,000000
V4	1,000000
V5	1,000000
P2	1,000000
P4	1,000000

Fila	Holgura
LIMITECOSTEP1	999.614,0
LIMITECOSTEP2	33,00000
LIMITECOSTEP3	999.636,0
LIMITECOSTEP4	101,0000
CAPACIDADMAXIMAV5	45,00000

Esta solución implica que los vehículos empleados son $V1$, $V4$ y $V5$, que recogen 150, 260 y 190 kg respectivamente. De esta forma, se alcanzan los 600 kg a recoger marcados por la restricción [$CANTIDADTOTAL$], que es activa, al ser su holgura nula. De esta forma, la solución obtenida indica un coste óptimo de 4.497 €. Además, atendiendo a las holguras no nulas de las restricciones definidas, podemos concluir que se podrían recoger 45 kg más por el vehículo $V5$ (la holgura de la restricción [$CAPACIDADMAXIMAV5$] es de 45), mientras que en los puntos de tratamiento 2 y 4 aún sobran 33 € y 101 €, respectivamente, de su límite de coste asignado para el tratamiento de residuos, dado que la holgura de la restricción [$LIMITECOSTEP2$] resulta 33 y la de la restricción [$LIMITECOSTEP4$] es de 101. En esta ocasión, los valores de las holguras para las restricciones [$LIMITECOSTEP1$] y [$LIMITECOSTEP2$] no arrojan ninguna información adicional, ya que su valor se debe a la cota marcada por el valor de U que, indirectamente, ha sido considerado para considerar restricciones disyuntivas.

Capítulo 5

Programación multiobjetivo

Los problemas de programación lineal vistos hasta ahora no implicaban ninguna decisión como tal. Una vez planteados, se determinaba, mediante alguna técnica matemática, la solución óptima, como aquella solución factible en la que la función objetivo alcanza el máximo o el mínimo, según el caso. Se trata, por tanto, de un proceso de determinación de las soluciones factibles y de ordenación de éstas de acuerdo con un criterio único. Una vez formulado el modelo del problema, no hay subjetividad alguna en el proceso de resolución, por lo que cualquier persona que cuente con la tecnología adecuada para resolverlo alcanzará la misma solución óptima.

Sin embargo, la realidad se presenta a menudo de una forma más compleja y, en general, en cualquier proceso o planteamiento de una problemática, se debe tener en cuenta, de manera natural, más de un criterio. Por ejemplo, en una empresa se pueden plantear como objetivos, minimizar los costes y maximizar la calidad en los servicios, o maximizar el beneficio y minimizar el impacto medioambiental. Otro ejemplo podría ser la compra de una casa, en la que se consideran criterios como el precio, la situación, las calidades, etc. Éstos sí son problemas de decisión, caracterizados por dos elementos básicos. Por un lado, la existencia de varios criterios que son conflictivos entre sí (es decir, soluciones que son muy buenas para uno de los criterios pueden ser muy malas para, al menos, otro de ellos). Por otro lado, personas distintas tomarán, en general, soluciones distintas ante un mismo problema de decisión, dependiendo de la importancia relativa que se le otorgue a cada criterio. Por tanto, ya no buscamos una solución óptima, en el sentido tradicional, sino que hemos de tomar una decisión en base a una serie de criterios contrapuestos. Ello conlleva, necesariamente, la consideración e inclusión en nuestro modelo de las preferencias de la persona que ha de tomar la decisión (que llamaremos *decisor*).

El proceso de tomar una decisión se puede describir de la siguiente forma. En primer lugar, una vez definido el problema, se establece el conjunto de puntos factibles o admisibles (en ocasiones denominados *alternativas*). Posteriormente, se definen los criterios que se tendrán en cuenta para valorar cada una de las soluciones admisibles. Después, se le asocia a cada alternativa, criterio u objetivo un grado de deseabilidad. Finalmente, se busca, mediante la técnica más adecuada, una solución o un conjunto de posibles soluciones. Dichas soluciones posibles son aquellas que satisfacen las restricciones (es decir, son *admisibles*) y se ajustan a los deseos o preferencias del decisor, que se formulan sobre los objetivos del problema. Esto lleva a distinguir, como hemos comentado previamente, entre los problemas tecnológicos, en los cuales sólo se realiza un proceso de planteamiento, medición y búsqueda, y los problemas denominados multicriterio, que implican de manera natural un proceso de toma de decisión.

La parte de la Programación Matemática que trata de buscar soluciones a los problemas multicriterio se denomina, de manera general, *Toma de Decisiones Multicriterio* (M.C.D.M, por las siglas en inglés de Multiple Criteria Decision Making). Dentro de este campo, se distinguen dos tipos de problema. Los denominados problemas discretos, donde el conjunto de alternativas posibles es finito y se pueden enumerar, se estudian dentro de la *Toma de Decisiones Multiatributo* (M.C.D.A, Multiple Criteria Decision Analysis). En el caso continuo en el que las (habitualmente, infinitas) soluciones factibles vienen determinadas por una serie de restricciones (como en los problemas estudiados en los capítulos anteriores), estamos ante un problema de *programación multiobjetivo* (M.O.P, Multiobjective Programming). Estos últimos serán los problemas estudiados en este capítulo.

5.1. El problema multiobjetivo. Conceptos básicos.

A pesar de las diferencias conceptuales existentes entre los problemas de optimización tradicional (vistos en los capítulos anteriores) y los problemas de decisión multiobjetivo, en los aspectos de formulación sólo encontraremos diferencias sustanciales en la función objetivo, que en el primer caso es una función escalar, mientras que en el caso que ahora nos ocupa es una función vectorial, o dicho de otra forma, un vector de funciones, con tantas componentes como criterios consideremos.

En primer lugar, estableceremos el planteamiento general de estos problemas. Posteriormente, expondremos los principales conceptos básicos asociados, utilizando para ello un problema a modo ilustrativo.

Un problema de programación multiobjetivo responde a la siguiente formulación:

$$(PMO) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Max & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{array} \right.$$

donde

- $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de decisión,
- $X \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto de oportunidades,
- $f_i,\ i = 1, \ldots, p$, son las funciones objetivo,
- $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_p)$ es la función vectorial objetivo,
- $Y = \mathbf{f}(X) \subset \mathbb{R}^p$ es el espacio de objetivos o espacio imagen.

Como ejemplo ilustrativo, utilizaremos una ampliación del problema desarrollado en el Capítulo 3.

Ejemplo 5.1: Producción de vehículos, dos objetivos

Una compañía del sector automovilístico posee dos plantas para producir un mismo modelo de coches, una en la ciudad A y otra en la ciudad B. Se desea planificar la producción del próximo mes, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los beneficios por cada unidad producida en la ciudad A son de 2.000€, mientras que los obtenidos por cada unidad de la planta B son de 3.000€.
- El nivel de contaminación medioambiental viene valorado por diversos factores, que se agregan en un único valor. Concretamente, si valoramos en una unidad la contaminación producida por cada mil vehículos producidos en la ciudad A, entonces la producida en la ciudad B para el mismo número de vehículos sería 2,25.
- Por la capacidad productiva de las plantas, en la planta de la ciudad A no se pueden producir más de 70.000 unidades, y en la de la B no se pueden producir más de 40.000 unidades.
- Por acuerdos con el comité de empresa, el nivel de empleo puede oscilar entre 1.000 y 2.000 jornales totales para el mes considerado. Debido a los requerimientos de las plantas, por cada mil unidades producidas en la planta A, se necesitan 20 jornales y el doble en la planta B.
- Asimismo, y con independencia del plan de producción, todos los vehículos deben pasar un control de calidad final, para el que, por cada mil unidades, se usa un total

de 18 horas del sistema de control para los vehículos producidos en la planta A y 24 horas para los vehículos producidos en la planta B. Se dispone de un total de 1.440 horas, para ser distribuidas entre ambas plantas, al ser un servicio con control central online.

Se desea formular el modelo multiobjetivo que maximice el beneficio y a la vez minimice el nivel de contaminación en el periodo considerado.

Solución

Como se ha comentado previamente, para formular el problema de programación multiobjetivo, los elementos básicos del problema mono-objetivo (Ejemplo 3.3) del capítulo 3 se mantienen intactos. Es decir, la definición de las variables de decisión y de las restricciones del problema sigue siendo las mismas. También lo es la de la función objetivo del beneficio. En este caso, sólo deberemos introducir nuestra nueva función objetivo.
Recordamos que las variables de decisión del problema eran:

- x_A - miles de unidades del modelo producidas en la planta A,
- x_B - miles de unidades del modelo producidas en la planta B.

Con ellas, la nueva función objetivo, que mide la contaminación generada, viene dada por:

$$C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B.$$

El problema queda, por tanto, formulado como:

$$\left\{\begin{array}{ll}
Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \\
Min & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \\
s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\
 & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\
 & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\
 & x_A \leq 70 \\
 & x_B \leq 40 \\
 & x_A, x_B \geq 0
\end{array}\right.$$

Tal y como se ha comentado en el capítulo 1, en todo proceso de decisión asociado a un problema de Programación Matemática, aparecen, al menos, dos agentes importantes:

- El modelizador o *analista*, que será la persona encargada de aplicar la técnica o técnicas adecuadas y posteriormente resolver el problema. No tiene poder para manipular el problema y sólo actúa con los datos del problema una vez planteado. Cuando lo resuelve, será la persona encargada de proporcionar la información obtenida al centro decisor y ayudarle a interpretarla.

- El *decisor* o centro decisor, que será la persona o personas encargadas de tomar la elección final una vez que conozcan la información dada por el modelizador de las posibles combinaciones factibles para el problema. También tendrá como misión expresar las preferencias sobre los objetivos planteados, para ser plasmadas en el modelo. En concreto, en un problema de programación multiobjetivo, el decisor tiene una mayor participación en el proceso de toma de decisiones, dado que ha de expresar sus preferencias para que se puedan incorporar en el modelo.

Una vez formulado el modelo multiobjetivo, la resolución práctica del problema es una tarea compleja, porque implica, como hemos comentado previamente, incorporar al modelo las preferencias del decisor. Aunque esta información puede tomar formas distintas (dando lugar a distintas metodologías de programación multiobjetivo), parece claro que el decisor necesita tener un sólido conocimiento sobre el problema y sus posibles soluciones para proporcionar tales preferencias de manera fiable. Por ello, dedicaremos lo que queda de esta sección y la Sección 5.2 a estudiar características del modelo que no dependen de las preferencias del decisor. Sobre la base del conocimiento adquirido en estas secciones, estudiaremos en la Sección 5.3 un método de resolución que incorpora preferencias del decisor.

Como nuestro modelo tiene más de una función objetivo, lo primero que podemos preguntarnos es cuál es el mejor valor que puede obtener cada una de ellas, independientemente de las demás. Para ello, podemos resolver cada uno de los problemas de Programación Matemática (mono-objetivo) consistentes en optimizar cada una de las funciones en el conjunto de oportunidades del problema, sin tener en cuenta las demás funciones. En el caso concreto del problema que nos ocupa, por un lado maximizamos los beneficios y por otro, minimizamos la función de contaminación:

Ejemplo 5.2: Producción de vehículos, dos objetivos. Óptimos individuales

Dado el Ejemplo 5.1, resuelva gráficamente cada uno de los problemas mono-objetivo de forma independiente.

Solución

$$(P_1)\left\{\begin{array}{lll} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B & \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\ & x_A \leq 70 & (R4) \\ & x_B \leq 40 & (R5) \\ & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7). \end{array}\right.$$

$$(P_2)\left\{\begin{array}{lll} Min & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B & \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\ & x_A \leq 70 & (R4) \\ & x_B \leq 40 & (R5) \\ & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7). \end{array}\right.$$

Las soluciones óptimas de estos dos problemas de programación lineal son:

- Para el problema de maximizar los beneficios, el óptimo se alcanza en el punto (40, 30), es decir, producimos 40.000 unidades en la planta A y 30.000 unidades en la planta B, con un beneficio óptimo de 170 millones. Gráficamente, la resolución de este problema es la siguiente:

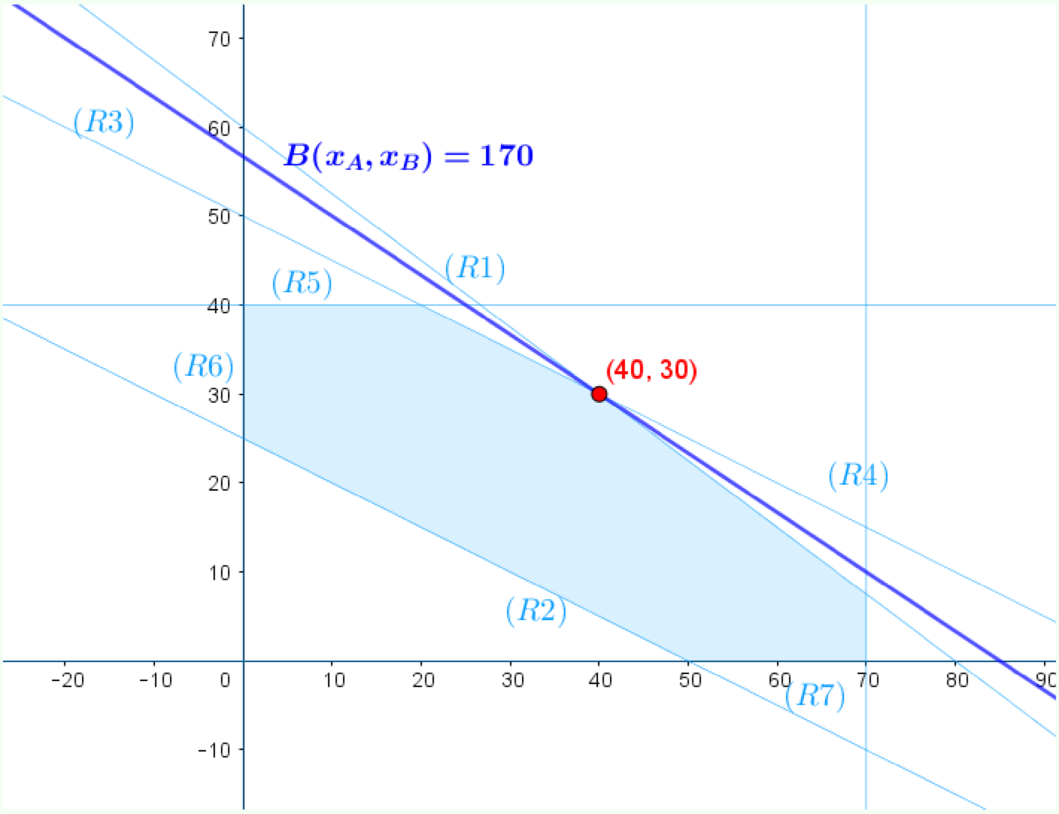


Figura 5.1: Maximizar Beneficios

- Análogamente, para el problema de minimizar la contaminación, el óptimo se alcanza en el punto (50, 0), es decir, producimos 50.000 unidades en la planta A y nada en la planta B, con un nivel de contaminación de 50. Gráficamente, la resolución de este problema es la siguiente:

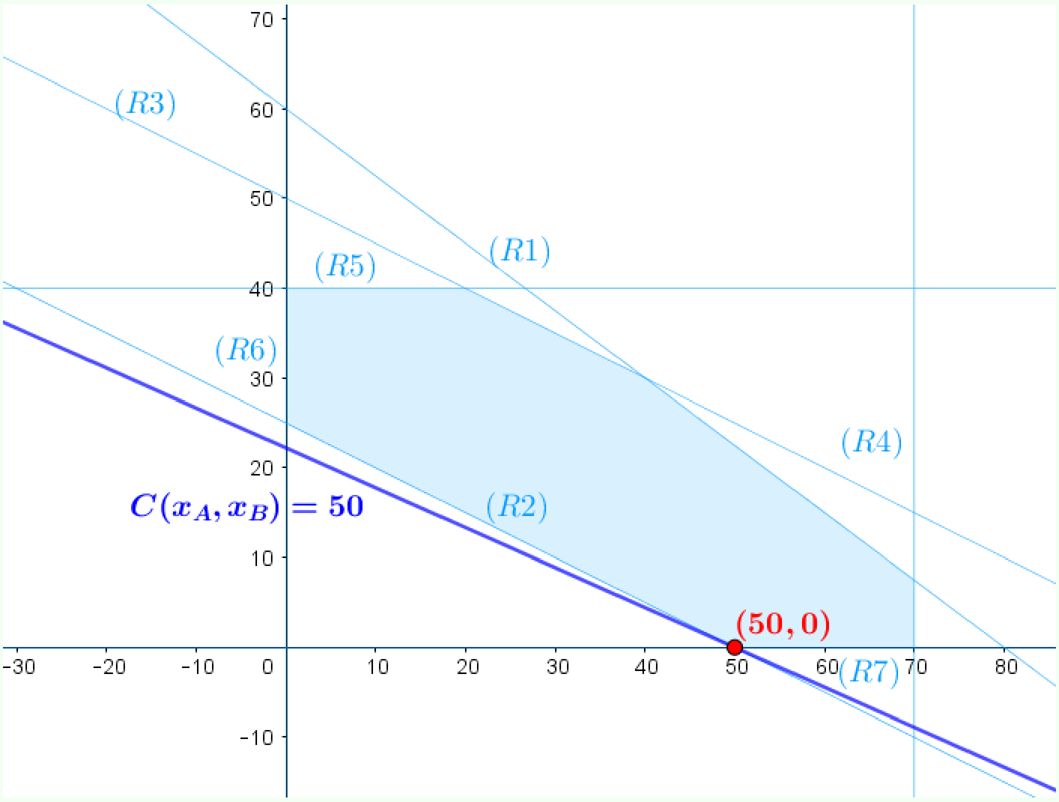


Figura 5.2: Minimizar Contaminación

Además podemos evaluar la función de contaminación en el punto $(40, 30)$, para el que se alcanza el beneficio óptimo, resultando un nivel de contaminación de 107,5. Recordemos que la función de contaminación no se ha tenido en cuenta en el proceso de maximización de los beneficios. De la misma forma, podemos evaluar la función de beneficios en el punto $B(50, 0)$, en el que se alcanza la contaminación óptima, resultando un nivel de beneficios de 100. Toda esta información se puede recoger en una matriz denominada *matriz de pagos*, que tendrá tantas filas y columnas como objetivos tiene nuestro problema (en este caso particular, dos filas y dos columnas). En las filas, representaremos, además del punto en el que se alcanza el óptimo de cada problema resuelto, la evaluación de los objetivos del problema en dichos puntos óptimos:

	Beneficios	Contaminación
$(40, 30)$	170	$107,5$
$(50, 0)$	100	50

Podemos observar que en la diagonal de esta matriz nos encontramos con la mejor situación que podemos obtener con una producción factible: el máximo beneficio y la mínima contaminación. El vector formado por esos dos valores, $(170, 50)$, se denomina *punto ideal* y, como sucede el la mayor parte de los casos, no es alcanzable por ningún plan de producción factible.

El procedimiento que se ha llevado a cabo para nuestro ejemplo se puede generalizar para el problema multiobjetivo general, resolviendo los p problemas mono-objetivo que optimizan cada una de las funciones objetivo por separado. Supongamos que en el problema original todos los objetivos son de máximo (suposición que no plantea ninguna limitación, ya que si alguno de ellos fuera de mínimo tomaríamos la función opuesta):

$$(PMO)\quad \begin{cases} Opt & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ s.a & \mathbf{x} \in X, \end{cases}$$

Se generan entonces los siguientes p problemas mono-objetivo:

$$\boxed{(P_i)\quad \begin{cases} Max & f_i(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{x} \in X, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots p)}$$

Tras la resolución de estos problemas, obtendremos p puntos óptimos, correspondientes a los máximos individuales de cada función objetivo, que denotaremos por: $\mathbf{x}_1^*$, $\mathbf{x}_2^*$,..., $\mathbf{x}_p^*$. La evaluación de cada función objetivo en su correspondiente punto óptimo nos determinará un punto que se denomina *punto ideal*:

$$(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_p^*) = (f_1(\mathbf{x}_1^*), f_2(\mathbf{x}_2^*), ..., f_p(\mathbf{x}_p^*)).$$

Es evidente que si existiera un punto en el cual todas las funciones alcanzaran su máximo simultáneamente, el problema estaría resuelto, pero esto es algo utópico. Como dijimos anteriormente, el proceso de resolución de un problema multiobjetivo es mucho más complejo y empieza por obtener información relevante sobre la estructura del problema y sus posibles soluciones. Para ello, lo primero que hacemos es construir, a partir de las soluciones obtenidas en los problemas anteriores, la denominada *Matriz de Pagos*, en la que evaluamos todas las funciones objetivo en los óptimos individuales obtenidos:

	f_1	f_2	$\cdots$	f_p
$\mathbf{x}_1^*$	$f_1(\mathbf{x}_1^*)$	$f_2(\mathbf{x}_1^*)$	$\cdots$	$f_p(\mathbf{x}_1^*)$
$\mathbf{x}_2^*$	$f_1(\mathbf{x}_2^*)$	$f_2(\mathbf{x}_2^*)$	$\cdots$	$f_p(\mathbf{x}_2^*)$
$\cdots$				
$\mathbf{x}_p^*$	$f_1(\mathbf{x}_p^*)$	$f_2(\mathbf{x}_p^*)$	$\cdots$	$f_p(\mathbf{x}_p^*)$

La diagonal principal de esta matriz de tamaño $p \times p$, corresponde al punto ideal. Por otro lado, llamaremos valor anti-ideal de cada función (denotado por f_{i*}), al peor valor que ésta toma en su columna correspondiente (en este caso, en el que maximizamos todas las funciones, sería el mínimo de la columna). Esos dos valores, anti-ideal e ideal, definen un rango de variación de las funciones objetivo del problema:

$$[f_{i*}, f_i^*].$$

Este rango es, en general, una aproximación del rango de variación de cada función en el conjunto de soluciones que nos interesan (que llamaremos, como vemos más adelante, conjunto eficiente). Concretamente, f_i^* es el mejor valor que puede tomar la función i, pero f_{i*} es una aproximación del peor valor que la función i puede tomar en ese conjunto eficiente, que se conoce como *valor nadir* (en el caso de problemas con dos funciones objetivo, sí se puede afirmar que el anti-ideal coincide con el nadir). En nuestro ejemplo el punto ideal correspondería a (170, 50) ó (170, -50), según se tome la función de contaminación en términos de mínimo o de máximo, respectivamente.

Por otro lado, los correspondientes rangos de variación son, teniendo en cuenta los valores ideal y anti-ideal,

$$f_1: \quad B \in [100, 170]; \qquad f_2: \quad C \in [50, 107, 5].$$

Obtenida la matriz de pagos asociada a nuestro problema, nos planteamos de manera natural, con qué punto quedarnos; ahora bien ¿cómo comparamos puntos, si los resultados que tenemos son vectores? Si consideramos, en el ejemplo que nos ocupa, las combinaciones de producción (40, 30) y (50, 0), para decidir entre ellas debemos fijarnos en los valores que alcanzan en ambas las funciones objetivo, que son (170, 107,5) y (100, 50), respectivamente. Si atendemos a la primera coordenada, que es el beneficio (a maximizar), optaríamos por el punto (40, 30), pero si atendemos a la contaminación (a minimizar), sería el (50, 0). Por lo tanto, surge la necesidad de establecer un orden entre vectores que nos permita decidir cuándo uno es preferido a otro.

Dado que el problema general de programación multiobjetivo (PMO), produce valores en el espacio vectorial $\mathbb{R}^p$ (espacio de objetivos), vamos a definir dos tipos de órdenes en dicho espacio:

1º) Orden de Pareto: Diremos que un punto $\mathbf{x}$ es preferido a otro $\mathbf{x}'$ si se verifica que:

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}'), \ \forall i = 1, \dots, p, \text{ con, al menos, un } j \text{ tal que } f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{x}').$$

2º) Orden débil de Pareto: Diremos que un punto $\mathbf{x}$ es preferido a otro $\mathbf{x}'$ si se verifica que:

$$f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}') \ \forall i = 1, \dots, p.$$

El orden de Pareto establece que una combinación será preferida a otra siempre que mejore a todos los objetivos, mejorando a uno de ellos de forma estricta. Por su parte, el orden débil de Pareto establece que una combinación será preferida a otra siempre que mejore todos los objetivos estrictamente. En cualquier caso, ambos son órdenes parciales, es decir, existen pares de combinaciones tales que ninguna de ellas es preferida a la otra. Por ello, no existirá, en general, una combinación que sea a la vez solución óptima de todos los objetivos y, por tanto, solución obvia del problema multiobjetivo. De esta forma, el primer concepto que perdemos es el de óptimo tal y como se entiende en la programación mono-objetivo tradicional. Lo que buscaremos para solucionar nuestro problema serán las denominadas soluciones eficientes. La generalización de óptimo da lugar al concepto de eficiencia, que podemos definir para nuestro problema de máximo en base a la ordenación de Pareto de las dos formas siguientes:

Definición 5.1: Solución Eficiente (Orden de Pareto) y No Eficiente (Dominada)

Un punto $\mathbf{x}^* \in X$ es eficiente si no existe otro $\mathbf{x} \in X$ tal que:

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}^*), \ \forall i = 1, \dots, p, \text{ con, al menos, un } j \text{ tal que } f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{x}^*)$$

De manera análoga, un punto $x^* \in X$ no es eficiente ($\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ es dominado) si existe otro $\mathbf{x} \in X$ tal que $\mathbf{x}$ es preferido a $\mathbf{x}^*$ según el orden de Pareto, es decir:

$$f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}^*), \text{ para todo } i = 1, \dots, p, \text{ y } f_j(\mathbf{x}) > f_j(\mathbf{x}^*), \text{ para algún } j \in \{1, \dots, p\}.$$

Análogamente, aplicando el orden débil de Pareto, tenemos el siguiente concepto de eficiencia:

Definición 5.2: Solución Débilmente Eficiente (Orden débil de Pareto)

Un punto $\mathbf{x}^* \in X$ es débilmente eficiente si no existe otro $\mathbf{x} \in X$ tal que:

$$f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}^*), \ \forall i = 1, \dots, p$$

Análogamente, $\mathbf{x}^* \in X$ no es débilmente eficiente ($\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ es débilmente dominado) si existe otro $\mathbf{x} \in X$, tal que $f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}^*)$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$.

El último concepto de eficiencia que vamos a definir es el de eficiencia propia, que es más exigente que el de eficiencia de Pareto, y elimina los casos en que uno de los objetivos se empeore, mejorando infinitamente a cualquier otro.

Definición 5.3: Solución Propiamente Eficiente

Un punto $\mathbf{x}^* \in X$ es propiamente eficiente según Geoffrion si es eficiente y existe un valor $M > 0$ tal que $\forall i, j = 1, \ldots, p$, que verifiquen $f_i(\mathbf{x}^*) < f_i(\mathbf{x})$ y $f_j(\mathbf{x}^*) > f_j(\mathbf{x})$ se tiene que:

$$\frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}^*)}{f_j(\mathbf{x}^*) - f_j(\mathbf{x})} \leq M$$

En los capítulos anteriores, en las que resolvíamos problemas mono-objetivo, era habitual estudiar gráficamente los problemas en el espacio de variables de decisión. Al existir una única función objetivo, la representación conjunta de las restricciones y curvas de nivel de la función permitía resolver el problema. Sin embargo, ahora esto ya no es factible, ya que cada punto del espacio de decisión se corresponde con un vector de p componentes, obtenido mediante la evaluación de las p funciones objetivo en el punto. Trabajaremos ahora sobre este conjunto imagen (espacio de objetivos), para tratar de determinar gráficamente si un determinado punto es eficiente o no. Evidentemente, esto lo podremos realizar gráficamente sólo cuando tengamos dos o, a lo sumo, tres objetivos.

Obviamente, evaluar todas las funciones objetivo en todos y cada uno de los puntos del conjunto de oportunidades es una labor imposible, ya que habrá, en general, infinitos puntos factibles. Sin embargo, en el caso lineal, dadas sus propiedades específicas, es posible obtener una representación del conjunto imagen mediante el conjunto convexo generado por las imágenes de los vértices del conjunto de oportunidades. Para ello, en el caso particular de nuestro ejemplo, evaluamos las funciones objetivo, $f_1 = B$ y $f_2 = C$, en cada uno de los vértices. Concretamente, en el espacio de variables de decisión, el conjunto de oportunidades y sus vértices correspondientes se representan en la Figura 5.3.

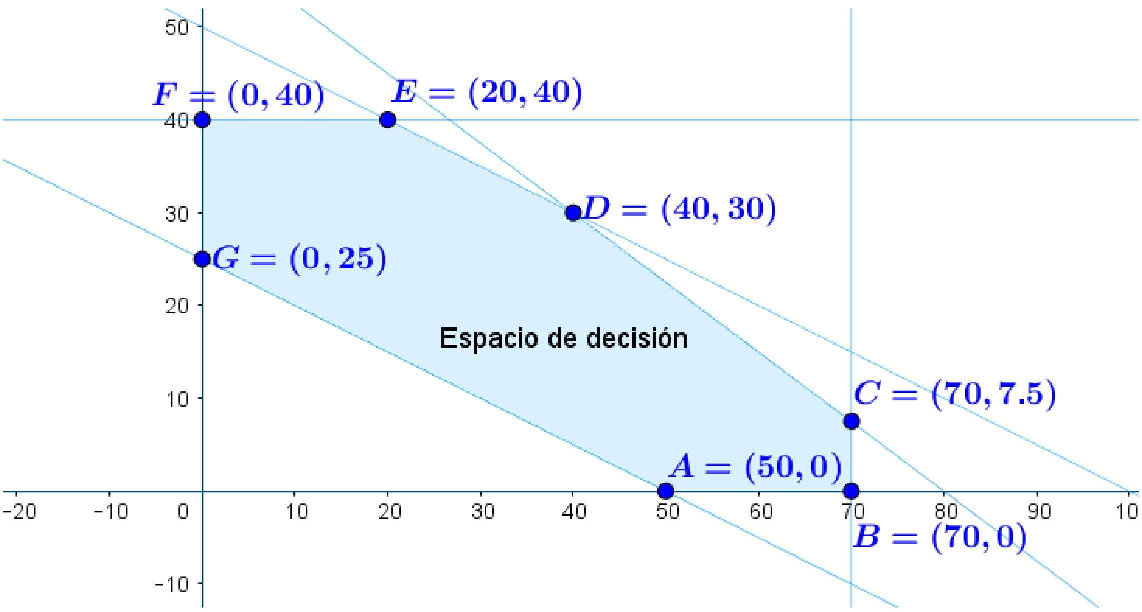


Figura 5.3: Conjunto factible en el espacio de variables de decisión del Ejemplo 5.2

Evaluando las dos funciones objetivo en los 7 vértices del conjunto, obtenemos:

Vértice	x_A	x_B	Beneficios	Contaminación
A	50	0	100	50
B	70	0	140	70
C	70	7,5	162,5	86,875
D	40	30	170	107,5
E	20	40	160	110
F	0	40	120	90
G	0	25	75	56,25

Los valores obtenidos para las funciones objetivo se pueden representar también en el plano, obteniendo la representación del conjunto factible en el espacio de objetivos (Figura 5.4). En la figura, se representa la función de beneficios en el eje horizontal y la de contaminación en el vertical.

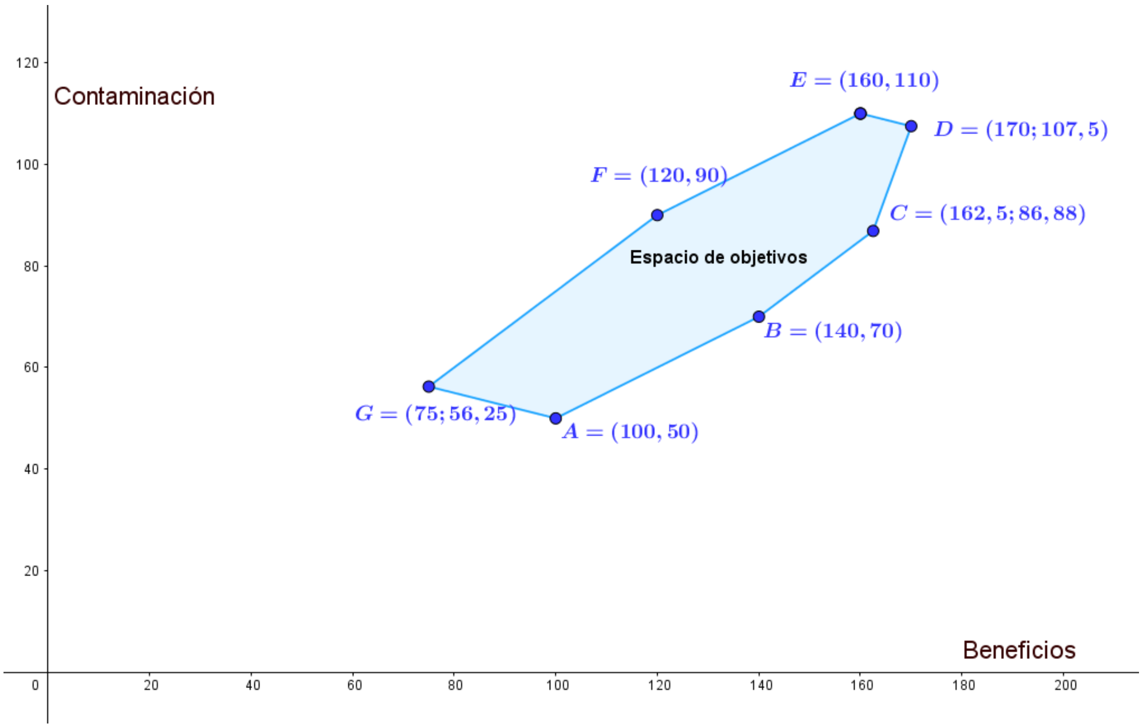


Figura 5.4: Espacio de objetivos del Ejemplo 5.2

En la gráfica, cuanto más a la derecha esté un punto, mejor (mayor) es la función de beneficios, y cuanto más abajo esté, mejor (menor) es la función de contaminación. Por lo tanto, los puntos eficientes son aquellos para los que no existe otro punto factible que esté a la vez más a la derecha y más abajo. Dichos puntos verifican que ningún otro mejora sus dos coordenadas simultáneamente. En conclusión, el conjunto de puntos eficientes está formado por los puntos que están en la frontera sureste del conjunto (Figura 5.5).

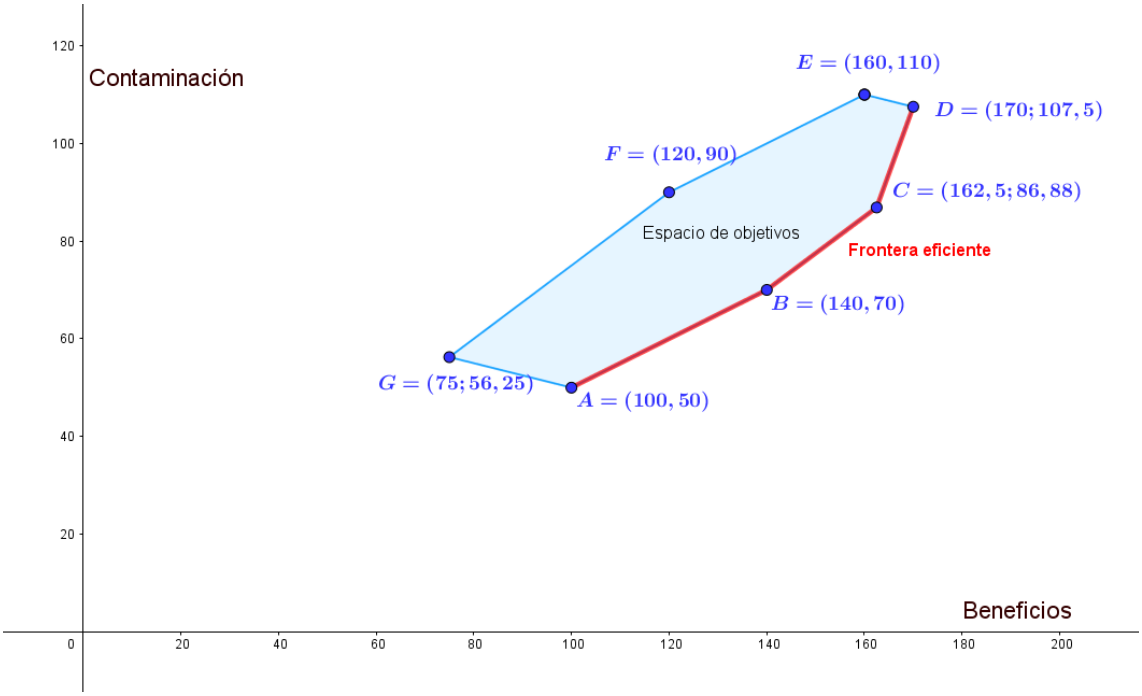


Figura 5.5: Frontera eficiente en el espacio de objetivos del Ejemplo 5.2

A la vista de los vértices que conforman este conjunto eficiente, podemos trasladarlo de nuevo al espacio de variables de decisión (Figura 5.6).

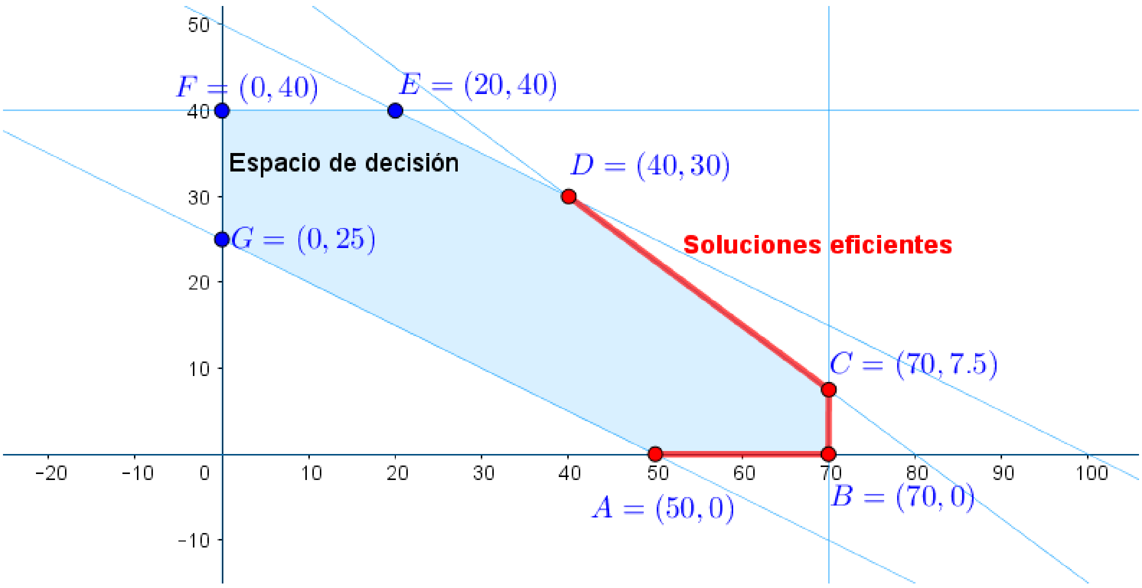


Figura 5.6: Soluciones Eficientes en el espacio de variables de decisión del Ejemplo 5.2

Obviamente, en el caso del espacio de decisión, no hay regla gráfica específica para la obtención de esos puntos. Aquí es simplemente la traslación de los vértices eficientes obtenidos en el espacio de objetivos y sólo sabemos que, en este caso con dos funciones objetivo, será un camino que unirá el punto donde se alcanzaba el máximo de los beneficios con el punto donde se alcanzaba el mínimo de la contaminación, pero no sabemos la dirección de dicho camino.

Una vez definido el concepto de eficiencia, y ejemplificado en nuestro problema, observamos que en cualquier problema existirá más de una solución eficiente y evidentemente éstas no serán comparables. Por tanto, el problema continúa, y nos planteamos dos cuestiones importantes. Por un lado, ¿cómo determinar todos esos puntos eficientes en cualquier problema, sobre todo en los que no sea representable gráficamente? O, al menos, si no podemos obtenerlos todos, ¿cómo podríamos obtener una representación suficientemente buena de ellos? Por otro lado, una vez estimada dicha frontera eficiente ¿cómo realizar la elección entre soluciones no comparables, atendiendo a las preferencias del decisor?

Los métodos utilizados para la resolución de los problemas multiobjetivo están basados en cómo se lleve a cabo la transmisión de información entre el analista y el decisor, una vez formulado el modelo inicial tal como lo hemos visto en el apartado anterior.

- Si primero actúa el analista resolviendo el problema y mostrando posteriormente las soluciones al decisor, se denominan *Métodos Generadores* (de la frontera eficiente), que sólo cuentan con la información correspondiente a la estructura matemática del problema. En la Sección 5.2 se estudiarán dos de los métodos más clásicos de este tipo: el método de la ponderación y el de la restricción.

- Por el contrario, si es el decisor el que actúa primero, incorporando información al proceso mediante el establecimiento de preferencias y prioridades, tenemos los *Métodos con Información a Priori*. El más conocido de estos métodos es el de programación por metas, que estudiaremos en la Sección 5.3.

- Por último, si se lleva a cabo un flujo continuo de información entre el analista y el decisor, se utilizan los denominados *Métodos Interactivos*, que escapan al alcance de este texto.

5.2. Determinación de soluciones eficientes.

Como hemos mencionado anteriormente, los denominados métodos generadores son aquellos que no incorporan información a priori en el proceso y, por tanto, es el analista el que comienza resolviendo el problema.

Si observamos el problema del epígrafe anterior, los puntos de la frontera eficiente de un problema lineal pueden dividirse en dos tipos, aquellos puntos eficientes que son vértices, tanto en el espacio de objetivos como en el espacio de variables de decisión, y aquellos otros que están sobre las aristas. En el caso de problemas con más de dos objetivos, los puntos eficientes se dividen en soluciones sobre los vértices, y los que no están sobre estos. Por esto, y otras razones, existen dos enfoques distintos para los métodos de resolución. Uno consiste en buscar las soluciones eficientes sobre los vértices, siendo el método más destacado de este tipo, aunque no el único, el método de la ponderación. El otro enfoque consiste en determinar las soluciones no vértices, de lo cual se encarga el método de la restricción. Ambos métodos intentarán determinar las soluciones eficientes asociadas al problema y, dependiendo de situaciones, podremos asegurar la eficiencia de las soluciones obtenidas.

En general, dado que no podemos abordar directamente el problema multiobjetivo, todos los métodos que estudiaremos en este tema consisten en transformarlo en un problema mono-objetivo (o en una serie de ellos), para los que sí tenemos métodos y técnicas de resolución. En el caso de las técnicas generadores, buscamos que las soluciones obtenidas a través de estos nuevos problemas nos aporten soluciones de nuestro problema original, es decir, soluciones eficientes del mismo.

5.2.1. Método de la ponderación.

Dado nuestro problema multiobjetivo:

$$(PMO) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Opt & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{array} \right.$$

el método de la ponderación consiste en realizar una escalarización de las funciones objetivo, y posteriormente agregar las mismas. A cada función f_i se le asocia un valor escalar λ_i, conocido como *ponderación* o peso. Dicho valor tendrá una doble misión dentro del proceso. La primera es simplemente de cálculo u operativa, y la segunda sería la homogeneización de unidades de medidas dispares para facilitar la tarea de búsqueda de las soluciones eficientes. Si nuestros objetivos están valorados con magnitudes similares, se puede obviar esta segunda misión (conocida como *normalización* o escalado).

Si llamamos $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$, al vector formado por las p ponderaciones, el problema escalarizado o problema ponderado es:

$$(P_{\boldsymbol{\lambda}}) \quad \begin{cases} Max & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{cases}$$

donde suponemos que las ponderaciones verifican que: $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ $(\forall i = 1, ..., p)$. Estas condiciones sobre las ponderaciones no tienen más efecto que no repetir problemas ya resueltos para ponderaciones distintas, o no convertir nuestros problemas, que son todos de maximizar, en problemas de minimización, por adoptar una ponderación negativa. Veamos ahora qué forma toman estos problemas para nuestro ejemplo.

Ejemplo 5.3: Producción de vehículos, dos objetivos. Método de la ponderación

Obtenga la función objetivo ponderada para el modelo del Ejemplo 5.1,

Solución

En el caso de nuestro problema:

$$\begin{cases} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \\ Min & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0. \end{cases}$$

Lo primero que deberemos hacer es transformar todas las funciones a maximizar, para después agregarlas. Así, nos quedaría

$$\begin{cases} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \\ Max & -C(x_A, x_B) = -x_A - 2{,}25x_B \end{cases}$$

Posteriormente, escogeremos un vector de ponderaciones de dos componentes $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$, con las condiciones de no negatividad de las componentes y de que su suma sea la unidad.

Construimos entonces la nueva función objetivo ponderada:

$$\begin{aligned}
&Max \quad \lambda_1 B(x_A, x_B) + \lambda_2(-C(x_A, x_B)) = \\
&Max \quad \lambda_1(2x_A + 3x_B) + \lambda_2(-x_A - 2{,}25x_B) = \\
&Max \quad \lambda_1(2x_A + 3x_B) + (1 - \lambda_1)(-x_A - 2{,}25x_B)
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que la suma de las ponderaciones sea la unidad para reducir un parámetro.
Nuestro conjunto de oportunidades quedaría sin modificaciones.

El siguiente teorema caracteriza la eficiencia de las soluciones obtenidas por este método, dependiendo de la asignación que se le haga a los pesos.

Teorema 5.1: Soluciones Eficientes en el método de la ponderación

Dado el problema de programación multiobjetivo:

$$\begin{cases} Max & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{cases}$$

y su correspondiente problema escalarizado:

$$(P_{\boldsymbol{\lambda}}) \quad \begin{cases} Max & \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{cases}$$

entonces:

i) Si todas las ponderaciones asignadas λ_i son estrictamente mayores que cero, la solución óptima obtenida es propiamente eficiente.

ii) Si alguna ponderación es nula, la solución óptima es débilmente eficiente.

iii) Si, con alguna ponderación nula, la solución óptima del problema es única, entonces ésta es eficiente.

De acuerdo con los resultados del teorema, podemos esperar que, dado un vector de ponderaciones $\boldsymbol{\lambda}$, obtengamos una solución eficiente de nuestro problema multiobjetivo. Como en el caso de los problemas lineales, las soluciones están en los vértices y no hemos cambiado nuestro conjunto de oportunidades, obtendremos una solución eficiente sobre un vértice del conjunto de variables de decisión que corresponderá con un vértice del espacio de objetivos. Lo deseable sería que si repetimos el proceso con otro vector de ponderaciones $\boldsymbol{\lambda}$, obtuviéramos otra solución eficiente distinta, pero esto, desgraciadamente, no va a ocurrir en un gran número de ocasiones, en las que volveremos a obtener una de las ya obtenidas. Por este motivo, deberemos escoger una muestra amplia y bien distribuida de dichos vectores de parámetros para tener una cierta confianza en haber obtenido suficientes vértices eficientes, y a ser posible, todos ellos, sabiendo que por cada vector de parámetros deberemos resolver un problema.

En cualquier caso, de una muestra bien distribuida de ponderaciones no siempre podemos esperar obtener una buena estimación de vértices eficientes, especialmente en los casos en los que los valores de las distintas funciones objetivo tomen valores con unidades desequilibradas (por ejemplo, una de ellas en el rango $[0, 3]$ y otra en el rango $[1000, 1500]$). En estos casos, es conveniente normalizar dichas funciones objetivo para que se valoren en rangos y unidades análogas. Existen diversos procedimientos para realizar dichas normalizaciones, algunos de los cuales se verán en los ejemplos desarrollados posteriormente. Veamos a continuación el planteamiento y resolución de los problemas de ponderación sobre el ejemplo.

Ejemplo 5.4: Producción de vehículos, dos objetivos. Resolución por ponderaciones

Resuelva el Ejemplo 5.1 por el método de la ponderación, mediante *Lingo*. Utilice distintos valores de λ.

Solución

Considerando nuestro ejemplo:

$$\begin{cases} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \\ Min & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \end{cases}$$

Recordemos que deberemos transformar la función de contaminación de minimizar a maximizar su opuesta y posteriormente ponderarla. Como nuestro conjunto de oportunidades es siempre el mismo, y para no repetirlo innecesariamente, sólo nos fijamos en la función a maximizar del método de la ponderación. Al ser un problema con dos criterios, sólo tendremos un parámetro $0 \leq \lambda \leq 1$, .

$$Max \quad \lambda(2x_A + 3x_B) + (1 - \lambda)(-x_A - 2{,}25x_B)$$

Posteriormente, deberemos fijar una muestra para los valores de λ, por ejemplo, con un incremento de 0,2, por lo que deberemos resolver 6 problemas. Nótese que el problema de ponderación con el valor de $\lambda = 0$ corresponderá al problema de minimizar la contaminación y el de $\lambda = 1$ con el de maximizar los beneficios.
La formulación en *Lingo* de nuestro problema, para el caso $\lambda = 0{,}8$, es la siguiente:

Lingo: Enunciado

```
[ProblemaPonderado] Max = Lambda*Bene+(1-Lambda)*(-Conta);
[EmpleoMax] 20*xA+40*xB <= 2000;
[Empleomin] 20*xA+40*xB >= 1000;
[ContCalid] 18*xA+24*xB <= 1440;
[ProducMaxA] xA <= 70;
[ProducMaxB] xB <= 40;
[FuncionBeneficios] Bene = 2*xA+3*xB;
[FuncionContaminacion] Conta = xA+2.25*xB;
[Ponderacion]Lambda = 0.8;
```

Formulado de esta forma, sólo deberemos cambiar el valor de la ponderación e ir resolviendo los diversos problemas, obteniendo lo siguiente:

Ponderación	x_A	x_B	Beneficios	Contaminación
$\lambda = 0$	50	0	100	50
$\lambda = 0{,}2$	50	0	100	50
$\lambda = 0{,}4$	70	0	140	70
$\lambda = 0{,}6$	70	7,5	162,5	86,875
$\lambda = 0{,}8$	40	30	170	107,5
$\lambda = 1$	40	30	170	107,5

En este caso, debido a que las funciones objetivos poseen rangos y valores similares, y el número de vértices eficientes es reducido, con dicha muestra de los parámetros hemos obtenido todos los vértices eficientes.
Podemos ver gráficamente, puesto que sólo tenemos dos variables de decisión, el efecto que causan los distintos problemas resueltos, para distintos valores de λ, sobre la última curva de nivel que tocaría nuestro conjunto de oportunidades.

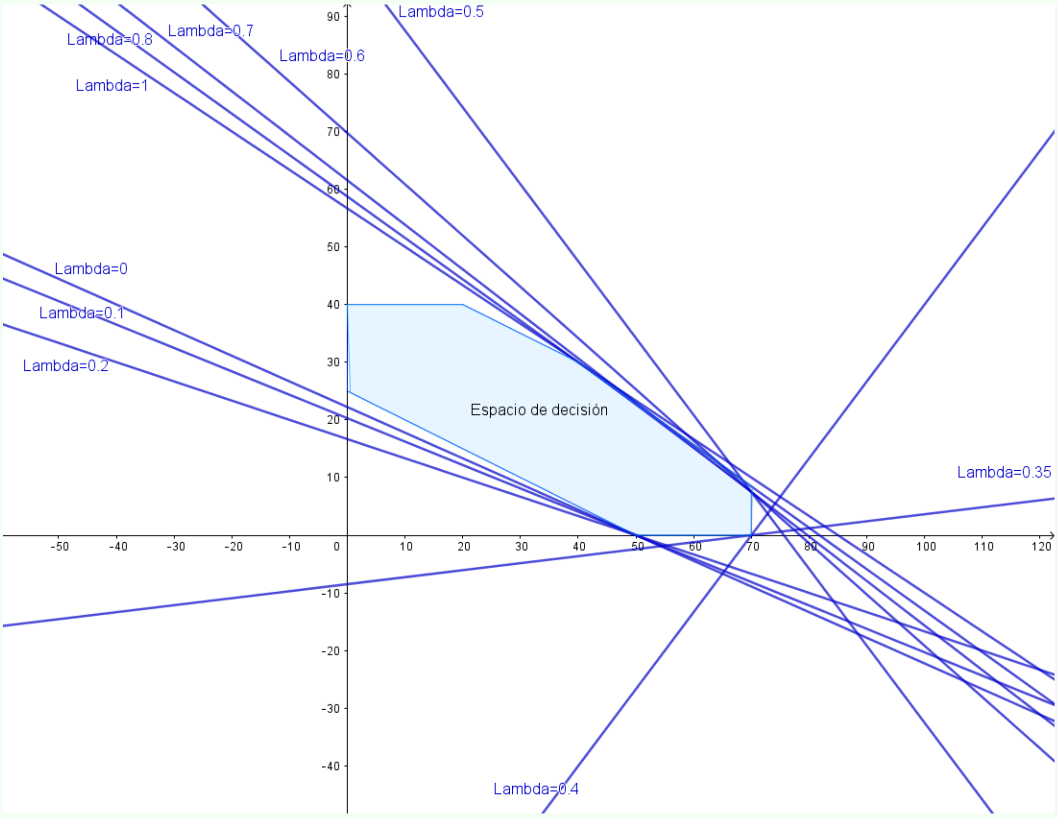


Figura 5.7: Método de la ponderación. Soluciones Eficientes, espacio de variables de decisión

En resumen, el método de la ponderación ha consistido en transformar nuestro problema multiobjetivo en un problema mono-objetivo, dejando sin modificar nuestro conjunto de oportunidades, y sólo modificando la función objetivo. Ésta se construye agregando todas las funciones del problema multiobjetivo mediante el uso de las ponderaciones, que no son más que parámetros que nos han servido para obtener lo que pretendíamos. Como el conjunto de oportunidades no se ha modificado, y la solución de un problema lineal se encuentra en los vértices, lo que nos aporta el método de la ponderación son los vértices eficientes. Como ya habíamos comentado previamente, sabemos que existirán también soluciones eficientes sobre puntos no vértices, sobre las aristas de nuestro ejemplo previo. Es por ello que necesitaremos un método capaz de obtener dichos puntos, que es el método de la restricción, que desarrollamos en la siguiente sección.

5.2.2. Método de la restricción.

El método de la restricción es uno de los más antiguos dentro de la programación multiobjetivo, que fue utilizado mucho antes de la formalización de ciertos resultados teóricos hoy conocidos. En el caso de los problemas lineales, la idea de este método consiste en modificar nuestro conjunto de oportunidades generando nuevos vértices sobre las aristas de nuestro problema original, con el fin de poder encontrar esos puntos eficientes interiores. Para ello, el método se basa en dos ideas principales: la primera es considerar, en cada problema que resolvamos, una sola de nuestras funciones objetivo, y la segunda es pasar el resto de las funciones objetivo a las restricciones. Para ello, deberemos imponer ciertas cotas para construir esas nuevas restricciones. Es aquí donde radica una de las cuestiones más complejas, la elección de dichas cotas, especialmente en el caso de problemas con más de dos objetivos. Sobre estos aspectos volveremos posteriormente.

El planteamiento del método de la restricción sería el siguiente. Dado nuestro problema multiobjetivo:

$$(PMO) \quad \begin{cases} Opt & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \end{cases}$$

supongamos que elegimos optimizar la función f_i, y llamemos k_j a la cota establecida para cada función f_j. Si denotamos por $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_p)$ al vector formado por todas las cotas, el problema resultante es:

$$(P_i(\mathbf{k})) \quad \begin{cases} Max & f_i(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \\ & f_j(\mathbf{x}) \geq k_j, \; j = 1, \ldots, p, \; j \neq i. \end{cases}$$

En general, las cotas que le imponemos a cada una de las funciones se tomarán dentro de su rango de variación, es decir, entre los valores anti-ideal e ideal: $k_j \in [f_{j*}, f_j^*]$.

En esta técnica, a diferencia del método de las ponderaciones, no tenemos asegurado que la solución sea eficiente, salvo que la solución obtenida sea única. Este resultado lo recogemos en el siguiente teorema.

Teorema 5.2: Soluciones eficientes por el método de la restricción

Si $\mathbf{x}^*$ es la única solución óptima de $(P_i(\mathbf{k}))$, para algún $i = 1, ..., p$, siendo $\mathbf{k}$ el vector de cotas asociado, entonces se verifica que $\mathbf{x}^*$ es solución eficiente de Pareto del problema multiobjetivo original. En cualquier caso, esta solución es débilmente eficiente.

Demostración

Supongamos que $\mathbf{x}^*$ no es eficiente. Existirá entonces un punto $\mathbf{x}$ factible tal que:

$$\begin{cases} f_j(\mathbf{x}) \geq f_j(\mathbf{x}^*) \; j = 1, .., p \\ f_s(\mathbf{x}) > f_s(\mathbf{x}^*), \text{ para, al menos un } s \in \{1, ..., p\}. \end{cases}$$

i) Si $s = i$, entonces $\mathbf{x}^*$ no puede ser solución de $(P_i(\mathbf{k}))$.

ii) Si $s \neq i$ entonces $\mathbf{x}$ es también solución de $(P_i(\mathbf{k}))$, lo cual contradice nuestra hipótesis de partida, dado que partimos de la unicidad de solución.

Por tanto, $\mathbf{x}^*$ es una solución óptima de Pareto del problema multiobjetivo.

Podemos observar que, por cada elección de un vector de cotas $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_p)$, podemos resolver p problemas distintos, sin más que cambiar la función a optimizar, por lo que por cada vector de cotas podemos obtener hasta p soluciones eficientes distintas.

Otra observación que podemos realizar es que en este método no es necesario transformar nuestras funciones a minimizar para que tomen la forma de maximizar. Simplemente, deberemos tener en consideración que cuando una de esas funciones sea nuestro objetivo, ese objetivo deberemos minimizarlo, y cuando una función de ese tipo aparezca en las restricciones la cota deberá ser del tipo $\leq$ en lugar de $\geq$.

La elección de las cotas, que es una de las partes importantes para el éxito del método, posee su clave en que hace que se modifique el conjunto de oportunidades. Esto implica un problema adicional, dado que si las imponemos demasiado pesimistas (pequeñas en el caso de maximizar), el conjunto de oportunidades no se modifica y nos resultaría un problema consistente en maximizar uno de los objetivos. Si, por el contrario, las imponemos demasiado optimistas (grandes en el caso de maximizar) el conjunto de oportunidades puede resultar vacío. Es por ello que se recomienda siempre que $k_j \in [f_{j*}, f_j^*]$, aunque en problemas con más de dos objetivos es posible que las cotas resulten incompatibles aunque estén en el rango indicado.

Veamos sobre nuestro ejemplo el efecto que produce el método de la restricción.

Ejemplo 5.5: Producción de vehículos, dos objetivos. Resolución por método restricción

Resuelva el Ejemplo 5.1 por el método de la restricción, mediante *Lingo*. Imponga una cota para cada función objetivo.

Solución

En primer lugar vamos a elegir un vector de cotas que cumpla la condición anteriormente señalada, es decir, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ donde $k_1 \in [100, 170]$ y $k_2 \in [50, 107{,}5]$. Elijamos $\mathbf{k} =$

$(130, 75)$. Por tanto nuestro primer problema vendrá formulado por:

$$\begin{cases} Min & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \geq 130 \end{cases}$$

El segundo problema que se genera a partir de las cotas formuladas es:

$$\begin{cases} Max & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B & \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 & (R1) \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 & (R2) \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 & (R3) \\ & x_A \leq 70 & (R4) \\ & x_B \leq 40 & (R5) \\ & x_A, x_B \geq 0 & (R6; R7) \\ & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \leq 75 & (R8). \end{cases}$$

Resolvamos el primer problema, que formulado en Lingo, sería:

Lingo: Enunciado

```
[ObjeMetodoRes] Min = Conta;
[EmpleoMax] 20*xA+40*xB <= 2000;
[Empleomin] 20*xA+40*xB >= 1000;
[ContCalid] 18*xA+24*xB <= 1440;
[ProducMaxA] xA <= 70;
[ProducMaxB] xB <= 40;
[RestMetodoRes] Bene >= 130;
[FuncionBeneficios] Bene = 2*xA+3*xB;
[FuncionContaminacion] Conta = xA+2.25*xB;
```

cuya solución es $(x_A, x_B) = (65, 0)$, con Beneficios $= 130$ y Contaminación $= 65$. Gráficamente, lo podemos ver en la siguiente figura:

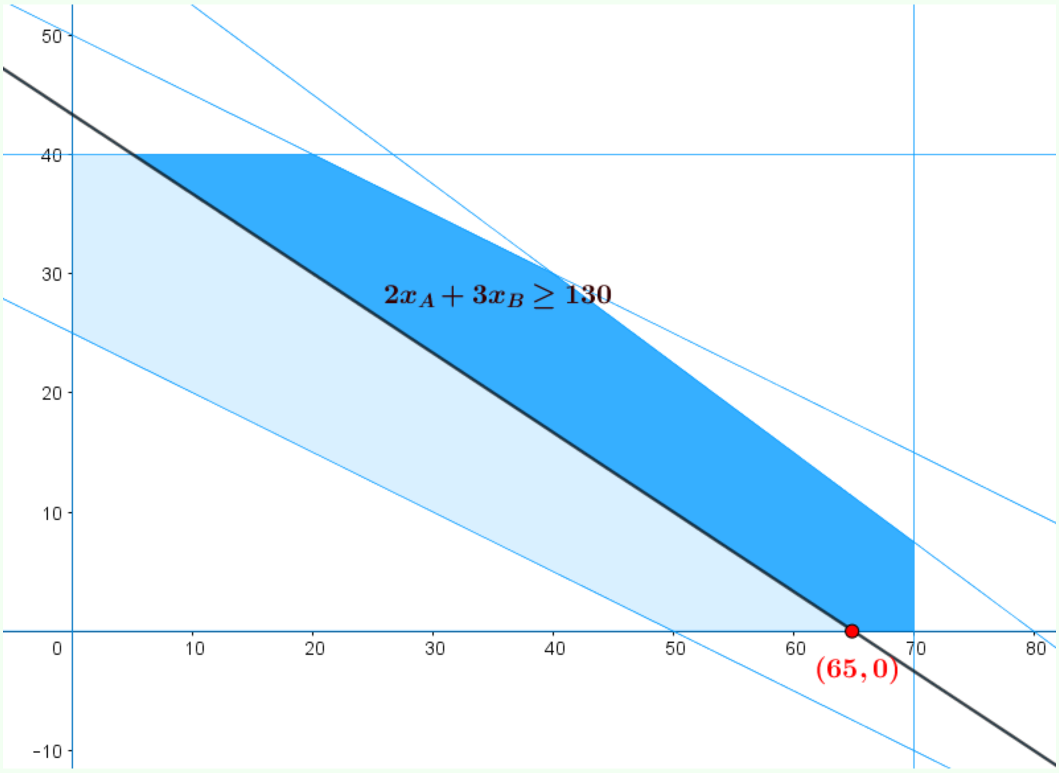


Figura 5.8: Método de la restricción. Soluciones Eficientes, espacio de variables de decisión

Como el conjunto de oportunidades se ha reducido de acuerdo a la nueva restricción incorporada, ha aparecido un nuevo vértice, que es justamente en el que se obtiene el mínimo de la contaminación al resolver el problema de la restricción.
Resolvamos ahora el segundo problema formulado, que en Lingo tendría la expresión:

Lingo: Enunciado

```
[ObjeMetodoRes] Max = Bene;
[EmpleoMax] 20*xA+40*xB <= 2000;
[Empleomin] 20*xA+40*xB >= 1000;
[ContCalid] 18*xA+24*xB <= 1440;
[ProducMaxA] xA <= 70;
[ProducMaxB] xB <= 40;
[RestMetodoRes] Conta <= 75;
[FuncionBeneficios] Bene = 2*xA+3*xB;
[FuncionContaminacion] Conta = xA+2.25*xB;
```

cuya solución es $(x_A, x_B) = (70, 2{,}222)$, con Beneficios $= 146{,}667$ y Contaminación $= 75$. Gráficamente, lo podemos ver en la figura:

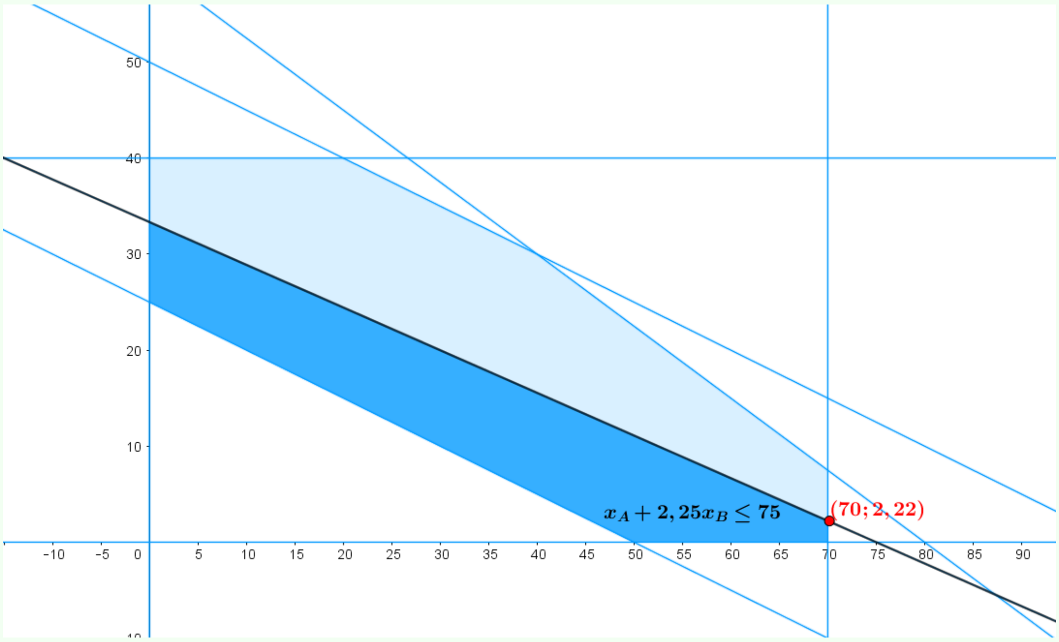


Figura 5.9: Método de la restricción. Soluciones Eficientes, espacio de variables de decisión.

En este caso, también se ha reducido el conjunto de oportunidades de acuerdo a la nueva restricción incorporada, apareciendo un nuevo vértice, que es justamente en el que se obtiene el máximo de los beneficios al resolver el problema de la restricción.
Puede continuarse imponiendo nuevas cotas y obteniendo nuevas soluciones eficientes no vértices.

Recordemos, que las soluciones que obtenemos por este método serán, como en todo problema de programación lineal, normalmente vértices con respecto al nuevo conjunto de oportunidades generado al introducir la restricción o restricciones correspondientes. Sin embargo, con respecto al conjunto de oportunidades original serán usualmente soluciones no vértices (sobre las aristas o en la frontera), salvo que las cotas las hayamos dado justo en los valores de los objetivos en algunos de los vértices, en cuyo caso nos devolverá como solución, naturalmente, dicho vértice del conjunto original.

Resumiendo lo visto en este epígrafe, hemos visto dos métodos para obtener soluciones eficientes de nuestro problema original. Debido a que el número de soluciones eficientes puede ser infinito o muy grande, lo que intentamos es obtener una estimación suficiente de dicha frontera eficiente. La obtención de estos puntos permite a los agentes implicados obtener información relevante sobre la estructura del conjunto eficiente. En cualquier caso, para finalizar la resolución del problema deberemos incorporar preferencias del decisor para alcanzar una solución final, pues las obtenidas no son comparables entre si. A continuación, comentaremos el método más utilizado dentro de los Métodos con información a priori, la programación por metas.

5.3. Programación por metas.

Una vez presentados algunos de los métodos más usuales y clásicos para la determinación de la frontera eficiente de un problema multiobjetivo, o una buena estimación de la misma, pasamos a la fase de decisión propiamente dicha. Efectivamente, existen otros enfoques, como se mencionó al inicio del capítulo, donde el decisor, o centro decisor aporta la información, al menos parcialmente, al inicio del problema. Qué duda cabe que esta información se puede aportar con más seguridad una vez realizados los pasos anteriores, que permiten aprender sobre el conjunto eficiente del problema. Uno de los enfoques utilizado con más frecuencia es el de programación por metas, (Goal

Programming), consistente en que el decisor emite “deseos” sobre valores a alcanzar en los distintos objetivos del problema. De esta forma, dichos “deseos” se pueden incorporar al modelo desde su inicio. Debemos señalar que este enfoque renuncia, en principio, al espíritu optimizador, y nuestra intención consistirá en cumplir, si es posible, los “deseos” del decisor, dentro de nuestro conjunto factible. Esta idea (filosofía *“satisfaciente”*) fue formulada inicialmente en la década de los años 50 del siglo XX por Herbert Simon, premio Nobel de Economía en 1978.

Formulación de las metas

Dado un problema general de programación multiobjetivo:

$$(PMO) \quad \begin{cases} Opt & (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_p(\mathbf{x})) \\ s.a & \mathbf{x} \in X, \end{cases}$$

donde algunos de los objetivos serán de máximo y otros de mínimo, el decisor actúa de la siguiente forma:

Cuando abordamos un problema por el enfoque de programación por metas, el decisor abandona su criterio optimizador y, en consecuencia, no tienen efecto los criterios de maximizar o minimizar nuestros objetivos.

En vez de eso, el decisor aportará para cada uno de los objetivos, un valor u_i que va a representar su deseo para ese objetivo, y que denominaremos *nivel de aspiración*. Éste será un valor que expresa lo que desea alcanzar como mínimo, o bien el valor que no desea superar, o incluso, en algunos casos, el valor que desea alcanzar exactamente, para el correspondiente objetivo.

Posteriormente, al conjugar el objetivo y el nivel de aspiración se obtiene lo que denominamos meta, que expresamos de la siguiente forma:

- Si el nivel de aspiración expresado para el objetivo f_i es de alcanzar, como mínimo, el nivel u_i, se puede escribir de la forma: $f_i(x) \geq u_i$.
- Por el contrario, si el deseo expresado es el de no superar dicho nivel de aspiración, podemos expresarlo como $f_j(x) \leq u_j$.
- En el caso de desear alcanzar ese nivel de aspiración exactamente, tendríamos, $f_k(x) = u_k$.

Debemos insistir en el hecho que, una vez que formulamos estas metas, hemos olvidado el elemento de maximizar o minimizar que regía hasta ahora nuestros problemas: nos conformamos con una solución que satisfaga los niveles de aspiración indicados. En consecuencia, nuestro problema consiste en encontrar, si las hay, soluciones factibles, (es decir, que cumplan las restricciones originales de nuestro problema) y que sean compatibles con los deseos formulados por el centro decisor. Si no las hay, querremos encontrar la solución factible que esté “más cerca” de satisfacer las metas. Como veremos más adelante, la manera en la que entendamos ese “más cerca” dará lugar a distintas variantes del método. Por lo tanto, buscamos una solución que verifica:

Definición 5.4: Solución satisfactoria

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in X \\ f_i(\mathbf{x}) \geq u_i, \text{ si para el objetivo } i \text{ se desea alcanzar, al menos, el nivel de aspiración,} \\ f_j(\mathbf{x}) \leq u_j, \text{ si para el objetivo } i \text{ se desea alcanzar, a lo sumo, el nivel de aspiración,} \\ f_k(\mathbf{x}) = u_k, \text{ si para el objetivo } i \text{ se desea alcanzar, exactamente, el nivel de aspiración.} \end{cases}$$

Por tanto, parece que hemos reconvertido nuestro problema en uno de resolver un sistema de inecuaciones. Aunque, básicamente, esa afirmación es cierta, posee varios matices muy importantes:

- Todas las inecuaciones, o ecuaciones, que aparecen en la nueva formulación, no poseen la misma categoría. Las que determinan la factibilidad en nuestro conjunto de oportunidades ($\mathbf{x} \in X$) son restricciones de obligado cumplimiento, pues en caso de no cumplirse alguna, la solución no sería factible. En cambio, las restricciones asociadas a las metas pueden violarse. Si se verifican, significa que se satisfacen los deseos del decisor. Si no, no se satisfacen, pero la solución es factible.

- El sistema de inecuaciones puede tener solución única, que podría ser lo más deseable (pero es lo más improbable), tener infinitas soluciones o no poseer solución. En cada uno de los dos últimos casos, la forma de abordarlo debe ser distinta, pero es claro que necesitamos alguna información adicional aportada por el decisor:

  - En el primer caso, cuando se cumplen todos los niveles de aspiración, el decisor deberá aportar información adicional para escoger, entre todas las soluciones que cumplen sus deseos aquella que más se adapte a sus preferencias.
  - En el segundo caso, cuando no sea posible cumplir todos los deseos formulados, el decisor deberá aportar información sobre la importancia relativa del cumplimiento/incumplimiento de las metas, y sobre cómo desea repartir los incumplimientos que obligatoriamente se van a producir.

Con el fin de poder dar respuesta de la mejor forma posible a todas las cuestiones anteriormente planteadas, debemos transformar nuestro problema en un problema de optimización, que no será un problema de optimización sobre los objetivos originales, sino sobre el cumplimiento de las metas, que es como está formulado ahora nuestro problema de acuerdo a los deseos del decisor.

Formulación del modelo de programación por metas

Para la transformación de nuestro problema, formulado con desigualdades, en un problema de optimización, deberemos transformar nuestras metas de la siguiente forma:

En primer lugar, para todas las metas formuladas, reconvertimos las desigualdades en igualdades, añadiendo dos *variables de desviación* no negativas por cada meta, que nos medirán cuánto nos quedamos por debajo o por encima del nivel de aspiración señalado por el decisor:

$$f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = u_i, \quad \forall i = 1, ..., p$$

En concreto, n_i es la llamada *variable de desviación negativa*, que mide cuánto nos quedamos por debajo (en la solución factible $\mathbf{x}$) del nivel de aspiración y p_i es la llamada *variable de desviación positiva*, que mide cuánto nos quedamos por encima del nivel de aspiración. En un problema lineal, por la naturaleza de los métodos de resolución, tenemos asegurado que ambas variables nunca serán estrictamente mayores que 0 simultáneamente. Por lo tanto:

- Para los objetivos f_i en los que deseamos alcanzar, al menos, nuestro nivel de aspiración u_i, es decir, $f_i(\mathbf{x}) \geq u_i$, nuestro deseo es que la variable n_i sea 0, pues en este caso no nos quedamos por debajo del nivel de aspiración marcado.
  En consecuencia, y visto como un problema de optimización, podríamos minimizar n_i, sujeto a las restricciones del problema, donde incluiremos la nueva formulación de la meta con sus dos variables de desviación. Si el resultado de dicho problema de optimización es $n_i^* = 0$, habremos cumplido los deseos del decisor respecto de dicha meta, y en caso contrario, si $n_i^* > 0$, dicho deseo no se ha podido alcanzar.

- Análogamente, para los objetivos f_j en los que deseamos alcanzar, a lo sumo, nuestro nivel de aspiración u_j, es decir, $f_j(\mathbf{x}) \leq u_j$, nuestro deseo es que la variable p_j sea 0, pues en este caso no nos quedamos por encima del nivel de aspiración marcado.
  En consecuencia, y visto como un problema de optimización podríamos minimizar p_j, sujeto a las restricciones del problema, donde incluiremos la nueva formulación de la meta con sus dos variables de desviación. Si el resultado de dicho problema de optimización es $p_j^* = 0$, habremos alcanzado los deseos del decisor respecto de dicha meta, y en caso contrario, $p_j^* > 0$, dicho deseo no se ha podido alcanzar.

- En conjunción con lo visto en los dos apartados anteriores para los objetivos f_k en los que deseamos alcanzar, exactamente, nuestro nivel de aspiración u_k, es decir, $f_k(\mathbf{x}) = u_k$, el problema de optimización acorde con ese deseo es minimizar $n_k + p_k$ y deseamos que ambos valores, en el óptimo, sean cero.

Las variables de desviación que queremos minimizar en cada caso son las que se conocen como *variables no deseadas*. Denotemos por $h_s(n_s, p_s)$ a la función que queremos minimizar para cada meta, es decir:

$$h_s(n_s, p_s) = \begin{cases} n_s & \text{si la meta } s \text{ es de } \geq, \\ p_s & \text{si la meta } s \text{ es de } \leq, \\ n_s + p_s & \text{si la meta } s \text{ es de } =. \end{cases}$$

Denotemos por h a una función de las variables no deseadas de todas las metas, denominada *función de logro* o de realización. La función h debe ser tal que su minimización conlleve la de todas las variables no deseadas. Entonces, nuestro problema transformado en un problema de optimización vendrá dado por:

$$(PMetas) \left\{ \begin{array}{ll} Min & h\left(h_1(n_1, p_1), h_2(n_2, p_2), \ldots, h_p(n_p, p_p)\right) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \\ & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = u_i \quad (i = 1, \ldots, p). \end{array} \right.$$

Podremos afirmar que se cumplirán todos nuestros deseos siempre y cuando el valor óptimo de la función de logro sea nulo. Si no existe ninguna solución que satisfaga todas las metas, encontraremos la que está más cerca de hacerlo, según la forma específica que tome la función h. Como se ha comentado previamente, esta forma específica da lugar a las distintas variantes de la programación por metas.

Veamos estos conceptos formulados sobre nuestro ejemplo:

Ejemplo 5.6: Producción de vehículos, metas a alcanzar

Supongamos que, en nuestro Ejemplo 5.1, el decisor desea alcanzar, al menos, un beneficio de 150, y una contaminación no superior a 85. Formule el correspondiente modelo de programación por metas.

Solución

El modelo inicial quedaría formulado como:

$$\begin{cases} 20x_A + 40x_B \leq 2000 \quad (R1) \\ 20x_A + 40x_B \geq 1000 \quad (R2) \\ 18x_A + 24x_B \leq 1440 \quad (R3) \\ x_A \leq 70 \quad (R4) \\ x_B \leq 40 \quad (R5) \\ x_A, x_B \geq 0 \quad (R6; R7) \\ B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B \geq 150 \quad (R8) \\ C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B \leq 85 \quad (R9). \end{cases}$$

Si representamos dicho problema en el espacio de variables de decisión, tendríamos:

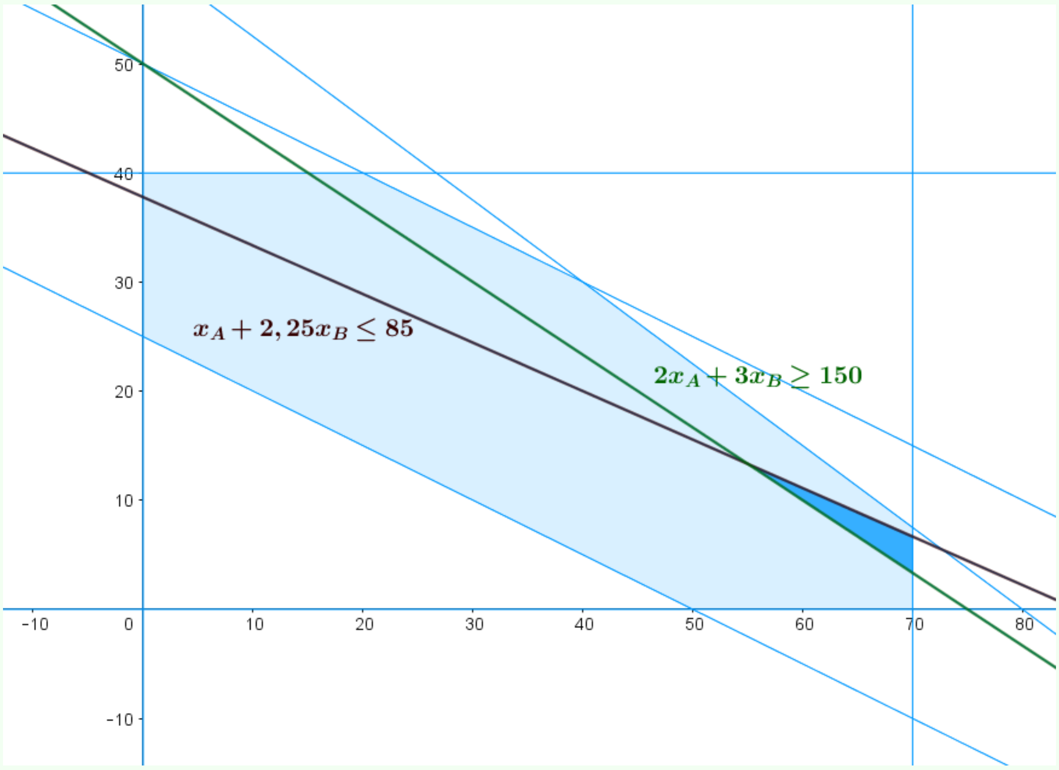


Figura 5.10: Programación por metas en el espacio de variables de decisión.

pudiéndose comprobar que existen producciones factibles, es decir, que cumplen las restricciones iniciales del problema, que además cumplen los deseos del decisor, que corresponderían a todo el área resaltada más oscura de la gráfica.
Análogamente podríamos verlo en el espacio de objetivos:

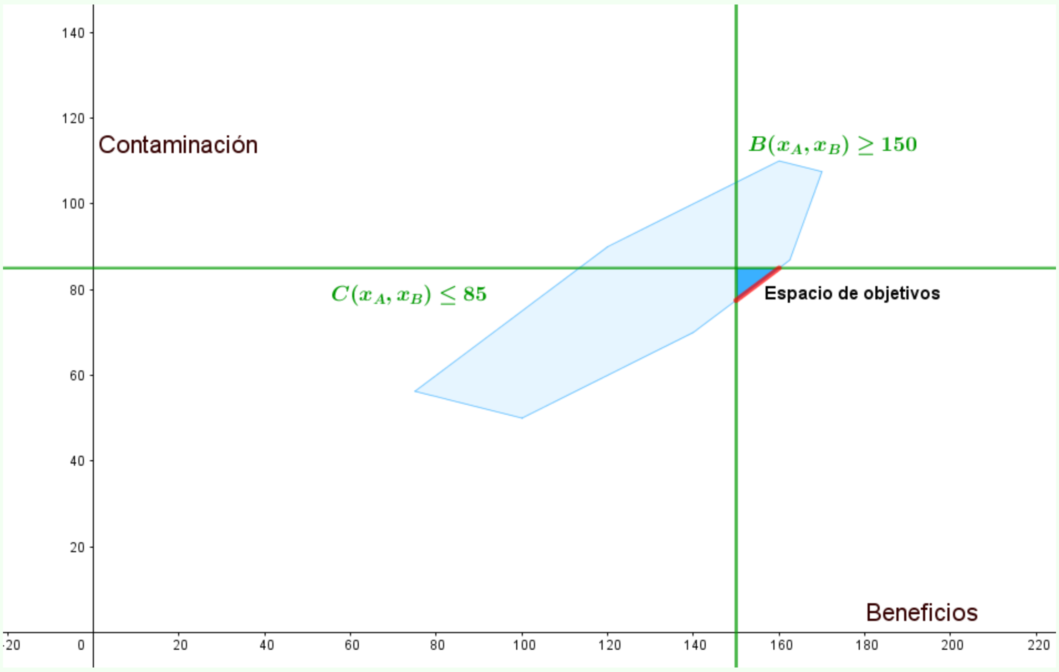


Figura 5.11: Programación por metas en el espacio de objetivos

Haciendo uso de las variables de desviación, el problema de optimización transformado quedaría de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{ll} Min & h(h_1(n_1,p_1),h_2(n_2,p_2)) = h(n_1,p_2) \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A,x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 150 \\ & C(x_A,x_B) = x_A + 2{,}25x_B + n_2 - p_2 = 85 \end{array}\right.$$

que tendría, según hemos visto gráficamente, infinitas soluciones, con un valor de h nulo, pues es posible alcanzar ambos deseos del decisor. En este caso, sería necesario incorporar nuevas preferencias del decisor, bien reformulando los niveles de aspiración en unos valores más exigentes, o escogiendo entre los puntos de la zona correspondiente, donde de especial interés resultan aquellos puntos que, verificando las metas, sean eficientes para los objetivos, y que aparece señalada en rojo en la Figura 5.11.

Como ya se ha comentado, en el caso que los niveles de aspiración formulados por el decisor no se puedan satisfacer simultáneamente, la forma específica de h puede incorporar información acerca de cómo manejar los incumplimientos que se darán, dando lugar a las distintas variantes de la programación por metas. Tres son, los sistemas de preferencias utilizados más frecuentemente: el ponderado, el minimax y el lexicográfico.

Programación por metas ponderadas

Sea el problema de programación por metas:

$$(PMetas)\begin{cases} Min & h\left(h_1(n_1,p_1),h_2(n_2,p_2),\ldots,h_p(n_p,p_p)\right) \\ s.a & \mathbf{x}\in X \\ & f_i(\mathbf{x})+n_i-p_i=u_i \quad (i=1,\ldots,p). \end{cases}$$

La estructura de preferencias de la programación por metas ponderadas consiste en agregar las distintas funciones de logro de cada una de las metas, ponderadas por la importancia relativa que el decisor conceda al cumplimiento de cada uno de los niveles de aspiración, y normalizándolas por los niveles de aspiración, para eliminar posibles sesgos. Téngase en cuenta que esta normalización es factible cuando u_i no es (ni está muy próximo a) 0. De esta forma, además, expresamos los incumplimientos en porcentajes con respecto a dichos niveles. Entonces, el problema a resolver es:

$$(PMP)\begin{cases} Min & \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\omega_i\frac{h_i(n_i,p_i)}{u_i} \\ s.a & \mathbf{x}\in X \\ & f_i(\mathbf{x})+n_i-p_i=u_i \quad (i=1,\ldots,p). \end{cases}$$

En este enfoque, por tanto, se minimiza la desviación total de las distintas metas, por lo que permitimos compensaciones en los incumplimientos, que pueden estar descompensados.

Una segunda estructura de preferencias, a la hora de manejar los incumplimientos, está orientada hacia el equilibrio de los mismos y está recogida en la programación por metas minimax:

Programación por metas minimax

Sea el problema de programación por metas:

$$(PMetas)\begin{cases} Min & h\left(h_1(n_1,p_1),h_2(n_2,p_2),\ldots,h_p(n_p,p_p)\right) \\ s.a & \mathbf{x}\in X \\ & f_i(\mathbf{x})+n_i-p_i=u_i \quad (i=1,\ldots,p). \end{cases}$$

La estructura de preferencias de la programación por metas minimax consiste en buscar un equilibrio entre las distintas funciones de logro de cada una de las metas, considerando también su ponderación y su normalización. Se desea aquí minimizar el máximo incumplimiento de todas las metas:

$$\boxed{(PMM)\begin{cases} Min & Max_{i=1,\ldots,p}\left\{\omega_i\frac{h_i(n_i,p_i)}{u_i}\right\} \\ s.a & \mathbf{x}\in X \\ & f_i(\mathbf{x})+n_i-p_i=u_i \quad (i=1,\ldots,p). \end{cases}}$$

Debido a que la función objetivo de este problema no posee una expresión cómoda de trabajo (no es lineal, e incluso pierde el carácter diferenciable), se puede realizar una transformación del problema en uno equivalente que conserva la linealidad del problema original, si éste lo fuera. Para ello, introducimos una variable auxiliar d que equivale al valor máximo de la función objetivo:

$$d = Max_{i=1,\ldots,p} \left\{ \omega_i \frac{h_i(n_i, p_i)}{u_i} \right\},$$

lo que equivale a minimizar d, introduciendo las restricciones adicionales

$$\omega_i \frac{h_i(n_i, p_i)}{u_i} \leq d \quad \forall i = 1...p,$$

y, de esa forma, nuestro problema programación por metas minimax queda expresado como:

$$(PMM') \begin{cases} Min & d \\ s.a & \mathbf{x} \in X \\ & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = u_i \quad (i = 1, \ldots, p) \\ & \omega_i \frac{h_i(n_i, p_i)}{u_i} \leq d \quad (i = 1, \ldots, p). \end{cases}$$

El último de los enfoques más usuales corresponde al orden lexicográfico, cuyo nombre tiene su origen en el orden seguido al buscar una palabra en un diccionario, de los antiguos, los de papel.

Programación por metas lexicográficas

Sea el problema de programación por metas:

$$(PMetas) \begin{cases} Min & h\left(h_1(n_1, p_1), h_2(n_2, p_2), \ldots, h_p(n_p, p_p)\right) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \\ & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = u_i \quad (i = 1, \ldots, p). \end{cases}$$

La estructura de preferencias de la programación por metas lexicográficas lleva asociada una información adicional por parte del decisor: el establecimiento de niveles de prioridad, a los que se incorporarán las metas, de tal forma que cada meta debe estar en un nivel de prioridad y sólo en uno. Se entiende que el decisor considera infinitamente más importante la satisfacción de las metas que están en el primer nivel. Una vez satisfechas éstas, podemos pasar al segundo nivel y así sucesivamente. Por lo tanto, a partir de los niveles, la modelización se dirige a utilizar todos los recursos disponibles, dados por nuestro conjunto de oportunidades, para ir cumpliendo las metas de los distintos niveles, de acuerdo a la prioridad fijada.

Si concluido un nivel de prioridad, se alcanzan todas sus metas, se pasa al siguiente nivel de prioridad, intentando cumplir las metas incluidas en el mismo, pero asegurándonos de mantener las metas ya satisfechas. Dentro de cada nivel de prioridad, si existen varias metas, podemos utilizar tanto la programación por metas ponderadas o minimax, lo que sólo será relevante en el momento en que no se satisfagan las metas del nivel.

Denotaremos por $N_s, s = 1, ..., r$, los r niveles de prioridad, y por i_s los objetivos cuyas metas asociadas están incluidas en el nivel N_s. De acuerdo con esta formulación, N_s será un conjunto de índices correspondientes a las metas incluidas en el mismo, y el problema asociado al nivel s, será:

$$(PML_s)\begin{cases} Min & (h_{i_s}(n_{i_s}, p_{i_s}),\ i_s \in N_s) \\ s.a & \mathbf{x} \in X \\ & f_i(\mathbf{x}) + n_i - p_i = u_i \quad (i = 1, \ldots, p) \\ & h_{i_t}(n_{i_t}, p_{i_t}) = 0 \quad \forall t < s. \end{cases}$$

Recordemos que, dentro de cada nivel de prioridad, podremos resolver tanto por el enfoque minimax como por el ponderado.

Una cuestión que puede plantearse en el momento de abordar un problema de programación por metas es cuál es el procedimiento adecuado, una vez explicitados por el decisor sus niveles de aspiración y su esquema de preferencias, si sus deseos no se pueden alcanzar. La respuesta es sencilla, no es necesario saber si los deseos pueden ser alcanzados o no: simplemente formulamos el problema acorde a su esquema de preferencia, ponderadas, minimax o lexicográficas, y a la importancia relativa del cumplimiento de las metas (ponderaciones). Si la solución es la nula, se satisfacen sus deseos; si la solución no es nula, no se pueden satisfacer sus deseos y la solución obtenida tiene en cuenta la estructura de preferencias del decisor.

Veamos estos tres enfoques sobre nuestro ejemplo, donde expresaremos unos niveles de aspiración exigentes, que no se pueden alcanzar conjuntamente.

Ejemplo 5.7: Producción de vehículos, metas. Diversos enfoques

Resuelva el Ejemplo 5.1 por programación por metas ponderadas, minimax y lexicográficas, suponiendo que nuestro decisor desea alcanzar, al menos, un beneficio de 160, y una contaminación no superior a 70, considerando que el cumplimiento de ambas metas tiene la misma importancia.

Solución

La formulación del modelo de programación por metas quedaría como sigue:

$$\begin{cases} Min & h(n_1, p_2) \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 160 \\ & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B + n_2 - p_2 = 70. \end{cases}$$

Los diversos enfoques van dirigidos hacia cómo tratar la función a optimizar. Así, el problema de programación por metas ponderadas, si consideramos igualmente importantes el cumplimiento de ambas metas, sería:

$$\begin{cases} Min & \frac{n_1}{160} + \frac{p_2}{70} \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 160 \\ & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B + n_2 - p_2 = 70, \end{cases}$$

cuya solución es $(x_A, x_B) = (70, 0)$, con valor de los objetivos $(B, C) = (140, 70)$ y valores de $(n_1, p_2) = (20, 0)$. Se cumple, por tanto la segunda meta, y no la primera, los beneficios, que son de 140 millones en lugar de los 160 deseados. Si hubiéramos impuesto una preferencia mayor hacia la meta de los beneficios, claramente la solución sería distinta.
Si el esquema de preferencias lo formulamos bajo programación por metas minimax, el modelo sería:

$$\begin{cases} Min & d \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 160 \\ & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B + n_2 - p_2 = 70 \\ & \frac{n_1}{160} \leq d \\ & \frac{p_2}{70} \leq d, \end{cases}$$

cuya solución es $(x_A, x_B) = (70, 2{,}456)$, con valor de los objetivos $(B, C) = (147{,}37, 75{,}53)$ y valores de $(n_1, p_2) = (12{,}63, 5{,}53)$. En este caso, no se cumple ninguna de las dos metas. El valor óptimo de d es $d^* = 0{,}0789$, es decir, se produce un incumplimiento del 7,89 %. En nuestro caso, dicho incumplimiento, en porcentaje, es igual en ambas metas, ya que ambas

restricciones, las dos últimas del modelo, son activas en el óptimo. Es decir, $\frac{12{,}63}{160} = \frac{5{,}53}{70} = 0{,}0789$.
Si, por último, el esquema de preferencias lo formulamos bajo la programación por metas lexicográficas, sólo podríamos tener dos niveles de prioridad, pues sólo tenemos dos metas. Supongamos que en el primer nivel incluimos la primera meta, la del beneficio, y en el segundo nivel la meta de la contaminación. Tendríamos que resolver, en principio, dos modelos, comenzando por el del nivel de prioridad 1. Si en éste obtenemos la solución nula, pasamos al modelo del segundo nivel, imponiendo que el primer nivel se ha alcanzado. En estos casos, donde sólo hay una meta por nivel, no es necesario ni normalizar ni ponderar, como es obvio. El modelo correspondiente al primer nivel sería:

$$\begin{cases} Min & n_1 \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 160, \end{cases}$$

cuya solución es $n_1 = 0$. Pasamos, por tanto, al segundo nivel:

$$\begin{cases} Min & p_2 \\ s.a & 20x_A + 40x_B \leq 2000 \\ & 20x_A + 40x_B \geq 1000 \\ & 18x_A + 24x_B \leq 1440 \\ & x_A \leq 70 \\ & x_B \leq 40 \\ & x_A, x_B \geq 0 \\ & B(x_A, x_B) = 2x_A + 3x_B + n_1 - p_1 = 160 \\ & C(x_A, x_B) = x_A + 2{,}25x_B + n_2 - p_2 = 70 \\ & n_1 = 0 \end{cases}$$

cuya solución final es $(x_A, x_B) = (70,\ 6,667)$, con valor de los objetivos $(B, C) = (160, 85)$ y valores de $(n_1, p_2) = (0, 15)$. En este caso, la meta que se cumple es la del beneficio, lo que es normal, pues la hemos puesto en el primer nivel de prioridad y al resolver el primer modelo, sabíamos que se cumplía, pero no se cumple la meta de contaminación, que queda 15 unidades por encima de su nivel de aspiración.

5.4. Un ejemplo de mayores dimensiones

Para terminar este capítulo, aplicaremos todos los conceptos aprendidos al Ejemplo 3.5 que introdujimos en el capítulo 3, al que hemos añadido un nuevo objetivo. Sobre él, veremos cómo podría ser el proceso completo de resolución de un problema multiobjetivo.

Ejemplo 5.8: Cultivos tropicales. Dos objetivos

Un agricultor posee una finca de 100 hectáreas, que desea dedicar al cultivo de aguacates y mangos. Concretamente, decide cultivar las siguientes variedades:

- Aguacates, variedad Hass,
- Aguacates, variedad Bacon,
- Mangos, variedad Osteen,
- Mangos, variedad Keitt.

La siguiente tabla muestra, para cada variedad, la productividad de la tierra (en Kg. de fruta obtenidos por hectárea cultivada), el precio obtenido por el agricultor (en euros por Kg.) y los costes de producción (en euros por hectárea). El agricultor no desea destinar más de 550.000 € a costes de producción. Además, dado que la demanda de aguacate es mayor que la de mango, decide destinar al menos 65 ha. a esa fruta (incluyendo las dos variedades). A fin de diversificar los cultivos para asumir menos riesgos, decide destinar a cada variedad al menos 10 ha. y no más de 40. Finalmente, no desea dejar terreno sin cultivar.

Variedad	Productividad	Precio	Costes
A - Hass	12.000	2,00	5.120
A - Bacon	11.000	2,25	5.230
M - Osteen	20.000	1,08	6.250
M - Keitt	25.000	1,00	6.500

Se calcula que la necesidad de agua de riego será de 6.000 litros por hectárea cultivada de aguacate y 5.700 litros por hectárea cultivada de mango. El agricultor desea determinar la distribución óptima de la finca entre las cuatro variedades, teniendo en cuenta todos los requisitos previamente descritos. Para ello, considera dos objetivos. Por un lado, desea que se maximice el ingreso total. Por otro lado, como el cultivo se desarrolla en una zona árida con escasez de agua de riego, desea minimizar su consumo.

1. Modelice matemáticamente el problema multiobjetivo correspondiente.
2. Calcule la matriz de pagos del problema y determine los valores ideal y anti-ideal de cada objetivo.
3. Calcule más soluciones eficientes por los métodos de la ponderación y la restricción. ¿Qué conclusiones podemos extraer?
4. A la vista de los resultados anteriores, el decisor solicita formular un modelo de programación por metas donde los niveles de aspiración son: que los ingresos alcancen, al menos, de 2.400.000 € y que el consumo de agua no sobrepase los 591.600 litros. Resuelva el problema por las variantes ponderada y minimax, suponiendo que ambas metas tienen el mismo peso. Comente todos los elementos de la solución obtenida.

Solución

1. A la formulación del Ejemplo 3.5 que se desarrolló en el capítulo 3 de programación lineal sólo hay que añadirle en este caso el objetivo del consumo de agua. Este consumo, por hectárea cultivada, es el mismo para las dos variedades de aguacate y para las dos de mango. Así, la función de consumo de agua es:

   $$C(Hass, Bacon, Osteen, Keitt) = 6000Hass+6000Bacon+5700Osteen+5700Keitt.$$

   Por lo tanto, el modelo multiobjetivo resultante es:

   $$\begin{cases} Max & I(Hass, Bacon, Osteen, Keitt) = 24000Hass + 24750Bacon+ \\ & 21600Osteen + 25000Keitt \\ Min & C(Hass, Bacon, Osteen, Keitt) = 6000Hass + 6000Bacon + 5700Osteen+ \\ & 5700Keitt \\ s.a & Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\ & 5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\ & Hass + Bacon \geq 65 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40. \end{cases}$$

2. La solución óptima para la función de los ingresos ya se obtuvo en el capítulo 3, resultando que para maximizarlos, la distribución óptima de la tierra cultivable consiste en dedicar 33,84 ha al cultivo de aguacate Hass, 40 ha al cultivo de aguacate Bacon, 10 ha al cultivo de mango Osteen y 16,16 ha al cultivo de mango Keitt. Con ello, el ingreso óptimo obtenido anualmente es de 2.422.159 €. Basta añadir que, para esta solución, el consumo de agua se eleva a 592.152 litros.

   Para completar la construcción de la matriz de pagos, debemos resolver el problema de minimizar el consumo de agua. Siguiendo la modelización en *Lingo* utilizada en el Ejemplo 3.5 del capítulo 3, el enunciado de este problema sería el siguiente:

Lingo: Matriz de Pagos

```
Min = Agua;
[Ingreso] Ing = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Consumo_Agua] Agua = 6000*Hass+6000*Bacon+5700*Osteen+5700*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
```

Nótese que se han añadido las dos funciones objetivo como restricciones instrumentales y se ha asignado su valor a sendas variables auxiliares (`Ing` y `Agua`). De esta forma, facilitamos su utilización en formulaciones posteriores y además obtenemos el valor de las dos funciones directamente tras cada resolución.

La resolución de este modelo nos informa de que, para minimizar el consumo de agua, la distribución óptima de la tierra cultivable consiste en dedicar 40 ha al cultivo de aguacate Hass, 31,67 ha al cultivo de aguacate Bacon, 18,33 ha al cultivo de mango Osteen y 10 ha al cultivo de mango Keitt. Con ello, el consumo de agua óptimo obtenido anualmente es de 591.500 litros. Por otro lado, el ingreso en este caso baja a 2.389.750 €.

Así pues, la matriz de pagos del problema es:

Función	**Variedad**				**Valor**	
Optimizada	**Hass**	**Bacon**	**Osteen**	**Keitt**	**Ingreso**	**Agua**
Ingreso	33,84	40,00	10,00	16,16	2.422.159	592.152
Agua	40,00	31,67	18,33	10,00	2.389.750	591.500

Tabla 5.1: Matriz de pagos del problema.

Por lo tanto, podemos deducir que, en el conjunto eficiente, el ingreso se va a mover en el rango de valores [2.389.750, 2.422.159], mientras que el consumo de agua lo hará en el rango [591.500, 592.152].

3. Como se ha visto, los dos óptimos obtenidos al confeccionar la matriz de pagos son vértices eficientes del problema. Con el método de las ponderaciones, vamos a intentar detectar otros posibles vértices eficientes. Para ello, para cada peso $0 \leq \lambda \leq 1$, construimos el problema ponderado:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
Max & \frac{\lambda}{N_1}(24000Hass + 24750Bacon + 21600Osteen + 25000Keitt)- \\
 & -\frac{1-\lambda}{N_2}(6000Hass + 6000Bacon + 5700Osteen + 5700Keitt) \\
s.a & Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\
 & 5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\
 & Hass + Bacon \geq 65 \\
 & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\
 & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40,
\end{array}
\right.
$$

donde hemos cambiado el signo de la función de consumo de agua, para pasarla a maximizar, y utilizamos los coeficientes de normalización N_1 y N_2 para evitar efectos de sesgo. Para estos coeficientes de normalización, vamos a utilizar los rangos definidos por la diferencia entre el ideal (mejor valor posible en el conjunto eficiente) y el anti-ideal (peor valor posible en el conjunto eficiente). De esta manera, el modelo de *Lingo* para, por ejemplo, $\lambda = 0,1$ es:

Lingo: Ponderación

```
Max = (Lambda/32409)*Ing-((1-Lambda)/652)*Agua;
Lambda = 0.1;
[Ingreso] Ing = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Consumo_Agua] Agua = 6000*Hass+6000*Bacon+5700*Osteen+5700*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
```

Tal como se ha construido el modelo, basta cambiar el valor asignado al parámetro `Lambda` en la segunda línea para ir obteniendo distintos problemas de ponderación.

Peso Ing	Peso Agua	Hass	Bacon	Osteen	Keitt	Ingreso	Agua
0,1	0,9	40,00	31,67	18,33	10,00	2.389.750	591.500
0,2	0,8	40,00	31,67	18,33	10,00	2.389.750	591.500
0,3	0,7	40,00	31,67	18,33	10,00	2.389.750	591.500
0,4	0,6	40,00	31,67	18,33	10,00	2.389.750	591.500
0,5	0,5	40,00	33,31	10,00	16,69	2.417.673	591.992
0,6	0,4	40,00	33,31	10,00	16,69	2.417.673	591.992
0,7	0,3	33,84	40,00	10,00	16,16	2.422.159	592.152
0,8	0,2	33,84	40,00	10,00	16,16	2.422.159	592.152
0,9	0,1	33,84	40,00	10,00	16,16	2.422.159	592.152

Tabla 5.2: Soluciones por el método de la ponderación.

Si tomamos valores entre 0 y 1, con un salto de 0,1, obtenemos los resultados que se muestran en la Tabla 5.2. Como podemos observar, además de los ya obtenidos, ha aparecido un nuevo vértice eficiente, en el que se dedican 40 ha al cultivo de aguacate Hass, 33,31 ha al cultivo de aguacate Bacon, 10 ha al cultivo de mango Osteen y 16,69 ha al cultivo de mango Keitt, obteniendo unos ingresos de 2.417.673 € y un consumo de agua de 591.992 litros.

Para encontrar soluciones eficientes que no sean vértices del conjunto de oportunidades, pasamos al método de la restricción. Si optimizamos la función de ingresos y establecemos una cota $k \in [591.500,\ 592.152]$ sobre el consumo de agua, el problema de restricción es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ll} Max & 24000Hass + 24750Bacon + 21600Osteen + 25000Keitt \\ s.a & Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\ & 5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\ & Hass + Bacon \geq 65 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\ & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40 \\ & 6000Hass + 6000Bacon + 5700Osteen + 5700Keitt \leq k. \end{array}\right.$$

El correspondiente modelo de *Lingo*, por ejemplo, para $k = 591.826$ sería:

Lingo: Restricción

```
Max = Ing;
k = 591.826;
[Ingreso] Ing = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Consumo_Agua] Agua = 6000*Hass+6000*Bacon+5700*Osteen+5700*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
[Cota] Agua <= k;
```

Haciendo variar k, obtendremos una serie de puntos eficientes. Por ejemplo, recorriendo el rango entre el ideal y el anti-ideal del consumo de agua, con un salto de 65,20, obtenemos los resultados que aparecen en la Tabla 5.3. Como puede observarse, hay dos zonas diferenciadas con distintos trade-offs entre los criterios. En la primera zona, por cada litro adicional de consumo de agua, se consigue un ingreso adicional de 56,73 €. En la segunda zona, cada litro adicional de agua sólo incrementa el ingreso en 28,10 €. Este comportamiento de las funciones objetivo en el conjunto eficiente se puede ver gráficamente en la Figura 5.12.

C ≤	Ingreso	Agua	Hass	Bacon	Osteen	Keitt
591.500,00	2.389.750	591.500,00	40,00	31,67	18,33	10,00
591.565,20	2.393.449	591.565,20	40,00	31,88	17,23	10,89
591.630,40	2.397.149	591.630,40	40,00	32,10	16,13	11,77
591.695,60	2.400.848	591.695,60	40,00	32,32	15,02	12,66
591.760,80	2.404.548	591.760,80	40,00	32,54	13,92	13,55
591.826,00	2.408.247	591.826,00	40,00	32,75	12,81	14,43
591.891,20	2.411.947	591.891,20	40,00	32,97	11,71	15,32
591.956,40	2.415.646	591.956,40	40,00	33,19	10,60	16,21
592.021,60	2.418.499	592.021,60	38,87	34,54	10,00	16,59
592.086,80	2.420.327	592.086,80	36,36	37,27	10,00	16,38
592.152,00	2.422.159	592.152,00	33,84	40,00	10,00	16,16

Tabla 5.3: Soluciones por el método de la restricción.

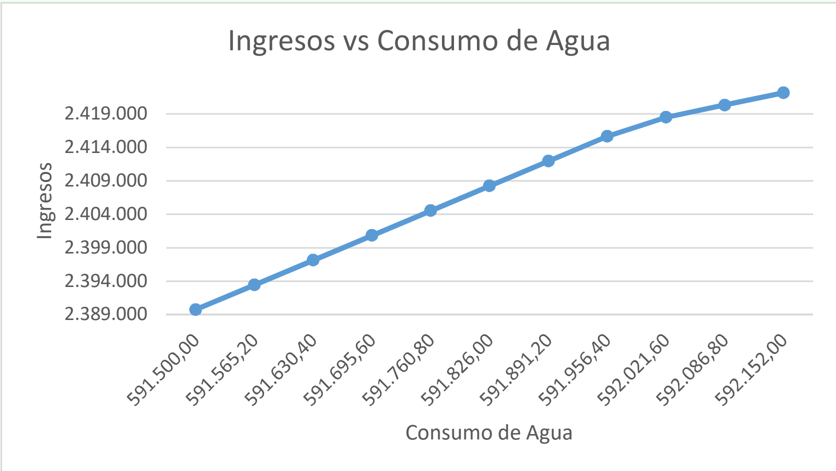


Figura 5.12: Evolución de los ingresos a medida que aumenta el consumo de agua

También se puede observar en la Tabla 5.3 cómo se comportan las variables de decisión en el conjunto eficiente. Así, en la primera zona, se mantienen las 40 ha destinadas al cultivo de aguacate Hass, mientras que las ha dedicadas al mango Osteen van bajando a medida que aumenta el consumo de agua. Estas hectáreas se dedican principalmente a aumentar la superficie cultivada de mango Keitt y a aumentar (más levemente) la dedicada al aguacate Bacon. En la segunza zona, comienza a decrecer la superficie destinada a aguacate Haas, y, más levemente, la destinada a mango Keitt. A cambio, va creciendo la superficie destinada a aguacate Bacon. Este comportamiento se puede observar gráficamente en la Figura 5.13.

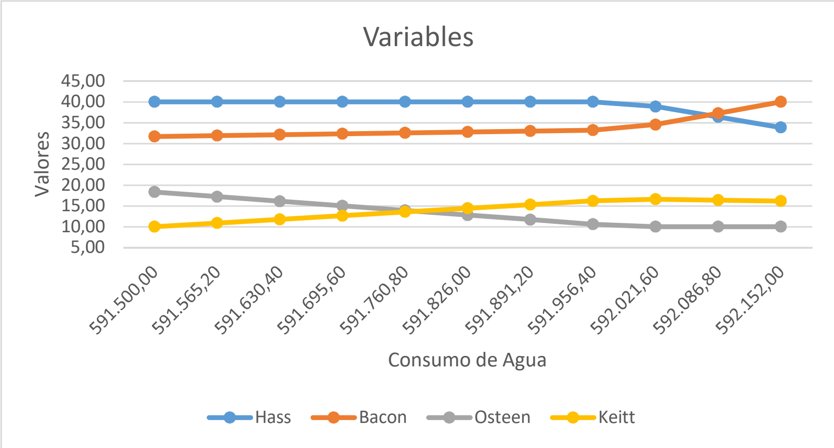


Figura 5.13: Evolución las superficies cultivadas al aumentar el consumo de agua

Toda esta información es valiosa para el decisor, ya que le permite aprender sobre la estructura del conjunto eficiente y sobre las tasas de intercambio entre los criterios en cada zona. Con este conocimiento, le resultará más fácil proporcionar la información preferencial que se requiere en la siguiente etapa.

4. Planteemos seguidamente los modelos de programación por metas. Para ello, el decisor propone las siguientes metas:

   - Que los ingresos sean, al menos, de 2.400.000 €.
   - Que el consumo de agua no sobrepase los 591.600 litros.

   Si ambas metas tienen el mismo peso, el correspondiente problema de programación por metas ponderadas toma la siguiente forma:

$$
\begin{cases}
Min & \frac{1}{2400000}n_1 + \frac{1}{591600}p_2 \\
s.a & Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\
 & 5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\
 & Hass + Bacon \geq 65 \\
 & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\
 & Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40 \\
 & 24000Hass + 24750Bacon + 21600Osteen + 25000Keitt + n_1 - p_1 = 2400000 \\
 & 6000Hass + 6000Bacon + 5700Osteen + 5700Keitt + n_2 - p_2 = 591600.
\end{cases}
$$

   El correspondiente modelo de *Lingo*, es el siguiente:

Lingo: Programación por metas ponderadas

```
Min = n1/AspIng+p2/AspAgu;
AspIng = 2400000;
AspAgu = 591600;
[Ingreso] Ing = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Consumo_Agua] Agua = 6000*Hass+6000*Bacon+5700*Osteen+5700*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
[Meta_1] Ing+n1-p1 = AspIng;
[Meta_2] Agua+n2-p2 = AspAgu;
```

donde, como se ve, hemos parametrizado los niveles de aspiración para poderlos cambiar fácilmente. La resolución produce los siguientes valores óptimos de las variables del problema:

Lingo: Solución: Programación por metas ponderadas

```
Solución óptima global encontrada
Valor de la función objetivo: 0.1363228E-03
```

Variable	Valor	Variable	Valor
HASS	40,00000	AGUA	591.680,6
BACON	32,26883	N1	0,000000
OSTEEN	15,27435	P2	80,64857
KEITT	12,45682	P1	0,000000
ING	2.400.000	N2	0,000000

Como puede observarse, la función objetivo toma un valor óptimo mayor que 0, por lo que podemos asegurar que no hay soluciones factibles que satisfagan las dos metas a la vez. En la solución encontrada, se satisface la meta del ingreso ($n_1 = 0$), que vale exactamente los 2.400.000 € de su nivel de aspiración (por eso, $p_1 = 0$). Por otra parte, la meta del consumo de agua no se satisface, y se queda $p_2 = 80,65$ litros por encima de su nivel de aspiración, por lo que el consumo de agua es de 591.680,65 litros.

Si nos parece que no es aceptable que, con los mismos pesos, se satisfaga una meta sí y la otra no, podemos probar con la formulación minimax, que, como hemos visto, tiende a repartir los incumplimientos. Por tanto, con las mismas metas, el modelo a resolver sería:

$$
\begin{cases}
Min \quad d \\
s.a \quad Hass + Bacon + Osteen + Keitt = 100 \\
5120Hass + 5230Bacon + 6250Osteen + 6500Keitt \leq 550000 \\
Hass + Bacon \geq 65 \\
Hass, Bacon, Osteen, Keitt \geq 10 \\
Hass, Bacon, Osteen, Keitt \leq 40 \\
24000Hass + 24750Bacon + 21600Osteen + 25000Keitt + n_1 - p_1 = 2400000 \\
6000Hass + 6000Bacon + 5700Osteen + 5700Keitt + n_2 - p_2 = 591600 \\
\frac{1}{2400000}n_1 \leq d \\
\frac{1}{591600}p_2 \leq d.
\end{cases}
$$

El correspondiente modelo de *Lingo*, es ahora el siguiente:

Lingo: Programación por metas minimax

```
Min = d;
AspIng = 2400000;
AspAgu = 591600;
[Ingreso] Ing = 24000*Hass+24750*Bacon+21600*Osteen+25000*Keitt;
[Consumo_Agua] Agua = 6000*Hass+6000*Bacon+5700*Osteen+5700*Keitt;
[Hectareas] Hass+Bacon+Osteen+Keitt = 100;
[Costes_prod] Coste = 5120*Hass+5230*Bacon+6250*Osteen+6500*Keitt;
[Coste_max] Coste <= 550000;
[Prod_aguacate] Hass+Bacon >= 65;
[Prod_min_hass] Hass >= 10;
[Prod_min_bacon] Bacon >= 10;
[Prod_min_osteen] Osteen >= 10;
[Prod_min_keitt] Keitt >= 10;
[Prod_max_hass] Hass <= 40;
[Prod_max_bacon] Bacon <= 40;
[Prod_max_osteen] Osteen <= 40;
[Prod_max_keitt] Keitt <= 40;
[Meta_1] Ing+n1-p1 = AspIng;
[Meta_2] Agua+n2-p2 = AspAgu;
[Inst1] n1/AspIng <= d;
[Inst2] p2/AspAgu <= d;
```

Resolviéndolo, nos encontramos con la siguiente solución (sólo hemos reflejado los datos más relevantes para el análisis):

Lingo: Solución: Programación por metas ponderadas

```
Solución óptima global encontrada
Valor de la función objetivo: 0.1272264E-03
```

Variable	Valor	Variable	Valor
HASS	40,00000	AGUA	591.675,3
BACON	32,25089	N1	305,3433
OSTEEN	15,36548	P2	75,26713
KEITT	12,38363	P1	0,000000
ING	2.399.695	N2	0,000000

Fila	Holgura	Fila	Holgura
HECTAREAS	0,000000	PROD_MIN_KEITT	2,383633
COSTE_MAX	0,000000	PROD_MAX_HASS	0,000000
PROD_AGUACATE	7,250890	PROD_MAX_BACON	7,749110
PROD_MIN_HASS	30,00000	PROD_MAX_OSTEEN	24,63452
PROD_MIN_BACON	22,25089	PROD_MAX_KEITT	27,61637
PROD_MIN_OSTEEN	5,365477		

Como podemos observar, ahora no se safisface ninguna de las dos metas, pero se han equilibrado los incumplimientos. Los ingresos quedan $n_1 = 305,34$ € por debajo de su nivel de aspiración, por lo que son de 239.965 €. Por su parte, el consumo de agua queda $p_2 = 75,27$ litros por encima de su valor de aspiración, valiendo 591.675,3 litros. En ambos casos, la desviación porcentual con respecto al nivel de aspiración viene dada por el valor óptimo de d: 0,13 %. Estos valores se consiguen dedicando 40 ha al cultivo de aguacate Hass, 32,25 ha al cultivo de aguacate Bacon, 15,37 ha al cultivo de mango Osteen y 12,38 ha al cultivo de mango Keitt. Además, podemos ver que se cultivan exactamente las 100 ha disponibles, como es lógico dado que la restricción es igualdad, y que los costes de producción están exactamente en su cota superior (550.000 €). El resto de variables del holgura nos indican la posición de la superficie cultivada de cada variedad con respecto a sus cotas inferiores y superiores.

Como se ha mencionado al principio de esta sección, la programación por metas fue diseñada para la obtención de soluciones satisfactorias, esto es, soluciones que cumplan con los deseos o preferencias (metas) del decisor. Sin embargo, tal y como se ha podido apreciar en los ejemplos desarrollados previamente, puede ocurrir, y de hecho es lo más habitual, que no existan soluciones factibles que satisfagan todas las metas planteadas. En tal caso, la solución obtenida es la que se encuentra más cerca de alcanzar los niveles de aspiración. Tal solución dependerá, lógicamente, del enfoque utilizado dentro de la programación por metas (ponderación, minimax o lexicográfico), puesto que cada uno conlleva una medida de la distancia entre la solución y los niveles de aspiración recogida en la función de logro. Si se diese el caso que existieran soluciones factibles que satisfacieran todas las metas, lo habitual es reformular el problema con unos niveles de aspiración más exigentes, o bien buscar soluciones eficientes dentro del conjunto "satisfactorio", para lo cual existen técnicas que se denominan de restauración de eficiencia. Esto último está intrínsecamente relacionado con la programación multimetas (Zeleny, 1982), que consiste en la combinación de la filosofía de programación por metas y de la programación multiobjetivo, donde se busca alcanzar las metas planteadas (filosofía satisfaciente) bajo la consideración de las funciones de logro como objetivos simultáneos a minimizar (filosofía optimizadora), tratando de buscar soluciones en las que no sea posible mejorar el logro de una meta sin empeorar el de otra.

Apéndice A

Convexidad de conjuntos. Convexidad y concavidad de funciones

En este apartado vamos a introducir los conceptos fundamentales de conjuntos y funciones convexas, incluyendo la caracterización de las funciones cóncavas y convexas diferenciables, así como algunas de las propiedades más interesantes, fundamentales, entre otras cosas, para determinar condiciones de optimalidad en nuestros problemas.

Los conceptos relativos a conjuntos convexos vienen ligados a propiedades deseables sobre el conjunto de oportunidades, que nos permiten realizar una búsqueda más fácil de la solución óptima, o bien, asegurar ciertas fortalezas de la solución encontrada. Por ello, vamos a introducir, en el primer subapartado, la definición y propiedades de los conjuntos convexos. El segundo subapartado lo dedicaremos a la definición y propiedades de las funciones cóncavas y convexas.

A.0.1. Conjunto convexo

Antes de definir formalmente los conjuntos convexos, veamos una idea gráfica de lo que los caracteriza. Podemos decir que un conjunto es convexo, si escogidos cualesquiera dos puntos del conjunto, el segmento que los une está, todo él, incluido en el conjunto. Y remarcamos que esa condición debe cumplirse para todo par de puntos del conjunto. Es decir, no es válido que se cumpla para algunos y no se cumpla para otros. Si eso fuera así, diríamos que el conjunto es no convexo.

A continuación, se presentan ejemplos de conjuntos convexos y conjuntos no convexos.

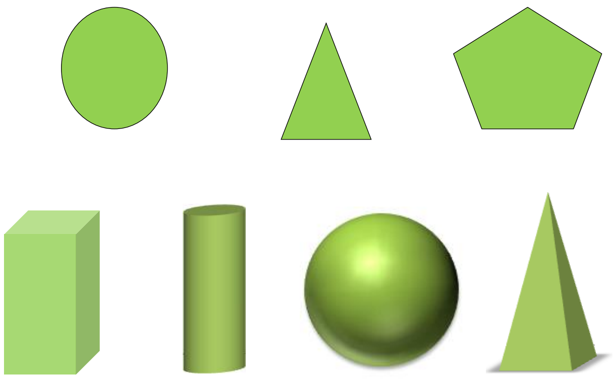


Figura A.1: Ejemplos de conjuntos convexos.

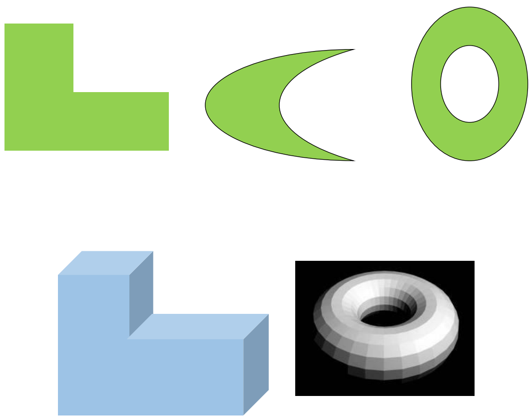


Figura A.2: Ejemplos de conjuntos no convexos.

Una vez que tenemos una idea gráfica e intuitiva de cuándo un conjunto es convexo y cuándo no lo es, vamos a definir un conjunto convexo de una manera formal. Para ello, debemos recordar el concepto de recta y segmento en $\mathbb{R}^n$.

Definición A.1: Recta y segmento

Dados dos puntos, $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ de $\mathbb{R}^n$, la ecuación de la recta (r) que pasa por dichos puntos se define como el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen:

$$r: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \lambda(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \quad \text{con } \lambda \ \in \ \mathbb{R}.$$

En particular, se define el segmento que une los puntos $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ de $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen:

$$r: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \lambda(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1) \quad \text{con } \lambda \ \in \ [0, 1] \tag{A.1}$$

Una vez recordados estos preliminares, pasamos a dar el concepto de conjunto convexo:

Definición A.2: Conjunto convexo

Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, si dados dos puntos cualesquiera de K, el segmento cerrado que los une está completamente contenido en K. Es decir, $K \subset \mathbb{R}^n$, es convexo si para todos $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in K$ y $\lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, se verifica que:

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda \mathbf{x}^2 \in K.$$

Veamos, a continuación algunos ejemplos de conjuntos convexos de gran importancia:

Definición A.3: Semiespacio

Sean $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Al conjunto $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{c}^t\mathbf{x} < \alpha\}$ se le denomina semiespacio abierto en $\mathbb{R}^n$ y al conjunto $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{c}^t\mathbf{x} \leq \alpha\}$ semiespacio cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo A.1: Semiespacio

Dado el siguiente conjunto cerrado, C $= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 + x_2 \leq 4\}$. Dibuja dicho conjunto y analiza, gráficamente, si es o no convexo.

Solución: En $\mathbb{R}^2$, la gráfica del semiespacio cerrado definido queda como sigue:

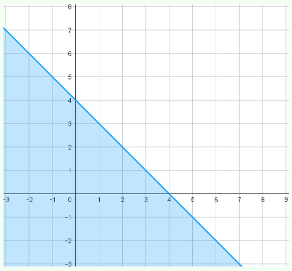


Figura A.3: Ejemplo semiespacio cerrado.

donde la parte sombreada es dicho semiespacio. Para comprobarlo, elijamos un punto perteneciente al mismo, por ejemplo el (0,0). Obsérvese que dicho punto verifica:

$$x_1 + x_2 \leq 4, \text{ pues } 0 + 0 \leq 4.$$

Luego el semiespacio es realmente el antes señalado.

En este ejemplo, los puntos de la recta $x_1 + x_2 = 4$ pertenecen al semiespacio; sin embargo, si el conjunto definido hubiese sido:

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_1 + x_2 < 4\},$$

dicha recta no pertenecería al mismo.

Por otro lado, para estudiar gráficamente su convexidad (ver Figura A.4) se toman dos puntos cualesquiera del semiespacio, en este caso: x^1 y $x^2 \in C$, y se observa cómo el segmento que los une está completamente contenido en el conjunto.

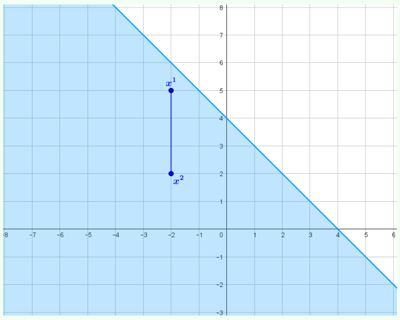


Figura A.4: Convexidad del semiespacio cerrado.

Teorema A.1: Todo semiespacio es un conjunto convexo

Todo semiespacio de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

Demostración

Para ver que un conjunto es convexo, deberemos probar que, si escogemos dos puntos cualesquiera del conjunto, el segmento que los une está totalmente incluido en el conjunto. Escojamos dos puntos cualesquiera, y denotémoslos por $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$. Como estos puntos pertenecen al conjunto, es decir, al semiespacio, deberán cumplir la condición de pertenencia al mismo, es decir, $\mathbf{c}^t\mathbf{x}^1 \leq \alpha$ y $\mathbf{c}^t\mathbf{x}^2 \leq \alpha$. Probemos ahora que cualquier punto del segmento que une a $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ está en el conjunto, el semiespacio.
Cualquier punto del segmento que une a $\mathbf{x}^1$ y $\mathbf{x}^2$ es de la forma $\mathbf{x} = (1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2$ y pertenecerá al semiespacio si el resultado de multiplicar escalarmente $\mathbf{c}^t$ por $\mathbf{x}$ es menor o igual que α, es decir:

$$\mathbf{c}^t((1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2) \leq \alpha.$$

Para demostrar dicha desigualdad, comenzamos por el lado izquierdo, y apoyándonos en las hipótesis, intentamos llegar al lado derecho de la desigualdad:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^t((1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2) = \mathbf{c}^t(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + c^t\lambda\mathbf{x}^2 = (1-\lambda)\mathbf{c}^t\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{c}^t\mathbf{x}^2 \leq \\ \leq (1-\lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.\end{aligned}$$

Y por tanto, queda demostrado el teorema.

Definición A.4: Hiperplano

Sean $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c} \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Al conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{c}^t\mathbf{x} = \alpha\}$ se le denomina hiperplano en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^2$ a un hiperplano se le denomina recta y tiene, según la definición dada, la forma:

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha,$$

mientras que el hiperplano en $\mathbb{R}^3$ será:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \alpha,$$

y se le denomina plano.

Teorema A.2: Todo hiperplano es un conjunto convexo

Todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.

Vemos a continuación un teorema que nos permite construir conjuntos convexos, a partir de otros conjuntos también convexos, y a la vez nos permite asegurar que determinados conjuntos de $\mathbb{R}^n$ son convexos.

Teorema A.3: Intersección de Conjuntos Convexos

La intersección, finita o infinita, de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Demostración

Sea K la intersección de los conjuntos convexos K_i:

$$K = \bigcap_{i \in I} K_i.$$

Sean $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ puntos de K. Como K la intersección de los conjuntos K_i, los puntos $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ pertenecen a todos y cada uno de los conjuntos K_i, y al ser cada K_i convexo, tenemos:

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \in K_i, \quad \text{para cada } i \in I.$$

Por tanto,

$$(1-\lambda)\mathbf{x}^1 + \lambda\mathbf{x}^2 \ \in K,$$

y en consecuencia K es convexo.

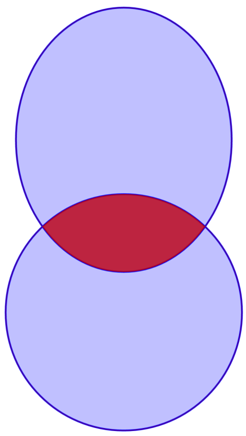


Figura A.5: Intersección de conjuntos convexos

Una vez presentadas las definiciones y algunas propiedades de los conjuntos convexos, hemos podido comprobar que existen una serie de procedimientos que nos permiten determinar si determinadas operaciones con ellos producen conjuntos convexos. No obstante, necesitaríamos conocer si los conjuntos de partida son convexos o no, y eso puede ser algo más complicado en situaciones simples. Por ejemplo:

$$C = \{P = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 4\},$$

sabemos que es un conjunto convexo a través de su representación gráfica, pero la demostración analítica es algo más compleja y se deja como ejercicio. En consecuencia, si para ese caso sencillo el tema no es fácil, qué ocurriría en otros. Es por ello por lo que será necesario obtener algunas propiedades que faciliten esa labor. Esas propiedades se obtendrán a través de propiedades de las funciones cóncavas y convexas que veremos en el próximo epígrafe.

A.0.2. Funciones cóncavas y convexas

En este subapartado desarrollaremos los conceptos de funciones cóncavas y funciones convexas, que tendrá especial importancia, pues son propiedades deseables de las funciones objetivo del problema de optimización, además de facilitarnos la comprobación de si un determinado conjunto, definido por desigualdades, es convexo.

En lo que sigue, daremos dos definiciones de función convexa (las de función cóncava se obtendrán fácilmente a partir de las anteriores), que demostraremos que son equivalentes. En ambos casos nos basaremos en ideas geométricas intuitivas en el caso de funciones de una variable, para poder extender formalmente esos conceptos.

Definición A.5: Función convexa de manera analítica

Si D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y f una función escalar definida sobre D, diremos que f es convexa en D si para cualquier par de puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, se verifica:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2), \quad \text{para cualquier} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

La idea gráfica que nos aporta esta definición es que, dados dos puntos de D, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, el segmento que une a los puntos $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ y $(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2))$ estará siempre por encima de la gráfica de la función, como se puede observar en la Figura A.6.

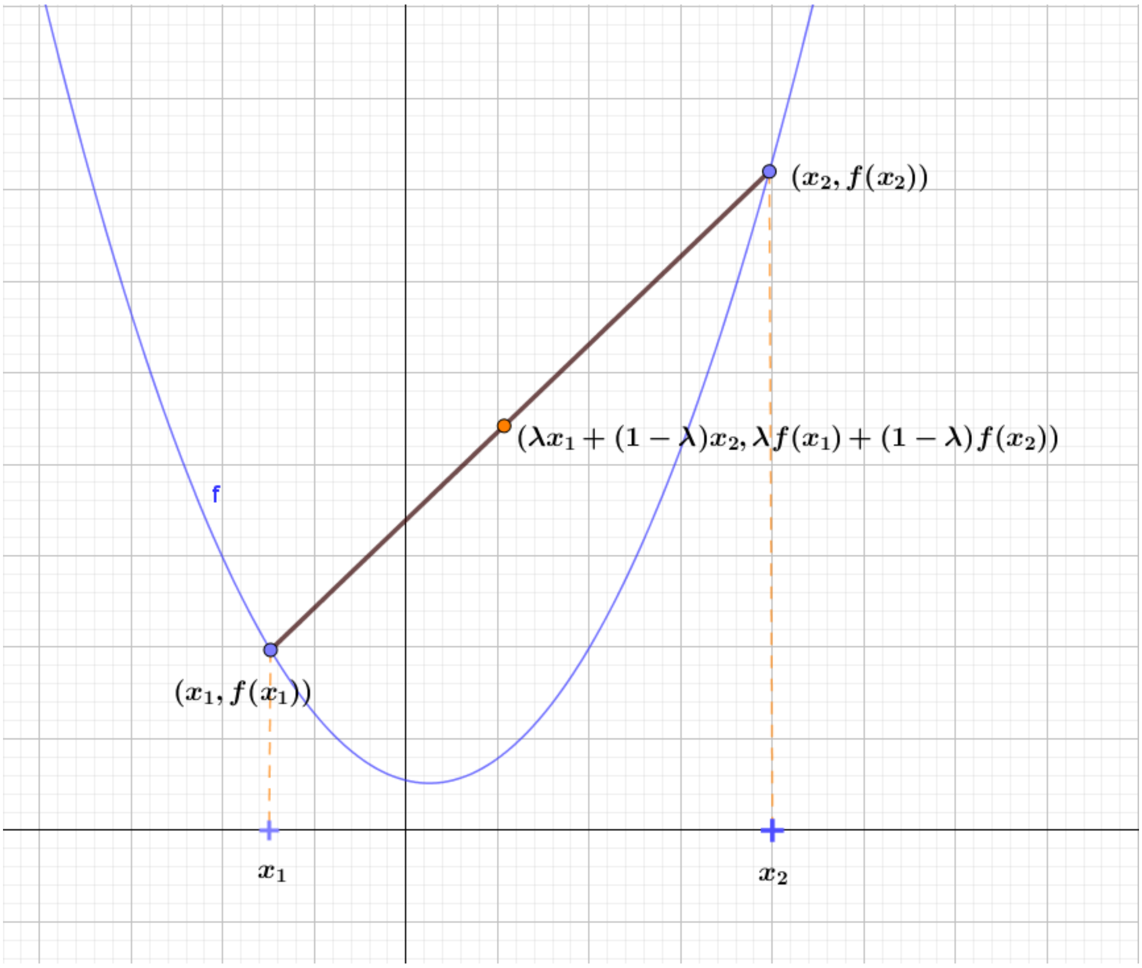


Figura A.6: Idea gráfica de función convexa

La desigualdad de la definición puede satisfacerse en sentido estricto, en cuyo caso diremos que f es estrictamente convexa; o bien, en sentido amplio, denominándose en este caso a f como función convexa.

A veces, sólo podremos comprobar la propiedad de función convexa para determinados puntos o proximidades de un determinado punto, y no para el conjunto D completo. Por ello, damos la siguiente definición:

Definición A.6: Función convexa en el entorno de un punto

Si D es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y f una función escalar definida sobre D, diremos que f es convexa en $\mathbf{x}_0 \in D$ si, y sólo si, existe un entorno de $\mathbf{x}_0$, $E(\mathbf{x}_0)$, tal que, para cualquier $\mathbf{x} \in E(\mathbf{x}_0)$, se verifique:

$$f(\lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{x}) \leq \lambda f(\mathbf{x}_0) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}), \quad \text{para cualquier} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

El siguiente teorema demuestra la equivalencia entre las dos definiciones dadas de función convexa definida sobre un conjunto convexo.

Definición A.7: Función cóncava

Dada una función f definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$, diremos que es cóncava en $\mathbf{x}_0 \in D$, si la función $(-f)$ es convexa en dicho punto.

Análogamente, si $(-f)$ es convexa sobre todo D, diremos que f es cóncava sobre D.

A partir de estas definiciones, como puede observar el lector, hemos trasladado el problema del estudio de funciones cóncavas al de funciones convexas; no obstante, se puede seguir un camino análogo al realizado anteriormente para las funciones convexas. De hecho, podemos dar una caracterización de función cóncava.

Teorema A.4: Función cóncava en un conjunto

Una función f es cóncava sobre un conjunto convexo D si, y solamente si:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

para cualesquiera $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in D$.

Demostración

Sea f una función cóncava sobre D; entonces $(-f)$ es convexa sobre D. Entonces si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ pertenecen a D, por ser $(-f)$ convexa:

$$(-f)(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda(-f)(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)(-f)(\mathbf{x}_2),$$

lo que implica, por definición de función opuesta, que

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \geq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2).$$

La idea gráfica de esta definición, análogamente al caso de funciones convexas, es que el segmento entre dos puntos de la gráfica de la función está por debajo de los puntos intermedios de la gráfica correspondiente. Un ejemplo gráfico se puede ver en la Figura A.7.

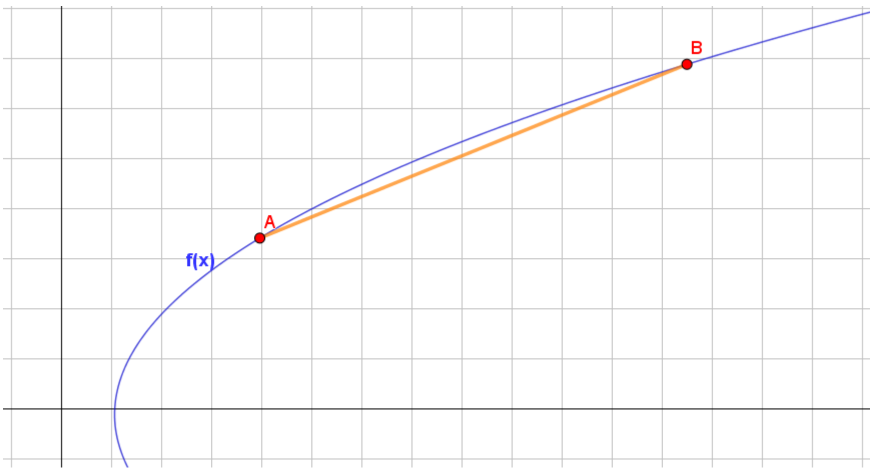


Figura A.7: Idea gráfica de función cóncava.

Un nuevo ejemplo gráfico de función con tramos convexos y cóncavos es el siguiente:

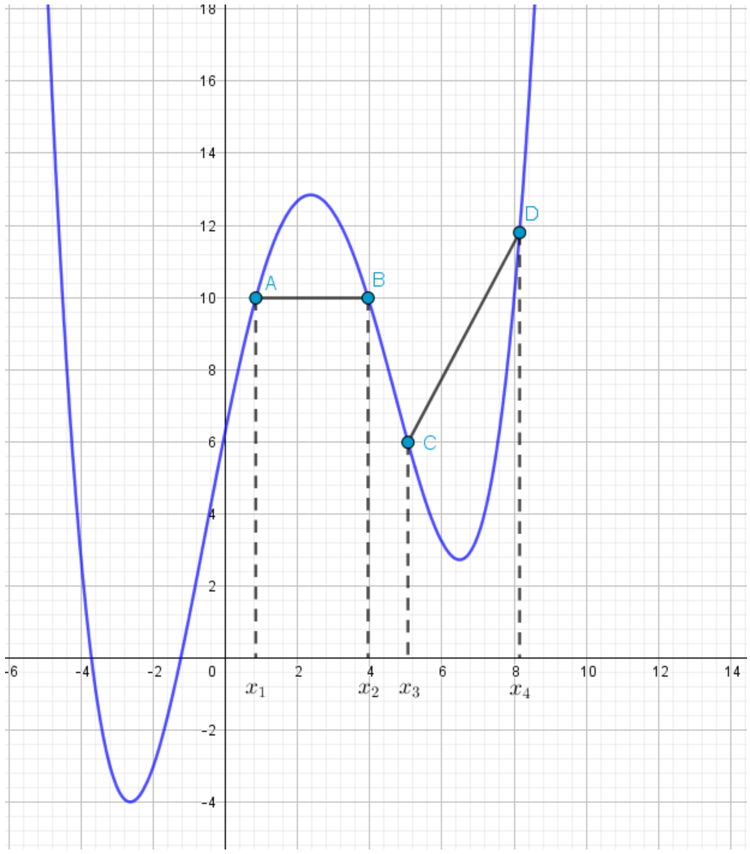


Figura A.8: Función con tramos convexos y cóncavos.

Entre x_1 y x_2, vemos que la función es cóncava, mientras que entre x_3 y x_4 es convexa. El punto donde cambiaría de cóncava a convexa es el ya conocido como punto de inflexión para funciones de una variable. El primer teorema caracteriza las funciones de clase uno convexas, pudiendo el lector expresar y demostrar un teorema similar para funciones cóncavas. La idea gráfica que se plasma en este teorema es que, dada una función convexa y escogido cualquier punto del campo de definición de la función, la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto siempre se encuentra por debajo de la gráfica, como puede verse en la siguiente figura:

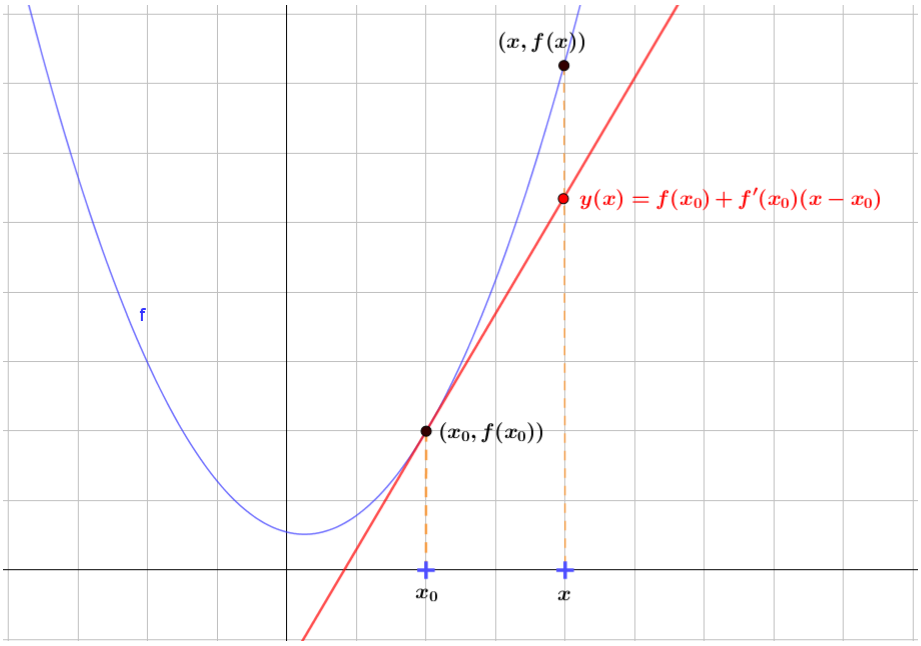


Figura A.9: Función convexa de clase 1.

donde se observa cómo la recta tangente al punto $(x_0, f(x_0))$ queda bajo de la curva, en formulación matemática se traduce como:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \le f(x)$$

Teorema A.5: Teorema de función de clase uno convexa

Sea D un conjunto convexo. Una función de clase uno f definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$ es convexa si, y solamente si:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \nabla f(\mathbf{x}_2) \le f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2),$$

para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$.

Demostración

- Condición necesaria:

Si f es convexa, por definición tenemos:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \text{con} \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

pero como:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

obtenemos que:

$$f(\mathbf{x}_2 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \textit{con} \quad \lambda \ne 0.$$

Operando llegamos a:

$$\frac{f(\mathbf{x}_2 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) - f(\mathbf{x}_2)}{\lambda} \le f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2).$$

Tomando límites cuando hacemos tender hacia 0, y aplicando Taylor, llegamos a:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_2) + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \nabla f(\mathbf{x}_2) + \lambda^2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t H f(\xi)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_2)}{\lambda} \le f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2),$$

siendo ξ un valor entre $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

De ahí, concluimos por último que:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \nabla f(\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2).$$

- Condición suficiente:

Supongamos que ahora se verifica:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \nabla f(\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2),$$

y tendremos que demostrar que f es convexa en D.
Elijamos dos puntos de D, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, aplicando la desigualdad de partida a los puntos:

$$\mathbf{x}_1 \quad y \quad \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2,$$

y posteriormente a los puntos:

$$\mathbf{x}_2 \quad y \quad \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2,$$

obtenemos respectivamente:

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{x}_1 - (1-\lambda)\mathbf{x}_2)^t \nabla f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2),\\ (\mathbf{x}_2 - \lambda\mathbf{x}_1 - (1-\lambda)\mathbf{x}_2)^t \nabla f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_2) - f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2).\end{aligned}$$

Operando llegamos a:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \nabla f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) - f(\lambda\mathbf{x}_1 - (1-\lambda)\mathbf{x}_2),\\ \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t \nabla f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_2) - f(\lambda\mathbf{x}_1 - (1-\lambda)\mathbf{x}_2).\end{aligned}$$

Multiplicando la primera desigualdad por λ y la segunda por $(1-\lambda)$ y sumando:

$$0 \leq \lambda[f(\mathbf{x}_1) - f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2)] + (1-\lambda)[f(\mathbf{x}_2) - f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2)].$$

Es decir:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2).$$

Para funciones cóncavas podemos enunciar el teorema equivalente, cuya demostración se deja para el lector.

Teorema A.6: Teorema de función de clase uno concáva

Sea D un conjunto convexo. Una función de clase uno, f, definida sobre $D \subset \mathbb{R}^n$ es cóncava si, y solamente si:

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^t \bigtriangledown f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2),$$

para cualesquiera $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$.

A partir de estos teoremas, hemos podido ver que ambas definiciones son equivalentes siempre que la función sea de clase uno. No obstante, es difícil, con esas caracterizaciones, comprobar si una función es convexa o no, o si es cóncava o no. De todas formas, son válidas para ciertas demostraciones y sobre todo, como base para las siguientes caracterizaciones, donde sí serán muy útiles. Veamos ahora una caracterización de las funciones convexas de clase dos, mediante la matriz hessiana.

Teorema A.7: Teorema de función de clase dos convexa

Sea f una función de clase 2 en un conjunto abierto y convexo D. Entonces f es convexa en D si, y sólo si, la hessiana de f es una matriz al menos semidefinida positiva en todo D.

Demostración

- Condición necesaria:

Hemos de probar que si f es convexa entonces la matriz hessiana está asociada con una forma cuadrática semidefinida (definida) positiva. Al ser D abierto, existirá un número real α tal que si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ pertenecen a D, entonces $\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$ pertenece a D para valores de α suficientemente pequeños, y por ser f convexa, podemos aplicar el teorema anterior a los puntos $\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_1$:

$$f(\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) \leq (\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t \nabla f(\mathbf{x}_1),$$

es decir:

$$f(\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) - \alpha\mathbf{x}_2^t \nabla f(\mathbf{x}_1) \geq 0,$$

y por ser f dos veces diferenciable, al aplicar el teorema de Taylor obtenemos:

$$f(\mathbf{x}_1 + \alpha\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + \alpha\mathbf{x}_2^t \nabla f(\mathbf{x}_1) + \frac{\alpha^2\mathbf{x}_2^t Hf(\xi)\mathbf{x}_2}{2},$$

donde $\xi \in E(\mathbf{x}_1)$.

Sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$0 \leq \frac{\alpha^2\mathbf{x}_2^t Hf(\xi)\mathbf{x}_2}{2},$$

y concluimos que:

$$\mathbf{x}_2^t Hf(\xi)\mathbf{x}_2 \geq 0,$$

es decir, la matriz hessiana es, al menos, semidefinida positiva en D.

- Condición suficiente:

Recíprocamente, recorriendo el camino seguido para la anterior demostración, obtendríamos que si Hf es al menos semidefinida positiva sobre D, entonces f es convexa. Si la desigualdad fuese estricta, es decir, la matriz Hf fuese definida positiva en todo D, la función sería estrictamente convexa.

A partir del teorema anterior, se pueden obtener una serie de resultados útiles. Dada una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

1. Si la función f es lineal, entonces su matriz hessiana asociada es la matriz nula siempre, por lo que f se considera, por convenio, cóncava y convexa.

2. Si f no es lineal, es preciso determinar la hessiana de f, (Hf) y clasificarla. En este caso, se distinguen dos escenarios:

   <u>Si la matriz hessiana es numérica:</u>

Signo de Hf	¿cómo es f?
Definida positiva (D^+)	estrictamente convexa en D
Definida negativa (D^-)	estrictamente cóncava en D
Indefinida (I)	no es ni cóncava ni convexa en D
Semidefinida positiva (SD^+)	convexa en D
Semidefinida negativa (SD^-)	cóncava en D

Tabla A.1: Clasificación de la hessiana numérica

Así, dada una hessiana numérica se puede deducir de la Tabla A.1 que la función f es convexa si la matriz hessiana es positiva, bien definida, en cuyo caso sería de forma estricta, o semidefinida. Por el contrario, la función f es cóncava si la matriz hessiana es negativa. En la misma línea que en el caso anterior, será estrictamente cóncava si es definida negativa y cóncava si es semidefinida negativa.

Si la matriz hessiana es funcional: hay que evaluar la hessiana en el punto $\mathbf{x}_0$.

<table>
<tr><td colspan="3">Signo de $Hf(\mathbf{x}_0)$</td><td>¿cómo es f?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Definida positiva (D^+)</td><td>estrictamente convexa en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Definida negativa (D^-)</td><td>estrictamente cóncava en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Indefinida (I)</td><td>no es ni cóncava ni convexa en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Semidefinida positiva (SD^+)</td><td rowspan="2">Análisis del signo en un entorno $\mathbf{x}_0$</td><td>mantiene el signo</td><td>convexa en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td>cambia el signo</td><td>ni cóncava ni convexa en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Semidefinida negativa (SD^-)</td><td rowspan="2">Análisis del signo en un entorno de $\mathbf{x}_0$</td><td>mantiene el signo</td><td>cóncava en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
<tr><td>cambia el signo</td><td>ni cóncava ni convexa en $\mathbf{x}_0$</td></tr>
</table>

Tabla A.2: Clasificación de la hessiana funcional

De esta forma, si la matriz hessiana resultante es funcional, debemos, en primer lugar evaluarla en el punto $\mathbf{x}_0$, y procedemos como si estuviésemos ante una hessiana numérica, salvo en el caso de que resulte semidefinida. En este caso, debemos contrastar si mantiene el signo en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

Ejemplo A.2: Estudio de la concavidad/convexidad de una función

Una empresa produce un bien en cantidad q. En su proceso productivo, utiliza capital y mano de obra en cantidades K y L, respectivamente. La función de producción viene dada por la siguiente expresión:

$$q = q(K, L) = K^{0,65} L^{0,35}.$$

Determine si la función q es cóncava.

Solución

Para que la función de producción sea cóncava es necesario y suficiente que la hessiana de la función represente una forma cuadrática al menos semidefinida negativa. Así, si calculamos la hessiana de dicha función tenemos:

$$Hq(K,L) = \begin{pmatrix} -0{,}65 * 0{,}35K^{-1{,}35}L^{0{,}35} & 0{,}65 * 0{,}35K^{-0{,}35}L^{-0{,}65} \\ \\ 0{,}65 * 0{,}35K^{-0{,}35}L^{-0{,}65} & -0{,}65 * 0{,}35K^{0{,}65}L^{-1{,}65} \end{pmatrix}$$

$$= 0{,}65 * 0{,}35 \begin{pmatrix} -K^{-1{,}35}L^{0{,}35} & K^{-0{,}35}L^{-0{,}65} \\ \\ K^{-0{,}35}L^{-0{,}65} & -K^{0{,}65}L^{-1{,}65} \end{pmatrix} = 0{,}65 * 0{,}35 \begin{pmatrix} -\frac{L^{0{,}35}}{K^{1{,}35}} & \frac{1}{K^{0{,}35}L^{0{,}65}} \\ \\ \frac{1}{K^{0{,}35}L^{0{,}65}} & -\frac{K^{0{,}65}}{L^{1{,}65}} \end{pmatrix},$$

y como K y L son positivos, el primer menor principal es negativo mientras que el segundo menor principal sería el determinante que viene dado por:

$$0{,}65 * 0{,}35 * (\frac{L^{0{,}35}}{K^{1{,}35}} * \frac{K^{0{,}65}}{L^{1{,}65}} - \frac{1}{K^{0{,}70}L^{1{,}30}}) = 0,$$

y haciendo la transformación fila-columna obtendríamos el mismo resultado, con lo que podemos concluir que la forma cuadrática es semidefinida negativa en cualquier punto, con lo cual, aunque se trate de una matriz funcional, podemos decir que la función es cóncava en cualquier punto del dominio.

A partir de los resultados anteriores, que nos facilitan determinar si una función es convexa o cóncava en un gran número de casos, también podemos volver a una cuestión que estaba pendiente: cómo determinar si un conjunto, expresado por desigualdades, es convexo.

Teorema A.8: Convexidad de conjuntos definidos por desigualdades.

Dado el conjunto $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / f(\mathbf{x}) \le \alpha, \ g(\mathbf{x}) \ge \beta\}$, si se verifica que la función $f(\mathbf{x})$ es convexa y $g(\mathbf{x})$ cóncava, entonces el conjunto es convexo.

Demostración

Sea:

$$X_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / f(\mathbf{x}) \le \alpha\}.$$

Elijamos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in X_1$ y comprobemos que:

$$\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in X_1,$$

o, equivalentemente:

$$f((\lambda\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \alpha.$$

Como f es una función convexa, tenemos por definición que:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}_2),$$

donde $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ pertenecen a X_1 y por tanto:

$$f(\mathbf{x}_1) \le \alpha \quad y \quad f(\mathbf{x}_2) \le \alpha.$$

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$f(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha,$$

es decir:

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ \in \ X_1.$$

De igual forma podríamos demostrar que:

$$X_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / g(\mathbf{x}) \geq \beta\},$$

es un conjunto convexo, y como $X = X_1 \cap X_2$ y la intersección de conjuntos convexos es convexo, tendríamos probada nuestra afirmación.

Ejemplo A.3: Estudio de la convexidad de un conjunto

¿Podemos afirmar que el conjunto X es un conjunto convexo? ¿Por qué?

$$\begin{gathered} X = \{(x,y,z) \ \in \mathbb{R}^3 \ /x^2 + 6y^2 + xy + yz + z^2 + 2xz \leq 7; \\ -x^2 - y^2 - 5z^2 \geq 4; \\ x - 3y + 4z \leq 8\}. \end{gathered}$$

Solución

El conjunto X se puede considerar como intersección de tres conjuntos, X_1, X_2 y X_3, definidos de la siguiente forma:

$$\begin{gathered} X_1 = \{(x,y,z) \ \in \mathbb{R}^3 \ /x^2 + 6y^2 + xy + yz + z^2 + 2xz \leq 7\} \\ X_2 = \{(x,y,z) \ \in \mathbb{R}^3 \ -x^2 - y^2 - 5z^2 \geq 4\} \\ X_3 = \{(x,y,z) \ \in \mathbb{R}^3 \ /x - 3y + 4z \leq 8\}. \end{gathered}$$

Teniendo en cuenta que la intersección arbitraria de conjuntos convexos es un conjunto convexo, veamos si los conjuntos, X_1, X_2 y X_3, lo son, ya que, en caso afirmativo, X también lo será.

Para estudiar la convexidad del conjunto X_1, hemos de determinar el signo de la matriz hessiana de la función $f(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + xy + yz + z^2 + 2xz$:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Clasifiquemos dicha matriz por el método de los menores principales:

$$D_1 = 2 > 0, \ D_2 = 23 > 0, \ D_3 = 0.$$

En principio, puede ser semidefinida positiva. Para poder asegurarlo, ha de comprobarse que este signo se mantiene bajo todas las transformaciones fila-columna. Si hacemos la transformación 1-3, la matriz que resulta es la misma que $Hf(x,y,z)$. Hacemos la transformación 1-2 y calculamos los menores principales:

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_1 = 12 > 0 \\ D_2 = 23 > 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Nos queda la transformación 2-3 y sus menores principales:

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D_1 = 2 > 0 \\ D_2 = 0 \\ D_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Por tanto, podemos asegurar que la matriz hessiana de la función es semidefinida positiva en todos sus puntos y que la función f es convexa en todo su dominio, por lo que al ser la inecuación que define el conjunto X_1 de menor o igual, podemos concluir que este conjunto es convexo.

Respecto a X_2, si llamamos $g(x, y, z) = -x^2 - y^2 - 5z^2$, hemos de realizar de nuevo el estudio de la convexidad o concavidad de dicha función a través del signo de su hessiana:

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Se trata de una matriz diagonal y, como ya sabemos, los elementos de la diagonal principal son sus valores propios, y al ser éstos menores que cero, la matriz es definida negativa y la función $g(x, y, z)$ es, por tanto, cóncava. Puesto que la inecuación que define al conjunto X_2 es de mayor o igual, podemos concluir que X_2 es un conjunto convexo.

Por último, el conjunto X_3 es, por definición, un conjunto convexo ya que se trata de un semiespacio.

En consecuencia, dado que X_1, X_2 y X_3 son conjuntos convexos, su intersección, el conjunto X, también lo será.

Apéndice B

Dualidad en Programación Matemática

El concepto de dualidad en Programación Matemática nace estrechamente ligado al de punto minimax. Así, dado nuestro problema original, recordemos la definición de punto minimax. Se trata de un par $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ que verifica:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \underset{D}{Max} \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Min} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Min} \underset{D}{Max} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

donde:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}].$$

Pues bien, vamos a denotar:

$$\mu(\mathbf{x}) = \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Min} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \qquad v(\boldsymbol{\lambda}) = \underset{D}{Max} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Vamos a ver ahora qué forma toma la función $\mu(\mathbf{x})$:

$$\mu(\mathbf{x}) = \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Min} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Min} \left\{ f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}] \right\} = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \ (\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}), \\ \infty & \text{si } \mathbf{g}(\mathbf{x}) > \mathbf{b} \ (\boldsymbol{\lambda} \to \infty). \end{cases}$$

Por tanto, la primera parte de la expresión del punto minimax, es decir,

$$\underset{D}{Max} \quad \mu(\mathbf{x}),$$

se puede expresar de forma equivalente como:

$$\begin{array}{c} Max\ f(\mathbf{x}) \\ s.a \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \end{array}$$

que es, precisamente, el problema de partida, que llamaremos a partir de ahora *Problema Primal* (PP).

Por otro lado, el segundo término de la igualdad del punto minimax se puede expresar como:

$$\underset{N}{Min} \quad v(\boldsymbol{\lambda}),$$

donde:

$$N = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+} / \exists \underset{D}{Max} \left\{ f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}] \right\} \right\}.$$

A este problema le llamaremos *Problema Dual* (PD). Pues bien, la dualidad consiste en que se dé o no la igualdad entre los valores óptimos de las soluciones de estos dos problemas (lo que sucede si existe el punto minimax). Los siguientes teoremas establecen bajo qué condiciones se tiene esta dualidad.

Teorema B.1: Dualidad débil

Para cualquier $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in D \times \mathbb{R}^{m+}$, *se verifica* $\mu(\mathbf{x}) \leq \upsilon(\boldsymbol{\lambda})$.

Como consecuencia de este teorema, podemos afirmar que siempre se da la relación:

$$\underset{D}{Max}\ \mu(\mathbf{x}) \leq \underset{N}{Min}\ \upsilon(\boldsymbol{\lambda}),$$

es decir, que el valor óptimo del problema primal es siempre menor o igual que el del dual. La pregunta que surge es cuándo se da la igualdad. En el caso en que no se dé, es decir, si la solución del primal es estrictamente menor que la del dual, se dice que se produce un *gap de dualidad*. El siguiente teorema afirma que, bajo condiciones de convexidad y si se da una cualificación de restricciones, entonces se verifica la igualdad:

Teorema B.2: Dualidad fuerte

Supongamos que el conjunto D *es convexo, que la función* f *cóncava y que la función* $\mathbf{g}$ *es convexa. Supongamos también que se satisface la cualificación de restricciones de Slater tipo 1 (ver Definición 2.4.1). Entonces, se verifica que:*

$$\underset{D}{Max}\ \mu(\mathbf{x}) = \underset{N}{Min}\ \upsilon(\boldsymbol{\lambda}).$$

Por lo tanto, bajo estas condiciones, los valores óptimos de los problemas primal y dual coinciden. La utilidad de este concepto consiste en que, en algunos problemas, dadas su estructura y la forma específica que toma el problema dual, puede ser más sencillo resolver este último, y obtener, a partir del él, la solución del primal.

Por último, señalemos que, si el problema original se formula para mínimo, tendremos que tomar la correspondiente función de Lagrange, es decir,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \lambda^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}],$$

y las funciones primal y dual toman ahora las formas:

$$\mu(\mathbf{x}) = \underset{\mathbb{R}^{m+}}{Max}\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \qquad \upsilon(\boldsymbol{\lambda}) = \underset{D}{Min}\ \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

respectivamente, siendo los respectivos problemas primal y dual:

$$\underset{D}{Min}\ \mu(\mathbf{x}) \quad y \quad \underset{N}{Max}\ \upsilon(\boldsymbol{\lambda}),$$

donde $N = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{m+} / \exists \underset{D}{Min} \left\{f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^t[\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}]\right\}\right\}$.

Nuevamente, el problema primal coincide con el problema de mínimo de partida, se da el teorema de dualidad débil en cualquier caso, y el de dualidad fuerte si suponemos que la función f es convexa en lugar de ser cóncava.

B.0.1. Propiedades del problema dual asociado al problema lineal

Seguidamente, mostraremos una serie de propiedades del problema dual asociado al problema lineal. Para ello, comencemos recordando los elementos vistos en la lección anterior. Dado un problema de programación no lineal,

$$\begin{cases} Max & f(\mathbf{x}) \\ s.a & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in D, \end{cases}$$

su lagrangiana toma la forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b}).$$

El problema primal se define como:

$$Max_{\mathbf{x}} Min_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

mientras que su problema dual sería:

$$Min_{\boldsymbol{\lambda}} Max_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}).$$

Bajo condiciones de convexidad, se verifica que:

$$Max_{\mathbf{x}} Min_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = Min_{\boldsymbol{\lambda}} Max_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}).$$

A partir de estas ideas, vamos a determinar el problema dual asociado al problema lineal. Por simplicidad, en las expresiones no exponemos explícitamente las condiciones de no negatividad de las variables de decisión. El problema primal en este caso es el siguiente:

$$\begin{cases} Max & \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ s.a & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{cases}$$

La función Lagrangiana toma en este caso la forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^t(A\mathbf{x} - \mathbf{b}),$$

definida en $\mathbb{R}^{n+} \times \mathbb{R}^{m+}$.

Dado que en programación lineal se verifican las condiciones de convexidad, podemos definir el problema dual del anterior como:

$$\begin{cases} Min & \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^t(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ s.a & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Calculando la derivada del primer bloque de restricciones, obtenemos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}^t - \boldsymbol{\lambda}^t A = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{c}^t = \boldsymbol{\lambda}^t A.$$

Por lo tanto, la función objetivo del problema dual es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}^t(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \left(\mathbf{c}^t - \boldsymbol{\lambda}^t A\right)\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{b},$$

ya que el primer sumando de la lagrangiana es nulo. Así pues, el problema dual es:

$$\boxed{\begin{cases} Min & \boldsymbol{\lambda}^t\mathbf{b} \\ s.a & \boldsymbol{\lambda}^t A = \mathbf{c}^t \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. \end{cases}}$$

Obsérvese que, a diferencia de la programación no lineal, en los problemas duales de programación lineal no aparecen las variables del primal, ni viceversa. Además también se han podido observar las condiciones a partir de las cuales podemos obtener los multiplicadores de Lagrange. Finalmente, señalemos que se pueden obtener los problemas duales asociados a diversas expresiones de nuestros problemas lineales (condiciones de no negatividad, desigualdades de distinto tipo o igualdades en algunas restricciones, etc.) de manera análoga a lo aquí desarrollado.

Bibliografía

Arévalo, M. T., Camacho, E., Mármol, A. M. & Monroy, L. (2005). *Programación Matemática para la Economía.* Delta.

Balbas, A. & Gil, J. A. (1987). *Programación Matemática.* AC.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons.

Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear Programming.* Athena Scientific.

Borrell, J. (1992). *La república de Taxonia. Ejercicios de matemáticas aplicadas a la economía.* Pirámide.

Caballero, R., Gómez, T., González, M., Muñoz, M., Rey, L. & Ruiz, F. (1997). *Programación Matemática para Economistas.* Universidad de Málaga.

Calderón, S. & González Pareja, A. (1995). *Programación Matemática.* Universidad de Málaga.

Canovas, M. J., Huertas, V. & Sempere, M. (2011). *Optimización matemática aplicada. Enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB.* ECU-Club Universitario.

Chiang, A. & Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática.* McGraw-Hill Interamericana de España S.L.

Fernández Lechón, R. & Castrodeza Chamorro, C. (1989). *Programación Lineal.* Ariel.

Fletcher, R. (2000). *Practical Methods of Optimization.* John Wiley; Sons.

García, R. B., Álvaro, P. S. & Tena, E. C. (1991). *Optimización matemática: teoría, ejemplos y contraejemplos.* Espasa-Calpe.

García, R. B., Tena, E. C. & Álvaro, P. S. (2000). *Optimización cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía.* Prentice Hall.

Gass, S. I. (1985). *Linear Programming. Methods and Applications.* Thomson.

González, J. J. S. (2001). *Programación Matemática.* Díaz de Santos.

Guerrero Casas, F. M. (1994). *Curso de optimización: Programación Matemática.* Ariel.

Hillier, F. S. & Lieberman, G. J. (2014). *Fundamentos de la Investigación de Operaciones.* McGraw-Hill Interamericana.

Intriligator, M. D. (1973). *Optimización matemática y teoría económica.* Prentice-Hall Internacional.

Lancaster, K. (1972). *Economía Matemática.* Bosch.

Luenberger, D. G. (1989). *Programación Lineal y No Lineal.* Addison-Wesley Iberoamericana.

Madden, P. & Bou García, L. (1987). *Concavidad y optimización en microeconomía.* Alianza.

Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear programming.* McGraw-Hill.

Mathur, K. & Solow, D. (1996). *Investigación de las operaciones: el arte de la toma de decisiones.* Prentice Hall Hispanoamericana.

Prawda, J. (2004). *Métodos y modelos de investigación de operaciones.* Limusa.

Ríos Insúa, S. (1996). *Investigación Operativa: Programación Lineal y Aplicaciones.* Centro de Estudios Ramón Areces.

Ríos Insúa, S., Bielza Lozoya, C. & Mateos Caballero, A. (2002). *Fundamentos de los sistemas de ayuda a la decisión.* RA-MA.

Ríos Insúa, S., Mateos, A., Bielza, C. & Jiménez, A. (2004). *Investigación Operativa: Modelos Determinísticos y Estocásticos.* Centro de Estudios Ramón Areces S.A., Madrid.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex Analysis.* Princeton University Press.

Romero, C. (1993). *Teoría de la decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones.* Allianza.

Sala Garrido, R. & Mocholí Arce, M. (1999). *Decisiones de Optimización.* Tirant Lo Blanch.

Samuelson, P. A. (1981). *Curso de economía moderna.* Aguilar.

Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones*. Pearson.
Varian, H. R. (2015). *Microeconomía intermedia: un enfoque actual*. Bosh.
Vegara, J. M. (1975). *Programación matemática y cálculo económico: Teoría y aplicaciones*. Vicens-Vives.