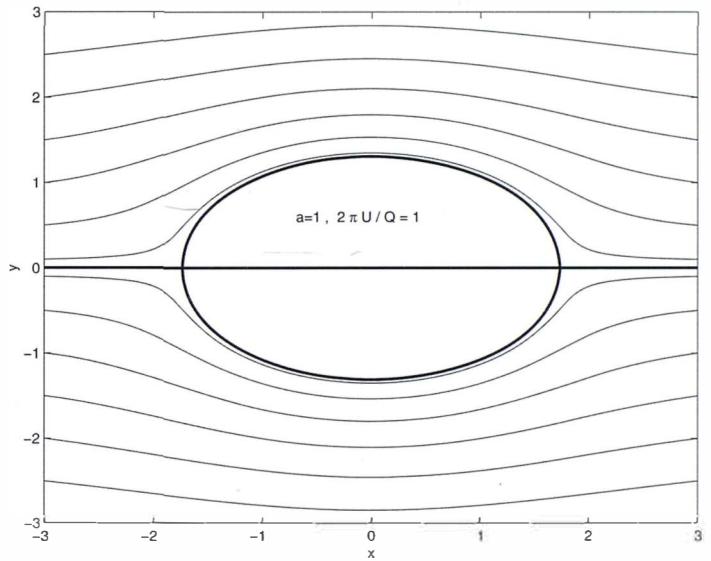


RAMÓN FERNÁNDEZ FERIA

MECÁNICA DE FLUIDOS



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

RAMÓN FERNÁNDEZ FERIA

MECÁNICA DE FLUIDOS

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

Segunda edición, diciembre 2005

© Ramón Fernández Feria
© Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico
de la Universidad de Málaga

Imprime: Imagraf Impresores, S.A. Tel.: 952 32 85 97

ISBN: 84-7496-897-6

Depósito Legal: MA-1.816/2005

Diseño de la colección: J.M. Mercado

Este libro es una introducción a la Mecánica de Fluidos, principalmente enfocada a los estudiantes de Ingeniería. El contenido está pensado para que sea cubierto durante dos cursos: uno más básico, donde se introducen los fundamentos y se estudian las principales aplicaciones ingenieriles de la Mecánica de Fluidos (con la importante excepción de las Máquinas Hidráulicas, que no se consideran aquí porque suele constituir un curso aparte en algunas ramas de la Ingeniería, existiendo muy buenos textos en español), y otro más avanzado donde, el alumno interesado, puede atisbar otros aspectos interesantes de la Mecánica de Fluidos. La bibliografía utilizada se encuentra especificada al final de cada lección y, toda reunida, en la lista bibliográfica final. Aunque se han utilizado muchas referencias originales, sólo se citan recopilaciones y libros de texto donde el material es mucho más accesible a aquellos alumnos que quieran profundizar sobre los temas tratados. Además de estas referencias, para algunos temas se han tomado como base de partida los excelentes apuntes de Mecánica de Fluidos de A. Barrero (E.T.S.I. Industriales, Universidad de Sevilla, 1991) y, para algunos otros, los no menos excelentes de B.-T. Chu (Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Yale, 1986). A ambos les estoy profundamente agradecido por el conocimiento que me han transmitido. También quiero expresar mi gratitud y cariño a mi esposa, Aurora, que con paciencia y eficacia pasó al ordenador gran parte de la primera versión de estos apuntes, que vieron la luz en 1993. Mi agradecimiento también a todos los alumnos que desde entonces han pasado por mis clases, que no sólo han corregido muchas erratas, sino que con sus comentarios han contribuido a que el texto haya ido mejorando con los años. Por último, mi gratitud a Joaquín Ortega Casanova, que también me ha ayudado en la edición del libro.

Málaga, 2001.

En la presente reimpresión se han corregido algunas erratas y se han actualizado unas pocas referencias. Mi agradecimiento a Carlos del Pino, Luis Parras y Patricio Bohórquez por haber contribuido a estas correcciones.

Málaga, 2005.

Índice general

Índice general	7
I INTRODUCCIÓN	17
1. Algunas nociones matemáticas preliminares	19
1.1. Coordenadas curvilíneas ortogonales	19
1.1.1. Coordenadas cilíndricas y esféricas	21
1.2. Operaciones con el operador ∇	24
1.3. Teoremas integrales	26
2. El fluido como medio continuo	29
2.1. Sólidos, líquidos, gases	29
2.2. La hipótesis de medio continuo	32
II CINEMÁTICA	37
3. Descripción del campo fluido	39
3.1. Descripción Lagrangiana y Euleriana	39
3.2. Trayectorias	40
3.3. Líneas de corriente	40
3.4. Traza	41
3.5. Derivada sustancial. Aceleración	42
3.6. Circulación. Vorticidad. Flujos irrotacionales y solenoidales	43
4. Análisis del movimiento en el entorno de un punto	47
4.1. Significado del tensor gradiente de velocidades $\nabla\vec{v}$	47
4.2. Movimiento relativo de un elemento de volumen de forma arbitraria	48

4.3. Ejemplo: Deformación de una superficie esférica	52
5. Transporte convectivo	55
5.1. Flujo convectivo a través de una superficie	55
5.2. Teorema de Transporte de Reynolds	56
III ECUACIONES GENERALES DE LOS FLUIDOS	59
6. Ecuación de continuidad	61
6.1. Principio de conservación de la masa	61
6.2. Función de corriente	63
6.3. Conservación de las especies químicas	65
6.4. Ley de Fick	67
7. Ecuación de cantidad de movimiento	71
7.1. Fuerzas de volumen y fuerzas de superficie	71
7.2. Tensor de esfuerzos	73
7.2.1. Simetría del tensor de esfuerzos	75
7.3. Ecuación de cantidad de movimiento	76
7.4. Fluidos Newtonianos. Ley de Stokes	78
7.5. Ecuación de Navier-Stokes	82
7.6. Ecuación de la vorticidad. Condición de barotropía	84
7.7. APÉNDICE A: Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos	88
7.8. APÉNDICE B: Ecuación de cantidad de movimiento en diferentes coordenadas	89
8. Ecuación de la energía	91
8.1. Algunos conceptos termodinámicos previos	91
8.1.1. Hipótesis de equilibrio termodinámico local	91
8.1.2. Variables termodinámicas	94
8.2. Ecuación de conservación de la energía	96
8.2.1. Vector flujo de calor	96
8.2.2. Ley de Fourier	98
8.3. Ecuación diferencial de las energías interna y mecánica	99
8.4. Ecuaciones de la entalpía y de la entropía	101
8.5. Ecuaciones de estado	102

9. Fundamentos microscópicos de las ecuaciones de los fluidos:	
gas monoatómico	105
9.1. Función de distribución de un gas monoatómico	105
9.2. Ecuación de estado de un gas monoatómico	108
9.3. Distribución de Maxwell	112
9.4. Ecuación que gobierna la función de distribución molecular . .	113
9.5. Ecuaciones de conservación	115
9.6. Efecto de las colisiones sobre la distribución de velocidades . .	118
9.7. Ecuaciones constitutivas	120
10. Algunos comentarios generales sobre	
las ecuaciones fluidomecánicas	129
10.1. Resumen de las ecuaciones de Navier-Stokes	129
10.1.1. Fluidos incompresibles con propiedades constantes . . .	130
10.2. Condiciones para que el campo de velocidades sea aproximadamente solenoidal	131
10.3. Condiciones iniciales y de contorno	137
10.4. Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones	140
10.5. Métodos de estudio de los problemas fluidomecánicos	143
10.5.1. Métodos experimentales	143
10.5.2. Modelos simplificados	144
10.5.3. Métodos numéricos	146
11. Análisis dimensional y semejanza física	149
11.1. Introducción	149
11.2. Parámetros adimensionales de la Mecánica de Fluidos	150
11.3. Semejanza física	157
11.4. Teorema II de Buckingham	158
11.5. Ejemplos	160
11.5.1. Alcance de un proyectil puntual	160
11.5.2. Alcance de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia aerodinámica	162
IV FLUIDOSTÁTICA	167
12. Fluidostática	169
12.1. Ecuaciones generales	169
12.2. Condiciones de equilibrio	170

12.3. Hidrostática	171
12.4. Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes . .	173
12.5. Equilibrio de gases. Atmósfera estándar	174
13. Tensión superficial	179
13.1. Introducción	179
13.2. Equilibrio en la interfaz	181
13.3. Ecuación de Young-Laplace	183
13.4. Ejemplos	186
13.4.1. Tubo sumergido en un líquido	186
13.4.2. Gota que pende de un tubo	190
V FLUJOS VISCOSOS	193
14. Movimientos unidireccionales de líquidos	195
14.1. Flujos con líneas de corriente rectas	195
14.1.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno	195
14.1.2. Corriente de Couette	197
14.1.3. Corriente de Poiseuille	198
14.1.4. Problema de Rayleigh	200
14.1.5. Corriente de Stokes	204
14.2. Flujos con líneas de corriente circulares	209
14.2.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno	209
14.2.2. Movimiento entre dos cilindros que giran coaxialmente .	211
14.2.3. Difusión de un torbellino potencial	212
15. Movimiento laminar de líquidos en conductos	217
15.1. Corriente de Poiseuille en un conducto circular	217
15.2. Flujo laminar en conductos de sección arbitraria lentamente variable	220
15.3. Tubos de longitud finita. Efecto de entrada	224
15.4. Flujo laminar no estacionario en un conducto circular	227
16. Lubricación fluidomecánica	231
16.1. Introducción	231
16.2. Movimiento en películas delgadas. Efecto cuña	232
16.3. Ecuación de Reynolds	238
16.4. Cojinetes cilíndricos	240
16.4.1. Cojinetes largos	242

16.4.2. Cojinetes cortos	245
16.4.3. Cojinetes cilíndricos finitos con escentricidad pequeña .	246
16.4.4. Cavitación	248

17. Movimiento alrededor de cuerpos con número de Reynolds

pequeño	251
17.1. Ecuaciones de Stokes	251
17.2. Movimiento alrededor de una esfera. Ley de Stokes	254
17.3. Aproximación de Oseen	259
17.4. Movimiento alrededor de un cilindro circular. Paradoja de Stokes	262

18. Flujo en medios porosos **269**

18.1. Introducción	269
18.2. Ecuaciones para un fluido homogéneo	270
18.2.1. Magnitudes promediadas. Porosidad	270
18.2.2. Ecuación de conservación de la masa	271
18.2.3. Ley de Darcy	272
18.2.4. Ecuación para la presión	274
18.2.5. Condiciones de contorno	275
18.3. Ejemplos	276
18.3.1. Avance de una superficie freática plana en un medio poroso infinito	276
18.3.2. Flujo en un medio poroso con una cavidad esférica . . .	278

VI FLUJOS DE FLUIDOS NO VISCOSOS O IDEALES **281**

19. Movimientos con número de Reynolds grande **283**

19.1. Introducción	283
19.2. Ecuaciones de Euler	284
19.3. Ecuación de Bernoulli	286
19.4. Flujos isentrópicos	288
19.5. Conservación de las magnitudes de remanso	289

20. Vorticidad **291**

20.1. Ecuación de la vorticidad para fluidos ideales	291
20.2. Líneas y tubos de vorticidad	292
20.3. Teoremas de la vorticidad de Helmholtz	293
20.4. Teorema de la circulación de Kelvin	297
20.5. Ecuación de Bernoulli para flujos irrotacionales. F. potencial . . .	299

20.6. Generación de vorticidad	301
21. Movimiento irrotacional y bidimensional de un fluido incompresible	305
21.1. Introducción	305
21.2. Movimientos potenciales elementales	306
21.3. Superposición de movimientos elementales	311
21.4. Método de las imágenes	317
21.5. Potencial complejo	320
21.6. Soluciones elementales	321
21.6.1. Corriente uniforme	321
21.6.2. Manantial o sumidero	321
21.6.3. Torbellino potencial	321
21.6.4. Dipolo	322
21.6.5. Corriente en una esquina	322
21.6.6. Corriente incidente sobre un cuerpo romo	323
21.6.7. Corriente alrededor de un cilindro circular	323
21.6.8. Corriente alrededor de un óvalo de Rankine	323
21.6.9. Fuente en la proximidad de una pared	323
21.6.10. Torbellino en la proximidad de una pared	324
21.7. Fuerza sobre un perfil. Paradoja de D'Alambert y fórmula de Kutta-Joukowski	324
21.8. Generación de sustentación en perfiles aerodinámicos	328
21.9. Flujo con circulación alrededor de un cilindro circular	331
21.9.1. Utilidad práctica de la solución potencial del flujo alrededor de un cilindro circular	333
21.10. Transformación conforme	336
21.10.1. Placa plana con ángulo de ataque α	338
21.10.2. Perfiles de Joukowski	342
22. Discontinuidades en los movimientos de fluidos ideales. Ondas de choque	347
22.1. Introducción	347
22.2. Ecuaciones de conservación a través de una discontinuidad	348
22.2.1. Discontinuidad tangencial	350
22.2.2. Discontinuidad normal. Relaciones de Rankine-Hugoniot	351
22.3. Curva de Hugoniot	353
22.4. Ondas de choque normales en gases perfectos	355
22.5. Ondas de Mach y ondas de choque oblicuas en gases perfectos	358
22.6. Ondas de choque fuertes y débiles	363

22.6.1. Ondas débiles	363
22.6.2. Ondas fuertes	364
22.7. Expansión de Prandtl-Meyer	365
22.8. APÉNDICE A: Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$	369
22.9. APÉNDICE B: Función de Prandtl-Meyer y ángulo de Mach para $\gamma = 1,4$	374
23. Movimiento de fluidos ideales en conductos	375
23.1. Ecuaciones para el movimiento casiunidireccional de un fluido ideal	375
23.1.1. Movimiento de líquidos	376
23.1.2. Movimiento casi estacionario de gases	378
23.2. Flujo isentrópico de un gas perfecto a través de una tobera convergente-divergente	381
23.3. Forma semiintegral de las ecuaciones de Euler	386
23.3.1. Movimiento a través de un compresor	387
23.3.2. Carga de un depósito	389
23.4. APÉNDICE: Flujo isentrópico en una tobera para $\gamma = 1,4$	392
VII FLUJOS IDEALES II.	
ONDAS	397
24. Flujos ideales de líquidos con superficie libre	399
24.1. Ondas de superficie	399
24.1.1. Ondas bidimensionales	401
24.1.2. Ondas cortas y largas. Ondas gravitacionales y ondas capilares	404
24.1.3. Velocidad de grupo	405
24.2. Flujo ideal en un canal bidimensional	407
24.2.1. Flujo estacionario	409
24.2.2. Solución de semejanza para la rotura de una presa	412
24.3. Resalto hidráulico	419
25. Ondas sonoras. Acústica	425
25.1. Ecuaciones para la propagación de pequeñas perturbaciones en un fluido ideal uniforme	425
25.2. Ondas planas	428
25.2.1. Propagación de una pequeña perturbación inicial	429

25.2.2. Pequeñas perturbaciones producidas por el movimiento de un pistón	430
25.2.3. Ondas monocromáticas	432
25.3. Velocidad del sonido. Justificación de las hipótesis	433
25.4. Energía e intensidad acústica	435
25.5. Efecto de la viscosidad	438
25.6. Ondas esféricas	441
25.6.1. Fuente puntual	442
25.6.2. Dipolo acústico	443
25.7. Propagación del sonido en un medio no uniforme. Acústica geométrica	445
26. Ondas no lineales en gases	453
26.1. Flujo unidimensional e isentrópico de un gas ideal	453
26.1.1. Método de las características. Invariantes de Riemann	454
26.1.2. Ondas simples	458
26.2. Ondas simples generadas por el movimiento de un pistón. Ondas de choque	460
26.2.1. Onda de expansión	461
26.2.2. Onda de compresión. Onda de choque	463
26.2.3. Onda de choque débil	468
26.2.4. Ejemplo: pistón con aceleración constante	469
26.3. Onda esférica tras una explosión intensa	471
VIII TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE	477
27. Capa límite laminar incompresible	479
27.1. Introducción	479
27.2. Ecuaciones y condiciones de contorno	482
27.3. Capa límite sobre una placa plana. Solución de Blasius	486
27.4. Otras soluciones de semejanza. Solución de Falkner-Skan	491
27.5. Separación de la capa límite	492
27.6. Resistencias de fricción y de presión	495
28. Capa límite térmica incompresible	501
28.1. Introducción	501
28.2. Ecuaciones y condiciones de contorno	502
28.3. Capa límite térmica incompresible. Analogía de Reynolds	503
28.4. Analogía de Reynolds para cualquier Pr	506

IX FLUJOS TURBULENTOS 511

29.Introducción a la turbulencia 513

29.1. Propiedades de los flujos turbulentos 513

29.2. Escalas de la turbulencia. Cascada de energía. Microescala de Kolmogorov 516

30.Inestabilidades y transición a la turbulencia 521

30.1. Introducción 521

30.2. Conceptos básicos de la teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica 522

30.2.1. Modos normales. Flujos unidireccionales 524

30.2.2. Estabilidad temporal y espacial 525

30.2.3. Estabilidad convectiva y absoluta 528

30.3. Algunos ejemplos de inestabilidades físicamente relevantes . . . 530

30.3.1. Inestabilidad térmica 530

30.3.2. Inestabilidad centrífuga 536

30.4. Inestabilidades en flujos casi-unidireccionales 545

30.4.1. Estabilidad no viscosa. Criterio de Rayleigh 547

30.4.2. Estabilidad viscosa. Ecuación de Orr-Sommerfeld 548

30.5. Capa límite de Blasius: inestabilidades y transición a la turbulencia 551

31.Descripción matemática de los flujos turbulentos 557

31.1. Descripción determinista y estadística de la turbulencia 557

31.2. Movimiento medio y fluctuaciones 559

31.3. Ecuaciones de Reynolds. Esfuerzos aparentes de Reynolds . . . 560

31.4. El problema del cierre 562

31.4.1. Longitud de mezcla 563

31.4.2. Analogía de Reynolds 564

31.5. Vorticidad en los flujos turbulentos 566

31.5.1. Vorticidad y esfuerzos de Reynolds 566

31.5.2. Ecuación de la vorticidad en flujos turbulentos 568

32.Turbulencia en presencia de paredes 571

32.1. Capa límite turbulenta 571

32.2. Flujo turbulento en un conducto circular 577

32.3. Efecto de la rugosidad de la pared 584

33. Flujo turbulento en conductos	589
33.1. Ecuaciones, condiciones iniciales y de contorno	589
33.1.1. Ecuaciones del movimiento	591
33.1.2. Condiciones iniciales y de contorno	594
33.2. Flujo casi estacionario de líquidos	595
33.3. Movimiento casi estacionario de un gas en un conducto aislado térmicamente	597
33.3.1. Límite de fricción dominante	604
33.4. Movimiento casi estacionario de un gas sin fricción y con adición de calor	606
33.5. Pérdidas localizadas en tuberías	610
33.5.1. Ensanchamiento brusco	611
33.5.2. Ensanchamiento gradual. Difusor	612
33.5.3. Contracción brusca	614
33.5.4. Contracción gradual	615
33.5.5. Codos	616
Bibliografía	619

Parte I

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

Algunas nociones matemáticas preliminares

Esta primera lección está dedicada a resumir brevemente algunas herramientas matemáticas generales que serán ampliamente usadas en lo que sigue (en especial, nociones básicas de cálculo vectorial y los teoremas integrales). Otros conceptos matemáticos muy específicos de la Mecánica de Fluidos (en general de la Física de los Medios Continuos) serán introducidos a lo largo de la asignatura.

1.1. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Sean α , β y γ un conjunto de coordenadas curvilíneas ortogonales, y \vec{e}_α , \vec{e}_β y \vec{e}_γ los vectores unitarios paralelos a las líneas coordenadas en las direcciones de incremento de α , β y γ , respectivamente; es decir,

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{x} / \partial \alpha}{|\partial \vec{x} / \partial \alpha|} \quad , \quad \text{etc.} \quad , \quad (1.1)$$

donde $\vec{x} = \vec{x}(\alpha, \beta, \gamma)$ es el vector posición de un punto genérico con respecto al origen de coordenadas. Para que las coordenadas (α, β, γ) sean ortogonales, la función $\vec{x} = \vec{x}(\alpha, \beta, \gamma)$ debe verificar

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\gamma = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\gamma = 0 \quad , \quad (1.2)$$

$$\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\beta \wedge \vec{e}_\gamma \quad , \quad \text{etc.} \quad (1.3)$$

Se definen las funciones de escala

$$h_\alpha \equiv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \right|, \quad h_\beta \equiv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} \right|, \quad h_\gamma \equiv \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \gamma} \right|, \quad (1.4)$$

de forma que

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha}, \quad \text{etc.}, \quad (1.5)$$

y el elemento diferencial de longitud viene dado por

$$d\vec{x} = h_\alpha d\alpha \vec{e}_\alpha + h_\beta d\beta \vec{e}_\beta + h_\gamma d\gamma \vec{e}_\gamma, \quad (1.6)$$

$$(dl)^2 \equiv d\vec{x} \cdot d\vec{x} = h_\alpha^2 (d\alpha)^2 + h_\beta^2 (d\beta)^2 + h_\gamma^2 (d\gamma)^2. \quad (1.7)$$

Si ϕ es un campo escalar, su **gradiente** se define

$$\nabla \phi \equiv \frac{1}{h_j} \frac{\partial \phi}{\partial j} \vec{e}_j \equiv \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \vec{e}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \vec{e}_\gamma, \quad (1.8)$$

donde $j = \alpha, \beta, \gamma$, y se ha utilizado la notación usual de indicar suma mediante la repetición de subíndices. Por otra parte, si \vec{v} es un campo vectorial, $\vec{v} \equiv v_\alpha \vec{e}_\alpha + v_\beta \vec{e}_\beta + v_\gamma \vec{e}_\gamma \equiv v_j \vec{e}_j$, su **divergencia** viene dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \vec{e}_j \cdot \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{v}}{\partial j} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta h_\gamma v_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h_\alpha h_\gamma v_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_\alpha h_\beta v_\gamma) \right], \quad (1.9)$$

mientras que el **rotacional** de \vec{v} es

$$\nabla \wedge \vec{v} \equiv \vec{e}_j \wedge \frac{1}{h_j} \frac{\partial \vec{v}}{\partial j} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \vec{e}_\alpha & h_\beta \vec{e}_\beta & h_\gamma \vec{e}_\gamma \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & \frac{\partial}{\partial \gamma} \\ h_\alpha v_\alpha & h_\beta v_\beta & h_\gamma v_\gamma \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

El operador **Laplaciano** sobre un campo escalar ϕ se define como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &\equiv \Delta \phi \equiv \nabla \cdot \nabla \phi \\ &= \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{h_\alpha h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) \right]. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Otras dos operaciones frecuentemente usadas en la Mecánica de Fluidos son la Laplaciana de un vector, $\nabla^2 \vec{v}$, y la divergencia de un tensor, $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$, donde $\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$, $i, j = \alpha, \beta, \gamma$. Estas dos operaciones se realizan utilizando las definiciones anteriores, es decir,

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla \cdot \nabla (v_j \vec{e}_j) \quad , \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \vec{e}_j \cdot \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial j} (T_{ik} \vec{e}_i \vec{e}_k) \quad , \quad (1.13)$$

teniendo en cuenta las relaciones

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial i} \vec{e}_j \quad , \quad i, j = \alpha, \beta, \gamma, \quad (1.14)$$

que resultan de la ortogonalidad de los vectores \vec{e}_i (en la última expresión los subíndices repetidos no están sumados). Sin embargo, la operación $\nabla^2 \vec{v}$ se realiza más fácilmente utilizando la igualdad $\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$ [ecuación (1.43) de la sección siguiente] y haciendo uso de (1.8)-(1.10). Por último, otra operación frecuente en la Mecánica de Fluidos es $(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a}$, donde \vec{a} y \vec{b} son dos campos vectoriales [en particular, aparecerá $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$]. Al igual que $\nabla^2 \vec{v}$ y $\nabla \cdot \overline{\overline{T}}$, esta operación, que es inmediata en coordenadas cartesianas (en ellas es simplemente el producto escalar del vector \vec{b} y el tensor $\nabla \vec{a}$), presenta ciertas dificultades en coordenadas curvilíneas debido a la variación de los vectores unitarios \vec{e}_i . Normalmente se realiza haciendo uso de la igualdad $(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} = (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a})$ [ecuación (1.41) de la sección siguiente]. La componente α es:

$$\begin{aligned} [(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a}]_\alpha &= \vec{b} \cdot \nabla a_\alpha + \frac{b_\alpha}{h_\alpha} \left(\frac{a_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{a_\beta}{h_\beta} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + \frac{a_\gamma}{h_\gamma} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \right) \\ &\quad - \left(\frac{a_\alpha b_\alpha}{h_\alpha^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{a_\beta b_\beta}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} + \frac{a_\gamma b_\gamma}{h_\alpha h_\gamma} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} \right) \quad , \quad (1.15) \end{aligned}$$

con expresiones similares para las componentes β y γ .

1.1.1. Coordenadas cilíndricas y esféricas

El sistema coordenado ortogonal más simple es el cartesiano, en el que $h_\alpha = h_\beta = h_\gamma = 1$. Los dos sistemas coordenados curvilíneos más comúnmente usados son el cilíndrico y el esférico.

Las **coordenadas cilíndricas** (r, θ, z) están relacionadas con las cartesianas (x, y, z) mediante las relaciones [ver figura 1.1(a)]:

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad z = z \quad , \quad (1.16)$$

con lo que $h_r = 1, h_\theta = r, h_z = 1$. Por tanto se tiene:

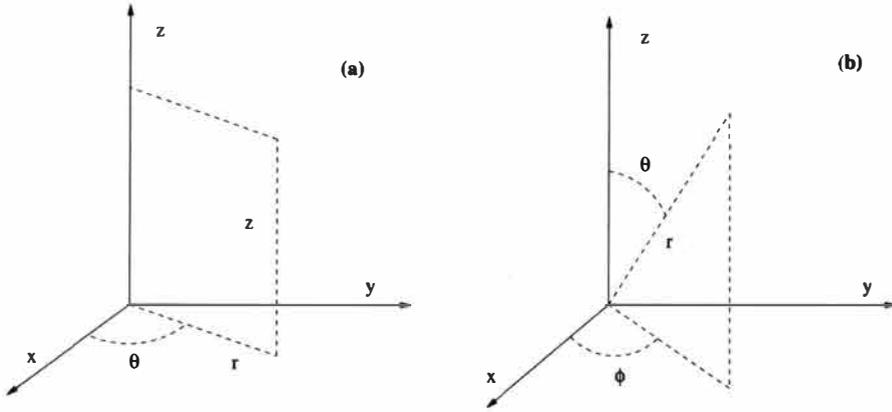


Figura 1.1: (a) Coordenadas cilíndricas. (b) Coordenadas esféricas.

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad , \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad , \quad (1.18)$$

$$\nabla \wedge \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \quad , \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad , \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \vec{e}_\theta + \nabla^2 v_z \vec{e}_z \quad , \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{T} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{\theta r}}{r} \right] \vec{e}_\theta \\ &+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right] \vec{e}_z \quad , \quad (1.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} &= \left(b_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{b_\theta a_\theta}{r} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(b_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial a_\theta}{\partial z} + \frac{b_\theta a_r}{r} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$+ \left(b_r \frac{\partial a_z}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} + b_z \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z \quad . \quad (1.23)$$

Las **coordenadas esféricas** (r, θ, φ) satisfacen las siguientes relaciones [figura 1.1(b)]:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta \quad , \quad (1.24)$$

$$h_r = 1 \quad , \quad h_\theta = r \quad , \quad h_\varphi = r \sin \theta \quad , \quad (1.25)$$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad , \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad , \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{v} &= \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \quad , \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad , \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= \left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta v_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\nabla^2 v_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi \quad , \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{T} &= \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta r}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\varphi\varphi}}{r} \right] \vec{e}_r \\ &+ \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{T_{\theta r} - \cot \theta T_{\varphi\varphi}}{r} \right] \vec{e}_\theta \\ &+ \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta T_{\theta\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{T_{\varphi r} + \cot \theta T_{\varphi\theta}}{r} \right] \vec{e}_\varphi \quad , \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned}
(\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} = & \left(b_r \frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} + \frac{b_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{b_\theta a_\theta + b_\varphi a_\varphi}{r} \right) \vec{e}_r \\
& + \left(b_r \frac{\partial a_\theta}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{b_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} + \frac{b_\theta a_r}{r} - \frac{\cot \theta b_\varphi a_\varphi}{r} \right) \vec{e}_\theta \\
& + \left(b_r \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} + \frac{b_\theta}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} + \frac{b_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{b_\varphi a_r}{r} + \frac{\cot \theta b_\varphi a_\theta}{r} \right) \vec{e}_\varphi . \quad (1.32)
\end{aligned}$$

1.2. Operaciones con el operador ∇

En coordenadas cartesianas es fácil realizar las operaciones que involucran al operador ∇ (es decir, gradientes, divergencias, rotacionales) mediante el uso de subíndices. Cuando las coordenadas son curvilíneas, la técnica de usar subíndices es mucho más complicada. Por ello conviene, siempre que sea posible, realizar las operaciones con ∇ en notación vectorial compacta, ya que de esta forma el resultado será válido en cualquier sistema coordenado. A continuación se dan una serie de identidades que involucran al operador ∇ . Para su obtención se hace uso de la regla de derivación de un producto [téngase en cuenta que, cuando los factores son vectores, el orden es importante; así, $(\nabla \phi) \vec{v} \neq (\vec{v} \nabla) \phi$, $(\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} \neq \vec{b} \cdot \nabla \vec{a}$, etc.]. También se utilizan las identidades

$$\nabla \wedge \nabla \phi = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) = 0 \quad , \quad (1.33)$$

válidas para todo campo escalar ϕ y todo campo vectorial \vec{v} , y las relaciones vectoriales

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} \quad , \quad (1.34)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \quad . \quad (1.35)$$

En algunas de las siguientes expresiones se incluyen pasos intermedios para facilitar su seguimiento. Un punto encima de una letra indica el factor sobre el cual actúa el operador ∇ en los casos en que haya alguna ambigüedad.

$$\nabla(\phi\psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi \quad , \quad (1.36)$$

$$\nabla(\phi \vec{v}) = \phi \nabla \vec{v} + (\nabla \phi) \vec{v} \quad , \quad (1.37)$$

$$\nabla \cdot (\phi \vec{v}) = \phi \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \phi \quad , \quad (1.38)$$

$$\nabla \wedge (\phi \vec{v}) = \phi \nabla \wedge \vec{v} + \nabla \phi \wedge \vec{v} = \phi \nabla \wedge \vec{v} - \vec{v} \wedge \nabla \phi \quad , \quad (1.39)$$

$$\nabla \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \nabla \cdot (\dot{\vec{a}} \wedge \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \wedge \dot{\vec{b}}) = (\nabla \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\nabla \wedge \vec{b}) \quad , \quad (1.40)$$

$$\vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) = (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad , \quad (1.41)$$

$$\vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = \nabla \frac{1}{2} v^2 - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad , \quad (1.42)$$

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v} \quad , \quad (1.43)$$

$$\nabla \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \nabla \wedge (\dot{\vec{a}} \wedge \vec{b}) - \nabla \wedge (\vec{b} \wedge \dot{\vec{a}}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\nabla \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} (\nabla \cdot \vec{b}) \quad , \quad (1.44)$$

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{b} + (\nabla \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \wedge (\nabla \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\nabla \wedge \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} \quad . \quad (1.45)$$

Otras identidades que involucran al vector posición \vec{x} son:

$$\nabla \vec{x} = \overline{\overline{\mathbf{I}}} \quad , \quad (1.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{x} = 3 \quad , \quad (1.47)$$

$$\nabla \wedge \vec{x} = 0 \quad , \quad (1.48)$$

$$\nabla r = \vec{x}/r \quad , \quad (1.49)$$

$$\nabla (\vec{x}/r) = (\overline{\overline{\mathbf{I}}} - \vec{x}\vec{x})/r \quad , \quad (1.50)$$

donde $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ es el tensor unidad y $r \equiv |\vec{x}|$ es la distancia al origen de coordenadas.

Por último, se incluyen algunas operaciones que involucran a un tensor de segundo orden $\overline{\overline{\mathbf{T}}}$. Ya definimos anteriormente [ecuación (1.13)] el vector $\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}$. De forma análoga se puede definir el tensor de segundo orden

$$\nabla \wedge \overline{\overline{\mathbf{T}}} \equiv \vec{e}_i \wedge \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial i} (T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \quad \left(= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{kl} \vec{e}_i \vec{e}_l \right) \quad , \quad (1.51)$$

y el tensor de tercer orden

$$\nabla \overline{\overline{\mathbf{T}}} \equiv \frac{\vec{e}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial i} (T_{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k) \quad \left(= \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k \right) \quad , \quad (1.52)$$

donde entre paréntesis se ha incluido la correspondiente expresión en coordenadas cartesianas, siendo ϵ_{ijk} el tensor de Levi-Civita ($\epsilon_{ijk} = 0$ si alguno de los tres subíndices se repite, $\epsilon_{ijk} = +1$ si la permutación ijk es par en relación a 123 y $\epsilon_{ijk} = -1$ si es impar). Operaciones en donde interviene el producto escalar de un vector y un tensor son, por ejemplo,

$$\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) = \nabla \vec{v} : \overline{\overline{\mathbf{T}}} + (\nabla \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}})^T \cdot \vec{v} \quad , \quad (1.53)$$

$$\nabla \wedge (\vec{v} \cdot \overline{\overline{\mathbf{T}}}) = \nabla \vec{v} \wedge \overline{\overline{\mathbf{T}}}^T + \vec{v} \cdot (\nabla \wedge \overline{\overline{\mathbf{T}}})^T \quad , \quad (1.54)$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \overline{\overline{T}}) = \nabla \vec{v} \cdot \overline{\overline{T}} + \nabla \overline{\overline{T}}^T \cdot \vec{v} \quad , \quad (1.55)$$

donde los dos puntos denotan el doble producto escalar de dos tensores ($\overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} = A_{ij}B_{ij}$), $\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}$ significa que el primer componente de ambos tensores se multiplica escalarmente y el segundo vectorialmente (en coordenadas cartesianas, el componente i de este vector sería $\epsilon_{ijk}A_{lj}B_{lk}$), y el superíndice T significa tensor transpuesto.

1.3. Teoremas integrales

Sea S una superficie cerrada que contiene un volumen V y \vec{v} un campo vectorial definido en él. El Teorema de Gauss (o de la divergencia) nos dice que

$$\int_S d\vec{s} \cdot \vec{v} = \int_V dV \nabla \cdot \vec{v} \quad , \quad (1.56)$$

donde $d\vec{s} = ds\vec{n}$, siendo \vec{n} el vector unitario normal a la superficie (hacia fuera) y ds es el elemento diferencial de superficie. Este teorema nos proporciona una segunda definición de la divergencia de un vector:

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S(V)} d\vec{s} \cdot \vec{v} \quad , \quad (1.57)$$

donde el volumen V está definido en el entorno del punto en que se calcula $\nabla \cdot \vec{v}$. Esta definición será muy útil cuando interpretemos físicamente la divergencia de ciertos campos vectoriales.

Del teorema de Gauss se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\int_S d\vec{s} \phi = \int_V dV \nabla \phi \quad , \quad (1.58)$$

$$\int_S d\vec{s} \vec{v} = \int_V dV \nabla \vec{v} \quad , \quad (1.59)$$

$$\int_S d\vec{s} \overline{\overline{T}} = \int_V dV \nabla \overline{\overline{T}} \quad , \quad (1.60)$$

$$\int_S d\vec{s} \wedge \vec{v} = \int_V dV \nabla \wedge \vec{v} \quad , \quad (1.61)$$

etc. En general, estas expresiones se pueden resumir en:

$$\int_S d\vec{s} \dots = \int_V dV \nabla \dots \quad . \quad (1.62)$$

Un caso particular bastante importante es el denominado (primer) Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \int_V dV [\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi] &= \int_V dV \nabla \cdot [\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi] \\ &= \int_S d\vec{s} \cdot [\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi] = \int_S ds \left[\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (1.63)$$

donde $\partial/\partial n$ es la derivada en la dirección normal a la superficie.

Un segundo grupo de teoremas integrales de uso común en la Mecánica de Fluidos está encabezado por el Teorema de Stokes, que nos dice que la circulación de un vector \vec{v} a lo largo de una línea cerrada Γ es igual a la integral del rotacional de \vec{v} sobre una superficie S que se apoya en Γ :

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \cdot \vec{v} = \int_S d\vec{s} \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) \quad , \quad (1.64)$$

donde $d\vec{l}$ es el diferencial de longitud siguiendo la dirección de la curva. Consecuencia de este teorema son:

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \phi = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla \phi \quad , \quad (1.65)$$

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \vec{v} = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla \vec{v} \quad , \quad (1.66)$$

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \vec{T} = \int_S d\vec{s} \wedge \nabla \vec{T} \quad , \quad (1.67)$$

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \wedge \vec{v} = \int_S (d\vec{s} \wedge \nabla) \wedge \vec{v} \quad , \quad (1.68)$$

etc. En general,

$$\int_{\Gamma} d\vec{l} \dots = \int_S (d\vec{s} \wedge \nabla) \dots \quad (1.69)$$

Observese que $d\vec{s} \cdot \nabla \wedge \vec{v} = (d\vec{s} \wedge \nabla) \cdot \vec{v}$, por lo que el teorema original de Stokes (1.64) se puede escribir también en la notación general (1.69).

Por último, un tercer grupo de teoremas integrales, los Teoremas de Transporte de Reynolds, que constituyen una generalización al espacio tridimensional de la fórmula de Leibnitz

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a(t)}^{x=b(t)} f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} f(x=b, t) - \frac{da}{dt} f(x=a, t) \quad (1.70)$$

será considerado con más detalles en el capítulo 5.

Referencias y bibliografía complementaria.¹

- R. ARIS, 1989. Capítulos 2 y 3.
- D.E. BOURNE y P.C. KENDALL, 1992.
- E. BUTKOV, 1968. Capítulos 1 y 16.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996. Capítulo 2.
- P.M. MORSE y H. FESHBACH, 1953. Vol. I, cap. 1.
- R.L. PANTON, 1996. Capítulo 3.
- L.A. SEGEL, 1987. Parte A.
- A. SOMMERFELD, 1950. Capítulo 1.

¹Ver *Bibliografía* al final.

Capítulo 2

El fluido como medio continuo

2.1. Sólidos, líquidos, gases

La propiedad mecánica que distingue a los fluidos (gases y líquidos) de los sólidos es la facilidad que tienen para deformarse. Un sólido mantiene una forma determinada mientras no se le aplique una fuerza externa. Un fluido no tiene una forma determinada, sino que adopta aquella del recipiente que lo contiene. Cuando se le aplica una pequeña fuerza a un trozo de sólido elástico, éste se deforma proporcionalmente a la fuerza aplicada. Por el contrario, si a un fluido se le aplica una fuerza, por pequeña que ésta sea, se deforma indefinidamente. En otras palabras, un sólido presenta resistencia a la deformación, existiendo, si el sólido es elástico, una relación lineal entre fuerza y deformación (Ley de Hooke), cuando ésta última es pequeña. Un líquido o un gas presentan resistencia a la velocidad de deformación. Se verá más adelante que la mayoría de los fluidos, entre los que se encuentran los más comunes, como son el aire y el agua, en las condiciones que normalmente se presentan en la práctica, obedecen a una ley lineal entre el esfuerzo cortante (o tangencial) aplicado y la velocidad de deformación (estos conceptos se precisarán en lecciones posteriores). Los fluidos que obedecen a este tipo de ley lineal se denominan fluidos Newtonianos, en honor a Isaac Newton quien fue el primero en formular una ley de este tipo en el Libro II de sus *Principia* para un movimiento simple de un líquido, aunque la formulación precisa de esta ley no fue hecha hasta mucho más tarde (ver capítulo 7).

La frontera entre fluidos y sólidos no está tan definida como se podría pensar en un principio. Existen sustancias, como algunas pinturas, que se comportan como sólidos elásticos si permanecen en reposo durante un cierto tiempo, pero que vuelven a comportarse como líquidos si se las agita fuer-

temente. Otras sustancias, como la brea, se comportan normalmente como sólidos, pero si se les aplica una fuerza durante un periodo de tiempo suficientemente largo, la deformación crece indefinidamente como si fuese un líquido. Afortunadamente, la mayoría de los fluidos, en las condiciones que normalmente se encuentran en la práctica, se comportan como Newtonianos y, por ello, el presente curso introductorio a la Mecánica de Fluidos se dedicará exclusivamente al estudio de fluidos Newtonianos, estando fuera del programa del presente curso los fluidos no-Newtonianos.¹

Desde un punto de vista mecánico, la distinción entre líquidos y gases no es tan fundamental como entre éstos (los fluidos) y los sólidos. En líneas generales, la propiedad más importante que distingue a los líquidos de los gases es la compresibilidad: los líquidos son prácticamente incompresibles, por lo que su densidad permanece casi constante aunque sobre ellos actúen presiones muy distintas. Esta propiedad, en el límite ideal de suponer la densidad de un líquido constante a una temperatura dada, hará que el estudio mecánico de los líquidos sea mucho más simple que el de los gases. Por el contrario, los gases son mucho más compresibles y cualquier movimiento que introduzca variaciones apreciables en la presión producirá también variaciones apreciables en la densidad del gas. Sin embargo, algunos movimientos de los que estudiaremos no irán acompañados de variaciones importantes de la presión, por lo que, a efectos mecánicos, los gases se comportan en esas situaciones como si fuesen líquidos.

Para comprender mejor la distinción entre gases, líquidos y sólidos es interesante hacer unas breves consideraciones sobre la naturaleza y la intensidad de las fuerzas intermoleculares en función de la distancia intermolecular. Dos moléculas neutras que no reaccionan químicamente interactúan, en el supuesto de que estén aisladas del resto, de acuerdo con el llamado potencial de Lennard-Jones: cuando la distancia entre ellas es menor que una cierta distancia d_o ($d_o \approx 3 \times 10^{-10} m$) existe una fuerte repulsión entre las moléculas debida a la repulsión electrostática entre las nubes electrónicas, que varía con la distancia d entre las moléculas elevada a la potencia -11 ($\sim d^{-11}$); para distancias mayores que d_o , las moléculas se atraen débilmente debido a la formación de dipolos eléctricos, variando la fuerza de atracción, a grandes distancias, como d^{-5} . Es decir, la fuerza viene dada por:

$$F(d) = F_o \left[\left(\frac{d_o}{d} \right)^5 - \left(\frac{d_o}{d} \right)^{11} \right] , \quad (2.1)$$

¹El alumno interesado en esta rama de la Mecánica de Fluidos (que normalmente se incluye en la ciencia llamada *Reología*) puede consultar, por ejemplo, la monografía de G. Bohme, *Non-Newtonian Fluid Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1987).

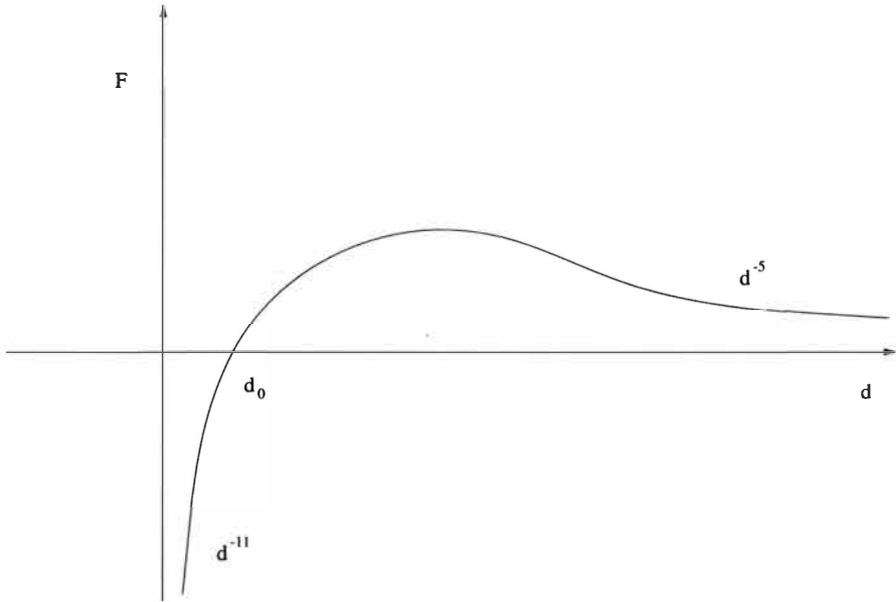


Figura 2.1: Fuerza intermolecular de Lennard-Jones entre dos moléculas neutras en función de la distancia intermolecular.

donde F_0 es una constante (F_0 y d_0 dependen de las características de las moléculas) y se ha tomado positiva la fuerza de atracción. Si las moléculas reaccionasen químicamente, a distancias muy cortas aparecería, una vez vencida cierta repulsión electrostática, una fuerza atractiva mucho más intensa (de origen *cuántico*) que tendería a enlazar químicamente las moléculas, y que, por supuesto, no está contenida en la descripción anterior.

La distancia típica entre dos moléculas de una sustancia se puede estimar del conocimiento de su masa molecular y de su densidad. Así, por ejemplo, un gas típico (oxígeno) en condiciones normales (20°C , 1 atm) tiene una densidad de $1,33\text{kg}/\text{m}^3$. Como la masa molecular del oxígeno es $32\text{kg}/\text{kmol}$, en un metro cúbico de este gas hay $0,0416\text{kmoles}$; teniendo en cuenta el número de Avogadro ($N_A = 6,022 \times 10^{26}$ moléculas/kmol), hay $n = 2,5 \times 10^{25}$ moléculas de O_2 por metro cúbico. La distancia media entre moléculas de O_2 es, pues, $n^{-1/3} \simeq 4,1 \times 10^{-9}$ m, que es unas diez veces la distancia d_0 . Es decir, las moléculas de un gas típico están lo suficientemente separadas como para que se puedan *juntar* más por acción de fuerzas externas, sin llegar a la *barreira* que supone la repulsión electrostática cuando la distancia intermolecular es menor que d_0 . En los líquidos, la distancia intermolecular típica es mucho menor, del orden de d_0 (en el caso del agua a temperatura ambiente, la den-

sidad es 10^3 kg/m^3 y como su masa molecular es 18, la distancia media es de $n^{-1/3} \simeq 3,1 \times 10^{-10} \text{ m}$, con lo que habría que someter al líquido a presiones gigantescas para vencer la repulsión electrostática (¡que varía como d^{-11} !) y así comprimirlo; de aquí la aparente incompresibilidad de los líquidos. Cuando un líquido se enfría por debajo de su punto de fusión solidificándose, la densidad generalmente varía muy poco (por lo general la densidad aumenta ligeramente, salvo casos excepcionales como el agua); es, pues, sorprendente que un ligero cambio en la densidad cambie tan drásticamente las propiedades mecánicas de la sustancia. Básicamente, las moléculas en un líquido y en un sólido están aproximadamente a la misma distancia (alrededor de d_o), estribando la diferencia en que las moléculas de un sólido están *ancladas* en torno a unas posiciones de equilibrio en una cierta estructura (cristalina o no), perdiendo la movilidad que disfrutaban en el estado líquido. En ambos casos las moléculas están tan cerca unas de otras que solo la acción de fuerzas de compresibilidad extremadamente grandes pueden variar la densidad; sin embargo, la movilidad de las moléculas en el líquido hace que la aplicación de esfuerzos tangenciales provoque una deformación continua, que no se produce en el sólido. Al calentar un líquido por encima de su punto de ebullición, las moléculas se separan unas de otras (adquiriendo una energía cinética que como veremos es proporcional a la temperatura) de forma que en el nuevo estado (gas) la sustancia es fácilmente compresible, así como deformable.

2.2. La hipótesis de medio continuo

Desde un punto de vista molecular, el estudio de los fluidos es extremadamente complejo debido al gigantesco número de moléculas: en 1 mm^3 de un gas en condiciones normales existen alrededor de 10^{16} moléculas, mientras que en el mismo volumen de un líquido típico hay del orden de 10^{20} . El estudiar las interacciones de cada una de las moléculas con el resto no sólo sería un esfuerzo prácticamente imposible, sino también valdío, ya que sería muy difícil extraer información macroscópica útil a partir de la información molecular. Por ello, en la Mecánica de Fluidos se utiliza la hipótesis de medio continuo, de forma similar a la Teoría de la Elasticidad en la mecánica de sólidos. Bajo esta hipótesis, el fluido se considera como un campo continuo en el que cada punto representa un volumen δV de fluido (llamado punto material o partícula fluida) lo suficientemente pequeño como para que pueda ser tratado como un diferencial matemático, y lo suficientemente grande como para que contenga un gran número de moléculas y el carácter discreto (molecular) de la materia no se manifieste en él. Así, por ejemplo, el volumen δV deberá ser lo suficien-

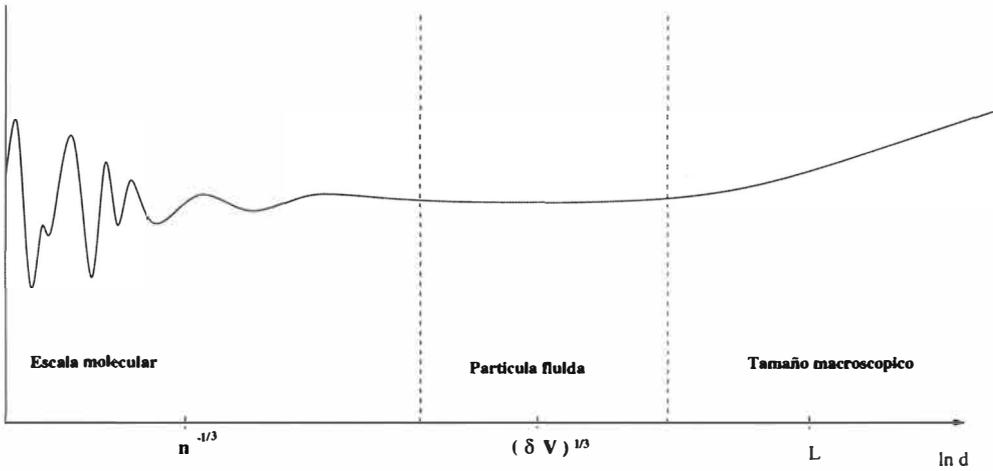


Figura 2.2: Variación de una propiedad típica (masa de moléculas por unidad de volumen o densidad) en función de la distancia sobre la cual se promedia.

temente grande como para que la masa de las moléculas contenidas en él, δM , no fluctúe de una manera caótica debido al carácter molecular del fluido, y lo suficientemente pequeño como para que esta masa δM no varíe sensiblemente al pasar de un punto $\delta V(\vec{x})$ a otro vecino $\delta V(\vec{x} + \delta \vec{x})$. Obviamente, la hipótesis de medio continuo limita el rango de validez de la Mecánica de Fluidos a sistemas fluidos cuyas condiciones sean tales que exista ese intervalo intermedio de tamaños δV , grande para que contenga un gran número de moléculas y se pueda hablar de valores medios, y pequeño para que $(\delta V)^{1/3}$ sea pequeño comparado con la longitud característica L de variación de esos valores medios y se puedan considerar como variables continuas; es decir, $n^{-1/3} \ll L$, donde n es la densidad numérica o número de moléculas por unidad de volumen, de forma que exista un δV tal que $n^{-1/3} \ll (\delta V)^{1/3} \ll L$ (ver figura 2.2). Afortunadamente, la restricción $n^{-1/3} \ll L$ se cumplen prácticamente en todos los fluidos en las condiciones que generalmente se dan en la naturaleza y en la industria (vimos antes que $n^{-1/3}$, es decir, la distancia media entre moléculas, era del orden de 4×10^{-6} mm para los gases típicos, y del orden de 3×10^{-7} mm para los líquidos típicos, por lo que tendrían que existir condiciones muy extremas en las cuales las propiedades *macroscópicas* variasen en distancias extremadamente pequeñas para que la hipótesis de medio continuo no fuese válida). No obstante, existen situaciones, como por ejemplo el gas interestelar, en que las moléculas están tan separadas unas de otras que la hipótesis de medio continuo falla y hay que estudiar el *gas* como si fuese un conjunto discreto de partículas (que, por otra parte, rara vez interaccionan unas con

otras). Veremos más adelante (lección 8) que la Mecánica de Fluidos hace uso de otra hipótesis (la hipótesis de equilibrio termodinámico local) que es más restrictiva que la hipótesis de medio continuo, aunque también se suele satisfacer en la mayoría de las situaciones prácticas.

En la mecánica de medios continuos, en vez de hablar de la posición $\vec{x}_i(t)$ y de la velocidad $\vec{v}_i(t)$ de cada molécula, se habla de magnitudes medias en cada punto \vec{x} (partícula fluida de volumen δV centrada en \vec{x}) en cada instante t . Así, se define la densidad,

$$\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i}{\delta V} , \quad (2.2)$$

donde $\delta N(\vec{x}, t)$ es el número de moléculas en el elemento de volumen δV situado en el punto \vec{x} en el instante t , m_i es la masa de la molécula i y el límite $\delta V \rightarrow 0$ se toma en el sentido descrito anteriormente, es decir, $(\delta V)^{1/3} \ll L$, pero $(\delta V)^{1/3} \gg n^{-1/3}$. La velocidad media del fluido \vec{v} en el punto \vec{x} en el instante t se define como

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i \vec{v}_i}{\delta M} , \quad (2.3)$$

donde $\delta M = \sum_{i=1}^{\delta N} m_i$. Por último, la energía interna por unidad de masa, e , se define

$$e + \frac{v^2}{2} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\delta N} m_i v_i^2 / 2}{\delta M} , \quad (2.4)$$

donde $v \equiv |\vec{v}|$ siendo $v^2/2$ la energía cinética macroscópica por unidad de masa. Observese que no toda la energía cinética de las moléculas se traduce en una energía cinética media o macroscópica del fluido, sino que parte de ella queda *oculta* en forma de energía interna (ver lección 9). Si las moléculas del fluido tuviesen grados de libertad internos, la energía asociada a ellos debería añadirse en el segundo miembro de (2.4), contribuyendo así a la energía interna macroscópica.

Con el uso de magnitudes medias que varían con la posición y el tiempo (campos), las ecuaciones que gobiernan el movimiento y el estado de un fluido no serán, como veremos, ecuaciones diferenciales ordinarias como ocurre en la mecánica de partículas, sino ecuaciones en derivadas parciales similares a las que se encuentran en otras teorías de campo como, por ejemplo, las ecuaciones

de Maxwell en Electromagnetismo, o las ecuaciones de la Elasticidad.

Referencias.²

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 1.
- S. M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 1.
- J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, 1964. Sección 1.3.

²Ver *Bibliografía* al final.

Parte II

CINEMÁTICA

Capítulo 3

Descripción del campo fluido

3.1. Descripción Lagrangiana y Euleriana

Esta lección y la siguiente están dedicadas a definir una serie de conceptos y enunciar algunos teoremas necesarios para la descripción del movimiento, o cinemática, de los fluidos.

Hay dos formas de describir el movimiento de un fluido. La primera, llamada **descripción Lagrangiana** (o de Lagrange), se basa en seguir la evolución de cada partícula fluida individual a lo largo del tiempo. Así, dada una partícula fluida que en un cierto instante t_0 ($= 0$) estaba en un punto \vec{x}_0 , se define la trayectoria como la posición de esa partícula fluida en instantes posteriores $t > t_0$:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t) \quad . \quad (3.1)$$

La velocidad y aceleración de esa partícula fluida en cualquier instante t se definen mediante

$$\vec{v}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad , \quad \vec{a}(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \quad . \quad (3.2)$$

El movimiento del fluido queda especificado si se conocen todas las trayectorias, es decir, $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ para todo \vec{x}_0 . Como se ve, la descripción Lagrangiana utiliza conceptos propios de la mecánica de partículas para describir un medio continuo, por lo que no es aconsejable en la mayoría de las situaciones debido a la complejidad de las ecuaciones a que da lugar.

La otra descripción, más acorde con una teoría de medios continuos, es decir, una teoría de campos, es la **descripción Euleriana** (o de Euler), en la cual la magnitud fundamental es el campo vectorial de la velocidad local

del fluido $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Esta descripción de Euler es la que normalmente se utiliza en la Mecánica de Fluidos y es la que se utilizará a lo largo del curso. A partir del campo de velocidades definiremos a continuación algunos conceptos cinemáticos como aceleración, trayectorias, etc.

3.2. Trayectorias

Una trayectoria es la línea descrita por una partícula fluida en su movimiento. Matemáticamente, en función del campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$, se define

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad , \quad (3.3)$$

que proporciona la trayectoria

$$\vec{x} = \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0) \quad . \quad (3.4)$$

Eliminando el tiempo t en la expresión anterior, se obtiene una curva *fija* en el espacio que se suele denominar **senda** de la partícula fluida que inicialmente ($t = t_0$) estaba en \vec{x}_0 (normalmente se toma $t_0 = 0$ ya que no añade nada a la definición anterior).

Las partículas fluidas que inicialmente estaban en una cierta línea $\vec{x}_0(\lambda)$, donde λ es un parámetro, seguirán formando una línea en un instante cualquiera t [si el campo $\vec{v}(\vec{x}, t)$ es continuo] que se denomina **línea fluida**. De forma análoga, las partículas que inicialmente estaban en una superficie $\vec{x}(\alpha, \beta)$, formarán una **superficie fluida**. Para obtener matemáticamente la ecuación de esta superficie en el tiempo no hay más que eliminar los parámetros α y β en la ecuación $\vec{x} = \vec{x}[t; \vec{x}_0(\alpha, \beta)]$. Si la superficie inicial es cerrada, la superficie fluida permanecerá cerrada, y el volumen contenido en ella se denomina **volumen fluido**.

3.3. Líneas de corriente

La línea de corriente que pasa por un determinado punto \vec{x}_0 en un instante t se define como la línea que en ese instante es paralela a $\vec{v}(\vec{x}, t)$ en todos sus puntos. Es decir,

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{x}(\lambda = 0) = \vec{x}_0 \quad . \quad (3.5)$$

El parámetro λ en $\vec{x} = \vec{x}(\lambda; \vec{x}_0, t)$ define la línea de corriente deseada. Obviamente, si el movimiento es estacionario, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$, la línea de corriente que pasa por un punto \vec{x}_0 coincide con la senda de todas las partículas fluidas que pasan por ese punto. Si el movimiento es no estacionario, diferentes partículas fluidas que en tiempos distintos pasan por \vec{x}_0 describen distintas trayectorias; como \vec{v} varía, en general, en todos los puntos con el tiempo, ninguna de las sendas tiene por qué coincidir con la línea de corriente que pasa por ese punto (que por supuesto, también depende del tiempo).

Otra forma de describir matemáticamente las líneas de corriente es [en coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3)]:

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)} \quad , \quad (3.6)$$

en la cual no aparece el parámetro λ . Estas dos ecuaciones diferenciales proporcionan dos superficies cuya intersección es la línea de corriente.

Una **superficie de corriente** es aquella formada por las líneas de corriente que se apoyan en una cierta curva $\vec{x}_0(\gamma)$. Si la curva $\vec{x}_0(\gamma)$ es cerrada, tenemos lo que se llama un **tubo de corriente**, el cual no puede ser atravesado por el fluido (ya que ello implicaría que un mismo punto tiene al menos dos velocidades distintas). Las líneas de corriente no pueden intersectar unas con otras, salvo en los puntos donde la velocidad es nula. Por ello la localización de los puntos de velocidad cero, llamados **puntos de remanso**, es tan importante para describir el movimiento de un fluido.

3.4. Traza

Es la línea formada por todas las partículas fluidas que en un instante cualquiera pasaron por un punto \vec{x}_0 . Matemáticamente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{x}(t = \tau) = \vec{x}_0 \quad ; \quad (3.7)$$

eliminando τ en $\vec{x} = \vec{x}(\tau; \vec{x}_0, t)$ se obtiene la traza que pasa por \vec{x}_0 , que, obviamente, depende del tiempo. Si el movimiento es estacionario, senda, línea de corriente y traza por un punto dado coinciden. Físicamente la traza por un cierto punto se puede visualizar inyectando tinta u otro colorante en dicho punto: las distintas partículas fluidas que van pasando por ese punto se impregnan de tinta y van describiendo una línea (que en general dependerá del tiempo) que es la traza.

3.5. Derivada sustancial. Aceleración

Una magnitud fluida en un punto \vec{x} fijo en el espacio (en un sistema de referencia dado) varía con el tiempo no sólo porque el movimiento del fluido sea no estacionario, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, sino también porque distintas partículas fluidas pasan por el punto \vec{x} en diferentes tiempos. Por ello, cuando se desea calcular la variación con respecto al tiempo de una magnitud fluida (escrita según la descripción Euleriana) en un punto \vec{x} y en un instante t , pero para un observador que se mueve con el fluido (*observador Lagrangiano*), lo que obtenemos no es simplemente $\partial/\partial t$, sino algo más *complejo* que se denomina derivada sustancial. Este es el *precio* que hay que pagar por utilizar la descripción Euleriana y hacer uso de ecuaciones de conservación (de masa, cantidad de movimiento y energía; ver lecciones 6-8) que, como veremos, se cumplen siguiendo las partículas fluidas.

Sea $\phi(\vec{x}, t)$ una magnitud fluida cualquiera (por ejemplo, la densidad, la temperatura, etc.). La variación de ϕ para un observador que se mueve con una partícula fluida es

$$\delta\phi = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}, t + \delta t) - \phi(\vec{x}, t) = \delta\vec{x} \cdot \nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}\delta t + O(|\delta\vec{x}|^2, \delta t^2) \quad (3.8)$$

Cuando $\delta t \rightarrow 0$, se tiene

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\delta\vec{x}}{\delta t} \cdot \nabla\phi \quad (3.9)$$

Así, pues, la derivada sustancial, también llamada material, de ϕ , se define:

$$\frac{D\phi}{Dt} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\phi \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \quad (3.10)$$

El primer término representa la derivada local y tiene en cuenta la no estacionariedad del campo fluido; el segundo término es la derivada convectiva y representa la variación de ϕ debido al movimiento del fluido en el entorno del punto considerado.

Una derivada convectiva que se utilizará muy a menudo es la de la velocidad, la cual representa la **aceleración** siguiendo la partícula fluida (es decir la aceleración en la descripción Euleriana pero para un observador Lagrangiano):

$$\vec{a} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \quad (3.11)$$

El primer término es la aceleración local y el segundo la aceleración convectiva, que también se puede escribir como $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla(v^2/2) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$ [ver ecuación

(1.42)]. Obsérvese que, en general, $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \neq \vec{v} \cdot (\nabla\vec{v})$ [ver ecuación (1.15)]; en coordenadas cartesianas esos dos vectores sí son iguales.

3.6. Circulación. Vorticidad. Flujos irrotacionales y solenoidales

La circulación a lo largo de una línea L se define

$$\Gamma \equiv \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad . \quad (3.12)$$

Si la curva L es cerrada, el teorema de Stokes nos dice que la circulación es igual al flujo de $\nabla \wedge \vec{v}$ sobre cualquier superficie S que se apoye en L :

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S d\vec{s} \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) \quad . \quad (3.13)$$

El vector

$$\vec{\omega} \equiv \nabla \wedge \vec{v} \quad (3.14)$$

se denomina **vorticidad**. Como se verá en la próxima lección, $\vec{\omega}$ es una medida de la rotación local del flujo. Un flujo se denomina **irrotacional** (más estrictamente, un campo de velocidad \vec{v} es irrotacional) si $\vec{\omega}$ es cero. Claramente, si un flujo deriva de un potencial, es decir, si existe una función escalar ϕ tal que

$$\vec{v} = \nabla\phi, \quad (3.15)$$

el flujo es irrotacional ya que $\nabla \wedge \nabla\phi \equiv 0$ para cualquier función escalar ϕ . La función ϕ en (3.15) se suele denominar **potencial de velocidades**, y un flujo definido de acuerdo con esa ecuación se denomina potencial. El inverso también es cierto: si un flujo es irrotacional, es también potencial. Esto sigue directamente del teorema de Stokes: si $\nabla \wedge \vec{v} = 0$ en todo el campo fluido,

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3.16)$$

para cualquier curva cerrada L ; esto implica que la integral de \vec{v} entre dos puntos cualesquiera del espacio no depende del camino que elijamos para llegar de un punto a otro, por lo que podemos definir la función

$$\phi(\vec{x}) \equiv \int_0^P \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (3.17)$$

donde P es un punto genérico de vector posición \vec{x} , siendo la integral independiente del camino elegido para llegar desde el origen de coordenadas al punto P . Por otra parte,

$$\phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) = \int_0^{P_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \int_0^{P_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{P_2}^{P_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (3.18)$$

En particular, si elegimos un elemento diferencial a lo largo del eje x ,

$$\phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \int_x^{x+dx} v_x(\xi, y, z) d\xi = dx v_x(x + \theta dx, y, z), \quad (3.19)$$

siendo $0 \leq \theta \leq 1$. En el límite $dx \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x(x, y, z) \quad (3.20)$$

Análogamente se demostraría para los componentes y, z . Obsérvese que el potencial ϕ queda fijado salvo una constante aditiva, que es irrelevante para el campo de velocidad.

En definitiva tenemos que un flujo irrotacional se puede caracterizar por cualquiera de las tres propiedades equivalentes siguientes: (a) $\nabla \wedge \vec{v} \equiv 0$; (b) $\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} \equiv 0$ para cualquier curva cerrada L , y (c) $\vec{v} \equiv \nabla \phi$. Téngase en cuenta que la equivalencia entre (a) y (b) está sujeta a las premisas del teorema de Stokes. Así, en el supuesto de que el campo \vec{v} sea continuo y con derivadas continuas, (b) siempre implica (a), pero para que (a) implique (b) la curva cerrada L tiene que ser simplemente conexa. Más adelante veremos un importante teorema relacionado con los movimientos irrotacionales (Teorema de la Circulación de Kelvin, lección 20) que dice, *a grosso modo*, que si un flujo ideal (no viscoso) es inicialmente irrotacional, permanece indefinidamente irrotacional.

Otro tipo de flujos son los llamados **solenoidales** (estrictamente, campo de velocidad \vec{v} solenoidal), que verifican:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.21)$$

Si \vec{v} se puede escribir como

$$\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi} \quad (3.22)$$

donde $\vec{\psi}$ es un campo vectorial (que se suele denominar **potencial vector**), está claro que \vec{v} es solenoidal, de acuerdo con la identidad $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{\psi}) \equiv 0$. Análogamente a los flujos irrotacionales, el inverso también es cierto: si

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$, existe un vector $\vec{\psi}$ tal que $\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi}$, cumpliéndose, además, que $\vec{\psi}$ es también solenoidal, $\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$ (la demostración no se dará aquí para no desviar más la atención sobre aspectos puramente matemáticos; el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Aris, 1989, sección 3.43).

Por el Teorema de Gauss, un movimiento solenoidal también verifica que el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo,

$$\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = 0 \quad . \quad (3.23)$$

Así, tenemos las tres siguientes propiedades para caracterizar un campo de velocidades solenoidal: (a) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$; (b) $\vec{v} \equiv \nabla \wedge \vec{\psi}$, $\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$, y (c) $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$, para cualquier superficie cerrada S .

El potencial vector (en contraste con el potencial de velocidades) no se suele emplear en la Mecánica de Fluidos, y ello a pesar de que los líquidos (en el supuesto ideal de que se considere su densidad constante) verifican $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ (ver lecciones 6 y 10). Sólo en los flujos solenoidales bidimensionales se utiliza el potencial vector, que en ese caso toma la forma $\vec{\psi} \equiv \psi \vec{n}$, donde \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie del movimiento y ψ es la llamada **función de corriente** (lección 6). Si ocurre, además, que el flujo bidimensional del líquido es ideal, se tiene un flujo solenoidal e irrotacional, y la descripción del movimiento toma una forma muy simple en términos del denominado potencial complejo, definido como $f \equiv \psi + i\phi$, donde ψ es la función de corriente y ϕ el potencial de velocidades (capítulo 21).

Para terminar esta sección conviene recordar que todo campo vectorial \vec{v} se puede descomponer en la forma (representación de Helmholtz):

$$\vec{v} = \nabla\phi + \nabla \wedge \vec{\psi} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \quad , \quad (3.24)$$

es decir, una parte irrotacional y otra solenoidal (para su demostración ver, por ejemplo, Sommerfeld, 1950, sección 20). Sin embargo, esta representación, tan usada en Electromagnetismo, es poco común en la Mecánica de Fluidos.

Referencias.

- R. ARIS, 1989. Capítulo 3.
- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 2.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 2.
- A. SOMMERFELD, 1950. Capítulos 1 y 4.

Capítulo 4

Análisis del movimiento en el entorno de un punto

4.1. Significado del tensor gradiente de velocidades $\nabla\vec{v}$

Se apuntó en el capítulo 2 que los fluidos no presentan resistencia a la deformación (como ocurre en los sólidos elásticos), sino a la velocidad de deformación. Es por ello esencial describir con precisión la velocidad de un punto en relación con la velocidad de un punto cercano. En esta descripción juega un papel primordial el tensor gradiente de velocidad, $\nabla\vec{v}$, que pasamos a analizar.

Sea \vec{v} y $\vec{v} + \delta\vec{v}$ las velocidades en dos puntos cercanos uno de otro, P y Q , con vectores de posición \vec{x} y $\vec{x} + \delta\vec{x}$. La diferencia de velocidades entre los dos puntos es:

$$\delta\vec{v} = \delta\vec{x} \cdot \nabla\vec{v} + O(|\delta\vec{x}|^2), \quad (4.1)$$

donde $\nabla\vec{v}$ está evaluado en el punto $P(\vec{x})$. Si $\delta\vec{x} = \delta l \vec{e}_l$, donde \vec{e}_l es el vector unitario en la dirección $P\vec{Q}$, en el límite $\delta l \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial l} = \vec{e}_l \cdot \nabla\vec{v} \quad , \quad (4.2)$$

de donde el cambio de \vec{v} por unidad de longitud en P en la dirección de $P\vec{Q}$ es la proyección del tensor $\nabla\vec{v}$ en la dirección $P\vec{Q}$. En particular, $\partial\vec{v}/\partial x$, $\partial\vec{v}/\partial y$, $\partial\vec{v}/\partial z$ son los cambios de \vec{v} por unidad de longitud en el punto \vec{x} en las direcciones coordenadas (cartesianas) \vec{e}_x , \vec{e}_y , y \vec{e}_z , respectivamente. Como, en coordenadas cartesianas, $\nabla\vec{v} = \partial v_j / \partial x_i \vec{e}_i \vec{e}_j$, conocido el gradiente de velocidades en tres direcciones mutuamente perpendiculares, es decir, conocido el

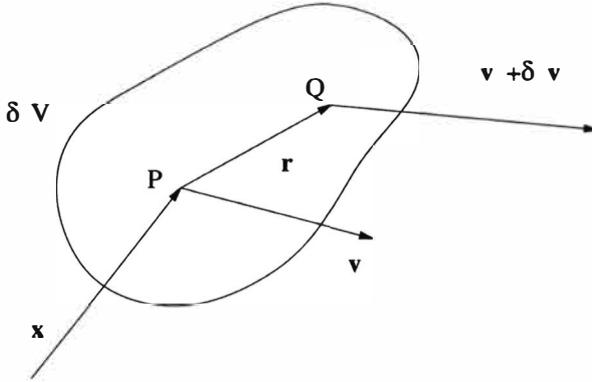


Figura 4.1: Movimiento en el entorno de un punto.

tensor $\nabla \vec{v}$, la variación de la velocidad por unidad de longitud en cualquier dirección \vec{e}_i viene dada por la proyección de $\nabla \vec{v}$ en esa dirección.

4.2. Movimiento relativo de un elemento de volumen de forma arbitraria

Sea P un punto (partícula fluida) con vector posición \vec{x} en el interior de un cierto volumen δV pequeño y Q un punto cercano, también dentro de δV , de coordenadas $\vec{x} + \delta \vec{x}$; por simplicidad escribiremos $\vec{r} \equiv \delta \vec{x}$, siendo $|\vec{r}|$ pequeño. Si la velocidad de P en el instante t es \vec{v} , la del punto Q será $\vec{v} + \delta \vec{v}$, donde

$$\delta \vec{v} = \vec{r} \cdot \nabla \vec{v} + O(|\vec{r}|^2) \tag{4.3}$$

es la velocidad relativa de Q respecto a P en el instante t . Por consiguiente, si δV es pequeño, es suficiente con evaluar $\nabla \vec{v}$ para conocer, con errores del orden de $(\delta V)^{2/3}$ (es decir, del orden de r^2), la velocidad relativa de cualquier punto del volumen δV en relación a la velocidad de P . La expresión anterior se suele escribir en la forma

$$\delta \vec{v} = \vec{r} \cdot \vec{\xi} + \vec{r} \cdot \vec{\gamma} \quad , \tag{4.4}$$

donde

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{v} - (\nabla \vec{v})^T] \quad , \quad \vec{\gamma} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T] \quad , \tag{4.5}$$

son las partes antisimétricas y simétricas del tensor $\nabla \vec{v}$, respectivamente $[(\nabla \vec{v})^T$ denota el tensor transpuesto de $\nabla \vec{v}$]. De hecho la descomposición anterior es

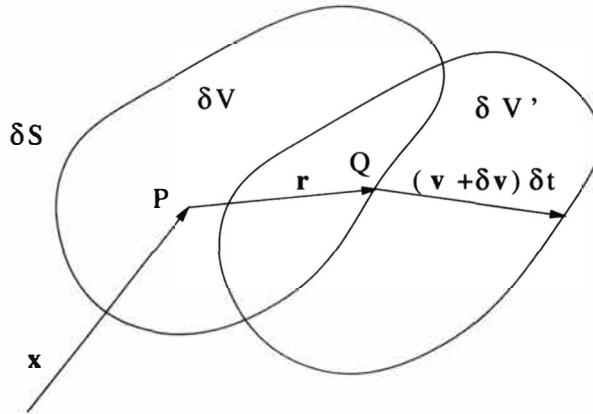


Figura 4.2: Cambio unitario de volumen.

equivalente a la representación de Helmholtz de \vec{v} [ecuación (3.24)]:

$$\nabla \vec{v} = \nabla(\nabla \wedge \vec{\psi} + \nabla \phi) \quad , \quad (4.6)$$

siendo el primer término un tensor antisimétrico (de traza nula, $\nabla \cdot \nabla \wedge \vec{\psi} = 0$) y el segundo un tensor simétrico. Sin embargo, el usar ϕ y $\vec{\psi}$ en vez de \vec{v} no introduce ninguna ventaja.

El tensor antisimétrico $\vec{\xi}$ tiene, por supuesto, traza nula ($\xi_{ii} = 0$) y verifica $\xi_{ij} = -\xi_{ji}$. El término $\vec{r} \cdot \vec{\xi}$ se puede escribir como

$$\vec{r} \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{2} \vec{r} \cdot [\nabla \vec{v} - (\nabla \vec{v})^T] = \frac{1}{2} [(\vec{r} \cdot \nabla) \vec{v} - (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{r}] = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{r}, \quad (4.7)$$

donde $\vec{\omega}$ es la vorticidad. Por tanto, $\vec{r} \cdot \vec{\xi}$ representa una rotación de \vec{PQ} alrededor de P con velocidad angular $\vec{\omega}/2 = (\nabla \wedge \vec{v})/2$. Como el punto Q se ha elegido arbitrariamente en δV , el primer término de (4.4), $\vec{r} \cdot \vec{\xi}$, representa una **rotación como sólido rígido** del volumen δV alrededor de P con velocidad angular $\vec{\omega}/2$.

Examinemos ahora el significado del segundo término de (4.4), $\vec{r} \cdot \vec{\gamma}$. En primer lugar vamos a demostrar que la traza de $\nabla \vec{v}$, que coincide con la traza de $\vec{\gamma}$ al ser nula la traza de $\vec{\xi}$ [traza($\nabla \vec{v}$) = traza($\vec{\gamma}$) = $\nabla \cdot \vec{v}$], representa un cambio unitario de volumen. En efecto, el cambio unitario de δV debido al momento del fluido se puede escribir como

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta V} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta V' - \delta V}{\delta t} \quad , \quad (4.8)$$

donde $\delta V'$ es el volumen en que se transforma δV después de un tiempo δt . Ahora bien,

$$\delta V' - \delta V = \int_{\delta S} d\vec{s} \cdot (\vec{v} + \delta\vec{v})\delta t \quad , \quad (4.9)$$

donde $\vec{v} + \delta\vec{v}$ es la velocidad de los puntos (partículas fluidas) que se encuentran en la superficie δS que engloba a δV . Como \vec{v} es la velocidad del punto $P(\vec{x})$, constante pues sobre δS , el primer término de la integral es cero al ser δS una superficie cerrada. Por otra parte, sustituyendo $\delta\vec{v} = \vec{r} \cdot \nabla\vec{v}$, donde $\nabla\vec{v}$ está evaluado en \vec{x} (y por tanto constante en la integral), y aplicando el teorema de Gauss, se tiene

$$\delta V' - \delta V = \int_{\delta V} dV(\vec{r})\nabla_{\vec{r}} \cdot [\vec{r} \cdot \nabla\vec{v}(\vec{x})]\delta t \quad , \quad (4.10)$$

donde la primera divergencia es con respecto a la variable \vec{r} , cuyo origen es el punto P , estando extendida la integral a todos los puntos \vec{r} de δV . Como $\nabla_{\vec{r}} \cdot [\vec{r} \cdot \nabla\vec{v}] = \bar{\bar{I}} : \nabla\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$, donde $\bar{\bar{I}}$ es el tensor unidad, y como $\nabla \cdot \vec{v}$ es constante en δV , se llega a

$$\delta V' - \delta V = \delta V \delta t \nabla \cdot \vec{v} \quad , \quad (4.11)$$

de donde

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \quad . \quad (4.12)$$

Así, pues, la traza de $\bar{\bar{\gamma}}$ (y por tanto de $\nabla\vec{v}$, o lo que es lo mismo, la divergencia del vector velocidad) representa la **velocidad de cambio de volumen por unidad de volumen** en el entorno del punto \vec{x} cuya velocidad es \vec{v} en un instante dado. Por esta razón se suele descomponer el tensor $\bar{\bar{\gamma}}$ en dos, uno con traza nula y otro diagonal:

$$\bar{\bar{\gamma}} \equiv \bar{\bar{\gamma}}' + \bar{\bar{\gamma}}'' \equiv [\bar{\bar{\gamma}} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\bar{\bar{I}}] + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\bar{\bar{I}} \quad . \quad (4.13)$$

La componente de $\delta\vec{v}$ proveniente de $\bar{\bar{\gamma}}''$, es decir, $\vec{r} \cdot \bar{\bar{\gamma}}'' = (\nabla \cdot \vec{v})\vec{r}/3$, representa un alargamiento (o contracción) del segmento $\vec{r} \equiv P\vec{Q}$ a un *ritmo* $(\nabla \cdot \vec{v})/3$ por unidad de longitud, que se traduce en una velocidad de dilatación volumétrica unitaria $\nabla \cdot \vec{v}$, como acabamos de ver. Por último, el significado de la parte sin traza y simétrica del tensor de velocidades, $\bar{\bar{\gamma}}'$, es más fácil visualizarlo en un sistema de coordenadas en el que este tensor tenga la forma

$$\overline{\overline{\gamma}} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

donde a, b y c son constantes. Obsérvese que el hecho de que $\overline{\overline{\gamma}}$ no tenga traza no significa que los elementos de su diagonal sean nulos, sino que la suma es cero (recuérdese que la traza de un tensor permanece invariable al cambiar de sistema de coordenadas). Por otra parte, siempre existe un sistema coordenado en el que $\overline{\overline{\gamma}}$ tiene la forma (4.14). (Para demostrarlo basta tomar los ejes principales de $\overline{\overline{\gamma}}$ y comprobar que en estos ejes la ecuación $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}} \cdot \vec{r} = 0$ proporciona un cono sobre el que es posible construir tres vectores ortogonales al ser la traza de $\overline{\overline{\gamma}}$ nula.) Si tomamos un cubo unitario en este nuevo sistema coordenado con uno de sus vértices en el origen, es decir, un cubo definido por lo tres vectores coordenados $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, al cabo de un diferencial de tiempo δt este cubo se transforma, por acción del movimiento del fluido asociado a $\overline{\overline{\gamma}}$, en un paralelepípedo definido por $(\vec{e}_1 \cdot \overline{\overline{\gamma}} \delta t, \vec{e}_2 \cdot \overline{\overline{\gamma}} \delta t, \vec{e}_3 \cdot \overline{\overline{\gamma}} \delta t)$, que tiene el mismo volumen inicial al ser la traza de $\overline{\overline{\gamma}}$ nula. Así, $\vec{r} \cdot \overline{\overline{\gamma}}$ produce una distorsión de δV sin cambiar su volumen. Por ello, $\overline{\overline{\gamma}}$ se denomina **tensor de velocidades de deformación**.

Resumiendo, el movimiento de un volumen fluido (de forma arbitraria) que contiene una partícula fluida P se puede considerar como la superposición de un movimiento de traslación con P (a velocidad \vec{v}), una rotación como sólido rígido alrededor de P con una velocidad angular igual a la mitad de la vorticidad $\vec{\omega}$ evaluada en P , una expansión uniforme en todas las direcciones a partir de P con una velocidad media igual a $(\nabla \cdot \vec{v})/3$ (evaluada en P), y una distorsión que se puede describir como un movimiento puramente de *cortadura* en tres direcciones mutuamente perpendiculares. Expresado en forma matemática, los puntos $\vec{x} + \vec{r}$ del volumen δV tienen las siguientes cuatro velocidades superpuestas:

$$\vec{v} + \vec{r} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{v} + \frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{r} + \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\vec{r} + \left[\frac{1}{2}(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \vec{v} \overline{\overline{I}} \right] \cdot \vec{r} \quad , \quad (4.15)$$

donde \vec{v} está evaluado en el punto \vec{x} .

4.3. Ejemplo: Deformación de una superficie esférica

Para ilustrar lo anterior consideramos el caso en que δV es el volumen contenido en una pequeña esfera de radio ϵ centrada en \vec{x} . Inicialmente los puntos de la superficie esféricas están definidos, en relación a su centro, por $\vec{r} = \epsilon \vec{n}$, donde \vec{n} es la normal a la esfera. Después de un tiempo δt la esfera se transforma en una superficie que viene dada, en relación al punto $\vec{x} + \vec{v} \delta t$ (es decir, no tenemos en cuenta el movimiento puramente translacional) por:

$$\vec{r}' = \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{n} \cdot \nabla \vec{v} \delta t = \epsilon \vec{n} + \epsilon \vec{n} \cdot \bar{\bar{\gamma}} \delta t \quad , \quad (4.16)$$

donde, obviamente, el movimiento rotacional dado por el tensor $\bar{\bar{\xi}}$ no contribuye. Con errores del orden δt^2 , la expresión anterior se puede escribir como

$$\vec{r}' \simeq \epsilon \vec{n} + \bar{\bar{\gamma}} \cdot \vec{r} \delta t \quad ; \quad (4.17)$$

multiplicando escalarmente por \vec{r} ,

$$r'^2 - \vec{r}' \cdot \bar{\bar{\gamma}} \cdot \vec{r} \delta t = \epsilon \vec{n} \cdot \vec{r}' = \epsilon^2 + \vec{r} \cdot \bar{\bar{\gamma}} \cdot \vec{r} \delta t + O(\delta t^2) \quad , \quad (4.18)$$

es decir,

$$r'^2 - 2\vec{r}' \cdot \bar{\bar{\gamma}} \cdot \vec{r} \delta t = \epsilon^2 + O(\delta t^2) \quad . \quad (4.19)$$

Luego, si δt es pequeño, la superficie esférica se transforma en un elipsoide cuyos ejes son, como veremos a continuación, los autovectores o direcciones principales del tensor $\bar{\bar{\gamma}}$. En efecto, en coordenadas cartesianas, el elipsoide tiene por ecuación

$$x_i x_j A_{ij} = \epsilon^2 \quad , \quad (4.20)$$

donde $A_{ij} = A_{ji} = \delta_{ij} - 2\gamma_{ij} \delta t$, siendo δ_{ij} la delta de Kronecker. Los ejes del elipsoide se pueden obtener imponiendo que el vector normal en un punto de la superficie, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} A_{ij} x_i x_j = A_{ij} x_j \delta_{ik} + A_{ij} x_i \delta_{jk} = 2A_{kj} x_j \quad , \quad (4.21)$$

sea paralelo al vector posición de ese punto:

$$A_{kj} x_j \equiv (\delta_{kj} - 2\gamma_{kj} \delta t) x_j = \lambda x_k = \lambda \delta_{kj} x_j \quad ,$$

$$[(1 - \lambda)\delta_{kj} - 2\gamma_{kj}\delta t]x_j = 0 \quad ,$$

$$\left[\bar{\gamma} - \frac{1 - \lambda \bar{\gamma}}{2\delta t} \bar{I} \right] \cdot \bar{r} = 0, \quad (4.22)$$

que es la ecuación de los autovectores de $\bar{\gamma}$. Para hallar el volumen del elipsoide tomamos los ejes principales, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, dados por la solución unitaria de (4.22). En estos ejes $\bar{\gamma}$ es diagonal con elementos k_1, k_2, k_3 , que son los autovalores de $\bar{\gamma}$, los cuales son reales al ser $\bar{\gamma}$ simétrico. Los tres ejes del elipsoide, \bar{a}_i , $i = 1, 2, 3$, vienen dados por

$$\bar{a}_i = \epsilon \bar{e}_i + \epsilon \bar{e}_i \cdot \bar{\gamma} \delta t + O(\delta t^2) \simeq \epsilon \bar{e}_i (1 + k_i \delta t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (4.23)$$

Por tanto, el volumen del elipsoide es:

$$\begin{aligned} V' &= \frac{4}{3} \pi a_1 a_2 a_3 = \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 (1 + k_1 \delta t)(1 + k_2 \delta t)(1 + k_3 \delta t) \\ &= \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 + \frac{4}{3} \pi \epsilon^3 (k_1 + k_2 + k_3) \delta t + O(\delta t^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Como la traza de un tensor no varia al cambiar de coordenadas, $k_1 + k_2 + k_3 = \nabla \cdot \bar{v}$; llamando $V = 4\pi\epsilon^3/3$ al volumen de la esfera inicial, se tiene

$$\frac{1}{V} \frac{V' - V}{\delta t} = \nabla \cdot \bar{v} \quad , \quad (4.25)$$

como ya demostramos de forma general.

Referencias.

- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 2.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 2.

Capítulo 5

Transporte convectivo

5.1. Flujo convectivo a través de una superficie

Sea S una superficie y ϕ una magnitud fluida por unidad de volumen (es decir, una *densidad*, tal como la densidad másica, ρ , la densidad de cantidad de movimiento $\rho\vec{v}$, etc.). Para evaluar la *cantidad* de la magnitud ϕ que atraviesa S debido al movimiento del fluido, sabemos que en un tiempo δt alcanzan el elemento de superficie $\delta s\vec{n}$ de S todas las partículas fluidas contenidas en el volumen $\vec{v} \cdot \vec{n} \delta t \delta s$ (ver figura 5.1), estando la velocidad del fluido \vec{v} evaluada en δs (primera aproximación cuando $\delta t \rightarrow 0$). Por tanto, por unidad de tiempo, la cantidad de la magnitud ϕ que atraviesa la superficie δs debido a la velocidad del fluido (flujo convectivo) es $\phi\vec{v} \cdot \vec{n} \delta s$. A través de toda la superficie S el flujo convectivo total de ϕ es:

$$\int_S \phi\vec{v} \cdot \vec{n} ds \equiv \int_S \phi\vec{v} \cdot d\vec{s} \quad . \quad (5.1)$$

Si ϕ es un escalar (por ejemplo, la densidad másica ρ), la densidad $\phi\vec{v}$ se suele denominar vector de flujo de ϕ ($\rho\vec{v}$ sería el flujo másico). Si ϕ es un vector (por ejemplo, la densidad de cantidad de movimiento $\rho\vec{v}$), $\phi\vec{v}$ es un tensor de flujo ($\rho\vec{v}\vec{v}$ es el tensor flujo de cantidad de movimiento).

Cuando la superficie S es cerrada y $\phi\vec{v}$ es continua, podemos aplicar el teorema de Gauss y obtener

$$\int_S \phi\vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot (\phi\vec{v}) dV \quad . \quad (5.2)$$

Así, $\nabla \cdot (\phi\vec{v})$ representa el flujo convectivo de la cantidad ϕ por unidad de volumen. En particular, ya vimos que $\nabla \cdot \vec{v}$ es la velocidad de dilatación cúbica unitaria, es decir, el flujo convectivo de *volumen* por unidad de volumen.

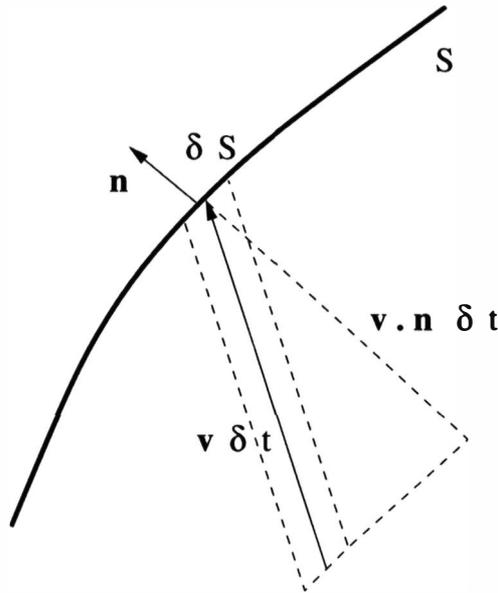


Figura 5.1: Flujo convectivo a través de una superficie.

Analogamente, $\nabla \cdot \rho \vec{v}$ sería el flujo convectivo de masa por unidad de volumen, $\nabla \cdot \rho \vec{v} \vec{v}$ el flujo convectivo de cantidad de movimiento por unidad de volumen, etc.

5.2. Teorema de Transporte de Reynolds

Veremos en las lecciones siguientes (lecciones 6-8) que las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos provienen de aplicar los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a volúmenes fluidos. Como estos volúmenes se mueven con el fluido, es conveniente expresar de forma adecuada la variación de las magnitudes fluidas en el interior de un volumen fluido a lo largo de su movimiento. Esto es lo que nos proporciona el Teorema de Transporte de Reynolds, que se puede considerar como una extensión a tres dimensiones de la fórmula de Leibnitz (1.70).

Sea $V_f(t)$ un volumen fluido, y ϕ una magnitud por unidad de volumen como las consideradas en la sección anterior. La cantidad total de ϕ en V_f varía en el tiempo por dos razones: porque varía ϕ dentro de V_f si el movimiento no es estacionario, y porque puede haber flujo convectivo de ϕ a través de la superficie fluida $S_f(t)$ que encierra al volumen fluido. Matemáticamente, se tiene:

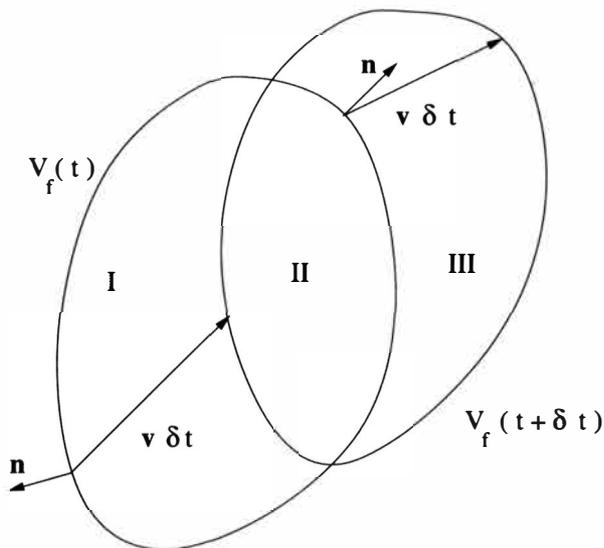


Figura 5.2: Teorema de Transporte de Reynolds.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{II} + \Phi_{III})_{t+\delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_I + \Phi_{II})_{t+\delta t} - (\Phi_I + \Phi_{II})_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{III})_{t+\delta t} - (\Phi_I)_{t+\delta t}}{\delta t}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde Φ representa la cantidad total de ϕ ($\Phi = \int \phi dV$) en alguno de los volúmenes I, II ó III (ver figura 5.2). El primer término de la última expresión es la variación de ϕ en V_f suponiendo que V_f está *anclado* en el tiempo t , mientras que el segundo término se puede expresar como el flujo de ϕ a través de S_f en el instante t ; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV &= \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{S_1} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds \delta t + \int_{S_2} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds \delta t \right] \\ &= \int_{V_f} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_f} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $S_1 + S_2 = S_f$. Este es el Teorema de Transporte de Reynolds aplicado a un volumen fluido, y nos dice que la velocidad de variación de ϕ en un volumen fluido $V_f(t)$ es igual a la velocidad de variación de ϕ dentro de V_f evaluado en el instante t , más el flujo convectivo de ϕ a través de la superficie S_f , evaluado también en el tiempo t .

Este teorema es también muy útil cuando se aplica a volúmenes que no son volúmenes fluidos. Si $V_c(t)$ es un **volumen de control** arbitrario cuya superficie $S_c(t)$ se mueve con una velocidad $\vec{v}_c(\vec{x}, t)$, que no tiene por qué coincidir con la del fluido (muchas veces nos interesa que \vec{v}_c sea nula, es decir, utilizar un volumen de control fijo en el espacio), aplicando el teorema anterior tenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v}_c \cdot \vec{n} ds \quad , \quad (5.5)$$

ya que en la deducción anterior lo que cuenta es la velocidad de la superficie, coincida o no con la del fluido. Si en el instante t el volumen de control coincide con un cierto volumen fluido, $V_c(t) = V_f(t)$ [por supuesto, $V_c(t + \delta t)$ no tiene por qué coincidir con $V_f(t + \delta t)$], se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV = \int_{V_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \int_{S_c} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \phi dV + \int_{S_c} \phi (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds . \quad (5.6)$$

Esta última forma del teorema nos permitirá aplicar las leyes de conservación [tomando ϕ igual a ρ , $\rho \vec{v}$ o $\rho(e + v^2/2)$] a volúmenes de control arbitrarios, ya que expresa las variaciones de ϕ en volúmenes fluidos que en cada instante coincide con el volumen de control elegido. Así, podremos utilizar **formas integrales de las ecuaciones de conservación** aplicadas a volúmenes arbitrarios. Si $\vec{v}_c = \vec{v}$, se recupera, por supuesto, la ecuación (5.4). Por otra parte, si el volumen de control es fijo, $\vec{v}_c = 0$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \phi dV + \int_{S_c} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad . \quad (5.7)$$

Parte III

**ECUACIONES GENERALES
DE LOS FLUIDOS**

Capítulo 6

Ecuación de continuidad

En esta lección y en las dos siguientes se aplicarán los principios generales de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía a un volumen fluido para obtener las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos. La aplicación del Teorema de Transporte de Reynolds nos permitirá, por una parte, obtener ecuaciones en forma integral válidas en cualquier volumen de control, las cuales serán muy útiles cuando se desee información *global* de un determinado proceso; por otra parte, dicho teorema junto con el Teorema de Gauss nos proporcionará formas diferenciales de las ecuaciones, que son necesarias para el conocimiento detallado de los campos de densidades, velocidades, temperaturas, etc. del fluido. Para que estas ecuaciones constituyan un *problema cerrado*, habrá que hacer uso de algunos conocimientos cinemáticos considerados en las lecciones anteriores, de ecuaciones constitutivas, es decir, leyes de transporte molecular, y de ecuaciones de estado del fluido. Estas últimas ecuaciones se irán introduciendo a lo largo de estas tres lecciones.

6.1. Principio de conservación de la masa

La masa total contenida en un volumen fluido cualquiera, $V_f(t)$, se conserva:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho dV = 0 \quad , \quad (6.1)$$

donde $\rho(\vec{x}, t)$ es la densidad del fluido.

Esta ecuación puede ser referida a cualquier volumen de control $V_c(t)$ mediante la aplicación del Teorema de Transporte de Reynolds [haciendo $\phi = \rho$ en (5.6)]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (6.2)$$

Físicamente esta ecuación expresa que la variación total de la masa contenida en $V_c(t)$, más el flujo convectivo *neto* de masa a través de la superficie $S_c(t)$ es igual a cero. Por otra parte, aplicando dicho teorema al volumen fluido $V_f(t)$ y haciendo uso del Teorema de Gauss se tiene

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0. \quad (6.3)$$

Como V_f es un volumen arbitrario, el integrando tiene que ser nulo, proporcionando la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (6.4)$$

que se suele denominar **ecuación de continuidad** o ecuación (diferencial) de conservación de la masa. El primer término representa la variación temporal de la masa por unidad de volumen, mientras que el segundo es el flujo convectivo de masa por unidad de volumen.

Los **líquidos** son, como ya sabemos, prácticamente incompresibles, es decir, su densidad es, a efectos prácticos, constante. Por tanto, la ecuación de continuidad de un líquido toma la forma simple

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (6.5)$$

o, en forma integral,

$$\int_{S_c} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0; \quad (6.6)$$

es decir, el flujo neto de masa a través de cualquier superficie cerrada es nulo. La ecuación (6.5) también nos dice que el campo de velocidades de un líquido es solenoidal, existiendo una función $\vec{\psi}$ tal que

$$\vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi}, \quad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0. \quad (6.7)$$

Sin embargo, usar la función $\vec{\psi}$ en lugar del campo de velocidades \vec{v} no tiene ninguna ventaja, salvo que $\vec{\psi}$ tenga una sola componente (movimientos bidimensionales; ver sección siguiente). Una particularidad importante de los flujos solenoidales es que dado un tubo de corriente, el **caudal** que circula por su interior es el mismo en todas las secciones transversales; es decir, $Q \equiv \int_{S_T} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, donde S_T es cualquier sección transversal del tubo de corriente, es invariante

a lo largo del mismo. Esto es consecuencia de (6.6) y de que el fluido no puede atravesar la superficie lateral del tubo de corriente.

La ecuación de continuidad también se simplifica para los gases ($\rho \neq \text{constante}$) cuando el movimiento es estacionario:

$$\nabla \cdot \rho \vec{v} = 0. \quad (6.8)$$

En forma integral,

$$\int_{S_c} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = 0, \quad (6.9)$$

también expresa que el flujo neto de masa a través de cualquier superficie cerrada es cero. En el flujo estacionario de un gas, la densidad de cantidad de movimiento, $\rho \vec{v}$, es solenoidal:

$$\rho \vec{v} = \nabla \wedge \vec{\psi}. \quad (6.10)$$

Consecuencia de (6.9) es que el **gasto** que circula por el interior de un tubo de corriente, $G \equiv \int_{S_T} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, permanece constante a lo largo de él.

6.2. Función de corriente

Cuando el flujo de un fluido incompresible [ecuación (6.5)] o el flujo estacionario de un gas [ecuación (6.8)] es bidimensional (plano, con simetría axial, etc.), el potencial vector $\vec{\psi}$ tiene una sola componente. En estos casos la especificación del flujo se simplifica enormemente puesto que el campo de velocidades queda completamente determinado con sólo una función escalar ψ , que por razones que ahora veremos se denomina función de corriente.

Consideremos, por ejemplo, el flujo bidimensional plano de un líquido cuyo campo de velocidades es perpendicular al eje z . En coordenadas cartesianas tendríamos:

$$\vec{v} = \nabla \wedge \psi \vec{e}_z, \quad (6.11)$$

es decir,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.12)$$

que cumple idénticamente la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (6.13)$$

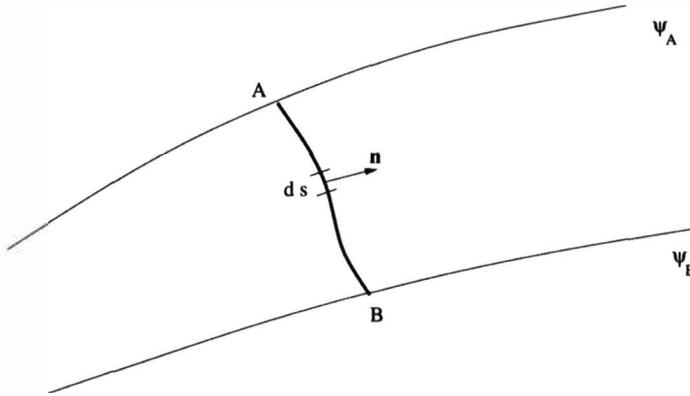


Figura 6.1: Caudal entre dos líneas de corriente.

en virtud de la igualdad de las derivadas cruzadas. En este caso, las curvas $\psi = \text{constante}$ representan líneas de corriente:

$$d\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy,$$

$$d\psi = 0 \quad , \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}, \quad (6.14)$$

de aquí su nombre. Otra propiedad interesante de la función ψ es que el caudal (bidimensional) entre dos líneas de corriente viene dado por la diferencia entre los valores de ψ en esas líneas de corriente. En efecto, si dos líneas de corriente A y B vienen dadas por $\psi = \psi_A$ y $\psi = \psi_B$, el caudal entre ellas es (ver figura 6.1):

$$Q = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad . \quad (6.15)$$

En el caso de un flujo bidimensional (plano) y estacionario de un gas, todo lo anterior es también válido sin más que sustituir \vec{v} por $\rho\vec{v}$.

Otros flujos incompresibles y bidimensionales no planos también admiten función de corriente, ya que lo único que se necesita es que el potencial vector tenga una sola componente en algún sistema ortogonal de coordenadas. Sin embargo, lo más conveniente para hallar la función de corriente es escribir la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ en las coordenadas correspondientes y *construir* la función de corriente que satisfaga idénticamente esa ecuación teniendo en cuenta la igualdad de las derivadas cruzadas. Por ejemplo, el flujo

incompresible y axilsimétrico con sólo dos componentes de la velocidad, v_r y v_θ , tiene por ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \quad (6.16)$$

Claramente, si definimos ψ mediante

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6.17)$$

la ecuación (6.16) se satisface idénticamente. La elección de la función de corriente en este caso no es única. Otros ejemplos en coordenadas cilíndricas y esféricas se verán en los capítulos 17 y 21.

6.3. Conservación de las especies químicas

Un fluido, por lo general, no está constituido por una sola especie química. Así, por ejemplo, el aire contiene mayoritariamente nitrógeno y oxígeno, además de otras muchas especies químicas en concentraciones pequeñas. Sin embargo, en muchas situaciones, como ocurre en el aire en las condiciones habituales, los procesos de reacción química y de difusión entre las especies no existen o son poco importantes, por lo que no es necesario considerar la ecuación de conservación de cada especie química por separado, siendo suficiente la ecuación de conservación de la masa total considerada anteriormente. Existen otros procesos fluidos (en particular, la mayoría de los que ocurren en la industria química) en los que las concentraciones de las distintas especies varían temporal y espacialmente debido a las reacciones químicas de unas especies con otras y debido a la difusión *molecular* de unas especies en el seno de otras. Para estudiar estos procesos no basta tener en cuenta la conservación de la masa total, sino que es necesario considerar por separado la conservación de la masa de cada especie química presente en el fluido.

Consideremos un fluido constituido por N especies químicas distintas. La ecuación de conservación de la masa de una especie i genérica aplicada a un volumen fluido $V_f(t)$ sería:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho_i dV = \int_{V_f(t)} \omega_i dV; \quad (6.18)$$

es decir, la velocidad de variación (aumento) de la masa de la especie i contenida en V_f (ρ_i es la densidad volumétrica de la especie i) es igual a la velocidad de producción de la especie i por reacciones químicas entre las distintas especies presentes en el fluido (ω_i es la velocidad de producción de la especie i por

unidad de volumen). En lugar de la densidad de la especie i se suele utilizar su fracción másica o su fracción molar. Es tradición en la Mecánica de Fluidos utilizar la **fracción másica** Y_i , definida como la masa de la especie i dividida por la masa total:

$$Y_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad . \quad (6.19)$$

Claramente se verifica

$$\sum_{i=1}^N Y_i = 1 \quad . \quad (6.20)$$

Utilizando Y_i en vez de ρ_i en (6.18) y aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds, se tiene:

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} dV + \int_{S_f} \rho Y_i \vec{v}_i \cdot \vec{n} ds = \int_{V_f} \omega_i dV \quad . \quad (6.21)$$

En la expresión anterior, \vec{v}_i es la velocidad de la especie i (por supuesto macroscópica, en el sentido dado en la sección 2.2), que no coincide, en general, con la velocidad media del fluido \vec{v} . La diferencia entre estas dos velocidades se suele denominar **velocidad de difusión** de la especie i :

$$\vec{v}_{di} \equiv \vec{v}_i - \vec{v} \quad . \quad (6.22)$$

Así, el movimiento de una determinada especie i en el seno de una mezcla se puede descomponer en dos partes: un movimiento *medio* común a todas las especies con velocidad \vec{v} , y un movimiento de *difusión* de la especie i en el seno de las demás especies con velocidad \vec{v}_{di} . En otras palabras, la especie i no sólo es arrastrada por el movimiento medio del fluido, sino que, además, se difunde debido, principalmente, a las diferencias de concentración de la especie i existente en el medio. El proceso de difusión es de origen molecular, a diferencia del movimiento de arrastre o convectivo debido al movimiento global del fluido. Este proceso molecular, junto con otros procesos difusivos moleculares de transporte de cantidad de movimiento y de energía serán considerados globalmente en la lección 9. De momento enunciaremos, en esta lección y en las dos siguientes, las leyes fenomenológicas que los describe.

Introduciendo (6.22) en (6.21) y aplicando el Teorema de Gauss se tiene:

$$\int_{V_f} \frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}) dV + \int_{V_f} \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_{di}) dV = \int_{V_f} \omega_i dV \quad , \quad (6.23)$$

o, puesto que V_f es arbitrario,

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}_{di}) = \omega_i. \quad (6.24)$$

Por definición,

$$\vec{v} \equiv \sum_{i=1}^N Y_i \vec{v}_i, \quad (6.25)$$

de forma que, evidentemente, la suma ponderada con las fracciones másicas de todas las velocidades de difusión es nula:

$$\sum_{i=1}^N Y_i \vec{v}_{di} = \vec{0}. \quad (6.26)$$

Como, por otra parte, la conservación total de la masa exige

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 0, \quad (6.27)$$

la suma extendida a todas las especies i de las ecuaciones (6.24) proporciona, como era de esperar, la ecuación de continuidad (6.4). Por lo general, dado un fluido con N especies químicas, se suele utilizar la ecuación de continuidad y $N - 1$ ecuaciones para $N - 1$ de las especies, constituyendo así un conjunto de N ecuaciones para la densidad global ρ y $N - 1$ fracciones másicas Y_i [la N -ésima fracción másica se obtendría de (6.20)]. Sin embargo, en estas ecuaciones tampoco conocemos la velocidad media del fluido \vec{v} , las N velocidades de difusión \vec{v}_{di} y las velocidades de reacción química ω_i . De la velocidad media \vec{v} no nos preocupamos por ahora ya que en la lección siguiente escribiremos una ecuación adicional para ella. De las velocidades de reacción química ω_i no nos ocupamos en esta asignatura: la Cinética Química proporciona expresiones de ω_i en función de las concentraciones Y_i y de la temperatura, que tomaremos como datos. Obsérvese que ω_i es la velocidad de producción de la especie i (por unidad de volumen), por lo que tendrá en cuenta todas las reacciones químicas en que participe la especie i . Por último, de las velocidades de difusión nos ocupamos a continuación.

6.4. Ley de Fick

Desde un punto de vista experimental (o fenomenológico), Fick estableció en 1855 que la difusión másica de una especie i en el seno de un fluido

isotermo es proporcional al gradiente de concentración de la especie i , siendo el sentido el de las concentraciones decrecientes:

$$Y_i \vec{v}_{di} = -D_i \nabla Y_i. \quad (6.28)$$

D_i es el llamado **coeficiente de difusión** (o difusividad másica) de la especie i en la mezcla, que, en general, es una función de las concentraciones Y_i y de la temperatura, teniendo unidades de longitud al cuadrado dividido por tiempo.

Estrictamente, la ley de Fick tal y como está expresada en (6.28) es sólo válida para mezclas binarias y cuando no hay gradientes de temperatura en el medio. Los gradientes de temperatura producen una difusión másica adicional denominada **difusión térmica** (o efecto Soret, quien descubrió este fenómeno) proporcional al gradiente de temperatura. Sin embargo, esta difusión térmica es poco importante salvo en condiciones muy especiales tales como gradientes térmicos muy acusados en combinación con disparidad en los pesos moleculares de las especies químicas, por lo que no será considerada aquí. Por otra parte, la existencia de más de dos especies químicas en la mezcla fluida introduce difusiones adicionales de la especie i proporcionales a los gradientes de las concentraciones de las otras especies. En una mezcla binaria (especies A y B) se tiene exactamente (en ausencia de difusión térmica):

$$\begin{aligned} Y_A \vec{v}_{dA} &= -D_{AB} \nabla Y_A, \\ Y_B \vec{v}_{dB} &= -D_{BA} \nabla Y_B = D_{AB} \nabla Y_A, \end{aligned} \quad (6.29)$$

donde se ha hecho uso de $Y_A + Y_B = 1$ en la última igualdad [téngase en cuenta que la relación (6.26) exige $D_{AB} = D_{BA}$]. Si la mezcla no es binaria, la relación (6.28) es aproximadamente válida si la especie i constituye una *traza* en la mezcla, o si son dos los componentes mayoritarios de la misma y el componente i es uno de ellos, siendo en ambos casos D_i un coeficiente de difusión *efectivo* de la especie i en el seno de los restantes constituyentes de la mezcla. Si esto no es así, la expresión para la velocidad de difusión de la especie i se complica enormemente al entrar en consideración los gradientes de concentración de otras especies.¹ En lo que sigue, supondremos que la expresión (6.28) es válida.

Sustituyendo la ley de Fick (6.28) en la ecuación (6.24) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho Y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_i \vec{v}) - \nabla \cdot (\rho D_i \nabla Y_i) = \omega_i. \quad (6.30)$$

¹Ver, por ejemplo, Bird et al., 1960, donde también se tiene en cuenta la difusión térmica.

El significado físico de los distintos términos de esta ecuación es, de izquierda a derecha: variación local de la masa de la especie i por unidad de volumen; flujo másico convectivo de la especie i por unidad de volumen; flujo másico difusivo (o molecular) de la especie i por unidad de volumen, y velocidad de producción de la especie i por reacción química por unidad de volumen. Esta ecuación se puede escribir de forma más compacta teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (6.4) y usando el operador derivada sustancial (sección 3.3):

$$\rho \frac{DY_i}{Dt} = \omega_i + \nabla \cdot (\rho D_i \nabla Y_i). \quad (6.31)$$

En algunas situaciones de interés práctico ocurre que la velocidad media del fluido \vec{v} es nula, que no hay reacción química y que el producto ρD_i es aproximadamente constante, con lo que el proceso (que es puramente difusivo) está gobernado por la ecuación clásica de la difusión:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} = D_i \nabla^2 Y_i, \quad (6.32)$$

también llamada *ecuación del calor*, ya que se obtiene una ecuación similar para la evolución de la temperatura bajo ciertas condiciones (ver sección 10.1.1).

Para calcular el coeficiente de difusión D_i hay que hacer uso, en gases, de la Teoría Cinética y de las propiedades moleculares de la sustancia ya que, como dijimos, la difusión es un proceso de índole molecular. En la lección 9 daremos algunas nociones de Teoría Cinética y de como se obtiene D_i y otros coeficientes asociados al transporte difusivo (molecular) de cantidad de movimiento y energía. Sin embargo, una teoría cinética rigurosa sólo existe para los gases monoatómicos y, con cierta aproximación, para los gases no monoatómicos, por lo que la mayoría de las veces se utilizan expresiones semiempíricas para D_i y otros *coeficientes de transporte*. En la lección 9 veremos también que la ley de Fick y otras leyes *lineales* que asocian flujos difusivos con gradientes de ciertas magnitudes fluidas son válidas si se cumple la hipótesis de equilibrio termodinámico local, hipótesis que se formulará en la lección 8.

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.

- R. B. BIRD, W. E. STEWART y E. LIGHTFOOT, 1960. Capítulos 16 y 18.
- S.R. de GROOT y P. MAZUR, 1984. Capítulos II y XI.
- D. E. ROSNER, 1986. Capítulos 2 y 3.

Capítulo 7

Ecuación de cantidad de movimiento

El principio de conservación de cantidad de movimiento (o Segunda Ley de Newton) aplicada a un volumen fluido $V_f(t)$ nos dice que la variación de la cantidad de movimiento total contenida en el volumen fluido es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él. Antes de expresar matemáticamente este principio es conveniente describir los tipos de fuerzas que actúan sobre un fluido.

7.1. Fuerzas de volumen y fuerzas de superficie

Las fuerzas que actúan sobre un cierto volumen de fluido se clasifican en dos tipos: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie. Las **fuerzas de volumen** son aquellas de *largo alcance* que actúan sobre cada elemento de volumen del fluido. Por ejemplo, las asociadas a campos de fuerza externos al fluido como el campo gravitatorio terrestre. Si designamos por \vec{f}_v la fuerza por unidad de volumen, la correspondiente al campo gravitatorio sería:

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g} \quad , \quad (7.1)$$

donde ρ es la densidad del fluido y \vec{g} es la aceleración de la gravedad, que se suele suponer constante para todas las partículas fluidas si las dimensiones de la masa fluida en cuestión es muy pequeña comparada con el tamaño de la tierra. Así, la fuerza gravitatoria total sobre un cierto volumen V de fluido sería:

$$\vec{F}_v = \int_V \rho \vec{g} dV \simeq \vec{g} \int_V \rho dV \quad (7.2)$$

La fuerza gravitatoria es en realidad una **fuerza másica**, siendo \vec{g} la correspondiente fuerza por unidad de masa, que en general designaremos por \vec{f}_m . El producto de \vec{f}_m por la densidad del fluido proporciona la fuerza por unidad de volumen correspondiente. Otra fuerza másica que aparecerá en muchos problemas prácticos es la asociada al sistema de referencia, si éste no es inercial:

$$\vec{f}_m = -\vec{a}_o - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}, \quad (7.3)$$

donde \vec{a}_o y $\vec{\Omega}$ son la aceleración y la velocidad angular del sistema de coordenadas, respectivamente, en relación a algún sistema de referencia inercial. Por último, otras fuerzas volumétricas son las electromagnéticas que aparecen cuando el fluido está cargado eléctricamente o por él circula alguna corriente eléctrica; la correspondiente fuerza por unidad de volumen es:

$$\vec{f}_v = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}, \quad (7.4)$$

donde ρ_e es la densidad de carga, \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{J} la densidad de corriente y \vec{B} el campo magnético. Esta fuerza (denominada de Lorentz) no se considerará en este curso ya que el estudio de la dinámica de los fluidos donde esta fuerza es importante corresponde a ramas especializadas de la Física de los Fluidos como la Física de Plasmas (gases ionizados), la Electrohidrodinámica, etc., que no se estudiarán aquí.¹

Las fuerzas de volumen (másicas y electromagnéticas) son el tipo habitual de fuerzas *puntuales* que aparecen en la dinámica clásica de partículas, pero promediadas sobre un gran número de moléculas de acuerdo con la hipótesis de medio continuo. En la Mecánica de Fluidos (y en general en la Mecánica de Medios Continuos) aparecen otro tipo adicional de fuerzas asociadas a la interacción de unas moléculas con otras. Estas fuerzas son de origen molecular y se deben al intercambio de cantidad de movimiento por colisiones de las moléculas de una partícula fluida con las moléculas de las partículas fluidas vecinas. Son, por tanto, fuerzas de muy corto alcance, apreciables sólo en distancias del orden de la longitud media que recorre una molécula típica

¹ Además de la fuerza de Lorentz (7.4), en medios dieléctricos no uniformes aparecen otras como la fuerza dieléctrica y la fuerza de electrostricción. El alumno interesado en los fenómenos electromagnéticos en la dinámica de los fluidos puede consultar, por ejemplo, el texto clásico de Landau y Lifshitz *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Nueva York, 1984), del que existe traducción castellana en la editorial Reverté.

entre colisiones (*camino libre medio*), y por ello se denominan **fuerzas de superficie**. Así, dada una superficie S en el interior de un fluido, por acción de las colisiones moleculares el fluido circundante ejercerá una fuerza sobre cada punto de la superficie que, por unidad de superficie (esfuerzo), denotaremos por $\vec{f}_n(\vec{x}, t)$, siendo esta fuerza función, además de la posición del punto y del tiempo, de la orientación \vec{n} de la superficie en ese punto. Para describir por tanto el estado de fuerzas superficiales de un determinado fluido hay que especificar una doble infinitud de esfuerzos: para los infinitos puntos del fluido hay que dar el esfuerzo en las infinitas orientaciones de todas las superficies que pasan por ese punto. Sin embargo, veremos a continuación que, en virtud de los teoremas de conservación de la cantidad de movimiento y del momento cinético, en realidad sólo es necesario conocer seis cantidades escalares (un tensor simétrico) por cada punto del fluido para especificar todas las fuerzas de superficie.

7.2. Tensor de esfuerzos

Sea $\vec{f}_n(\vec{x}, t)ds$ la fuerza ejercida en el instante t por acción de la interacción molecular sobre el elemento de superficie $ds\vec{n}$ que pasa por el punto \vec{x} ; es decir, $\vec{f}_n(\vec{x}, t)$ es el esfuerzo (fuerza por unidad de superficie) ejercido sobre una superficie de orientación \vec{n} , en \vec{x} y t . Vamos a demostrar que el esfuerzo $\vec{f}_n(\vec{x}, t)$ está completamente determinado si se conocen en el punto \vec{x} y en el instante t los esfuerzos en tres planos mutuamente perpendiculares. Para ello consideramos un elemento de volumen tetraédrico formado por los tres planos coordenados que pasan por \vec{x} y un plano inclinado orientado según la normal hacia fuera \vec{n} (ver figura 7.1). Si consideramos este elemento de volumen como un volumen fluido y aplicamos la segunda ley de Newton, obtenemos:

$$\frac{d(\rho\vec{v})}{dt}dV = \vec{f}_n dA - \vec{f}_1 dA_1 - \vec{f}_2 dA_2 - \vec{f}_3 dA_3 + \vec{f}_v dV, \quad (7.5)$$

donde dV es el volumen del elemento; dA, dA_1, dA_2 y dA_3 son las áreas de las caras del tetraedro, y \vec{f}_1, \vec{f}_2 y \vec{f}_3 son los esfuerzos sobre $\vec{e}_1 dA_1, \vec{e}_2 dA_2$ y $\vec{e}_3 dA_3$, respectivamente (observese que \vec{n} está dirigido hacia fuera del tetraedro, mientras que \vec{e}_1, \vec{e}_2 y \vec{e}_3 apuntan hacia el interior en cada una de sus respectivas caras, por ello la diferencia de signos en los distintos términos de la expresión anterior). Si dividimos por dA y hacemos $dA \rightarrow 0$, los términos correspondientes a las fuerzas volumétricas y a la *aceleración* desaparecen, puesto que $dV/dA \rightarrow 0$ si $dA \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta que

$$dA_i = dA\vec{n} \cdot \vec{e}_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (7.6)$$

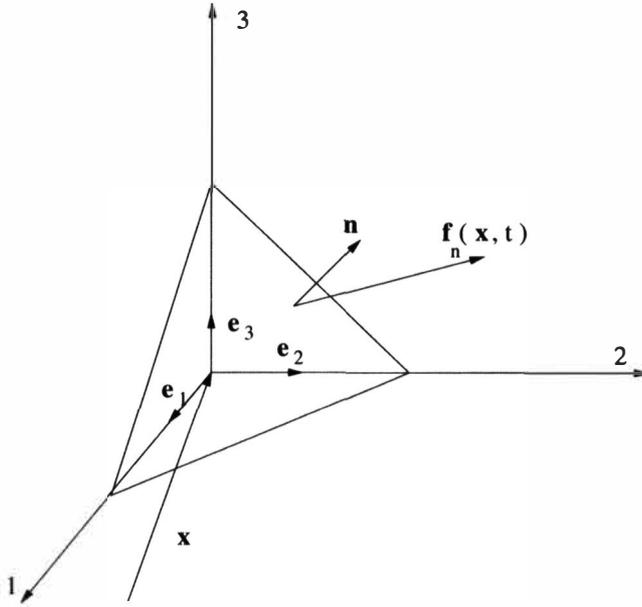


Figura 7.1: Fuerzas sobre un elemento de volumen.

la expresión (7.5) queda

$$\vec{f}_n = n_1 \vec{f}_1 + n_2 \vec{f}_2 + n_3 \vec{f}_3, \quad (7.7)$$

donde $n_i \equiv \vec{n} \cdot \vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) es la componente i de \vec{n} en el sistema coordenado $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Queda, pues, demostrado que $\vec{f}_n(\vec{x}, t)$ está determinado si $\vec{f}_1(\vec{x}, t)$, $\vec{f}_2(\vec{x}, t)$ y $\vec{f}_3(\vec{x}, t)$ son conocidos.

Para escribir la expresión anterior en notación tensorial se suele definir

$$\bar{\bar{\tau}} \equiv \vec{e}_1 \vec{f}_1 + \vec{e}_2 \vec{f}_2 + \vec{e}_3 \vec{f}_3, \quad (7.8)$$

de forma que la ecuación (7.7) queda

$$\vec{f}_n = \vec{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}. \quad (7.9)$$

El tensor $\bar{\bar{\tau}}(\vec{x}, t)$ se denomina **tensor de esfuerzos**. Si los componentes de los vectores \vec{f}_1 , \vec{f}_2 y \vec{f}_3 se designan por $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$, $(\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})$ y $(\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})$, es decir,

$$\bar{\bar{\tau}} = \tau_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

τ_{ij} representa la componente j del esfuerzo que actúa sobre la dirección coordenada \vec{e}_i en el punto \vec{x} en el instante t . Obsérvese que el desarrollo anterior es válido para cualquier sistema coordenado ortogonal, no necesariamente cartesiano.

Resumiendo, para conocer el esfuerzo ejercido sobre una superficie de orientación \vec{n} cualquiera que pasa por un punto \vec{x} , basta conocer el tensor de esfuerzos en ese punto. Son por tanto nueve el número de cantidades que se necesitan conocer por cada punto para definir su estado de esfuerzos (¡en vez de infinito!). Como demostraremos a continuación, esta cantidad se reduce a seis debido a que el tensor de esfuerzos $\bar{\bar{\tau}}$ es simétrico.

7.2.1. Simetría del tensor de esfuerzos

Considerese un elemento de volumen cualquiera δV en el entorno del punto \vec{x} . En el límite $\delta V \rightarrow 0$, la conservación del momento cinético proporciona (teniendo en cuenta que $\delta V/\delta S \rightarrow 0$, siendo δS la superficie que engloba a δV):

$$\int_{\delta S} ds(\vec{f}_n \wedge \vec{r}) = 0 \quad , \quad (7.11)$$

donde \vec{f}_n es el esfuerzo ejercido sobre el punto $\vec{x} + \vec{r}$ sobre la superficie de orientación \vec{n} , y se ha tomado \vec{x} como origen de momentos (ver figura 7.2). Sustituyendo $\vec{f}_n = \vec{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}$, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\int_{\delta S} ds(\vec{n} \cdot \bar{\bar{\tau}}) \wedge \vec{r} = - \int_{\delta S} ds(\vec{n}\vec{r}) \wedge \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad , \quad (7.12)$$

donde, salvo errores que tienden a cero cuando $\delta V \rightarrow 0$, se puede tomar el valor de $\bar{\bar{\tau}}$ evaluado en \vec{x} en vez de en $\vec{x} + \vec{r}$. La operación $\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}}$ de la segunda igualdad significa que el primer componente de ambos tensores se multiplican escalarmente mientras que el segundo se multiplica vectorialmente, siendo el resultado un vector; por ejemplo, en coordenadas cartesianas la componente i sería $\epsilon_{ijk} A_{lj} B_{lk}$. Aplicando el Teorema de Gauss y teniendo en cuenta que δV es un volumen fluido cualquiera, se tiene:

$$\nabla_r \vec{r} \wedge \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad \text{o} \quad \bar{\bar{I}} \wedge \bar{\bar{\tau}} = 0 \quad , \quad (7.13)$$

donde $\bar{\bar{I}}$ es el tensor unidad. La última relación implica que el tensor $\bar{\bar{\tau}}$ es simétrico, $\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\tau}}^T$, como se puede comprobar fácilmente utilizando coordenadas cartesianas:

$$\epsilon_{ijk} \delta_{lj} \tau_{lk} = \epsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad ; \quad (7.14)$$

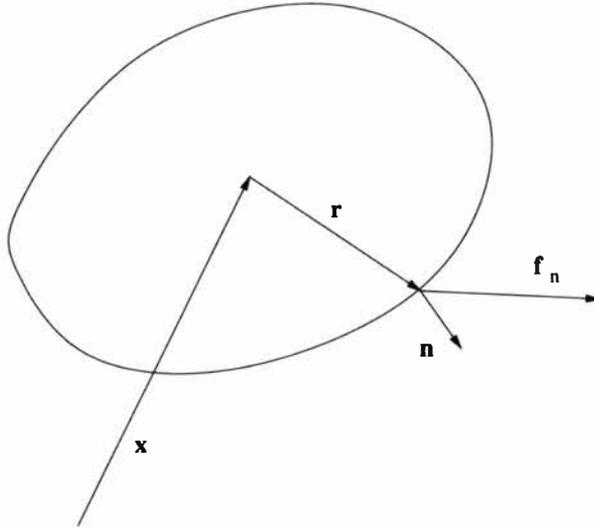


Figura 7.2: Conservación del momento cinético.

particularizando para $i = 1, 2, 3$ se tienen las tres relaciones

$$\tau_{23} - \tau_{32} = 0 \quad , \quad \tau_{31} - \tau_{13} = 0 \quad , \quad \tau_{12} - \tau_{21} = 0 \quad . \quad (7.15)$$

7.3. Ecuación de cantidad de movimiento

Ya podemos expresar de forma adecuada el principio de cantidad de movimiento aplicado a un volumen fluido $V_f(t)$ enunciado al comienzo de esta lección:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{S_f(t)} \vec{n} \cdot \vec{\bar{\tau}} ds + \int_{V_f(t)} \rho \vec{f}_m dV, \quad (7.16)$$

donde \vec{f}_m son las fuerzas másicas por unidad de masa (aceleración de la gravedad y aceleración del sistema de referencia; suponemos que no existen fuerzas electromagnéticas). Aplicando el Teorema de Transporte de Reynolds, se tiene

$$\int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{S_f} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} ds - \int_{S_f} \vec{n} \cdot \vec{\bar{\tau}} ds = \int_{V_f} \rho \vec{f}_m dV, \quad (7.17)$$

que expresa que la variación de la cantidad de movimiento contenida en V_f más el flujo convectivo a través de la superficie que lo engloba es igual a las fuerzas de superficie más las fuerzas másicas que actúan sobre el volumen fluido.

La ecuación anterior se ha escrito de forma que sea patente un segundo significado físico del tensor de esfuerzos. Por una parte, acabamos de ver que el tensor de esfuerzos representa la acción de las fuerzas de superficie por unidad de superficie. Pero, por otra, también se puede interpretar como el *flujo molecular* de cantidad de movimiento que, como sabemos, constituye el origen microscópico de las fuerzas de superficie. Así, el flujo de cantidad de movimiento a través de una superficie S_f consta de dos términos, un flujo convectivo asociado a la velocidad *media* del fluido, y un flujo molecular debido al intercambio de cantidad de movimiento por colisiones de las moléculas a un lado y otro de S_f . El flujo total de cantidad de movimiento por unidad de superficie es pues el tensor

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} \quad (7.18)$$

Por tanto, la ecuación (7.17) se puede interpretar de un modo más *natural* como: la variación de la cantidad de movimiento contenida en V_f más el flujo *total* de cantidad de movimiento a través de la superficie que lo contiene es igual a la acción de las fuerzas másicas que actúan sobre él.

Otra ecuación que, sobre todo, se usa en forma integral es la ecuación de **conservación del momento cinético** o momento de la cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{x}} dV = \int_{S_f(t)} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}) \wedge \bar{\mathbf{x}} ds + \int_{V_f(t)} \rho \bar{\mathbf{f}}_m \wedge \bar{\mathbf{x}} dV \quad (7.19)$$

o

$$\int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{x}}) dV + \int_{S_f} \rho (\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \int_{S_f(t)} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}) \wedge \bar{\mathbf{x}} ds + \int_{V_f(t)} \rho \bar{\mathbf{f}}_m \wedge \bar{\mathbf{x}} dV \quad (7.20)$$

Aplicadas a un volumen de control arbitrario $V_c(t)$ cuya superficie se mueve a una velocidad $\bar{\mathbf{v}}_c$, las ecuaciones integrales de cantidad de movimiento y de momento cinético, (7.16) y (7.19), se escriben:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \bar{\mathbf{v}} dV + \int_{S_c} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_c) \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \int_{S_c} \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}} ds + \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{f}}_m dV \quad , \quad (7.21)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{x}} dV + \int_{S_c} \rho (\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\mathbf{x}}) (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}}_c) \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \int_{S_c} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}) \wedge \bar{\mathbf{x}} ds + \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{f}}_m \wedge \bar{\mathbf{x}} dV \quad (7.22)$$

La **forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento** se obtiene, análogamente a como se hizo con la ecuación de continuidad, aplicando el Teorema de Gauss al segundo término de (7.17) e igualando el integrando a cero, puesto que V_f es arbitrario:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{f}_m. \quad (7.23)$$

El significado físico de los distintos términos es, respectivamente: variación local de cantidad de movimiento por unidad de volumen; flujo convectivo de cantidad de movimiento por unidad de volumen; fuerzas de superficie por unidad de volumen o, cambiado de signo, flujo molecular (o difusivo) de cantidad de movimiento por unidad de volumen, y fuerzas másicas por unidad de volumen. Esta ecuación fue originalmente derivada por Cauchy en 1822, usando ideas previas de Euler sobre la mecánica de los medios continuos. Cauchy introdujo el concepto de tensor de esfuerzos y demostró su simetría, llegando a una ecuación similar a (7.23). Así escrita, esta ecuación es general para cualquier medio continuo.

Para que la ecuación (7.23) pueda ser utilizada es necesario obtener alguna expresión del tensor de esfuerzos $\bar{\bar{\tau}}$ en términos de magnitudes conocidas e incógnitas del problema (ρ, \vec{v} , etc.), es decir, una relación constitutiva para $\bar{\bar{\tau}}$, análoga a la Ley de Fick para la velocidad de difusión másica. La relación constitutiva que damos a continuación caracteriza a los llamados fluidos Newtonianos, y fue formulada por Stokes a mediados del siglo pasado.

7.4. Fluidos Newtonianos. Ley de Stokes

Independientemente de la ley constitutiva para $\bar{\bar{\tau}}$, es conveniente primero separar la parte del tensor de esfuerzos correspondiente a un fluido en reposo de la parte *dinámica* del tensor. Si un fluido está en reposo, la fuerza de superficie en cualquier punto \vec{x} y en cualquier superficie orientada según \vec{n} , $\vec{f}_n(\vec{x}, t)$, tiene que ser normal a la superficie, puesto que en caso contrario la componente tangencial a la superficie de \vec{f}_n crearía un *movimiento de cortadura*. Es decir, en un fluido en reposo se tiene

$$\vec{f}_n(\vec{x}, t) = -p(\vec{x}, t)\vec{n}, \quad (7.24)$$

donde p es la **presión** del fluido en el punto \vec{x} en el instante t , o fuerza por unidad de superficie normal a la superficie y dirigida en sentido opuesto a \vec{n} (contra la superficie). Esta presión, llamada hidrostática, coincide con la presión definida en la Termodinámica si el fluido está en reposo (ver sección

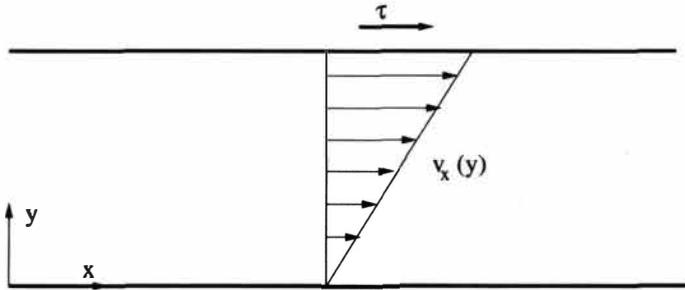


Figura 7.3: Movimiento entre dos placas originado por un esfuerzo tangencial.

9.2). Cuando el fluido está en movimiento ambas presiones coinciden si se cumple la hipótesis de equilibrio termodinámico local (como se demostrará en la lección 9). Como la Mecánica de Fluidos hace uso de esta hipótesis (ver sección 8.1), a partir de ahora no se hará distinción entre ambas presiones, hidrostática y termodinámica, y se utilizará por tanto la *misma* presión en las ecuaciones de estado del fluido (termodinámica) y en las ecuaciones del movimiento.

De acuerdo con (7.24) y (7.9), en un fluido en reposo se tiene

$$\bar{\tau} = -p\bar{I} \quad \text{o} \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} . \tag{7.25}$$

Para un fluido que no está en reposo se suele descomponer $\bar{\tau}$ en dos partes,

$$\bar{\tau} \equiv -p\bar{I} + \bar{\tau}' \quad , \tag{7.26}$$

donde, por definición, $\bar{\tau}'$ es la desviación del tensor de esfuerzos con respecto a la presión, también llamado, por razones que ahora veremos, **tensor de esfuerzos viscosos**.

Experimentalmente se ha observado que muchos fluidos obedecen a una ley lineal entre $\bar{\tau}'$ y el tensor de velocidades de deformación. Originalmente, Newton postuló que, para un determinado tipo de flujo que él consideró, existe una ley lineal entre el esfuerzo tangencial aplicado a una superficie de un fluido y el gradiente de velocidades normal a la superficie. Por ejemplo, si sobre el fluido contenido entre dos placas planas paralelas se aplica un esfuerzo $\tau (\equiv \tau'_{xy})$ a través de una de las placas (ver figura 7.3), se produce un movimiento cuyo gradiente de velocidades normal a la placa viene dado por

$$\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad , \tag{7.27}$$

donde μ es una propiedad del fluido (que depende principalmente de la temperatura) denominada **viscosidad**. Esta ley lineal entre esfuerzos y gradientes de velocidades se puede generalizar desde un punto de vista fenomenológico en la forma:

$$\overline{\overline{\tau}}' = \overline{\overline{\overline{A}}} : \nabla \vec{v}, \quad (7.28)$$

siendo $\overline{\overline{\overline{A}}}$ un tensor de cuarto orden que, en general, depende de la posición y el tiempo, pero no de la velocidad. La expresión anterior constituye la relación lineal más general entre los dos tensores de segundo orden $\overline{\overline{\tau}}'$ y $\nabla \vec{v}$. Esta relación debe ser una propiedad constitutiva del fluido y, por tanto, no debe depender del sistema de coordenadas elegido. Como la parte antisimétrica de $\nabla \vec{v}$, es decir el tensor $\overline{\overline{\xi}}$, representa un giro como sólido rígido alrededor de cada punto con velocidad angular $\vec{\omega}/2$, si se elige un sistema coordenado que en cada punto gire con esa velocidad, $\overline{\overline{\xi}}$ es nulo, por lo que $\overline{\overline{\tau}}'$ no puede depender de él [si no hay movimiento, el único esfuerzo que puede haber es el asociado a la presión, ecuación (7.25)]. Por tanto, $\overline{\overline{\tau}}'$ depende sólo del tensor de velocidades de deformación $\overline{\overline{\gamma}}$, siendo la relación lineal más general

$$\overline{\overline{\tau}}' = \overline{\overline{\overline{A}}} : \overline{\overline{\gamma}}, \quad (7.29)$$

o, en coordenadas cartesianas,

$$\tau'_{ij} = A_{ijkl} \gamma_{kl} = A_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (7.30)$$

Otra forma de llegar a (7.29) de (7.28) es simplemente apelando a la simetría de $\overline{\overline{\tau}}'$: como $\overline{\overline{\tau}}'$ es un tensor simétrico, sólo puede depender linealmente de la parte simétrica de $\nabla \vec{v}$, es decir, de $\overline{\overline{\gamma}}$.

La ley anterior fue deducida (aunque en una forma más simplificada que veremos más adelante) por Stokes en 1845, generalizando la idea que Newton formuló 150 años antes. Los fluidos que satisfacen esa ley constitutiva se denominan Newtonianos. Experimentalmente se encuentra que una gran mayoría de los fluidos, tanto líquidos como gases, en casi todas las condiciones de interés, obedecen una ley de ese tipo, aunque sólo sea aproximadamente. Teóricamente se demuestra (a través de la Teoría Cinética de Gases, ver lección 9) que bajo la hipótesis de equilibrio termodinámico local (ver lección siguiente) los gases satisfacen la Ley de Stokes. Existen, sin embargo, fluidos, especialmente líquidos constituidos por grandes moléculas, en los que $\overline{\overline{\tau}}'$ no depende linealmente de $\overline{\overline{\gamma}}$, o depende además de otras magnitudes fluidas. Estos fluidos no-Newtonianos tiene bastante interés en algunas aplicaciones, sobre todo en

la industria química (plásticos, pinturas, etc.), pero no serán considerados en este curso introductorio a la Mecánica de Fluidos.

La ley de Stokes (7.29) se puede simplificar considerablemente si el fluido es isotrópico, como ocurre en la mayoría de las situaciones de interés. De hecho, en su derivación original, Stokes hizo tres hipótesis, dos de las cuales ya han sido utilizadas en la derivación de (7.29): relación lineal entre $\overline{\tau}'$ y $\overline{\gamma}$, e hipótesis de que si no hay movimiento $\overline{\tau}'$ es nulo (es decir, si no hay movimiento $\overline{\tau} = -p\overline{I}$). La tercera hipótesis de Stokes fue que la relación entre $\overline{\tau}'$ y $\overline{\gamma}$ es isotrópica en cualquier sistema coordenado. Esta condición, junto con las anteriores, simplifica enormemente la relación (7.29). Para empezar, como (7.29) es lineal, los tensores $\overline{\tau}'$ y $\overline{\gamma}$ pueden ser diagonalizados simultáneamente con la misma transformación. Esto hace que esa relación se pueda escribir como $\overline{\tau}' = \overline{B} \cdot \overline{\gamma}$, donde $\overline{\tau}' \equiv (\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$ y $\overline{\gamma} \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, siendo τ'_i y γ_i , $i = 1, 2, 3$, los autovalores de $\overline{\tau}'$ y $\overline{\gamma}$, respectivamente. Es decir, las 81 constantes de \overline{A} se han reducido a las nueve de \overline{B} . Por otro lado, si el sistema es isotrópico, un giro de coordenadas no debe cambiar la relación entre $\overline{\tau}'$ y $\overline{\gamma}$. Como un giro permite permutar los autovalores de ambos tensores, cada autovalor τ'_i sólo puede depender del correspondiente γ_i y de la traza $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, que es invariante frente a las rotaciones:

$$\tau'_i = 2\mu\gamma_i + \lambda(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.31)$$

donde μ y λ son constantes. En forma tensorial, se tiene

$$\overline{\tau}' = 2\mu\overline{\gamma} + \lambda\nabla \cdot \overline{v}\overline{I}. \quad (7.32)$$

Así, las 81 constantes del tensor original A_{ijkl} se han reducido a sólo dos. Esta relación se suele escribir utilizando la descomposición del tensor $\overline{\gamma}$ dada en la sección 4.2, $\overline{\gamma} = \overline{\gamma}' + \overline{\gamma}''$, siendo $\overline{\gamma}'$ la parte sin traza y $\overline{\gamma}''$ diagonal, de forma que $\overline{\gamma}''$ contiene todo el movimiento asociado al cambio de volumen y $\overline{\gamma}'$ está asociado a la deformación *pura*, sin cambio de volumen:

$$\overline{\tau}' = 2\mu\overline{\gamma}' + \mu_v\nabla \cdot \overline{v}\overline{I} = 2\mu \left[\frac{1}{2}(\nabla\overline{v} + \nabla\overline{v}^T) - \frac{1}{3}\nabla \cdot \overline{v}\overline{I} \right] + \mu_v\nabla \cdot \overline{v}\overline{I}, \quad (7.33)$$

donde, por comparación con (7.32),

$$\mu_v = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (7.34)$$

El coeficiente μ se suele denominar **coeficiente de viscosidad** o simplemente viscosidad, y está asociado a la capacidad de deformación *pura* del

fluido bajo la acción de un esfuerzo cortante. El coeficiente μ_v , denominado **coeficiente volumétrico de viscosidad**, está asociado a la deformación volumétrica provocada por esfuerzos normales. Así, el esfuerzo normal medio de un fluido Newtoniano es

$$\frac{1}{3}\text{traza}(\bar{\tau}) = \frac{1}{3}\text{traza}(-p\bar{I} + \bar{\tau}') = -p + \mu_v \nabla \cdot \vec{v}; \quad (7.35)$$

es decir, no todo el esfuerzo normal está asociado con la presión, sino que parte de él está asociado al movimiento del fluido tendente a cambiar su volumen. La Teoría Cinética de Gases demuestra que para gases monoatómicos, es decir, gases cuyas moléculas no tienen estructura interna, μ_v es idénticamente nulo, siendo distinto de cero para gases cuyas moléculas pueden almacenar algún tipo de energía distinta de la cinética o translacional. En otras palabras, μ_v está relacionado con la capacidad de almacenar energía no cinética por las moléculas de un fluido bajo la acción de esfuerzos normales, mientras que la presión está relacionada con la energía cinética de las moléculas (ver lección 9). En los líquidos el coeficiente μ_v es irrelevante, puesto que al ser incompresibles $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Es decir, para los **líquidos** se tiene

$$\bar{\tau}' = 2\mu\bar{\gamma} = \mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) \quad , \quad (7.36)$$

que es la relación originariamente debida a Stokes.

Los coeficientes μ y μ_v dependen del estado termodinámico del fluido, muy especialmente de la temperatura (para los gases se demuestra a partir de la Teoría Cinética que son independientes de la presión). En general, la viscosidad de los líquidos disminuye al aumentar la temperatura, ocurriendo lo contrario para los gases.

7.5. Ecuación de Navier-Stokes

La ecuación resultante de introducir la ley de Stokes en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (7.23) se suele denominar ecuación de Navier-Stokes:²

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)] + \nabla[(\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}] + \rho\vec{f}_m \quad . \quad (7.37)$$

²Navier obtuvo la misma ecuación por un procedimiento distinto algo antes que Stokes, pero haciendo algunas hipótesis sobre las bases moleculares de los efectos viscosos que no son del todo correctas.

Utilizando la ecuación de continuidad (6.4), esta ecuación se puede escribir como

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T)] + \nabla[(\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}] + \rho \vec{f}_m. \quad (7.38)$$

El término de fuerzas de superficie $\nabla \cdot \bar{\tau}$ de la ecuación (7.23) ahora se ha desglosado en tres: uno que representa las fuerzas de presión por unidad de volumen, y otros dos que representan las fuerzas de viscosidad (relacionadas con μ y μ_v) por unidad de volumen. En el caso de los líquidos esta ecuación se reduce considerablemente debido a que al ser $\rho = \text{constante}$, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Si, además, las variaciones de temperatura no son muy importantes y se puede suponer que el coeficiente de viscosidad es constante, la ecuación queda:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m, \quad (7.39)$$

donde se ha hecho uso de $\nabla \cdot (\nabla\vec{v})^T = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$. En el caso en que las fuerzas másicas deriven de un potencial U , $\vec{f}_m = -\nabla U$, la ecuación anterior se puede escribir en la forma simple

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + U \right) + \nu \nabla^2 \vec{v}, \quad (7.40)$$

donde

$$\nu = \mu/\rho \quad (7.41)$$

es el **coeficiente de viscosidad cinemática**. Una particularidad importante de esta ecuación es que forma, junto con la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, un sistema cerrado para las variables \vec{v} y p . En el caso de los gases, aparte de que μ y μ_v puedan depender de la temperatura, la densidad ρ no es constante, con lo que hay que completar el sistema de ecuaciones anterior [continuidad (6.4) y cantidad de movimiento (7.38)] con la ecuación de conservación de la energía y las ecuaciones de estado, que se verán en la próxima lección (aparte de las ecuaciones constitutivas para μ , μ_v , etc.). Así, para un líquido con viscosidad constante el problema mecánico está desacoplado del térmico (aunque para resolver el problema térmico veremos que es necesario haber resuelto previamente el problema mecánico), mientras que para los gases los problemas mecánico y térmico están, en general, íntimamente ligados.

7.6. Ecuación de la vorticidad. Condición de barotropía

En muchas ocasiones, especialmente cuando se estudien los flujos ideales y la turbulencia, es conveniente utilizar el vector vorticidad $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v}$ en vez de, o junto con, el vector velocidad \vec{v} para describir el movimiento de un fluido. También tiene ventajas el uso de la vorticidad en la simulación numérica de los flujos incompresibles, pues se evita el tener que poner condiciones de contorno en la presión. Por todo ello, se deriva a continuación una ecuación para la vorticidad, que en este curso se utilizará, principalmente, en la lección 20.

Suponiendo que las fuerzas másicas derivan de un potencial U y haciendo uso de la relación vectorial (1.42), la ecuación de cantidad de movimiento (7.38) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \wedge \vec{\omega} + \nabla \frac{1}{2} v^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu [\nabla^2 \vec{v} + \nabla \nabla \cdot \vec{v}] + \frac{\mu_v - 2\mu/3}{\rho} \nabla \nabla \cdot \vec{v} - \nabla U \quad , \quad (7.42)$$

donde se ha supuesto, por simplicidad, que los coeficientes de viscosidad son constantes (si esto no fuese así, todo lo que viene a continuación seguiría siendo válido, cambiando sólo el término viscoso, que sería algo más complejo). Tomando el rotacional de esta ecuación y teniendo en cuenta que el rotacional de un gradiente es idénticamente nulo y que $\nabla \wedge \nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 \vec{\omega}$ en virtud de (1.43) y $\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) \equiv 0$, se llega a:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) \wedge \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (7.43)$$

Desarrollando el segundo término y sabiendo $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$, se obtiene

$$\frac{D \vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \wedge \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad . \quad (7.44)$$

Por último, esta ecuación se puede escribir de una forma más compacta en términos de $\vec{\omega}/\rho$ haciendo uso de la ecuación de continuidad (6.4) para reescribir $\nabla \cdot \vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla \rho \quad , \quad (7.45)$$

llegándose a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \wedge \nabla p + \frac{\nu}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (7.46)$$

El primer miembro de esta ecuación representa la variación de la vorticidad (estrictamente del vector $\vec{\omega}/\rho$) para un observador que se mueve con el fluido, es decir, la variación local más la variación convectiva. Esta variación (generación o destrucción local de vorticidad) se debe a los tres factores que aparecen en el segundo miembro. El primer término representa la convección de la velocidad del fluido debido a su vorticidad. Las importantes implicaciones físicas de este término las veremos más adelante (lección 20) cuando estudiemos los flujos ideales ($\nu = 0$) que además son barótropos ($\nabla\rho \wedge \nabla p = 0$, ver más abajo), en los que los términos segundo y tercero del segundo miembro de la ecuación (7.46) no aparecen, quedando simplemente $D(\vec{\omega}/\rho)/Dt = (\vec{\omega}/\rho) \cdot \nabla\vec{v}$, una ecuación muy importante para la comprensión de los flujos ideales y de los mecanismos generadores de la turbulencia. El tercer término representa la *difusión viscosa* de la vorticidad, análoga a la difusión másica de Fick [comparen (7.46) con (6.31)]. Por último, para *descifrar* el significado físico del segundo término (denominado **término de Bjerkness**), consideremos una pequeña esfera fluida de radio ϵ ($\rightarrow 0$) que se mueve con el fluido. La masa de la esfera es

$$m = \int \rho dV, \quad (7.47)$$

estando la integral extendida a todo el volumen de la esfera. Teniendo en cuenta que $\rho = \rho_o + \vec{r} \cdot \nabla\rho_o + O(\epsilon^2)$, donde el subíndice o significa que las cantidades correspondientes están evaluadas en el centro de la esfera y \vec{r} es el vector posición con respecto al centro, y sabiendo que $\int \vec{r} dV = 0$ por ser una esfera, se tiene

$$m = \rho_o V + O(\epsilon^2) \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \quad . \quad (7.48)$$

El centro de masa de la esfera es

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} \rho dV = \frac{1}{m} \int \vec{r} \vec{r} \cdot \nabla\rho_o dV + O(\epsilon^2) = \frac{1}{m} \bar{J} \cdot \nabla\rho_o + O(\epsilon^2) \quad , \quad (7.49)$$

donde

$$\bar{J} \equiv \int \vec{r} \vec{r} dV = J \bar{I} \quad , \quad J \equiv \frac{1}{3} \int r^2 dV = \frac{4}{15}\pi\epsilon^5 = \frac{1}{5}\epsilon^2 V \quad . \quad (7.50)$$

Por tanto,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{J}{V} \frac{\nabla\rho_o}{\rho_o} [1 + O(\epsilon^2)] \quad , \quad (7.51)$$

que muestra que el centro de masa de una esfera se desplaza en la dirección del gradiente de densidad una cantidad dada por la ecuación anterior.

Por otra parte, la resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre la superficie de la esfera pasa necesariamente por el centro de la misma, debido a que la presión actúa radialmente. Esta fuerza está dada por

$$\vec{F}_p = - \int p \vec{n} ds = - \int \nabla p dV \quad , \quad (7.52)$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a la esfera dirigido hacia fuera, estando la primera integral extendida a toda la superficie de la esfera, y se ha aplicado el Teorema de Gauss. De nuevo, escribiendo $\nabla p = \nabla p_o + \vec{r} \cdot \nabla \nabla p_o + O(\epsilon^2)$, se obtiene

$$\vec{F}_p = -\nabla p_o V + O(\epsilon^2) \quad . \quad (7.53)$$

El par (momento) ejercido por \vec{F}_p en relación al centro de masa es, de acuerdo con los resultados anteriores y despreciando términos $O(\epsilon^2)$,

$$\vec{M}_{cm} = -\vec{r}_{cm} \wedge \vec{F}_p = J \frac{\nabla \rho_o}{\rho_o} \wedge \nabla p_o = \frac{1}{5} \epsilon^2 m \left(\frac{\nabla \rho}{\rho^2} \wedge \nabla p \right)_o \quad . \quad (7.54)$$

Así, aparte del factor $\epsilon^2 m/5$, el término de Bjerkness $-\nabla(1/\rho) \wedge \nabla p$ es una medida del par neto ejercido por todas las fuerzas que actúan sobre la esfera en relación al centro de masa de la misma (observese que las fuerzas másicas no proporcionan par alguno ya que actúan sobre el centro de masa). Este par, en ausencia de fuerzas viscosas, debe ser igual a la variación del momento cinético (momento de la cantidad de movimiento) de la esfera con respecto al centro de masa. De hecho, si uno calcula el momento cinético de la esfera con respecto al centro de masa, e iguala su derivada sustancial a (7.54), obtiene la ecuación (7.47) con todas las magnitudes evaluadas en el centro de la esfera y sin el término viscoso, que no se ha considerado (esta demostración se deja como ejercicio para el alumno).

El resultado anterior muestra claramente que cuando ∇p no es paralelo a $\nabla \rho$ en un punto ($\nabla p \wedge \nabla \rho \neq 0$), la resultante de las fuerzas de presión sobre la partícula fluida (considerada como esférica) centrada en ese punto no pasa por el centro de masa de la misma, produciendo un par que es responsable de la variación del momento angular y, por tanto, de la vorticidad, en el punto considerado. Un flujo de un fluido se denomina **barótopo** si la resultante de las fuerzas de presión en cada partícula fluida tiene la dirección del centro de masa de la partícula fluida, es decir, $\nabla \rho$ es paralelo a ∇p en todos sus puntos,

cumpliendo que $\nabla\rho \wedge \nabla p = 0$. Los flujos de líquidos son siempre barótropos puesto que su densidad es uniforme, coincidiendo siempre el centro geométrico y el centro de masa en todas sus partículas fluidas; en otras palabras, al ser $\nabla\rho = 0$, el término de Bjerkness es idénticamente nulo al ser $\vec{r}_{cm} = 0$. Los flujos de gases no son, en general, barótropos. Sin embargo, veremos más adelante que casos muy relevantes como son los flujos isentrópicos de gases y los gases en reposo cumplen la condición de barotropía.

En los movimientos barótropos es algunas veces conveniente utilizar la denominada función de barotropía en vez de la presión:

$$w \equiv \int^p \frac{dp}{\rho}, \quad (7.55)$$

que es posible definir debido a que en los flujos barótropos la densidad depende de la posición a través de la presión, $\rho = \rho(p, t)$, al ser paralelos los vectores $\nabla\rho$ y ∇p . En otras palabras, $\nabla p/\rho$ es, en los movimientos barótropos, una diferencial exacta, definiéndose $\nabla w \equiv \nabla p/\rho$.

Referencias.

- D. J. ACHESON, 1990. Capítulo 6.
- R. ARIS, 1989. Capítulo 5.
- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- A. CHORIN y J.E. MARSDEN, 1993. Capítulo 1.
- S.R. de GROOT y P. MAZUR, 1984. Capítulos II y IV.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.

7.7. APÉNDICE A: Componentes del tensor de esfuerzos para fluidos newtonianos

Coordenadas cartesianas (x, y, z) :

$$\tau'_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad \tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$$

$$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right] \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\tau'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad \tau'_{\theta z} = \tau'_{z\theta} = \mu \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau'_{rz} = \tau'_{zr} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \quad \nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\tau'_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\tau'_{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla \cdot \vec{v} \quad \tau'_{r\theta} = \tau'_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]$$

$$\tau'_{\theta\varphi} = \tau'_{\varphi\theta} = \mu \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \quad \tau'_{r\varphi} = \tau'_{\varphi r} = \mu \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

7.8. APÉNDICE B: Ecuación de cantidad de movimiento en diferentes coordenadas

Coordenadas cartesianas (x, y, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zx} \right] + \rho f_{mx}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zy} \right] + \rho f_{my}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau'_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau'_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} \right] + \rho f_{mz}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau'_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau'_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zr} - \frac{\tau'_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho f_{mr}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau'_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{z\theta} \right] + \rho f_{m\theta}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau'_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau'_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau'_{zz} \right] + \rho f_{mz}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau'_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta r} \sin \theta) \right] + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau'_{\varphi r} - \frac{\tau'_{\theta\theta} + \tau'_{\varphi\varphi}}{r} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{mr}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\theta^2 \cot \theta}{r} \right) = \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau'_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\theta} \sin \theta) \right] + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau'_{\varphi\theta} - \frac{\tau'_{\varphi\varphi} \cot \theta}{r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m\theta}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right)$$

$$= \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau'_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau'_{\theta\varphi} \sin \theta) \right] + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau'_{\varphi\varphi} - \frac{\tau'_{\varphi\theta} \cot \theta}{r} \right] - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho f_{m\varphi}$$

ECUACIONES PARA UN FLUJO INCOMPRESIBLE CON VISCOSIDAD CONSTANTE

Coordenadas cartesianas (x, y, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho f_{mx}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho f_{my}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho f_{mz}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho f_{mr}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho f_{m\theta}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho f_{mz}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ) :

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{mr}$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\theta^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_{m\theta}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \rho f_{m\varphi}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

Capítulo 8

Ecuación de la energía

8.1. Algunos conceptos termodinámicos previos

8.1.1. Hipótesis de equilibrio termodinámico local

La Termodinámica Clásica es una ciencia que trata de los estados de equilibrio de una sustancia, es decir, de estados en los que las magnitudes mecánicas y térmicas son independientes de la posición y del tiempo. Incluso cuando en Termodinámica Clásica se habla de la evolución de las magnitudes de una determinada sustancia, como por ejemplo la primera ley de la termodinámica, que establece la equivalencia del trabajo mecánico y del calor y de sus transformaciones mutuas, esta evolución es entre estados de equilibrio (transformaciones reversibles) y, por tanto, irreales por lo infinitamente lentas. Los resultados termodinámicos son pues *globalmente* aplicables *únicamente* a fluidos en reposo cuando sus propiedades son uniformes e independientes del tiempo. La pregunta que inmediatamente surge es si es posible aplicar los resultados de la Termodinámica Clásica a fluidos que no sólo no son uniformes, sino que se mueven, cambiando sus propiedades de punto a punto y en el tiempo, incluso drásticamente. Veremos a continuación que, aunque no se puedan aplicar, en general, los resultados termodinámicos clásicos globalmente a un determinado sistema fluido, si se pueden aplicar *localmente*, es decir, a cada partícula fluida individual, ya que éstas, en la mayoría de los fluidos y en las condiciones que usualmente se encuentran en la práctica, se hallan en equilibrio termodinámico local (o puntual).

Considérese el caso de un gas. Si en el gas existen inhomogeneidades, por ejemplo, si inicialmente hay un gradiente de temperatura o un gradiente de velocidad, y no existe ningún factor externo que los mantenga, al cabo de un cierto tiempo más o menos largo el gas se equilibra (se uniformiza su tempe-

ratura y su velocidad) por colisiones moleculares que intercambian energía y cantidad de movimiento entre las moléculas, igualando las temperaturas y las velocidades entre las distintas partículas fluidas. Es decir, las colisiones producen unos *flujos* macroscópicos de calor (energía) y cantidad de movimiento que tienden a disipar los gradientes que los provocan. Estos procesos hacia un estado de equilibrio termodinámico global son esencialmente irreversibles, y leyes como el Primer Principio de la Termodinámica sólo nos relaciona entre sí los dos estados de equilibrio inicial y final, sin decir nada del proceso intermedio (sólo el Segundo Principio de la Termodinámica nos proporciona ciertas desigualdades que deben verificarse durante el proceso). Ahora bien, un sistema puede no estar en equilibrio termodinámico global (puede existir, por ejemplo, un gradiente térmico), pero sí en equilibrio termodinámico local si las partículas fluidas que definen cada punto contienen un número suficiente de moléculas como para que las colisiones entre ellas las equilibren, dentro de cada partícula fluida, mucho más rápidamente que los cambios que se puedan producir en las magnitudes macroscópicas (por ejemplo, la temperatura). La condición para que esto ocurra es que la longitud característica de variación macroscópica (en nuestro ejemplo, la longitud típica en la cual la temperatura cambie apreciablemente, es decir, $L \sim |\nabla \ln T|^{-1}$) sea mucho mayor que el *camino libre medio* entre colisiones, λ , para que de esta forma exista un tamaño intermedio, $(\delta V)^{1/3}$, que permita definir la partícula fluida en equilibrio termodinámico: $\lambda \ll (\delta V)^{1/3} \ll L$. En otras palabras, si $\lambda \ll L$, una molécula experimenta un gran número de colisiones con sus vecinas antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas (temperatura en nuestro caso) cambien, de modo que gradualmente adapta su movimiento y energía al que existe localmente (se equilibra localmente), perdiendo *memoria* en las sucesivas colisiones de su situación primitiva.

En el caso de un gas, el orden de magnitud del camino libre medio λ se puede estimar suponiendo que las moléculas son esferas rígidas de tamaño efectivo d_o (típicamente, $d_o \sim 5 \times 10^{-10} m$); si el número de moléculas por unidad de volumen es n ($n \sim 2 \times 10^{25} m^{-3}$ en condiciones normales), la distancia media que tiene que recorrer una molécula para *chocar* con otra es

$$\lambda \sim (d_o^2 n)^{-1} \sim 2 \times 10^{-7} m = 0,2 \mu m . \quad (8.1)$$

La condición $\lambda \ll L$ es pues más restrictiva que la correspondiente a la hipótesis de medio continuo, $n^{-1/3} \ll L$, dada en la sección 2.2 ($n^{-1/3} \sim 4 \times 10^{-9} m$ en condiciones normales). Sin embargo, salvo en casos muy extremos en que los gradientes son muy acusados (la longitud característica L muy pequeña, como por ejemplo en el movimiento de cuerpos a velocidades gigantescamen-

te altas), o en el caso de que el gas esté muy enrarecido (n muy bajo, como por ejemplo en la parte alta de la atmósfera donde las moléculas están muy separadas unas de otras y las colisiones entre ellas son poco frecuentes), la condición de equilibrio termodinámico local, $\lambda \ll L$, se suele cumplir en los gases.

Se suele definir el llamado **número de Knudsen**,

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L}, \quad (8.2)$$

como la relación entre el camino libre medio molecular y el tamaño macroscópico característico. En términos de este número adimensional la condición de equilibrio termodinámico en gases se expresa $Kn \ll 1$. El argumento que acabamos de expresar utilizando longitudes características se puede también expresar en función de tiempos característicos: Si las magnitudes fluidas macroscópicas (por ejemplo la temperatura) fluctúan en el tiempo con una frecuencia característica cuyo orden de magnitud es $\omega = t_c^{-1}$, donde t_c es un tiempo característico de variación macroscópica ($t_c = |\partial \ln T / \partial t|^{-1}$), para que exista equilibrio termodinámico local la frecuencia entre colisiones moleculares, $\omega_c = \tau_c^{-1}$, tiene que ser mucho mayor que ω , para que así se den un gran número de colisiones antes de que las magnitudes macroscópicas cambien en el tiempo apreciablemente (en cada partícula fluida). Se tiene pues la condición adicional

$$\tau_c \ll t_c \quad \text{o} \quad Kn_t \equiv \frac{\tau_c}{t_c} \ll 1, \quad (8.3)$$

que se debe verificar simultáneamente con (8.2) para que exista equilibrio termodinámico local. Por supuesto, τ_c y λ están relacionados entre si a través de la *velocidad media molecular*, c_T , que como se verá en la lección siguiente, es función de la temperatura:

$$\lambda \sim c_T \tau_c, \quad c_T \sim \sqrt{kT/m}, \quad (8.4)$$

donde k es la constante de Boltzmann y m la masa de la molécula (ver sección 9.2).

En los líquidos la interacción molecular es mucho más compleja que la simple colisión, por lo que la definición de camino libre medio o frecuencia de colisión no tiene mucho sentido. De todas formas, la hipótesis de equilibrio termodinámico local se suele verificar, siendo aún más escasas las situaciones en que no se cumple que en los gases.

La hipótesis de equilibrio termodinámico local redefine, como acabamos de ver, el *tamaño* $(\delta V)^{1/3}$ de las partículas fluidas. Pero si existe ese tamaño, las

magnitudes fluidas, $\rho(\vec{x}, t)$, $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $e(\vec{x}, t)$, etc., definidas en cada *punto* fluido satisfacen, localmente, las relaciones de la Termodinámica Clásica. En lo que sigue supondremos que existe equilibrio termodinámico local y utilizaremos los importantes resultados de la Termodinámica para escribir la ecuación de la energía y las ecuaciones de estado, siendo todas las relaciones locales (o puntuales). La hipótesis de equilibrio termodinámico local se utilizará también en la lección siguiente para justificar, a partir de la Teoría Cinética de Gases, las leyes constitutivas ya enunciadas como la ley de Fick (sección 6.4) y la de Stokes (sección 7.3), así como la ley de Fourier de transmisión de calor que veremos más adelante (sección 8.2.2).

8.1.2. Variables termodinámicas

La Termodinámica Clásica nos enseña que el estado de un fluido de composición homogénea en equilibrio termodinámico está definido si se conocen dos variables termodinámicas cualesquiera, por ejemplo, la presión y la densidad, (p, ρ) , de forma que cualquier otra magnitud termodinámica es función de esas dos variables: $T = T(p, \rho)$, $e = e(p, \rho)$, etc. Estas relaciones, que son las ecuaciones de estado del fluido en cuestión, se cumplen localmente si se verifica la hipótesis de equilibrio termodinámico local. Si el fluido está constituido por N especies químicas distintas, el estado termodinámico se encuentra definido si se conocen, además, $N - 1$ fracciones másicas: $T = T(p, \rho, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$, $e = e(p, \rho, Y_1, Y_2, \dots, Y_{N-1})$, etc., siendo $\sum_{i=1}^N Y_i = 1$.

Se suelen distinguir dos tipos básicos de variables termodinámicas: las intensivas y las extensivas. Las **magnitudes extensivas** se pueden definir en un volumen finito y, generalmente, se expresan en función de su *densidad*, es decir, en función de la correspondiente magnitud por unidad de volumen. Magnitudes extensivas son la energía, la masa, etc. Por ejemplo, la energía interna de un volumen V de fluido sería:

$$E = \int_V \rho e dV \quad , \quad (8.5)$$

donde e es la energía interna por unidad de masa, siendo ρe la energía interna por unidad de volumen. Las **magnitudes intensivas** no se pueden referir a un volumen finito, salvo que sea un fluido uniforme. Ejemplos son la temperatura, la presión, etc.; también, las magnitudes intensivas cuando se refieren a la unidad de volumen: ρ , ρe , etc. Como las ecuaciones de estado se refieren siempre a magnitudes intensivas (son relaciones de equilibrio local), no existen ecuaciones de estado para volúmenes finitos, salvo cuando las magnitudes fluidas sean uniformes en él.

Además de las variables termodinámicas que se han ido definiendo hasta ahora (ρ, p, T, e, \vec{v}) , existen otras de interés que se utilizarán en lo que sigue. Entre ellas, las más importantes son la entropía, s , y la entalpía, h . La **entropía** la podemos definir en forma diferencial a partir del primer principio de la termodinámica,

$$Tds = de + pd(1/\rho), \quad (8.6)$$

donde s es la entropía por unidad de masa (todas las magnitudes *energéticas* que utilizaremos, e, s, h , etc., serán por unidad de masa o específicas). La ecuación anterior expresa que el calor por unidad de masa transferido a una partícula fluida, que en virtud del equilibrio termodinámico local es igual al producto de la temperatura por el incremento de entropía, $dq = Tds$ (si no hubiera equilibrio, el segundo principio de la termodinámica nos dice que $\delta q \leq Tds$, donde δq ya no es una diferencial exacta), se transforma en incrementar la energía interna por unidad de masa, de , y en producir un trabajo de expansión, $pd(1/\rho)$ (por unidad de masa). Si la composición del fluido no fuese homogénea, habría que añadir en el lado derecho de (8.6) términos correspondientes a los potenciales químicos de cada especie multiplicados por las variaciones de las respectivas fracciones másicas, que no consideraremos aquí (ver, por ejemplo, De Groot y Mazur, 1984, capítulo III).

La **entalpía** se define como

$$h = e + p/\rho, \quad (8.7)$$

de forma que, utilizando (8.6), se tiene

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp. \quad (8.8)$$

Por último, otras dos magnitudes termodinámicas que utilizaremos a menudo son los calores específicos a presión y volumen constantes, definidos, respectivamente, como

$$c_p \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad (8.9)$$

$$c_v \equiv T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_\rho = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_\rho. \quad (8.10)$$

El cociente entre ellos se suele designar por γ :

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}. \quad (8.11)$$

8.2. Ecuación de conservación de la energía

El principio de conservación de la energía aplicado a un volumen fluido $V_f(t)$ se puede enunciar de la siguiente forma: la velocidad de incremento de la energía total (cinética más interna) contenida en un volumen fluido es igual al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas (másicas y de superficie) que actúan sobre él, más el calor por unidad de tiempo transferidos a través de las paredes y el calor por unidad de tiempo generado (por reacción química, radiación, etc.) en el interior del volumen. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV &= \int_{V_f} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] dV + \int_{S_f} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_{V_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} dV + \int_{S_f} \vec{v} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds + \int_{S_f} q_n ds + \int_{V_f} Q_r dV, \end{aligned} \quad (8.12)$$

donde e y $v^2/2$ son las energías interna y cinética, respectivamente, por unidad de masa, Q_r es el calor aportado por unidad de tiempo y unidad de volumen al fluido (por radiación, reacción química, etc.), y q_n es el calor transferido al volumen fluido por unidad de tiempo y área a través del elemento de superficie $ds\vec{n}$ de orientación \vec{n} . Por supuesto, todas las magnitudes en (8.12) son funciones de la posición \vec{x} y del tiempo t , siendo q_n , además, función de la orientación del elemento $ds\vec{n}$ en (\vec{x}, t) . En la expresión anterior se ha aplicado el Teorema de Transporte de Reynolds, desglosándose el primer miembro en dos: la velocidad de incremento de las energías interna y cinética en el volumen V_f en el instante t y la velocidad a la que estas energías son transportadas fuera del volumen V_f a través de la superficie S_f por el movimiento del fluido (convección de energía). El principio de conservación de la energía se puede aplicar a un volumen de control arbitrario $V_c(t)$ sin más que sustituir el primer miembro de (8.12) por

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds, \quad (8.13)$$

y cambiando V_f y S_f por V_c y S_c , respectivamente, en los restantes términos.

8.2.1. Vector flujo de calor

Análogamente al transporte de masa y de cantidad de movimiento (lecciones 6 y 7), la energía (calor) puede ser transportada mediante dos mecanismos: convectivamente por el movimiento del fluido y difusivamente por transporte molecular. El transporte convectivo viene dado por el segundo término en la

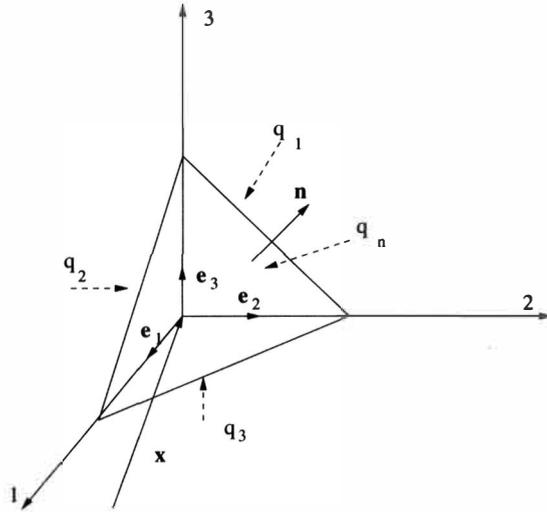


Figura 8.1: Vector flujo de calor.

ecuación (8.12), mientras que el molecular viene caracterizado en esa ecuación por q_n , que de momento es desconocido, pero que sabemos depende, además de la posición y el tiempo, de la orientación de la superficie. Estamos, pues, ante una situación análoga a la de las fuerzas de superficie (sección 7.1.2), en la que para caracterizar estas fuerzas (asimilables a un flujo molecular de cantidad de movimiento) en cada instante era necesario definir una doble infinitud de magnitudes vectoriales: para cada punto y para cada orientación de la superficie; la única diferencia es que ahora las magnitudes q_n son escalares. Similarmente a la definición del tensor de esfuerzos $\bar{\tau}$, veremos a continuación que el flujo de calor q_n , para cada orientación del elemento de superficie $dA\vec{n}$ en (\vec{x}, t) , viene completamente especificado si se conoce un cierto vector $\vec{q}(\vec{x}, t)$, es decir, sólo tres cantidades escalares en cada punto. En efecto, sea un elemento de volumen tetraédrico que tiene como vértice el punto \vec{x} y sus caras están formadas por tres planos ortogonales dirigidos según $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, y el elemento de superficie $dA\vec{n}$ (ver figura 8.1). Aplicando el principio de conservación de la energía en un sistema de referencia donde \vec{v} es localmente cero y despreciando términos volumétricos de orden $(dA)^{3/2}$ frente a dA , se tiene

$$O(dA)^{3/2} = q_1 dA_1 + q_2 dA_2 + q_3 dA_3 + q_n dA \quad , \quad (8.14)$$

donde q_n, q_1, q_2 y q_3 son los valores medios del flujo de calor a través de las cuatro caras del tetraedro que, salvo errores de orden mayor, se pueden aproximar por los valores en el punto \vec{x} . Usando $dA_i = dA\vec{n} \cdot \vec{e}_i = dA n_i, i = 1, 2, 3$,

dividiendo por dA y haciendo $dA \rightarrow 0$, se obtiene

$$-q_n = n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3. \quad (8.15)$$

Definiendo el vector $\vec{q}(\vec{x}, t)$,

$$\vec{q} \equiv q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3, \quad (8.16)$$

llamado vector flujo de calor, la ecuación (8.15) se escribe simplemente

$$q_n = -\vec{n} \cdot \vec{q}. \quad (8.17)$$

Los componentes q_1, q_2 y q_3 de \vec{q} son pues los flujos de calor en (\vec{x}, t) a través de la unidad de superficie orientadas en las direcciones coordenadas \vec{e}_1, \vec{e}_2 y \vec{e}_3 , respectivamente, y son tomados positivos cuando el flujo de calor tiene el sentido de esas direcciones. La ecuación (8.17) muestra que el flujo de calor a través de la unidad de area orientada hacia cualquier dirección \vec{n} queda completamente determinado cuando el vector flujo de calor \vec{q} se conoce en el punto considerado (o, de forma alternativa, cuando se conoce a través de tres direcciones mutuamente perpendiculares que pasan por dicho punto).

8.2.2. Ley de Fourier

Fenomenológicamente se encuentra que en un fluido de composición homogénea existe una relación lineal entre el vector flujo de calor y el gradiente de temperatura:

$$\vec{q} = \overline{\overline{K}} \cdot \nabla T, \quad (8.18)$$

siendo $\overline{\overline{K}}$ el tensor de conductividad térmica. Para un medio isotrópico el tensor $\overline{\overline{K}}$ se reduce a una sola constante, $\overline{\overline{K}} = -K\vec{I}$,

$$\vec{q} = -K\nabla T, \quad (8.19)$$

donde K es la **conductividad térmica** que es una propiedad termodinámica (constitutiva) del fluido, función de la temperatura, y en menor grado de la presión. El signo menos se ha introducido para que K sea positivo, ya que el calor *fluye* hacia las temperaturas decrecientes. La relación anterior se llama Ley de Fourier, quien la formuló hacia 1822 en su famoso tratado *Théorie analytique de la chaleur* (en el cual también introdujo las famosas series trigonométricas que llevan su nombre, y que fueron el germen de la teoría de funciones ortogonales y su aplicación a la resolución de problemas de contorno). Esta ley se puede formular de una forma teórica rigurosa para los

gases a través de la Teoría Cinética (ver lección siguiente) si se cumple, como estamos suponiendo, la hipótesis de equilibrio termodinámico local. Para los líquidos se justifica experimentalmente para la gran mayoría de ellos y en prácticamente todas las condiciones. Cuando el fluido no tiene composición homogénea, además del flujo de calor asociado al gradiente de temperatura (es decir, además del *efecto* Fourier), existe un flujo de calor asociado a los gradientes de concentraciones (denominado efecto Dufour, análogo al efecto Soret o difusividad térmica mencionado en la sección 6.4), que también se justifica teóricamente por la Teoría Cinética de Gases, pero que no consideraremos aquí; es decir, supondremos que la composición es homogénea o, si no lo es, que el efecto Dufour es mucho menos importante que el efecto Fourier (el alumno interesado en el efecto Dufour puede consultar, por ejemplo, Bird et al. 1960, capítulo 18, o de Groot y Mazur, 1984, capítulo XI).

8.3. Ecuación diferencial de las energías interna y mecánica

Aplicando el Teorema de Gauss a las integrales de superficie de la ecuación (8.12), e igualando el integrando a cero se obtiene la siguiente ecuación diferencial para la energía total:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \vec{v} \right] &= \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \\ &= \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (-p\vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r, \end{aligned} \quad (8.20)$$

donde se ha utilizado el vector flujo de calor \vec{q} y se ha desglosado $\vec{\tau} = -p\vec{I} + \vec{\tau}'$; \vec{q} y $\vec{\tau}'$ vienen dados por las leyes de Fourier (8.19) y Stokes (7.33), respectivamente. En la primera igualdad de la ecuación anterior se ha reescrito el primer miembro en forma compacta haciendo uso de la ecuación de continuidad (6.4). El significado físico de los distintos términos de esta ecuación son, respectivamente: variación local de la energía total por unidad de volumen; flujo convectivo de la energía total por unidad de volumen; trabajo de las fuerzas másicas por unidad de volumen y tiempo; trabajo de las fuerzas de presión por unidad de volumen y tiempo; trabajo de las fuerzas de viscosidad por unidad de volumen y tiempo; flujo difusivo o molecular de calor por unidad de volumen, y generación de calor por unidad de volumen debido a la radiación y a las reacciones químicas.

La ecuación anterior para la energía total se suele separar en dos partes, una para la evolución de la energía interna y otra para la energía mecánica.

La forma más directa de realizar este desglosamiento es obtener por separado la ecuación de la energía mecánica multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento (7.38) escalarmente por \vec{v} :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \nabla p + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\tau}') + \vec{v} \cdot \rho \vec{f}_m. \quad (8.21)$$

El primer miembro de esta ecuación es la suma de la variación local y flujo convectivo de la energía mecánica (o cinética) por unidad de volumen, mientras que el segundo representa el trabajo *mecánico* asociado a las fuerzas de presión, a las fuerzas viscosas y a las fuerzas másicas, respectivamente, por unidad de volumen y tiempo. Obsérvese que todo el trabajo de las fuerzas másicas es mecánico, es decir, se transforma en energía mecánica, mientras que los trabajos de las fuerzas de presión y viscosidad sólo en parte se transforman en energía mecánica, contribuyendo el resto a la energía interna, como veremos a continuación. Por otra parte los términos asociados al flujo de calor y a la generación de calor en (8.20) no contribuyen, como era de esperar, a la energía mecánica. La ecuación de la energía interna se obtiene sin más que restar (8.21) de (8.20):

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{\tau}' : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r, \quad (8.22)$$

donde se ha hecho uso de $\nabla \cdot p \vec{v} = p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla p$ y $\nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{\tau}') + \vec{\tau}' : \nabla \vec{v}$. Los dos primeros términos del segundo miembro representan, respectivamente, el trabajo de *compresión* de las fuerzas de presión por unidad de volumen y tiempo (que es nulo para los líquidos ideales al ser éstos incompresibles), y el trabajo de disipación de las fuerzas viscosas, o simplemente disipación viscosa, por unidad de volumen y tiempo. Este último término se suele designar por Φ (función de disipación viscosa de Rayleigh) y es siempre igual o mayor que cero. Para un fluido Newtoniano se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \vec{\tau}' : \nabla \vec{v} = [\mu(\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v} \bar{\bar{I}}] : \nabla \vec{v} \\ &= \frac{\mu}{2} [\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{v} \bar{\bar{I}}] : [\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{v} \bar{\bar{I}}] + \mu_v (\nabla \cdot \vec{v})^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (8.23)$$

debido a que $\underline{\underline{\mu}} > 0$ y a que para cualquier tensor simétrico de segundo orden $\underline{\underline{A}}$ verifica $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}} \equiv A_{ij} A_{ij} \geq 0$ [en (8.23) se ha hecho también uso de la simetría de $\vec{\tau}'$]. La función Φ representa la velocidad a la cual se genera calor (que se transforma en energía interna del fluido) debido a la disipación viscosa del flujo, por unidad de volumen.

8.4. Ecuaciones de la entalpía y de la entropía

En muchas situaciones conviene hacer uso de una ecuación para la entalpía h , o bien una ecuación para la entropía s , en lugar de la ecuación (8.22) para la energía interna e .

Sustituyendo (8.7) en (8.20), se obtiene la siguiente ecuación para la *entalpía total* $h + v^2/2$ (también llamada *entalpía de remanso*, ver lección 19):

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r, \quad (8.24)$$

o, si las fuerzas másicas derivan de un potencial, $\vec{f}_m = -\nabla U$,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r. \quad (8.25)$$

Esta ecuación nos proporciona una *primera integral* del movimiento en algunos tipos de flujos bastante comunes: aquellos que son estacionarios, en los que no hay aporte alguno de calor y el trabajo de las fuerzas viscosas puede despreciarse. Si se cumplen estos requisitos (además de que las fuerzas másicas deriven de un potencial), la ecuación anterior nos dice que la derivada sustancial de

$$h + \frac{v^2}{2} + U \quad (8.26)$$

es nula, es decir, esa magnitud permanece constante a lo largo del movimiento. Esta particularidad del uso de la entalpía será ampliamente utilizada cuando estudiemos los flujos ideales estacionarios (lección 19 y siguientes, donde se cumplen los requisitos anteriores), y proviene del hecho de que la entalpía *incorpora* a la energía interna el trabajo de las fuerzas de presión en forma de un flujo convectivo, por lo que si los únicos trabajos son los asociados a las fuerzas de presión y a las másicas, y éstas son estacionarias, la cantidad (8.26) se conserva.

Para obtener la ecuación que gobierna la evolución de la entropía en el movimiento de un fluido hacemos uso del primer principio de la termodinámica expresado en (8.6) y la ecuación de la energía interna (8.22), llegándose a:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \Phi - \nabla \cdot \vec{q} + Q_r. \quad (8.27)$$

Esta ecuación nos dice que la entropía varía, como era de esperar, solamente por la acción de los efectos disipativos o moleculares, como son la disipación

viscosa y los aportes de calor. Además, satisface el segundo principio de la termodinámica ya que, de acuerdo con (8.27), el incremento de entropía a lo largo del movimiento es mayor o igual que cero (recuérdese que $\Phi \geq 0$) siempre que, por supuesto, aportemos calor al sistema: $-\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (K \nabla T) \geq 0$, y Q_r sea positivo. De acuerdo con la ecuación anterior, la entropía es otra integral del movimiento para los flujos ideales (efectos viscosos despreciables), adiabáticos ($\vec{q} = 0$) y sin ningún otro aporte de calor.

8.5. Ecuaciones de estado

Para que el conjunto de ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía [ecuaciones (6.4), (7.38) y, por ejemplo, (8.22)] sea un conjunto cerrado, es necesario hacer uso de ecuaciones de estado que nos relacione la temperatura con la presión y la densidad, $T = T(p, \rho)$, y la energía interna con, por ejemplo, la temperatura y la presión, $e = e(T, p)$ (aparte están las ecuaciones constitutivas para $\vec{\tau}$ y \vec{q} que ya han sido definidas). De esta forma tendremos un conjunto cerrado de ecuaciones para ρ , \vec{v} y p (ó ρ , \vec{v} y T).

Para un **líquido perfecto**, estas dos ecuaciones de estado son:

$$\rho = \text{constante}, \quad (8.28)$$

$$c_v = c_p \equiv c = \text{constante}, \quad (8.29)$$

es decir, la densidad y el calor específico son constantes (los calores específicos a presión y volumen constante son iguales al ser constante la densidad, $\gamma = c_p/c_v = 1$). La ecuación (8.10) nos proporciona

$$de = cdT, \quad e = cT + e_o, \quad (8.30)$$

siendo e_o la energía interna de referencia a $T = 0$, que se suele tomar cero; de esta ecuación y de (8.6), al ser constante la densidad, se tiene además

$$Tds = cdT, \quad s = c \ln(T/T_o) + s_o, \quad (8.31)$$

donde s_o es la entropía a la temperatura de referencia T_o .

Los **gases perfectos** se definen como aquellos que satisfacen la ecuación de gas ideal,

$$\frac{p}{\rho} = R_g T, \quad (8.32)$$

donde

$$R_g = \frac{R}{M} \quad (8.33)$$

es la constante específica del gas en cuestión, cociente entre la *constante universal de los gases*, $R = 8,314 JK^{-1} mol^{-1}$ y la masa molecular M del gas, y verifican además que los calores específicos son constantes:

$$c_p = \text{constante}, \quad c_v = \text{constante}. \quad (8.34)$$

Estas relaciones nos proporcionan

$$e = c_v T + e_o, \quad (8.35)$$

$$h = e + p/\rho = c_v T + R_g T + e_o = c_p T + e_o, \quad (8.36)$$

$$c_p - c_v = R_g, \quad (8.37)$$

siendo esta última expresión la llamada relación de Meyer. Veremos en la lección siguiente que la Teoría Cinética de Gases demuestra que $\gamma = c_p/c_v$ es igual a 5/3 para los gases monoatómicos y 7/5 para los gases biatómicos, lo cual coincide extraordinariamente bien con los resultados experimentales a temperaturas no muy altas. Finalmente, haciendo uso de (8.6) y (8.32), la entropía de un gas perfecto viene dada por

$$s - s_o = c_v \ln \left(\frac{T/T_o}{(\rho/\rho_o)^{\gamma-1}} \right) = c_v \ln \left(\frac{p/p_o}{(\rho/\rho_o)^\gamma} \right). \quad (8.38)$$

Es decir, la relación isentrópica que satisfacen los gases perfectos es:

$$p/\rho^\gamma = \text{constante}. \quad (8.39)$$

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulos 1 y 3.
- R.B. BIRD, W.E. STEWART y E. LIGHTFOOT, 1960. Capítulos 8, 10 y 18.
- S.R. de GROOT y P. MAZUR, 1984. Capítulos II, III, IV y XI.
- L. ROSENHEAD (editor), 1988. Capítulo I: *Real and Ideal Fluids*, por M.J. Lighthill.
- D.E. ROSNER, 1986. Capítulos 2 y 5.

Capítulo 9

Fundamentos microscópicos de las ecuaciones de los fluidos: gas monoatómico

Un conocimiento más profundo de la validez de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, además del significado de algunas de las cantidades macroscópicas que entran en ellas y de las implicaciones de varias de las suposiciones hechas, se puede adquirir examinando el origen de estas ecuaciones desde un punto de vista microscópico en un caso especial: el flujo de un gas monoatómico con densidad no muy alta.

9.1. Función de distribución de un gas monoatómico

Las moléculas dentro del elemento de volumen $d^3 x$ (partícula fluida centrada en \vec{x}) pueden clasificarse de acuerdo con su velocidad. Para ello definimos la función de distribución f , de forma que

$$f(\vec{x}, \vec{c}, t) d^3 x d^3 c \quad (9.1)$$

es el número de moléculas en $d^3 x$ centrado en \vec{x} y en el instante t que tienen una velocidad *molecular* entre \vec{c} y $\vec{c} + d\vec{c}$, es decir, velocidades dentro del pequeño volumen en el espacio de velocidades $d^3 c$ centrado en la velocidad \vec{c} . Las propiedades de un gas monoatómico (es decir, con moléculas sin grados de libertad internos) están completamente determinadas una vez que $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$

es conocida. Por ejemplo, la densidad numérica n y la densidad másica ρ en \vec{x} y en el instante t se definen:

$$n(\vec{x}, t) = \int d^3 c f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad , \quad (9.2)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \int d^3 c m f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad , \quad (9.3)$$

donde m es la masa de la molécula (suponemos que todas las moléculas son idénticas) y la integración se efectúa en todo el campo de velocidades ($\int d^3 c \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_3$). De forma similar, la densidad de cantidad de movimiento en (\vec{x}, t) es:

$$\rho \vec{v} = \int d^3 c m \vec{c} f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad . \quad (9.4)$$

Esta ecuación, junto con la anterior, definen la velocidad macroscópica del fluido $\vec{v}(\vec{x}, t)$ en el punto \vec{x} y en el instante t , o velocidad del centro de masa de las moléculas contenidas en el volumen $d^3 x$ en el instante t . La densidad de energía en (\vec{x}, t) se puede expresar como:

$$\epsilon(\vec{x}, t) = \int d^3 c \frac{1}{2} m c^2 f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad . \quad (9.5)$$

Si definimos la velocidad \vec{c}' como

$$\vec{c} \equiv \vec{v} + \vec{c}' \quad , \quad (9.6)$$

siendo \vec{v} la velocidad media molecular definida en (9.4), \vec{c}' puede considerarse como la velocidad de fluctuación de la molécula en torno a la velocidad media o macroscópica. Esta velocidad de fluctuación tiene la propiedad evidente

$$\int d^3 c m \vec{c}' f(\vec{x}, \vec{c}, t) = 0 \quad . \quad (9.7)$$

Sustituyendo (9.6) en la ecuación (9.5), se obtiene

$$\epsilon = \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \quad , \quad (9.8)$$

donde el primer término es la densidad de energía cinética y e es la *energía interna*,

$$e(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho} \int d^3 c \frac{1}{2} m c'^2 f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad . \quad (9.9)$$

Esta ecuación muestra que la energía interna de un gas monoatómico es una medida de la energía translacional de sus moléculas asociada a la velocidad de fluctuación. En contraste con la energía cinética *visible*, o macroscópica, asociada con el movimiento del fluido ($\frac{1}{2}\rho v^2$), la energía interna es la energía cinética *oculta* asociada con el movimiento caótico molecular alrededor de su velocidad media o velocidad del centro de masas.

El significado de la función de distribución molecular $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$ es claro a partir de su definición: Es la densidad numérica de moléculas en el espacio de seis dimensiones posición-velocidad o espacio de las fases. Nos referiremos a este espacio como μ - *espacio*. Sin embargo, existe una interpretación *estadística* alternativa de $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$ si se ignora la identidad de cada molécula y nos preguntamos por la fracción de moléculas que están en el volumen $d^3 x$ alrededor de \vec{x} con velocidades en el rango $d^3 c$ alrededor de \vec{c} . La respuesta claramente es:

$$\frac{f(\vec{x}, \vec{c}, t)d^3 x d^3 c}{[\int d^3 c f(\vec{x}, \vec{c}, t)]d^3 x} = \frac{1}{n} f(\vec{x}, \vec{c}, t)d^3 c .$$

Por tanto, $f(\vec{x}, \vec{c}, t)d^3 c/n$ se puede interpretar como la probabilidad de encontrar una molécula con velocidad en el rango $d^3 c$ alrededor de \vec{c} . Con este punto de vista, $f(\vec{x}, \vec{c}, t)/n$ es la *densidad de probabilidad* de encontrar en (\vec{x}, t) una molécula con velocidad \vec{c} .

De lo anterior se puede observar que la descripción de un gas (monoatómico en este caso) a partir de la función de distribución $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$ es *intermedia* entre la descripción macroscópica en términos de $\rho(\vec{x}, t)$, $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $e(\vec{x}, t)$, etc. que hemos visto hasta ahora, y la descripción puramente microscópica en función de la velocidad y posición de cada molécula individual. De hecho, la función de distribución se puede definir a partir de la descripción microscópica, es decir, si se conoce la posición y la velocidad de todas las moléculas del gas, sin más que obtener a partir de esta información el número de moléculas que en el instante t tienen velocidades comprendidas entre \vec{c} y $\vec{c} + d\vec{c}$ en el elemento de volumen $d^3 x$ centrado en \vec{x} . El uso de la función de distribución presupone la hipótesis de medio continuo, ya que se promedia en elementos de volumen $d^3 x$, pero, a diferencia con la descripción macroscópica, se introduce un grado de libertad más que es el rango de velocidad molecular en el que se encuentran las moléculas promediadas. Las magnitudes macroscópicas se pueden definir a partir de la descripción microscópica, como se hizo en la sección 2.2, o a partir de f como se acaba de hacer. La ventaja de utilizar f frente a la descripción puramente microscópica es obvia, ya que esta última es en la práctica imposible de aplicar como se apuntó en 2.2. A pesar de que la función de distribución

parece que añade poco a la descripción macroscópica, veremos a continuación que una teoría basada en ella (denominada **Teoría Cinética de Gases**) no sólo proporciona de una forma inmediata las ecuaciones de conservación y de estado descritas en las lecciones anteriores, sino que además permite obtener rigurosamente las ecuaciones constitutivas (que han sido introducidas *ad hoc* en las lecciones anteriores), así como calcular los coeficientes de transporte (D, μ, K) a partir de propiedades puramente moleculares. Como desventaja, sólo existe una teoría cinética para los gases y, en particular, lo que vamos a ver a continuación es para gases monoatómicos; es decir, para gases cuyas moléculas sólo tienen tres grados de libertad traslacionales asociados a las tres componentes del vector \vec{c} . Si hubieran más grados de libertad molecular, como rotación, vibración, etc., que aparecen cuando las moléculas del gas no son monoatómicas, habría que añadir estos grados de libertad como argumentos de la función de distribución. Para los líquidos la Teoría Cinética es tan complicada que es preferible hacer uso de resultados experimentales para obtener las ecuaciones constitutivas y de estado y así cerrar las ecuaciones de conservación (para derivar las ecuaciones de conservación no es necesario utilizar argumentos microscópicos, sino que es suficiente apelar a los principios físicos de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía, como se ha hecho en lecciones precedentes; sin embargo, la derivación de estas ecuaciones a partir de argumentos microscópicos es, como veremos más adelante, mucho más elegante). Por supuesto, no se pretende en esta lección ni tan siquiera dar un repaso a la Teoría Cinética de Gases (lo cual ocuparía un curso entero), sino sólo obtener algunos resultados elementales y describir brevemente algunos conceptos que ayudarán a afianzar la comprensión de las ecuaciones de los fluidos dadas en lecciones anteriores.

9.2. Ecuación de estado de un gas monoatómico

Cuando un gas está en equilibrio termodinámico, la densidad numérica $n(\vec{x}, t)$ es independiente de \vec{x} y t . Por tanto, $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$ debe ser también independiente de \vec{x} y t , y se puede escribir simplemente como $f(\vec{c})$. En ausencia de campos de fuerza, no hay direcciones privilegiadas para el movimiento de las moléculas y $f(\vec{c})$ depende de \vec{c} sólo a través de su magnitud c . Esto es, en equilibrio, $f(\vec{x}, \vec{c}, t) = f(\vec{c}) = f(c)$.

Sea $\delta\vec{A}(= \vec{n} \delta A)$ un elemento de superficie centrado en el punto P en la pared de un recipiente que contiene un gas monoatómico en equilibrio termodinámico, y sea \vec{n} el vector unitario normal apuntando hacia el interior del gas (ver figura 9.1). Tomemos un sistema coordenado en el que el eje x apunta en

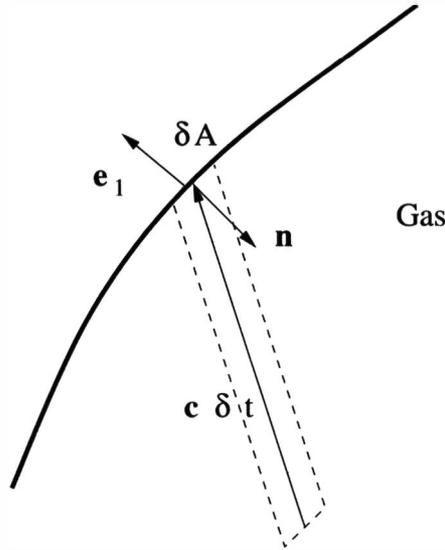


Figura 9.1: Flujo molecular hacia una superficie.

la dirección de $-\vec{n}$ ($\vec{e}_1 = -\vec{n}$). El número de moléculas con velocidad entre \vec{c} y $\vec{c} + d\vec{c}$ que inciden en el elemento de superficie δA en un intervalo de tiempo δt es

$$(\vec{c} \delta t \cdot \vec{e}_1 \delta A) f(\vec{c}) d^3 c .$$

Si suponemos que las colisiones de las moléculas con la pared son elásticas, cada molécula en el rango de velocidades considerado experimentará un cambio de cantidad de movimiento de magnitud $2m \vec{c} \cdot \vec{e}_1$ en la dirección de \vec{n} . Por tanto, estas moléculas comunicarán a la superficie una fuerza igual a

$$2m(\vec{c} \cdot \vec{e}_1)^2 \delta A f(\vec{c}) d^3 c , \tag{9.10}$$

en la dirección de $-\vec{n}$. La fuerza total ejercida por todas las moléculas sobre δA se obtiene integrando la expresión anterior sobre $c_1 > 0$ y todos los valores de c_2 y c_3 . Es decir, la presión p en el punto P de la superficie es

$$p = 2m \int_0^\infty d c_1 \int_{-\infty}^\infty d c_2 \int_{-\infty}^\infty d c_3 c_1^2 f(\vec{c}) = m \int_{-\infty}^\infty d c_1 \int_{-\infty}^\infty d c_2 \int_{-\infty}^\infty d c_3 c_1^2 f(\vec{c}) , \tag{9.11}$$

debido a que $f(\vec{c}) = f(\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2})$ es una función par en c_1 . Por la misma razón, es también correcto decir que p viene dada por la expresión anterior reemplazando c_1 por c_2 o por c_3 , es decir,

$$p = \frac{m}{3} \int d^3 c c^2 f(\vec{c}) . \quad (9.12)$$

Haciendo uso de la ecuación (9.9) y teniendo en cuenta que en equilibrio termodinámico $\vec{v} = 0$ (es decir, $\vec{c} = \vec{c}'$), se tiene:

$$p = \frac{2}{3} \rho e . \quad (9.13)$$

Esta es la ecuación de estado que satisface un gas monoatómico. Experimentalmente se tiene que [ecuación (8.32)]

$$p = \rho R_g T , \quad (9.14)$$

donde R_g es la constante del gas en cuestión, igual a una constante universal (la constante de Boltzmann $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$) dividida por la masa de la molécula:

$$R_g = k/m \quad (9.15)$$

Comparando la ecuación de estado experimental (9.14) con la teórica (9.13), uno encuentra que son equivalentes si

$$e = \frac{3}{2} R_g T , \quad (9.16)$$

de donde los calores específicos a volumen y a presión constantes definidos en (8.9) y (8.10) [$c_v = (\partial e / \partial T)_v$ y $c_p = (\partial h / \partial T)_p$] y su relación ($\gamma = c_p / c_v$) para un gas monoatómico son:

$$c_v = \frac{3}{2} R_g , \quad c_p = \frac{5}{2} R_g , \quad \gamma = \frac{5}{3} , \quad (9.17)$$

que concuerdan bastante bien con los resultados experimentales.¹ En términos de la constante de Boltzmann, tenemos

$$p = n k T , \quad (9.18)$$

donde $n = \rho / m$. Por otra parte, la energía media por molécula, $e_m \equiv m e$, es

$$e_m = \frac{3}{2} k T . \quad (9.19)$$

¹Por ejemplo, para el Argon, $m = 6,6 \times 10^{-26} \text{ kg}$, la expresión (9.17b) da $c_p = 527,7 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, mientras que a 250° K se encuentra experimentalmente $c_p = 520,3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Por otra parte, el valor teórico $\gamma = 5/3$ sólo difiere del experimental a partir de la quinta cifra decimal a esa temperatura.

Esta ecuación muestra que **la temperatura macroscópica es una medida de la energía translacional media de una molécula**. Obsérvese que las moléculas de un gas monoatómico tiene tres grados de libertad traslacionales, con lo que, utilizando el principio de equipartición de la energía, la energía por grado de libertad es $\frac{1}{2}kT$. Este resultado se puede extrapolar para obtener, aproximadamente, la energía interna de un gas cuyas moléculas tengan otros grados de libertad además de los traslacionales. Así, una molécula diatómica tiene, además de los tres grados de libertad traslacionales, uno vibracional (variación de la distancia que separa a los dos átomos de la molécula), y dos más rotacionales (correspondientes a los dos ángulos que hay que especificar para situar a la molécula con respecto a unos ejes que se muevan con el centro de masa de la molécula). Sin embargo, el estado vibracional está normalmente *congelado* a temperaturas cercanas a la ambiente,² por lo que sólo 5 grados de libertad son efectivos a temperaturas normales. De esta forma, la energía interna de un gas diatómico es, a temperaturas no excesivamente altas, $e = \frac{5}{2}R_gT$; es decir, $c_v = \frac{5}{2}R_g$, $c_p = \frac{7}{2}R_g$ y $\gamma = 7/5$, que concuerdan muy bien con los resultados experimentales.³

La expresión (9.16) también proporciona la **velocidad media de fluctuación**, c_T , de un gas en función de la temperatura:

$$e \equiv \frac{1}{2}c_T^2 \quad , \quad c_T = \sqrt{3R_gT} = \sqrt{3kT/m} . \quad (9.20)$$

Esta expresión es válida independientemente de que el gas sea monoatómico o no, puesto que la ecuación (9.16) corresponde a la contribución de la energía translacional a la energía interna. Para O_2 a $15^\circ C$ se tiene $c_T \simeq 472m/s$. Esta velocidad está relacionada, como veremos en las lecciones 10 y 25, a la velocidad de propagación del sonido en el seno de un gas [cuyo valor en un gas ideal, es decir, que verifica (9.14), es $a = \sqrt{\gamma R_gT}$]. El valor relativamente alto de la velocidad de agitación molecular hace que, salvo cuando la velocidad media del gas se aproxima a la del sonido, el número de moléculas que atraviesan una superficie cualquiera en un sentido es aproximadamente el mismo de las que la atraviesan en sentido opuesto, siendo la diferencia una pequeña fracción que da cuenta del flujo medio o convectivo.

Finalmente, aunque las relaciones anteriores están deducidas suponiendo que el gas está en equilibrio termodinámico, por supuesto son válidas localmen-

²Para el O_2 , el primer estado vibracional tiene una energía equivalente a $\epsilon/k = 2230^\circ K$, con lo que sólo a muy altas temperaturas empieza a activarse este estado.

³A temperaturas entre $0^\circ C$ y $200^\circ C$, los valores experimentales medios de c_v y γ para el O_2 ($m = 5,3523 \times 10^{-26}kg$) son $c_v = 648,5Jkg^{-1}K^{-1}$ y $\gamma = 1,4$, mientras que los valores teóricos, de acuerdo con las expresiones anteriores, son $c_v = 644,6Jkg^{-1}K^{-1}$ y $\gamma = 1,4$.

te bajo la hipótesis de equilibrio termodinámico local (sección 8.1.1), hipótesis que se hace ahora aún más plausible teniendo en cuenta los valores tan altos de la velocidad de agitación molecular, que hace que las colisiones sean muy frecuentes en condiciones normales.

9.3. Distribución de Maxwell

Veamos a continuación como sería la función de distribución para un gas monoatómico en equilibrio termodinámico. Para ello consideremos las moléculas en el elemento de volumen d^3x alrededor de \vec{x} , y denotemos por $F(c_1)dc_1$ la probabilidad de encontrar una molécula en ese volumen con la componente de la velocidad en la dirección \vec{e}_1 con valores entre c_1 y $c_1 + dc_1$. Debido a la isotropía de la distribución de velocidades en equilibrio termodinámico, las probabilidades de encontrar una molécula con las componentes en las direcciones \vec{e}_2 y \vec{e}_3 en los intervalos $(c_2, c_2 + dc_2)$ y $(c_3, c_3 + dc_3)$ son, respectivamente, $F(c_2)dc_2$ y $F(c_3)dc_3$. Si estas probabilidades son estadísticamente independientes, es decir, si la probabilidad de encontrar una componente en un rango de velocidades dado no está afectada por la de otra componente, la probabilidad de encontrar una molécula cuyas componentes de la velocidad están en los intervalos $(c_1, c_1 + dc_1)$, $(c_2, c_2 + dc_2)$ y $(c_3, c_3 + dc_3)$ es $F(c_1)F(c_2)F(c_3)dc_1dc_2dc_3$. De acuerdo con lo visto anteriormente, esta cantidad debe ser igual a $[f(c)/n]d^3c$, es decir,

$$\frac{f(c)}{n} = F(c_1)F(c_2)F(c_3) \quad , \quad (9.21)$$

donde $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, para todo c_1, c_2 y c_3 . Esto es sólo posible si f es de la forma

$$f(c) = n A e^{-Bc^2} \quad , \quad (9.22)$$

y, por tanto, $F(c_i) = A^{1/3} e^{-Bc_i^2}$, $i = 1, 2, 3$, donde A y B son independientes de \vec{c} . Para ver lo anterior, diferenciamos la ecuación (9.21) respecto a c_1 ,

$$\frac{f'(c)}{f(c)} \frac{c_1}{c} = \frac{F'(c_1)}{F(c_1)} \quad \text{o} \quad \frac{1}{c} \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{c_1} \frac{F'(c_1)}{F(c_1)} \quad . \quad (9.23)$$

Es decir, $\frac{1}{c} \frac{f'(c)}{f(c)}$ no es función de c_2 y c_3 . De forma similar, derivando respecto a c_2 , se demuestra que no es una función de c_3 y c_1 . Por tanto es una constante,

$$\frac{1}{c} \frac{f'(c)}{f(c)} = \text{constante} = -2B \quad .$$

Integrando se obtiene (9.22). Para determinar las dos constantes A y B , haremos uso de las expresiones de n y p : $n = \int d^3 c f(\vec{x}, \vec{c}, t)$, $p = n k T = (m/3) \int d^3 c c^2 f(\vec{x}, \vec{c}, t)$. Utilizando las relaciones

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^m e^{-\alpha x^2} = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{1}{\alpha^{(m+1)/2}} ,$$

$$\Gamma(m) \equiv (m-1)! \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad ,$$

se obtiene

$$A = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{3/2} \quad y \quad B = \frac{m}{2kT} \quad , \quad (9.24)$$

de donde la distribución de equilibrio (distribución Maxwelliana) es

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m c^2}{2kT}\right\} . \quad (9.25)$$

Esta expresión sigue siendo válida localmente (en primera aproximación, ver sección 9.6) bajo la hipótesis de equilibrio termodinámico local, sin más que utilizar $n(\vec{x}, t)$ y $T(\vec{x}, t)$, y sustituir c^2 por $|\vec{c} - \vec{v}|^2$.

9.4. Ecuación que gobierna la función de distribución molecular

Considérese el espacio de seis dimensiones posición-velocidad, es decir, el espacio de las fases o μ - *espacio*. En cualquier tiempo t , cada molécula tiene una velocidad \vec{c} y una posición \vec{x} y, por tanto, está en algún punto del μ - *espacio*. A medida que el tiempo avanza, la molécula cambiará su localización en el μ - *espacio*, describiendo una trayectoria en este espacio. El movimiento de la molécula está, por otra parte, descrito por las leyes de Newton,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{c} \quad (9.26)$$

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{f}_m(\vec{x}, t) \quad (9.27)$$

donde \vec{f}_m es la fuerza externa por unidad de masa que actúa sobre la molécula cuando se encuentra en \vec{x} en el tiempo t . Si la posición y la velocidad iniciales de la molécula son conocidas, la ecuación anterior muestra que, en cada instante

t , se conoce la velocidad y la posición de la molécula en el μ - *espacio*. La trayectoria trazada por la molécula será generalmente suave (suponiendo que $\vec{f}_m(\vec{x}, t)$ es una función continua), hasta que choca con otra molécula, momento en el que la velocidad cambiará bruscamente (se está suponiendo que el alcance de las fuerzas intermoleculares es mucho menor que la separación media entre las moléculas, por lo que la interacción se puede considerar como una colisión puntual, como si las moléculas fuesen bolas de billar; más abajo se especifica más concretamente esta hipótesis).

Consideremos un volumen $V(t)$ en el espacio de las fases. En el instante t , el número total de moléculas dentro de este volumen es

$$\int_{V(t)} d^3 x d^3 c f(\vec{x}, \vec{c}, t) .$$

Si no hay colisiones, todas las moléculas en $V(t)$ se moverán hacia un volumen vecino $V(t + \delta t)$ en un intervalo de tiempo δt y

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3 x d^3 c f(\vec{x}, \vec{c}, t) = 0 .$$

Sin embargo, debido a las colisiones, algunas de las moléculas que están fuera de $V(t)$ en el tiempo t pueden evolucionar hacia el volumen $V(t + \delta t)$ en $t + \delta t$ y, de forma similar, algunas que en el instante t se encontraban en $V(t)$ pueden estar fuera de $V(t + \delta t)$ en $t + \delta t$. Si denominamos $\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{col}$ a la velocidad neta de incremento de moléculas en el volumen elemental del μ - *espacio* $d^3 x d^3 c$, se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3 c d^3 x f(\vec{x}, \vec{c}, t) = \int_{V(t)} d^3 x d^3 c \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{col} .$$

Aplicando el Teorema del Transporte de Reynolds y el Teorema de Gauss en el μ - *espacio*, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{c}) + \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{col} , \quad (9.28)$$

donde ∇_c denota el gradiente en el espacio de velocidades \vec{c} . Como \vec{x} y \vec{c} son variables independientes, siempre que \vec{f}_m no sea función de \vec{c} se puede escribir

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{c} \cdot \nabla) f + (\vec{f}_m \cdot \nabla_c) f = \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{col} . \quad (9.29)$$

Cuando $(\delta f / \delta t)_{col}$ es modelado con las hipótesis de que todas las colisiones son binarias y ocurren en espacios muy pequeños comparados con el

camino libre medio que recorren las moléculas entre colisiones y en intervalos de tiempo muy pequeños comparados con el tiempo medio entre colisiones (en otras palabras, cuando el gas está a densidades relativamente bajas de forma que $n d_0^3 \ll 1$, donde d_0 es el rango de acción de las fuerzas intermoleculares o tamaño *efectivo* de la molécula) se obtiene un operador integral, cuadrático en f , llamado operador de Boltzmann. La ecuación que resulta de introducir esta expresión para $(\delta f / \delta t)_{col}$ en (9.28) o en (9.29) es la **ecuación cinética de Boltzmann**, cuya derivación cae fuera del alcance de esta pequeña introducción al fundamento microscópico de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos (véanse, por ejemplo, las referencias sobre Teoría Cinética citadas al final de esta lección).

9.5. Ecuaciones de conservación

Una colisión entre dos moléculas provoca, generalmente, un cambio drástico en las velocidades de las moléculas, pero produce un cambio muy pequeño en las posiciones de las moléculas durante el tiempo de colisión. Por tanto, las colisiones entre moléculas en un pequeño volumen $d^3 x$ alrededor de \vec{x} produce una redistribución de las moléculas en el espacio de velocidades, pero manteniendo, aproximadamente, el número de moléculas en el volumen $d^3 x$. Por otra parte, la masa total, la cantidad de movimiento y la energía se conservan en las colisiones entre moléculas, si estas colisiones son elásticas. De aquí se deduce que

$$\int d^3 c m \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col} = 0 , \tag{9.30}$$

$$\int d^3 c m \vec{c} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col} = 0 , \tag{9.31}$$

$$\int d^3 c \frac{1}{2} m c^2 \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col} = 0 , \tag{9.32}$$

para cada \vec{x} y t .

Multipliquemos la ecuación (9.28) por m e integremos sobre todo el espacio de velocidades. Utilizando (9.30) se tiene

$$\int d^3 c m \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{c}) + \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) \right] = 0 .$$

Ahora bien,

$$\int d^3 c m \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 c m f = \frac{\partial \rho}{\partial t} ,$$

$$\int d^3 c m \nabla \cdot (f \vec{c}) = \nabla \cdot \int d^3 c m \vec{c} f = \nabla \cdot \rho \vec{v} ,$$

$$\int d^3 c m \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) = \int_{S_c \rightarrow \infty} d^2 c m f \vec{f}_m = 0$$

donde se ha hecho uso de las definiciones (9.3) y (9.4), y la última relación viene de aplicar el Teorema de Gauss y de suponer que f va a cero cuando $c \rightarrow \infty$ más rápido que cualquier potencia positiva de $1/c$. Se concluye que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 , \tag{9.33}$$

que es la misma ecuación de continuidad (6.4) derivada mediante consideraciones macroscópicas.

De forma similar, si se multiplica la ecuación (9.28) por $m \vec{c}$ y se integra sobre todo el campo de velocidades se obtiene

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \int d^3 c m \vec{c} \vec{c} f(\vec{x}, \vec{c}, t) - \rho \vec{f}_m = 0 , \tag{9.34}$$

donde se ha hecho uso de

$$\int d^3 c m \vec{c} \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) = \int d^3 c \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m m \vec{c}) - \int d^3 c m f \vec{f}_m \cdot \nabla_c \vec{c} = 0 - \rho \vec{f}_m .$$

Teniendo en cuenta que $\vec{c} = \vec{v} + \vec{c}'$, el segundo término de (9.34) se puede escribir como

$$\int d^3 c m \vec{c} \vec{c} f = \int d^3 c m (\vec{v} + \vec{c}') (\vec{v} + \vec{c}') f = \int d^3 c m (\vec{v} \vec{v} + \vec{v} \vec{c}' + \vec{c}' \vec{v} + \vec{c}' \vec{c}') f d^3 c$$

$$= \rho \vec{v} \vec{v} + 0 + 0 + .$$

donde

$$\bar{P} \equiv \int d^3 c m \vec{c}' \vec{c}' f , \tag{9.35}$$

es el llamado **tensor de presiones**. La ecuación (9.34) queda

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + \bar{\bar{P}}) = \rho \vec{f}_m \quad , \quad (9.36)$$

que es idéntica a la ecuación de cantidad de movimiento (7.23) derivada macroscópicamente si se identifica el tensor de presiones cambiando de signo, $-\bar{\bar{P}}$, con el tensor de esfuerzos $\bar{\bar{\tau}}$.

Finalmente, multiplicando la ecuación (9.28) por $\frac{1}{2}m c^2$ e integrando,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) \right] + \nabla \cdot \int d^3 c \frac{1}{2}m c^2 \vec{c} f - \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad (9.37)$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones (9.5) y (9.8) y de

$$\begin{aligned} \int d^3 c \frac{1}{2}m c^2 \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) &= \int d^3 c \nabla_c \cdot \left(f \vec{f}_m \frac{1}{2}m c^2 \right) - \int d^3 c \frac{m}{2} f \vec{f}_m \cdot \nabla_c c^2 = \\ &= 0 - \int d^3 c \frac{m}{2} f \vec{f}_m \cdot [2 \vec{c} \cdot \nabla_c \vec{c}] d^3 c = -\rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} . \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int d^3 c \frac{1}{2}m c^2 \vec{c} f &= \int d^3 c m \left(\frac{1}{2}v^2 + \vec{v} \cdot \vec{c}' + \frac{1}{2}c'^2 \right) (\vec{v} + \vec{c}') f = \\ &= \frac{1}{2}\rho v^2 \vec{v} + 0 + \rho e \vec{v} + 0 + \vec{v} \cdot \bar{\bar{P}} + \vec{q} \quad , \end{aligned}$$

donde

$$\vec{q} \equiv \int d^3 c \frac{1}{2}m c'^2 \vec{c}' f(\vec{x}, \vec{c}', t) \quad , \quad (9.38)$$

se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) + \vec{v} \cdot \bar{\bar{P}} + \vec{q} \right] = \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} \quad . \quad (9.39)$$

Esta ecuación coincide con la ecuación de conservación de la energía total (8.20) derivada macroscópicamente si identificamos (9.38) con el flujo de calor y tenemos en cuenta que

$$\vec{v} \cdot \bar{\bar{P}} = \bar{\bar{P}}^T \cdot \vec{v} = -\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v} \quad .$$

Se concluye, pues, que las leyes de conservación macroscópicas es un reflejo de las leyes de conservación en la escala microscópica; más concretamente, resultado de la conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía en las colisiones moleculares. Además, para un gas monoatómico, se ha establecido:

$$\bar{\bar{\tau}} = - \bar{\bar{P}} = - \int d^3 c m \vec{c}' \vec{c}' f(\vec{x}, \vec{c}, t) ,$$

$$\vec{q} = \int d^3 c \frac{1}{2} m c'^2 \vec{c}' f(\vec{x}, \vec{c}, t) .$$

Estas expresiones muestran que el tensor de esfuerzos macroscópico se puede atribuir al transporte *invisible* (en la escala macroscópica) de cantidad de movimiento debido al movimiento fluctuante de las moléculas, y que el flujo de calor macroscópico es un reflejo del transporte *invisible* de energía cinética por el movimiento aleatorio de las moléculas. Estas expresiones han sido derivadas con la suposición de que las moléculas son esferas elásticas que no interactúan unas con otras al menos que colisionen. De forma más precisa, se ha supuesto que el rango de acción de las fuerzas intermoleculares es muy pequeño, mucho menor que el recorrido libre medio que las moléculas recorren entre colisiones. Si esto no fuese así, es decir, si las interacciones entre moléculas fueran de largo alcance, o si el gas fuera muy denso de forma que el recorrido libre medio entre colisiones fuese del mismo orden que el rango de acción de la interacción molecular, las expresiones anteriores no serían válidas. Por ello se especificó al comienzo de esta lección que la Teoría Cinética aquí esbozada es para un gas monoatómico cuando su densidad no es muy alta (y por ello tampoco vale para los líquidos). De todas formas, la condición $nd_0^3 \ll 1$ no es muy restrictiva si se tiene en cuenta que d_0 es, típicamente, del orden de $5 \times 10^{-10} m$. La condición $n \ll d_0^{-3} \sim 8 \times 10^{27} m^{-3}$ equivaldría, por ejemplo para el Argón ($m \simeq 6,6 \times 10^{-26} kg$), a $\rho \ll 534 kg/m^3$, una densidad bastante alta (para conseguir esa densidad a presión atmosférica haría falta una temperatura por debajo de un grado Kelvin, con lo cual ya no sería un gas sino un líquido). Para los líquidos, la distancia intermolecular típica es del orden de d_0 (ver sección 2.1).

9.6. Efecto de las colisiones sobre la distribución de velocidades

Para determinar el efecto que sobre la función de distribución de velocidades f tiene las colisiones moleculares, uno tendría que obtener la forma

exacta de $(\delta f / \delta t)_{col}$ y sustituirla en la ecuación (9.28). Pero esto nos llevaría demasiado lejos del asunto principal de esta lección que es el estudio de los fundamentos microscópicos de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos en un caso especial. Sin embargo, si el sistema fluido se puede considerar, en primera aproximación, en equilibrio termodinámico local, en cada punto \vec{x} y en cada instante t f no debe ser muy diferente de la función de distribución Maxwelliana de equilibrio f_o [ecuación (9.25)]:

$$f_o(\vec{x}, \vec{c}, t) = \frac{n(\vec{x}, t)}{[2\pi k T(\vec{x}, t)/m]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{m(\vec{c} - \vec{v}) \cdot (\vec{c} - \vec{v})}{2k T(\vec{x}, t)}\right\} \quad (9.40)$$

En equilibrio, las colisiones moleculares no alterarán la forma de la distribución: $(\delta f / \delta t)_{col} = 0$ y $f = f_o$. Cerca del equilibrio, uno espera que $(\delta f / \delta t)_{col}$ sea proporcional a la diferencia entre la distribución Maxwelliana local f_o y la función de distribución real f ; es decir,

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{col} \simeq \frac{f_o - f}{\tau_c} \quad (9.41)$$

donde la constante de proporcionalidad $1/\tau_c$ tiene las dimensiones de una frecuencia. Por tanto, cerca del equilibrio, la ecuación (9.28) se puede aproximar por

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \vec{c}) + \nabla_c \cdot (f \vec{f}_m) = -\frac{f - f_o}{\tau_c} \quad (9.42)$$

Para ver el significado de τ_c supongamos que perturbamos un medio sin fuerzas místicas inicialmente en reposo a temperatura T_o y densidad n_o uniformes. En este caso, antes de que se produzca la perturbación,

$$f = f_o(\vec{c}) = \frac{n_o}{(2\pi k T_o/m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m c^2}{2k T_o}\right)$$

Si la perturbación introducida en el medio es pequeña, f diferirá de f_o sólo ligeramente. Supongamos que, en $t = 0$, $f(\vec{x}, \vec{c}, 0) = F_o(\vec{x}, \vec{c})$, siendo F_o una función conocida de \vec{x} y \vec{c} . El comportamiento de f para $t > 0$ se puede determinar de la ecuación (9.42) (con $\vec{f}_m = \vec{0}$), sujeta a la anterior condición inicial. Es fácil ver que

$$f(\vec{x}, \vec{c}, t) = f_o(\vec{c}) + [F_o(\vec{x} - \vec{c}t, \vec{c}) - f_o(\vec{c})]e^{-t/\tau_c} \quad (9.43)$$

Por tanto, $f \rightarrow f_o$ exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$ a una velocidad $1/\tau_c$. Es decir, f alcanza aproximadamente el 60% de su valor asintótico f_o en

un tiempo τ_c . Como la distribución de equilibrio se alcanza por medio de las colisiones, τ_c^{-1} es del orden de la frecuencia de colisiones. Una estimación del orden de magnitud de τ_c en condiciones atmosféricas se puede obtener sustituyendo (9.20) y (8.1) en (8.4):

$$\tau_c \sim \lambda/c_T \sim [d_0^2 n_o \sqrt{3kT_o/m}]^{-1} \quad (9.44)$$

Para Argon en condiciones normales ($T = 20^\circ C$, $n_o \simeq 2,5 \times 10^{25} m^{-3}$) se tiene $\tau_c \sim 3,73 \times 10^{-10} s$. De esta forma, al menos que estemos interesados en cambios macroscópicos muy rápidos, el alejamiento de las condiciones de equilibrio termodinámico local es muy pequeño. Esto es una justificación alternativa de la hipótesis de equilibrio termodinámico local que se suma a la realizada en la sección 8.1.1: para que la hipótesis sea válida, la frecuencia característica de variación de las magnitudes macroscópicas debe ser menor que la frecuencia de colisión τ_c^{-1} ($\sim 2,7 \times 10^9 s^{-1}$ en condiciones normales).

9.7. Ecuaciones constitutivas

Veamos primero la ecuación constitutiva para el tensor de presiones $\overline{\overline{P}}$. Para ello es necesario derivar una ecuación para $\overline{\overline{P}}$, lo cual es más sencillo escribiendo la ecuación cinética (9.42) en notación indicial (subíndices repetidos están sumados),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (f c_k) + \frac{\partial}{\partial c_k} (f f_{mk}) = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col} = -\frac{f - f_o}{\tau_c} \quad (9.45)$$

donde f_o viene dada por (9.40) y τ_c es, en general, una función de \vec{x} y t . Si multiplicamos esta ecuación por $m c'_i c'_j$ e integramos sobre todo el espacio de velocidades, obtenemos

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + \int d^3 c m c'_i c'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (f c_k) = -\frac{P_{ij} - p \delta_{ij}}{\tau_c} \quad (9.46)$$

donde

$$P_{ij} = \int d^3 c m c'_i c'_j f(\vec{x}, \vec{c}, t)$$

es el componente ij del tensor de presiones $\overline{\overline{P}}$, y p es la presión termodinámica asociada con la distribución Maxwelliana,

$$p = nkT \quad ; \quad p \delta_{ij} = \int d^3 c m c'_i c'_j f_o(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad (9.47)$$

Se puede demostrar que

$$p = \frac{1}{3} P_{ii} \equiv \frac{1}{3} (P_{11} + P_{22} + P_{33}) . \quad (9.48)$$

Para ello sabemos que, de las relaciones (9.30)-(9.32),

$$\int d^3 c m c'_i c'_i \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col} = 0 ;$$

por tanto,

$$\int d^3 c m c'_i c'_i \left(-\frac{f - f_o}{\tau_c(\vec{x}, t)} \right) = 0 ,$$

que es lo mismo que (9.48) si se tiene en cuenta (9.47). Por otra parte, el término que contiene las fuerzas másicas no aparece en (9.46) debido a que es nulo:

$$\begin{aligned} \int d^3 c m c'_i c'_j \frac{\partial}{\partial c_k} (f f_{mk}) &= \int d^3 c \frac{\partial}{\partial c_k} (m c'_i c'_j f f_{mk}) - \int d^3 c \left[\frac{\partial}{\partial c_k} m c'_i c'_j \right] f f_{mk} \\ &= 0 - \int d^3 c m (\delta_{ik} c'_j + c'_i \delta_{jk}) f f_{mk} = 0 , \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de (9.47) y de que $c^n f \rightarrow 0$ cuando $c \rightarrow \infty$, para cualquier n . Se debe tener en cuenta que, aunque c_i es independiente de x_i y t , $c'_i = c_i - v_i$ depende, en general, de \vec{x} y t a través de v_i . Por esta razón no se ha desarrollado el segundo término de (9.46). Este término puede escribirse como

$$\begin{aligned} \int d^3 c m c'_i c'_j \frac{\partial}{\partial x_k} (f c_k) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 c m c'_i c'_j c_k f - \int d^3 c \frac{\partial}{\partial x_k} (m c'_i c'_j) c_k f \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{ij} v_k + Q_{ijk}) + \int d^3 c m \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} c'_j + c'_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) c_k f \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{ij} v_k + Q_{ijk}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} (P_{jk} + 0) + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} (P_{ik} + 0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{ij} v_k + Q_{ijk}) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} P_{jk} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} P_{ik} , \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$Q_{ijk} \equiv \int d^3 c m c'_i c'_j c'_k f(\vec{x}, \vec{c}, t) . \quad (9.49)$$

Por tanto, la ecuación (9.46) para P_{ij} queda

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (P_{ij} v_k + Q_{ijk}) + P_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{P_{ij} - p \delta_{ij}}{\tau_c} \quad , \quad (9.50)$$

o

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + P_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + P_{ki} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{P_{ij} - p \delta_{ij}}{\tau_c} \quad . \quad (9.51)$$

Esta ecuación también se puede escribir como

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_c \left[\frac{\partial P_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_k} + P_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + P_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + P_{ki} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{ijk}}{\partial x_k} \right] \quad . \quad (9.52)$$

Si $\tau_c = 0$, se tiene $P_{ij} = p \delta_{ij}$, como ya sabíamos: cuando $\tau_c = 0$ el equilibrio termodinámico local se establece instantáneamente y $f = f_0$. Normalmente, τ_c no es cero, pero es muy pequeño; por tanto, una aproximación razonable de la ecuación (9.52) (con errores del orden de τ_c^2) sería aquella obtenida sustituyendo los valores de P_{ij} y Q_{ijk} que se obtendrían con la distribución Maxwelliana en todos los términos de la ecuación que estén multiplicados por el pequeño parámetro τ_c : $P_{ij} = p \delta_{ij}$, [ver ecuación (9.47)] y $Q_{ijk} = 0$ (la función Maxwelliana es par en \vec{c} y Q_{ijk} es un tensor impar en \vec{c}), de forma que

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_c \left[\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + p \left(\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + O(\tau_c^2) \quad . \quad (9.53)$$

Tomando la traza de esta ecuación,

$$P_{ii} = 3p - \tau_c \left[3 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} \right) + 5p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] + O(\tau_c^2) \quad .$$

De acuerdo con (9.48), $p = \frac{1}{3} P_{ii}$, con lo que

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{5}{3} p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0(\tau_c) \quad , \quad (9.54)$$

o en notación vectorial,

$$\frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{5}{3} \nabla \cdot \vec{v} = 0(\tau_c) \quad . \quad (9.55)$$

Eliminando $\nabla \cdot \vec{v}$ mediante la ecuación de continuidad (9.33),

$$\frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{5}{3} \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0(\tau_c) ,$$

o

$$\frac{D}{Dt} \ln \left(\frac{p}{\rho^{5/3}} \right) = 0(\tau_c) . \quad (9.56)$$

Cuando $\tau_c \rightarrow 0$ (equilibrio termodinámico instantáneo), se tiene

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 , \quad (9.57)$$

donde s es la entropía por unidad de masa de un gas monoatómico [comparar con la ecuación (8.38) haciendo $\gamma = 5/3$]:

$$s - s_o = \frac{3}{2} R_g \ln \left(\frac{p}{p_o} \right) \left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^{5/3} . \quad (9.58)$$

Por tanto, en un flujo isentrópico de un gas monoatómico se tiene

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right)^{5/3} . \quad (9.59)$$

Si τ_c es pequeño, pero diferente de cero, las ecuaciones (9.57) y (9.59) no son válidas. Sin embargo, si sustituimos (9.54) en (9.53),

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_c p \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] + O(\tau_c^2) .$$

Es decir,

$$\bar{\tau} \equiv -\bar{P} = -p \bar{I} + \tau_c p [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3} \bar{I} \nabla \cdot \vec{v}] + O(\tau_c^2) . \quad (9.60)$$

Esta expresión está de acuerdo con la ley de Stokes (sección 7.4) si tomamos el coeficiente de viscosidad

$$\mu = p \tau_c , \quad (9.61)$$

y si hacemos igual a cero el coeficiente de viscosidad volumétrica μ_v . Por tanto, un gas monoatómico se comporta como un fluido Newtoniano con viscosidad volumétrica nula si la frecuencia de colisión molecular τ_c^{-1} es grande comparada con la frecuencia macroscópica característica del problema. La ecuación

(9.61) permite, además, hacer una estimación más precisa del valor de τ_c . Así, por ejemplo, el coeficiente de viscosidad μ para el Argon a $20^\circ C$ y $1 atm$ ($1,013 \times 10^5 Pa$) es $2,217 \times 10^{-5} kg/m s$. Por tanto, $\tau_c = \mu/p = 2,18 \times 10^{-10} s^{-1}$, que está en consonancia con la estimación más bien basta que se hizo en la sección anterior.

Para ver si un gas monoatómico satisface la Ley de Fourier de conducción de calor, obtendremos una ecuación para el tensor de tercer orden Q_{ijk} en el límite de τ_c pequeño. Para ello, multipliquemos la ecuación (9.45) por $m c'_i c'_j c'_k$ e integremos sobre el espacio de velocidades. Teniendo en cuenta que $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}(\vec{x}, t)$, los diferentes términos de la ecuación serían:

$$\int d^3 c m c'_i c'_j c'_k \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial Q_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} P_{jk} + \frac{\partial v_j}{\partial t} P_{ki} + \frac{\partial v_k}{\partial t} P_{ij} \quad ;$$

$$\int d^3 c m c'_i c'_j c'_k \frac{\partial}{\partial x_l} (f c_l) = \frac{\partial}{\partial x_l} [Q_{ijk} v_l + R_{ijkl}] + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} Q_{jkl} +$$

$$+ \frac{\partial v_j}{\partial x_l} Q_{kil} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} Q_{ijl} + v_l \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_l} P_{jk} + \frac{\partial v_j}{\partial x_l} P_{ki} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} P_{ij} \right] \quad ;$$

$$\int d^3 c m c'_i c'_j c'_k \frac{\partial}{\partial c_l} (f f_{ml}) = -[f_{mi} P_{jk} + f_{mj} P_{ki} + f_{mk} P_{ij}] \quad ,$$

donde

$$R_{ijkl} \equiv \int d^3 c m c'_i c'_j c'_k c'_l f(\vec{x}, \vec{c}, t) \quad .$$

Por tanto, la ecuación sería

$$\frac{\partial Q_{ijk}}{\partial t} + \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_i}{\partial x_l} - f_{mi} \right] P_{jk} + \left[\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_j}{\partial x_l} - f_{mj} \right] P_{ki} +$$

$$+ \left[\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - f_{mk} \right] P_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} Q_{jkl} + \frac{\partial v_j}{\partial x_l} Q_{kil} +$$

$$+ \frac{\partial v_k}{\partial x_l} Q_{ijl} + \frac{\partial}{\partial x_l} [Q_{ijk} v_l + R_{ijkl}] = -\frac{Q_{ijk}}{\tau_c} \quad , \quad (9.62)$$

donde se ha hecho uso de $\int d^3 c c'_i c'_j c'_k f_0 = 0$. Utilizando la ecuación de continuidad (9.33), la ecuación de cantidad de movimiento (9.36) queda

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{P} + \vec{f}_m \quad , \quad (9.63)$$

de donde (9.62) se simplifica a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{D Q_{ijk}}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} Q_{jkl} + \frac{\partial v_j}{\partial x_l} Q_{kil} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} Q_{ijl} + \frac{\partial v_l}{\partial x_l} Q_{ijk} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_l} R_{ijkl} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial P_{li}}{\partial x_l} P_{jk} + \frac{\partial P_{lj}}{\partial x_l} P_{ki} + \frac{\partial P_{lk}}{\partial x_l} P_{ij} \right] = -\frac{Q_{ijk}}{\tau_c} . \end{aligned} \quad (9.64)$$

Cuando $\tau_c \rightarrow 0$, $Q_{ijk} = 0(\tau_c)$, $P_{ij} = p \delta_{ij} + 0(\tau_c)$ y, por tanto,

$$Q_{ijk} = \tau_c \left[\frac{p}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} (\delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{lj} \delta_{ki} + \delta_{lk} \delta_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_l} R_{ijkl}^{(o)} \right] + O(\tau_c^2) , \quad (9.65)$$

donde

$$R_{ijkl} = R_{ijkl}^{(o)} + O(\tau_c) ,$$

$$R_{ijkl}^{(o)} = \int d^3 \mathbf{c} m c'_i c'_j c'_k c'_l f_o . \quad (9.66)$$

Como $R_{ijkl}^{(o)}$ es un tensor totalmente simétrico con respecto a todos los subíndices, necesariamente

$$R_{ijkl}^{(o)} = A(\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) ,$$

donde

$$A = \frac{1}{15} \int d^3 \mathbf{c} m c^4 f_o(c) = \frac{n k^2 T^2}{m} . \quad (9.67)$$

Ahora bien, $p = n k T$ y $\rho = m n$, con lo que $A = p^2 / \rho$ y

$$R_{ijkl}^{(o)} = \frac{p^2}{\rho} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (9.68)$$

Sustituyendo esta expresión en (9.65) y haciendo uso de la ecuación de estado $p = R_g \rho T$, se obtiene

$$Q_{ijk} = -\tau_c p \frac{\partial}{\partial x_l} (R_g T) (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (9.69)$$

El flujo de calor \vec{q} está relacionado con el tensor Q_{ijk} mediante (véanse las ecuaciones (9.38) y (9.49))

$$q_k = \int d^3c \frac{1}{2} m c'^2 c'_k f = \frac{1}{2} Q_{iik} \quad , \quad (9.70)$$

que, utilizando la ecuación (9.69), queda

$$q_k = -\frac{5}{2} \tau_c p R_g \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad . \quad (9.71)$$

Por tanto,

$$\vec{q} = -K \nabla T \quad , \quad (9.72)$$

donde el coeficiente de conductividad térmica es

$$K = \frac{5}{2} R_g \tau_c p = \mu c_p \quad , \quad (9.73)$$

y se ha hecho uso de las expresiones (9.61) y (9.17). Es decir, un gas monoatómico satisface la Ley de Fourier de conducción de calor con conductividad térmica dada por la ecuación (9.73).

El **número de Prandtl** se define como

$$Pr \equiv \frac{\mu c_p}{K} \equiv \frac{\nu}{\alpha} \quad . \quad (9.74)$$

siendo

$$\alpha \equiv \frac{K}{\rho c_p} \quad (9.75)$$

la **difusividad térmica**. Por tanto, el número adimensional de Prandtl es una medida de la importancia relativa de la *difusión* por transporte molecular de cantidad de movimiento en relación a la *difusión* de energía o calor (se volverá sobre este parámetro adimensional en la lección 11). Para los gases monoatómicos, de acuerdo con (9.61) y (9.73), se tiene $Pr = 1$. La teoría exacta [es decir, si en vez de $(\delta f / \delta t)_{col} = (f_o - f) / \tau_c$ se hubiera utilizado la expresión exacta del operador de colisión] da un número de Prandtl para un gas monoatómico igual a $2/3$, que concuerda bastante bien con los resultados experimentales.

Resumiendo, un gas monoatómico satisface las dos relaciones constitutivas de Stokes y de Fourier que se postularon en las lecciones precedentes (se ha considerado una sola especie química, por lo que la ley de Fick, lógicamente, no aparece). De la discusión anterior, las ecuaciones fluidas macroscópicas son válidas si

- (a) la menor escala macroscópica de longitud es mucho mayor que la distancia media sobre la cual las moléculas interaccionan,

- (b) la menor escala macroscópica de tiempo es mucho mayor que el tiempo requerido para que la distribución de velocidades moleculares adquiera la forma de equilibrio termodinámico local f_o , es decir, mucho mayor que el tiempo medio entre colisiones.

La primera condición es, básicamente, la hipótesis de medio continuo (sección 2.2), y hace posible que se pueda hablar de magnitudes medias como $n(\vec{x}, t)$, $\vec{v}(\vec{x}, t)$, etc. La segunda condición significa que el sistema se aleja muy poco del estado de equilibrio termodinámico local, lo cual hace posible que sean válidas las leyes constitutivas de Stokes y de Fourier, y que podamos utilizar las relaciones termodinámicas de equilibrio (ecuaciones de estado) en cada punto del sistema.

El procedimiento anterior para obtener las relaciones constitutivas se puede hacer de una forma más rigurosa utilizando la expresión exacta de Boltzmann para el operador de colisión $(\delta f / \delta t)_{col}$ [en vez de la forma aproximada $(f_o - f) / \tau_c$ utilizada anteriormente] en el límite de τ_c muy pequeño ($Kn \ll 1$). Este procedimiento se denomina **método de Chapman-Enskog** de resolución de la ecuación cinética (véase, por ejemplo, Chapman y Cowling, 1970). Los resultados obtenidos aquí mediante la aproximación de $(\delta f / \delta t)_{col}$ son cualitativamente correctos, proporcionando las leyes constitutivas de Stokes y de Fourier; pero los valores obtenidos para los coeficientes μ y K no son exactos (en particular no es exacta la relación entre ellos, $K = \mu c_p$), aunque se pueden aproximar bastante a los resultados experimentales mediante una elección apropiada de τ_c . En cambio, el método riguroso de Chapman-Enskog sí proporciona valores de μ y K que concuerdan asombrosamente bien con los resultados experimentales.

Para finalizar, es conveniente indicar que la hipótesis de equilibrio termodinámico local no es *necesaria* en la Teoría Cinética de Gases, sino que solamente permite obtener ecuaciones constitutivas y de estado que cierran las ecuaciones de conservación. Cuando esta hipótesis no se satisface (gases muy enrarecidos o gradientes muy acusados de las magnitudes fluidas), las ecuaciones macroscópicas de conservación de cantidad de movimiento y energía en la forma presentada en las lecciones precedentes no son válidas [las ecuaciones de conservación dadas por las expresiones (9.36) y (9.39) sí que son válidas, pero no conocemos el tensor de presiones ni el vector flujo de calor, por lo que no sirven de mucho]. La ecuación cinética (o de Boltzmann) (9.28) sigue siendo válida aunque no se verifique la hipótesis de equilibrio termodinámico local, y permite obtener la función de distribución en estos casos *extremos*. Una vez hallada $f(\vec{x}, \vec{c}, t)$ mediante la resolución de la ecuación cinética, se obtienen las variables macroscópicas $(\rho, \vec{v}, p, e, \vec{T}, \vec{q})$ a partir de las definiciones

dadas en esta lección. El *único* problema es que la ecuación de Boltzmann es una ecuación integrodiferencial, no lineal, que sólo ha sido posible resolver en situaciones especialmente simples, o en límites muy particulares. Uno de estos límites es el contemplado aquí, en el que se verifica la hipótesis de equilibrio termodinámico local (es decir, $Kn \ll 1$); el método de Chapman-Enskog, o la basta aproximación hecha en esta sección para un gas monoatómico, proporciona las ecuaciones constitutivas que cierra el problema expresado en variables macroscópicas.

Referencias y bibliografía complementaria.

- S. CHAPMAN y T.G. COWLING, 1970.
- E.M. LIFSHITZ y L.P. PITAEVSKII, 1981.
- P. RESIBOIS y M. De LEENER, 1977.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulo I.
- C. TRUESDELL y R.G. MUNCASTER, 1980.
- W.G. VINCENTY y C.H. KRUGER, 1965.

Capítulo 10

Algunos comentarios generales sobre las ecuaciones fluidomecánicas

10.1. Resumen de las ecuaciones de Navier-Stokes

Como se ha visto en las lecciones precedentes, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido Newtoniano son:

continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (10.1)$$

cantidad de movimiento

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}' + \rho \vec{f}_m, \quad (10.2)$$

$$\vec{\tau}' = \mu[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T] + (\mu_v - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \vec{v}\vec{I}, \quad (10.3)$$

energía

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \vec{v} + \Phi + \nabla \cdot (K\nabla T) + Q_r, \quad (10.4)$$

$$\Phi = \vec{\tau}' : \nabla\vec{v} = \frac{\mu}{2}[\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{v}\vec{I}] : [\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \vec{v}\vec{I}] + \mu_v(\nabla \cdot \vec{v})^2. \quad (10.5)$$

Este sistema de ecuaciones se suele denominar Ecuaciones de Navier-Stokes (tomando el nombre de la ecuación de cantidad de movimiento) y tiene por incógnitas la densidad ρ , las tres componentes de la velocidad \vec{v} , la presión

p , la energía interna e y la temperatura T . Para completarlo se necesitan dos **ecuaciones de estado**; por ejemplo,

$$\rho = \rho(p, T) \quad , \quad e = e(T, p) \quad , \quad (10.6)$$

además de la especificación de los **coeficientes de transporte**,

$$\mu = \mu(T, p) \quad , \quad \mu_v = \mu_v(T, p) \quad , \quad K = K(T, p) \quad , \quad (10.7)$$

que normalmente sólo dependen de la temperatura. Si el fluido fuese de composición no homogénea con N especies químicas presentes en él, habría que completar estas ecuaciones con $N - 1$ ecuaciones de conservación de la masa de cada especie química (sección 6.3), además de tener en cuenta la dependencia de las ecuaciones de estado y de las relaciones constitutivas con la composición, pero que no consideraremos aquí (véase, por ejemplo, Bird et al., 1960, capítulo 18, para un resumen de ellas).

Como complemento, o algunos casos alternativa, a la ecuación de cantidad de movimiento a veces se usa la ecuación (7.46) para la vorticidad, mientras que la ecuación de la energía interna (10.4) puede ser sustituida por la ecuación de la entropía (8.27), o por la ecuación de la entalpía (8.24), o cualquier combinación de ellas.

10.1.1. Fluidos incompresibles con propiedades constantes

Las ecuaciones anteriores se simplifican notoriamente si el fluido es incompresible, como ocurre casi siempre con los líquidos, o en algunos flujos de gases a velocidades no demasiado altas y sometidos a variaciones de temperatura poco importantes (ver sección siguiente para una especificación más precisa). En particular, como se apuntó en la sección 7.5, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento quedan desacopladas de la ecuación de la energía si el coeficiente de viscosidad se puede considerar constante (variaciones de temperatura no muy importantes). Suponiendo que la conductividad térmica es también constante, las ecuaciones quedan:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad (10.8)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}_m \quad , \quad (10.9)$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = \Phi + K\nabla^2T + Q_r \quad , \quad (10.10)$$

$$\Phi = \frac{\mu}{2} [\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T] : [\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T], \quad (10.11)$$

que se completan con las ecuaciones de estado $\rho = \text{constante}$ (que es un dato del problema al igual que μ y K), y $de = c(T)dT$. Las dos primeras ecuaciones tienen como únicas incógnitas p y \vec{v} , siendo \vec{v} **solenoidal** en virtud de la ecuación de continuidad. La ecuación de la energía junto con la ecuación de estado para e permiten obtener la temperatura T una vez conocido \vec{v} . Suponiendo que el calor específico c es constante, y que no existen aportes volumétricos de calor ($Q_r = 0$), la ecuación de la energía se puede escribir como

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\Phi}{\rho c} + \alpha \nabla^2 T, \quad (10.12)$$

donde $\alpha = K/\rho c$ es la difusividad térmica, que tiene las mismas unidades que el coeficiente de difusión D y que la viscosidad cinemática ν . De hecho, si la velocidad del fluido fuese nula, la ecuación anterior se escribiría

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T, \quad (10.13)$$

que es idéntica a la ecuación (6.32) para la difusión másica en ausencia de reacción química (que hace las veces de Q_r) y con $\vec{v} = 0$, sin más que sustituir T por la fracción másica Y y α por D . Incluso si \vec{v} no fuese nula, las ecuaciones de difusión másica y energía serían aproximadamente iguales (en ausencia de reacción química y aportes volumétricos de calor) debido a que el término de disipación viscosa (Φ) es generalmente pequeño comparado con el término de conducción en (10.12) (ver lección siguiente). Esta es la base de importantes analogías entre el flujo másico y el flujo de calor en muchos flujos solenoidales, puesto que D y α suelen tener también valores parecidos.

10.2. Condiciones para que el campo de velocidades sea aproximadamente solenoidal

Cuando en el movimiento de un fluido la densidad permanece constante, la ecuación de conservación de la masa nos dice que el campo de velocidades es solenoidal, lo cual, como acabamos de ver, implica importantes simplificaciones en las ecuaciones. De aquí la relevancia de conocer con precisión las condiciones para que el campo de velocidades de un movimiento fluido pueda considerarse como solenoidal.

Estas condiciones se obtienen comparando los términos $(D\rho/Dt)/\rho$ y $\nabla \cdot \vec{v}$ que aparecen en la ecuación de continuidad. Para ello suponemos que el orden

de magnitud de las variaciones de \vec{v} , tanto espacial como temporalmente, es V , que puede ser una velocidad característica del problema en cuestión si, como ocurre normalmente, las variaciones en la velocidad son del orden de ella misma. Por otro lado, designamos por L la longitud característica en la cual varían las magnitudes fluidas, entre ellas la velocidad. Así, para que \vec{v} sea aproximadamente solenoidal se debe verificar:

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right| \ll |\nabla \cdot \vec{v}| \sim \frac{V}{L}. \quad (10.14)$$

Si tomamos la densidad ρ y la entropía s como las dos variables independientes que caracterizan el estado termodinámico de cada partícula fluida (de composición homogénea), se puede escribir

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt}, \quad (10.15)$$

donde la propiedad termodinámica a^2 se define como

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (10.16)$$

Se verá en la lección 25 que a es la **velocidad del sonido**, o velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones en un fluido. Para un gas ideal, de (8.39) resulta $a = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma R_g T}$. Sustituyendo (10.15) en (10.14) se tiene la condición de solenoidalidad

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} \right| \ll \frac{V}{L}. \quad (10.17)$$

Para que esta condición se satisfaga, ambos términos del lado izquierdo deben de ser mucho menores que V/L , por lo que se considerarán por separado.

Si la condición

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} \right| \ll \frac{V}{L} \quad (10.18)$$

se satisface, tenemos que las variaciones en la densidad producidas por las variaciones de presión en el flujo son despreciables, lo cual es lo que normalmente se entiende por un movimiento incompresible. Es decir, la condición de solenoidalidad es más general que la de incompresibilidad, aunque normalmente se confunden por ser esta última, como veremos en lo que sigue, la más importante de las dos condiciones de solenoidalidad expresadas en la ecuación

(10.17).¹ Para expresar (10.18) en una forma más conveniente, utilizamos la ecuación de cantidad de movimiento (10.2):

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{Dp}{Dt} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{a^2} \cdot \left[-\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f}_m \right]. \quad (10.19)$$

En primera aproximación se puede suponer, para la evaluación de la influencia de las variaciones de presión, que el flujo es isentrópico, de forma que se puede despreciar término viscoso en (10.19), el cual afecta a la distribución de presiones más que a la magnitud de su variación (por otra parte, la influencia de las variaciones de entropía las consideraremos después). Así, la condición (10.18) se escribe:

$$\left| \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2a^2} \frac{Dv^2}{Dt} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}_m}{a^2} \right| \ll \frac{V}{L}. \quad (10.20)$$

El primer término tiene en cuenta la no estacionariedad del flujo. Supongamos que el flujo es oscilatorio, siendo ω la frecuencia característica de las oscilaciones. Si V es la velocidad típica del movimiento asociada a estas oscilaciones, las variaciones de la presión en distancias de orden L son del orden de las variaciones temporales de la cantidad de movimiento por unidad de volumen multiplicadas por L , $\rho V \omega L$. Así, la condición asociada a este primer término es $\rho V \omega^2 L / \rho a^2 \ll V/L$, es decir,

$$\frac{\omega^2 L^2}{a^2} \ll 1. \quad (10.21)$$

En cuanto al segundo término de (10.20), el orden de magnitud de Dv^2/Dt puede venir dado por $\partial v^2/\partial t$ o por $\vec{v} \cdot \nabla v^2$, dependiendo de cual sea mayor. En el primer caso tendríamos $\omega LV/a^2 \ll 1$, mientras que en el segundo $V^2/a^2 \ll 1$. La primera de estas condiciones no es relevante como lo demuestra el siguiente razonamiento. Si el movimiento es no estacionario y ω es la frecuencia característica, puede ocurrir que ω sea mucho mayor, mucho menor, o del mismo orden que V/L . Si $\omega \sim V/L$ tenemos la condición $V^2/a^2 \ll 1$, que es la correspondiente al término $\vec{v} \cdot \nabla v^2$. Si $\omega \gg V/L$, la condición resultante es más débil que (10.21), mientras que si $\omega \ll V/L$ la condición V^2/a^2 es más fuerte. Por tanto, la condición $\omega LV/a^2 \ll 1$ es redundante si imponemos (10.21) junto con

$$V^2/a^2 \ll 1, \quad (10.22)$$

¹Salvo en esta sección, siempre que se hable de incompresibilidad se hará en el sentido *amplio* de solenoidalidad, es decir, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

que, por otra parte, coincide con (10.21) si $\omega \sim V/L$. Esta condición se suele expresar como

$$M^2 \ll 1 \quad , \quad (10.23)$$

donde

$$M \equiv \frac{V}{a} \quad (10.24)$$

es el **número de Mach**, que relaciona la velocidad del fluido con la del sonido. La condición $V^2/a^2 \ll 1$ se podría haber obtenido de una forma más intuitiva si se tiene en cuenta que, para un movimiento isentrópico, las variaciones de densidad $\delta\rho$ son, de acuerdo con la definición de a^2 , del orden de $a^2\delta p$. Por otra parte, en un movimiento isentrópico en el que las variaciones temporales no sean importantes, la ecuación de cantidad de movimiento nos dice que $\delta p \sim \rho V^2$, es decir, un cambio en la velocidad del fluido desde 0 hasta V requiere una variación de presión del orden de ρV^2 . La condición de incompresibilidad $\delta\rho/\rho \ll 1$ daría pues $V^2/a^2 \ll 1$.

El tercer término de (10.20), que representa las variaciones de presión producidas por las fuerzas másicas, suponiendo que éstas sean exclusivamente gravitatorias con aceleración g , proporciona la condición

$$\frac{gL}{a^2} \ll 1 \quad . \quad (10.25)$$

En conclusión, para que el movimiento de un fluido se pueda considerar como incompresible se deben verificar las tres condiciones siguientes:

$$\frac{\omega^2 L^2}{a^2} \ll 1, \quad M^2 \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{gL}{a^2} \ll 1. \quad (10.26)$$

La primera de ella nos dice, por ejemplo, que los efectos de compresibilidad no se pueden despreciar cuando se estudie el flujo originado por ondas sonoras, ya que una onda sonora de frecuencia ω tiene por longitud de onda $L = a/\omega$, por lo que $\omega^2 L^2/a^2 = 1$ (ver lección 25). La segunda condición, que es la más importante de las tres desde un punto de vista práctico, nos obliga a considerar los efectos de la compresibilidad siempre que la velocidad del fluido se aproxime a la del sonido. Para el aire a $15^\circ C$ y 1 atm se tiene que $a = 340,6 \text{ m/s}$, mientras que para el agua a $15^\circ C$, $a = 1470 \text{ m/s}$, de modo que los movimientos en el seno del aire (por ejemplo los originados por un cuerpo en movimiento) a menos de, pongamos, 400 km/h ($M^2 = 0,106$), se pueden considerar como incompresibles (con errores menores del 10 por

ciento), mientras que prácticamente todos los movimientos en agua, o cualquier otro líquido, se pueden considerar incompresibles. La tercera condición nos dice que sólo cuando el movimiento del fluido involucra longitudes características gigantescamente grandes, del orden de a^2/g , los efectos gravitatorios en la compresibilidad son importantes. Tomando $g = 9,8m/s^2$, para el aire tenemos $a^2/g \sim 12km$, y para el agua $a^2/g \sim 220km$, por lo que este efecto es importante en la meteorología o dinámica de la atmósfera, pero no en la dinámica de los océanos, ya que la profundidad del mar es, como mucho, del orden de la decena de kilómetros. Fuera de los problemas *terrestres* este efecto sería importante en el estudio de la dinámica del plasma estelar.

Pasemos ahora a considerar el efecto de las variaciones de entropía en (10.17). El coeficiente que multiplica a Ds/Dt se puede escribir, teniendo en cuenta que la relación entre p, ρ y s es única, como

$$\frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = -\frac{1}{\rho a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \frac{(\partial \rho / \partial T)_p}{(\partial s / \partial T)_p} = \frac{\beta T}{c_p}, \quad (10.27)$$

donde se ha hecho uso de (8.9) y (10.16), y se ha definido

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (10.28)$$

que es el **coeficiente de expansión térmica** del fluido ($\beta = 1/T$ para los gases ideales, y es muy pequeño para los líquidos; para el agua a $15^\circ C$ $\beta = 1,5 \times 10^{-4} K^{-1}$). Sustituyendo la ecuación (8.27) para Ds/Dt en (10.17), se tiene la siguiente condición (suponiendo que no hay aportes volumétricos de calor):

$$\left| \frac{\beta}{\rho c_p} [\Phi + \nabla \cdot (K \nabla T)] \right| \ll \frac{V}{L}, \quad (10.29)$$

que expresa que las variaciones en la densidad debidas al calentamiento por disipación viscosa y a la conducción molecular de calor deben ser pequeñas [si el fluido fuese no homogéneo en composición, aparecería un término adicional asociado a la difusión másica que se obtendría sin más que considerar la ecuación (6.30) en vez de la (6.4) que estamos considerando]. Teniendo en cuenta la definición (10.5) para Φ , tenemos las siguientes dos condiciones:

$$\frac{\beta \nu V}{c_p L} \ll 1, \quad \beta \alpha \frac{\theta}{LV} \ll 1, \quad (10.30)$$

donde α y ν son las difusividades térmicas y de cantidad de movimiento (o viscosidad cinemática), y θ es el orden de magnitud de las variaciones de temperatura (por ejemplo, en el caso de un fluido calentado por una pared a temperatura T_p , $\theta = T_p - T_o$, donde T_o es una temperatura característica del fluido lejos de la pared). Estas dos condiciones se satisfacen en la mayoría de las condiciones prácticas, dejando sólo de valer cuando la diferencia de temperatura o la velocidad son extremadamente altas, y ocurren en longitudes muy pequeñas. Por ejemplo, para el aire en condiciones normales ($20^\circ C$ y 1 atm) se tiene $\beta\nu/c_p \simeq 3,8 \times 10^{-11} s$ y $\beta\alpha \simeq 7 \times 10^{-8} m^2/sK$; para que la primera condición no se cumpla, V/L tiene que ser del orden de $10^{11} s$, es decir, si L es del orden del centímetro, V tiene que ser del orden de $10^9 m/s$; en cuanto a la segunda condición, si suponemos un caso favorable en que $V = 0,1 m/s$ y $L = 1 cm$, para que no se cumpla la diferencia de temperatura tendría que ser del orden de $10^4 K$, siendo este número mayor cuanto mayor es V o L . Por otra parte, para el agua a $20^\circ C$ se tiene $\beta\nu/c_p \simeq 3,6 \times 10^{-14} s$ y $\beta\alpha \simeq 2,1 \times 10^{-11} m^2/sK$, por lo que las condiciones para que no se verifiquen las desigualdades anteriores deben de ser aún más extremas.

Se concluye, por tanto, que los efectos disipativos no producen, a efectos prácticos, variaciones en la densidad, por lo que la condición de incompresibilidad (es decir, la constancia de la densidad frente a variaciones en la presión) puede ser equiparada a la de solenoidalidad. De las tres condiciones de incompresibilidad (10.26), la segunda, $M^2 = V^2/a^2 \ll 1$, es la más importante en la práctica.

Por último hay que decir que en los líquidos (donde las condiciones anteriores se satisfacen prácticamente siempre, al menos en flujos estacionarios), se debe tener en cuenta una circunstancia adicional que es la posibilidad de **cavitación** o formación de burbujas de vapor en el seno del líquido como consecuencia de que la presión baje por debajo de la presión de vapor, $p_v(T)$, en algún punto del flujo. Así, la condición de solenoidalidad en flujos estacionarios de líquidos es, simplemente, $p > p_v$ en todos los puntos. Se suele definir un **número de cavitación**,

$$Ca \equiv \frac{p_o - p_v}{\rho V^2/2} \quad , \quad (10.31)$$

donde p_o es una presión de referencia (generalmente, $p_o \gg p_v$, por lo que $Ca \simeq p_o/(\frac{1}{2}\rho V^2)$). Este número adimensional es una medida de la posibilidad de que el flujo de un líquido cavite, puesto que si un flujo se acelera desde $v = 0$ hasta $v = V$, su presión disminuye una cantidad del orden de $\frac{1}{2}\rho V^2$ (cantidad que se suele denominar **presión dinámica**), siendo, por tanto, mayor la posibilidad de cavitación cuanto menor es Ca . En particular, si Ca

es menor que un cierto valor crítico Ca^* , que depende del tipo de flujo y del líquido en cuestión, el flujo cavita en algún punto, dejando de ser solenoidal el campo de velocidades.

10.3. Condiciones iniciales y de contorno

Para resolver las ecuaciones (10.1)-(10.7) en un problema concreto se necesitan condiciones iniciales y de contorno. Como **condiciones iniciales** hay que especificar tres magnitudes, por ejemplo, ρ, \vec{v} y T , en el instante $t = 0$, para todo el campo fluido; es decir,

$$\rho_o(\vec{x}) \equiv \rho(\vec{x}, 0) \quad , \quad \vec{v}_o(\vec{x}) \equiv \vec{v}(\vec{x}, 0) \quad , \quad T_o(\vec{x}) \equiv T(\vec{x}, 0) \quad . \quad (10.32)$$

En el caso de un fluido incompresible [ecuaciones (10.8)-(10.11)], al ser $\rho =$ constante, hay que especificar $p_o(\vec{x}) \equiv p(\vec{x}, 0)$ en vez de ρ_o , y la condición inicial para \vec{v} debe ser solenoidal, $\nabla \cdot \vec{v}_o = 0$. A veces se buscan soluciones periódicas de las ecuaciones (lo cual es sólo posible si las condiciones de contorno son también periódicas en el tiempo, o estacionarias), en cuyo caso no se imponen condiciones iniciales, sino que se presupone una determinada dependencia temporal (periódica) en la solución. Si lo que se busca es la solución estacionaria de las ecuaciones (compatible sólo con condiciones de contorno estacionarias), los términos con derivadas temporales son idénticamente nulos y sólo son necesarias condiciones de contorno.

El tipo de **condiciones de contorno** depende del problema particular considerado. En términos generales, se necesitan dos condiciones de contorno para la velocidad (debido a que el término $\nabla \cdot \vec{\tau}$ contiene derivadas segundas de la velocidad), dos condiciones de contorno para la temperatura [término de segundo orden $\nabla \cdot (K \nabla T)$], y una condición de contorno más que puede especificarse en términos de la presión o de la densidad (evidentemente, en flujos incompresibles la condición de contorno no puede ser en términos de la densidad). En el caso de que hubiera varias especies químicas habría que considerar, además, dos condiciones de contorno para las fracciones másicas de todas las especies presentes (salvo una) ya que el término de difusión másica en (6.30) es de segundo orden en Y_i (en lo que sigue supondremos que el fluido es de composición homogénea).

Para concretar un poco más las condiciones de contorno se considerará un ejemplo típico: el flujo alrededor de un cuerpo sólido definido por la superficie $S(\vec{x}) = 0$, que suponemos fijo en el sistema de referencia considerado. Este problema quedará definido con las siguientes condiciones de contorno:

$$\vec{v} = 0 \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0, \quad (10.33)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (10.34)$$

$$p = p_\infty(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (10.35)$$

$$T = T_p(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0, \quad (10.36)$$

$$T = T_\infty(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (10.37)$$

Es decir, sobre la superficie del cuerpo la velocidad y la temperatura del fluido son iguales a la velocidad y temperatura de la superficie sólida ($\vec{v} = 0$ y $T = T_p$, respectivamente; si la velocidad del cuerpo en relación a nuestro sistema de referencia fuese $\vec{v}_p(\vec{x}, t)$, la condición de contorno sería $\vec{v} = \vec{v}_p(\vec{x}, t)$ sobre $S(\vec{x}, t) = 0$, que incluye la posibilidad de que los distintos puntos de la superficie del cuerpo se muevan con velocidades diferentes y varíen con el tiempo). Esta igualdad se debe a que la hipótesis de equilibrio termodinámico local ($Kn \ll 1$) exige que las partículas fluidas en contacto con la superficie deben de estar en equilibrio termodinámico con ella. Si Kn no fuese pequeño, podrían existir diferencias entre \vec{v} y T en $S(\vec{x}) = 0$ y los correspondientes valores de la superficie sólida, pero que no consideraremos aquí.² Las otras dos condiciones de contorno son los valores de \vec{v} , p y T lejos del cuerpo. Estas últimas condiciones pueden sustituirse por otras equivalentes como, por ejemplo, ρ_∞ en vez de p_∞ , o cualquier otra combinación entre p_∞ , ρ_∞ y T_∞ , ya que dadas dos de ellas, la ecuación de estado nos proporciona la tercera.

A veces, la condición de contorno (10.36) es sustituida por

$$K \nabla T(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} = q_p(\vec{x}, t) \quad \text{en} \quad S(\vec{x}) = 0, \quad (10.38)$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a S , equivalente a especificar el flujo de calor a través de la superficie [una combinación entre (10.36) en parte de la superficie y (10.38) en el resto es también posible]. En el supuesto que la

²La condición de contorno para la velocidad sobre una superficie sólida fue objeto de polémica durante gran parte del siglo XIX, después de que se establecieron las ecuaciones de Navier-Stokes y se empezaron a resolver problemas concretos, los cuales exigían una nueva condición de contorno en relación a las ecuaciones de Euler (lección 19) que fueron establecidas mucho antes. Esta polémica se zanjó con la introducción por Stokes de la condición de contorno de adherencia a la superficie, $\vec{v} = \vec{v}_p$. En cuanto a las condiciones de contorno con *deslizamiento* o diferencia de velocidad (y temperatura) entre el fluido y la superficie, las cuales son necesarias cuando la hipótesis de equilibrio termodinámico local no se cumple, ver, por ejemplo, T.I. Gombosi, 1994, *Gaskinetic theory* (Cambridge University Press, Cambridge), capítulo X.

condición de contorno sea de la forma (10.38), el equilibrio termodinámico local implícito en (10.38) (ley de Fourier) y en las ecuaciones asegurarían que la temperatura del fluido sobre la superficie fuese igual a la temperatura del sólido, pero esta sería desconocida en principio.³

Otras condiciones de contorno que aparecen en muchos problemas y que no están contempladas en el ejemplo anterior son las que aparecen cuando existe una superficie libre que separa dos fluidos inmiscibles, como por ejemplo un gas y un líquido. En estas situaciones hay que tener en cuenta la *tensión superficial* de la interfaz, que se considerará en la lección 13. Prescindiendo de ella por el momento (es decir, suponiendo que la tensión superficial es despreciable), las condiciones de contorno asociadas a la superficie libre son las siguientes. (a) En primer lugar, la interfaz es, en la mayoría de los problemas reales, desconocida *a priori*, por lo que las condiciones de contorno se especifican en una superficie $S(\vec{x}, t) = 0$ desconocida, pero que debe verificar la ecuación

$$\frac{DS(\vec{x}, t)}{Dt} = 0, \quad (10.39)$$

es decir, la interfaz es una superficie fluida. (b) Igualdad de las velocidades y de los esfuerzos normales y tangenciales a ambos lados de la interfaz,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2, \quad \vec{n} \cdot \vec{\tau}_1 \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{\tau}_2 \cdot \vec{n}, \quad \vec{\tau}_1 \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{\tau}_2 \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_2 \cdot \vec{n})\vec{n} \quad \text{en } S(\vec{x}, t) = 0, \quad (10.40)$$

donde los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los dos fluidos inmiscibles. (c) Igualdad de las temperaturas y flujos de calor a ambos lados de la interfaz,

$$T_1 = T_2, \quad K_1 \nabla T_1 \cdot \vec{n} = K_2 \nabla T_2 \cdot \vec{n} \quad \text{en } S(\vec{x}, t) = 0. \quad (10.41)$$

Si la tensión superficial no fuese nula, la única condición de contorno que cambiaría sería la igualdad de esfuerzos (normales y tangenciales) en la superficie, que debería tener en cuenta los esfuerzos adicionales asociados a la tensión superficial (ver lección 13).

³De una forma más rigurosa, habría que resolver las ecuaciones del fluido y la ecuación térmica correspondiente al sólido conjuntamente, imponiendo las dos condiciones de contorno de igualdad de temperaturas e igualdad de flujos de calor en S . Las condiciones (10.36) o (10.38) son simplificaciones que se hacen en muchos problemas debido a que, o bien la temperatura del sólido es conocida (impuesta externamente), o bien se quiere imponer un cierto flujo de calor. Por otra parte, estas condiciones de contorno no tienen en cuenta el posible aporte (o eliminación) de calor debido a la radiación sobre (o emitida por) la interfaz fluido-sólido (véase, por ejemplo, Bird et al., 1960, capítulo 14).

10.4. Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones

El problema matemático de establecer la existencia y la unicidad del problema constituido por las ecuaciones (10.1)-(10.7) y las correspondientes condiciones iniciales y de contorno es muy complejo debido, sobre todo, a la no linealidad de las ecuaciones (términos convectivos de las ecuaciones). Pocos resultados generales han sido posible establecer en este sentido, casi todos ellos referidos a flujos incompresibles (el alumno interesado en estos temas matemáticos formales de las ecuaciones de Navier-Stokes puede consultar, por ejemplo, el libro de R. Téman, *Navier-Stokes Equations*, Elsevier, Amsterdam, 1984).

Prueba de la complejidad de las ecuaciones de Navier-Stokes es el escaso número de soluciones *exactas* que se conocen, que no llegan al centenar, casi todas ellas correspondientes a flujos incompresibles y a movimientos en los cuales los términos convectivos (no lineales) de las ecuaciones son idénticamente nulos (algunas de ellas se considerarán en las lecciones siguientes; un repertorio más amplio de estas soluciones exactas puede verse, por ejemplo, en Schlichting y Gersten, 2000, capítulo V, en Rosenhead, 1988, capítulo III, y en Landau y Lifshitz, 1987, capítulo II).

Un problema que presentan las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes asociado a la no linealidad es el de la **estabilidad**. Dadas unas determinadas condiciones de contorno estacionarias, cabría pensar que, independientemente de las condiciones iniciales, pasado un cierto tiempo se llegaría a un flujo estacionario correspondiente a la solución estacionaria de las ecuaciones y condiciones de contorno. Pero esto no siempre es así. En la práctica se encuentra que cuando los parámetros que gobiernan el problema están dentro de ciertos rangos, no se llega nunca a una solución estacionaria. Matemáticamente lo que sucede es que la solución estacionaria en esos rangos paramétricos es inestable, es decir, cualquier perturbación de la solución, por pequeña que sea, crece indefinidamente en el tiempo. Como en todo flujo real siempre existen pequeñas perturbaciones, aunque la solución estacionaria del problema existe y está bien definida, al ser inestable no se da en la práctica. En otras palabras, para que una solución tenga significación real no basta que satisfaga las ecuaciones del movimiento y cumpla las condiciones iniciales y de contorno, es preciso, además, que dicha solución sea estable, para que las pequeñas perturbaciones que puedan producirse en las diversas magnitudes del movimiento, las cuales existen siempre en la realidad por multitud de causas, tiendan a amortiguarse al avanzar el tiempo. Las inestabilidades conducen casi siempre

a movimientos que se denominan **turbulentos** , a los cuales está dedicada la última parte del curso.

Algunos ejemplos de inestabilidades hidrodinámicas se verán en el capítulo 30. A continuación se comentará muy brevemente un ejemplo significativo para fijar algunas ideas esenciales. El ejemplo consiste en el flujo de un fluido incompresible (por ejemplo agua) en un conducto de sección circular. Este problema fue considerado por Reynolds en 1883 en su trabajo pionero sobre la inestabilidad y la turbulencia (el nombre de Reynolds aparecerá varias veces a lo largo de este curso ligado a un parámetro adimensional, cierto conjunto de ecuaciones y algunas analogías). Para un conducto *infinito* alineado según el eje x y de diámetro D , veremos en la lección 15 que el campo de velocidad, solución estacionaria de la ecuación de Navier-Stokes para este problema, se puede escribir como

$$\vec{v} = u(r)\vec{e}_x \quad , \quad u(r) = 2V \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] , \quad (10.42)$$

donde r es la coordenada radial y V es la velocidad media (igual al caudal Q que circula por el conducto dividido por la sección, $V = 4Q/\pi D^2$). Es decir, el movimiento es *unidireccional* (con sólo una componente del vector velocidad según el eje x), siendo el perfil de la velocidad un paraboloides: la velocidad es máxima en el centro e igual a dos veces la velocidad media, y nula en la pared del conducto $r = D/2$. Reynolds observó experimentalmente que esta solución **laminar** se presenta en la práctica siempre que el parámetro adimensional

$$Re \equiv \frac{V\rho D}{\mu} , \quad (10.43)$$

llamado **número de Reynolds** en su honor, es menor que un cierto valor crítico (alrededor de 2300). Para valores mayores que el crítico, Reynolds observó (inyectando tinta en el flujo) que el movimiento dejaba de ser unidireccional para volverse tridimensional y caótico (**turbulento**), y ello a pesar de que la solución anterior es válida independientemente del valor del número de Reynolds. Esto se debe a que el flujo se hace inestable por encima de un valor crítico Re^* , de manera que si $Re > Re^*$, cualquier perturbación presente en el flujo se amplifica exponencialmente hasta invalidar la solución estacionaria (10.42). Esto no quiere decir necesariamente que para $Re > Re^*$ no se encuentren soluciones laminares en la práctica, pero son altamente improbables, ya que siempre existen perturbaciones originadas, por ejemplo, en la entrada del conducto. Si uno es extremadamente cuidadoso en el diseño de la entrada del conducto, se puede *retrasar* la aparición del flujo turbulento, pero

la inestabilidad está presente por encima de Re^* , y más tarde o más temprano el flujo se hará turbulento si el conducto es suficientemente largo. Por el contrario, si $Re < Re^*$, el flujo es siempre estable (laminar), ya que todas las perturbaciones que se puedan producir son amortiguadas.

Existen muchos tipos diferentes de inestabilidades hidrodinámicas, algunos de los más representativos serán discutidos en la lección 30. El ejemplo anterior es un caso típico de inestabilidad relacionada con la viscosidad del fluido, cuya aparición está caracterizada por un número de Reynolds crítico. Otras inestabilidades están asociadas a fuerzas centrífugas, gravitatorias, magnéticas, etc., y su aparición viene caracterizada por números adimensionales que cuantifican esas fuerzas.

Como se apuntó anteriormente, la inestabilidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes y la consecuente formación de movimientos caóticos e irregulares, en una palabra, turbulentos, es una consecuencia del carácter no lineal de las ecuaciones, es decir, de los términos convectivos $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \nabla T$. Las soluciones turbulentas que aparecen cuando dejan de ser estables las laminares son, por supuesto, también soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes, pero su carácter caótico e impredecible las hacen poco útiles en la práctica. Por ello, cuando se estudian los flujos turbulentos desde un punto de vista ingenieril, se recurre a un tratamiento estadístico de las soluciones, que se complementa con informaciones empíricas (Parte IX). Podría pensarse que estas soluciones caóticas son el resultado de la complejidad del problema, es decir, del enorme número de grados de libertad presentes en un flujo real, que hace imposible obtener una información cuantitativa precisa del movimiento, recurriéndose por ello al tratamiento estadístico. Esta era una creencia que se tenía hasta hace relativamente poco tiempo, basada en que casi todos los comportamientos caóticos aparecían en sistemas con muchos grados de libertad (un gas o un líquido está constituido por muchísimas moléculas y por ello se recurre a teorías que de una manera u otra introducen hipótesis estadísticas, como la Teoría Cinética de Gases esbozada en la lección 9, o la Teoría de Medios Continuos que estamos utilizando para describir a los fluidos). Pero se sabe que sistemas mecánicos simples, con la condición de que sean no lineales y tengan tres o más grados de libertad, pueden tener comportamientos caóticos e impredecibles en algunos rangos paramétricos. Un ejemplo típico es el péndulo esférico forzado que, con sólo tres grados de libertad, tiene soluciones caóticas para ciertos valores del parámetro forzador. En definitiva, sistemas no lineales simples no necesariamente poseen comportamientos dinámicos simples.

10.5. Métodos de estudio de los problemas fluidomecánicos

Ante la enorme complejidad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, a la hora de obtener resultados prácticos se han seguido varias alternativas, que se resumen a continuación.

10.5.1. Métodos experimentales

Una de las técnicas más comunmente usadas para resolver problemas fluidomecánicos ha sido, y sigue siendo, la experimentación guiada por el análisis dimensional y la semejanza física, que ha proporcionado resultados muy fructíferos. Ejemplo pionero en este campo fue el experimento de Reynolds descrito anteriormente: Reynolds obtuvo el parámetro adimensional (10.43), que caracteriza la transición de flujo laminar a turbulento en un conducto, mediante un análisis puramente dimensional del problema. La lección siguiente se dedica a este tema tan importante del análisis dimensional y la semejanza física, que no es exclusivo, ni mucho menos, de la Mecánica de Fluidos.

Las técnicas experimentales en la Mecánica de Fluidos han experimentado una extraordinaria expansión en los últimos años. Por ejemplo, a los métodos clásicos de medición de la velocidad mediante medidas de la presión (tubos de Pitot y similares) y por anemometría de hilo caliente, se han sumado métodos ópticos, no intrusivos, como la anemometría Láser-Doppler, o la anemometría Fase-Doppler que, aparte de no interferir en el flujo, permite obtener mucha más información sobre el campo de velocidades y otras magnitudes fluidas. También se han introducido nuevas técnicas de visualización de flujos, muy útiles para obtener una información cualitativa del movimiento, y que en muchos casos es imprescindible previamente a la experimentación cuantitativa, o a la *búsqueda* de soluciones matemáticas del problema. Con la llegada de ordenadores potentes, han sido posible técnicas de visualización *cuantitativas* de flujos mediante el seguimiento con una cámara de partículas dispersas en el fluido y el tratamiento digital de las imágenes sucesivas (técnica llamada PIV, del inglés *Particle Image Velocimetry*). Esta técnica permite tener instantáneamente el campo de velocidad de un flujo. Con el uso del ordenador también es posible aprovechar ahora datos que hubieran sido inservibles hace algunos años, y realizar tratamientos estadísticos que no eran posible hace poco tiempo. Además, se pueden formar bancos de datos de resultados experimentales y, por tanto, su utilización sin la necesidad de realizar uno mismo los experimentos.

A pesar de la importancia que los métodos experimentales han tenido y

siguen teniendo en la Mecánica de Fluidos, por razones de tiempo es difícil incluirlos en un curso introductorio a esta ciencia sin menoscabo de temas más básicos y fundamentales. Por ésta y otras razones, no se tratarán los métodos experimentales en este curso. El alumno interesado puede consultar, por ejemplo, los siguientes textos básicos: R.J. Goldstein (editor), *Fluid Mechanics Measurements*, Hemisphere, 1983; Y. Nakayama (editor), *Visualized Flows*, Pergamon, 1988; L. Rosenhead (editor), citado en la lección 8, capítulo X; F. Durst y otros, *Principle and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, Academic, 1981; W. Merzkirch, *Flow visualization*, Academic, 1987; F.T.M. Nieuwstadt (ed.), *Flow visualization and image analysis*, Kluwer, 1993.

10.5.2. Modelos simplificados

Otro de los métodos más empleados en la resolución de problemas fluido-mecánicos ha sido la utilización de modelos simplificados, tanto de las propiedades del fluido como del tipo de movimiento. Son pocos los campos de la física en donde el empleo de modelos simplificados ha sido tan fecundo como en la Mecánica de Fluidos. Uno de los modelos más espectaculares ha sido el de suponer el **campo de velocidades solenoidal (o fluido incompresible)**, considerado en detalle en la sección 10.2. Como se recordará, esta aproximación se cumple prácticamente siempre en los flujos de líquidos, y en bastantes flujos de gases caracterizados por la *pequeñez* de ciertos parámetros adimensionales, entre los cuales el más importante es el número de Mach. Esta es una constante de los modelos simplificados: su validez está caracterizada porque ciertos parámetros adimensionales que gobiernan el problema son muy grandes, o muy pequeños, por lo que se pueden *despreciar* ciertos términos de las ecuaciones, simplificándolas. De aquí la importancia de analizar dimensionalmente las ecuaciones previamente a la resolución de cualquier problema (ver lección siguiente).

Otro modelo simplificado muy importante en la Mecánica de Fluidos es el modelo de **fluido ideal**, consistente en suponer nulos los efectos disipativos (básicamente, suponer que la viscosidad y la conductividad térmica son nulas) en las ecuaciones del movimiento. A este modelo se dedica la parte VI de la asignatura. La relevancia histórica de esta hipótesis queda patente no sólo en el hecho de que las ecuaciones del movimiento para el fluido ideal fueran establecidas por Euler casi un siglo antes de la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes, sino, también, en la gran fecundidad de ideas que ha originado, especialmente con la Teoría de Capa Límite a principios de este siglo. La hipótesis de fluido ideal se aplica en muchos problemas debido a que una fracción importante de los fluidos que se presentan en la naturaleza, así co-

mo muchos de interés tecnol3gico, entre los que se incluyen el aire y el agua, tienen viscosidades y conductividades t3rmicas muy pequeÑas, con lo que los efectos disipativos son despreciables, salvo en problemas muy especiales o en regiones muy limitadas del flujo (ondas de choque, capas l3mites, estelas, etc.); lo cual no quiere decir que estas regiones donde los efectos disipativos son importantes sean irrelevantes, ya que muchas veces condicionan la totalidad del movimiento. El empleo del modelo de fluido ideal introduce una simplificaci3n fundamental en las ecuaciones de Navier-Stokes: desaparecen los t3rminos que contienen las derivadas de mayor orden ($\nabla \cdot \vec{\tau}'$ y $\nabla \cdot \vec{q}$). Por tanto, no se puede imponer, entre otras, la condici3n f3sica esencial del fluido viscoso de no deslizamiento en una superficie s3lida. Esto hace que la soluci3n de un problema con el modelo ideal sea esencialmente distinta que la soluci3n del mismo problema con fluido viscoso, al menos en la inmediata proximidad del contorno, incluso cuando se hace tender a cero el coeficiente de viscosidad en la soluci3n *viscosa*, cuyo l3mite cabr3a esperar que proporcionase la soluci3n correspondiente al fluido ideal. Esta dificultad, que produjo una gran controversia y algunas paradojas a finales del siglo XIX y principios del XX, la solvent3 Prandtl con la introducci3n del concepto de capa l3mite en 1904. Matem3ticamente, esta soluci3n corresponde a lo que m3s tarde se ha denominado un problema de perturbaciones singulares, consistente en *acoplar* dos soluciones asint3ticas, una correspondiente al fluido ideal exterior lejos de la superficie s3lida, y otra al fluido viscoso confinado en una capa delgada alrededor de la superficie s3lida (en donde se simplifican las ecuaciones debido a la *delgadez*). De esta forma, un problema que originalmente era muy complicado de resolver, se reduce a la resoluci3n de dos problemas simplificados y acoplar las soluciones (un ejemplo concreto de la utilizaci3n de esta t3cnica se consideraran3 en la lecci3n 14). Este concepto de capa l3mite viscosa fue extendido subsiguientemente a los an3logos de capa l3mite t3rmica y capa l3mite de difusi3n m3sica, constituyendo una de las ramas m3s importantes de la Mec3nica de Fluidos, la **Teor3a de Capa L3mite**, a la cual se dedica la parte VIII de estos apuntes.

Estrictamente, la hip3tesis de fluido ideal est3 caracterizada, como veremos en la lecci3n siguiente, por el l3mite en el cual el n3mero de Reynolds [ecuaci3n (10.43)] y el producto del n3mero de Reynolds por el n3mero de Prandtl [ecuaci3n (9.74)] son ambos muy grandes (en el caso de que existan varias especies qu3micas, tiene que ser tambi3n grande el producto del n3mero de Reynolds por los correspondientes n3meros de Schmidt, este 3ltimo se definir3 en la lecci3n siguiente). Como en muchos fluidos de inter3s el n3mero de Prandtl (y el de Schmidt) son de orden unidad (ver lecci3n siguiente), es practica habitual identificar el modelo de fluido ideal con la hip3tesis de n3me-

ro de Reynolds muy grande. El límite opuesto, consistente en suponer que el número de Reynolds es muy pequeño, caracteriza a los flujos en los que los efectos disipativos son dominantes en las ecuaciones. Estos flujos constituyen también un capítulo importante de la Mecánica de Fluidos, siendo algunas de las aplicaciones más relevantes la lubricación fluidomecánica, ciertos flujos en conductos y la sedimentación de partículas sólidas pequeñas. Estos flujos en los que los efectos disipativos son dominantes (número de Reynolds pequeño) se estudiarán en la parte IV. La razón de considerar los flujos con viscosidad dominante previamente a los flujos ideales, contrariamente a como históricamente han sido introducidos, se debe, principalmente, a que en el límite de viscosidad dominante las ecuaciones son lineales al desaparecer los términos convectivos, con lo que su resolución es mucho más simple.

10.5.3. Métodos numéricos

Por último, otro de los métodos de *ataque* de las ecuaciones de Navier-Stokes es la integración numérica directa, que en la actualidad está en plena expansión debido al desarrollo espectacular de las calculadoras electrónicas. Para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes se utilizan métodos numéricos muy diversos, algunos de ellos desarrollados específicamente para resolver problemas fluidomecánicos. Entre ellos están los métodos de diferencias finitas, de elementos finitos, de elementos de contorno, el método de las características, los métodos espectrales, etc. La mayor dificultad con los métodos puramente numéricos es el de la estabilidad dinámica de las ecuaciones, que da lugar a fenómenos de turbulencia, la cual viene a sumarse a la dificultad intrínseca de las ecuaciones. A pesar de ello, la capacidad y rapidez de los ordenadores ha crecido tanto en los últimos tiempos que ya es posible resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes en situaciones no triviales. En particular, es ya posible resolver sin dificultad cualquier problema fluido bidimensional no estacionario y muchos problemas tridimensionales, salvo problemas que involucran escalas muy pequeñas como la de la turbulencia, o problemas con zonas muy delgadas a altos números de Reynolds. De todas formas, se están realizando avances muy importantes en estas áreas en los últimos tiempos, tanto en técnicas computacionales como en capacidad de los ordenadores, y no es improbable que muchos de los problemas que actualmente son inaccesibles puedan ser resueltos en un futuro inmediato.

Uno de los aspectos más importantes de la introducción del ordenador en la resolución de problemas fluidomecánicos (como ocurre también en otras ramas de la física) ha sido la aparición de la **experimentación numérica**, con dos consecuencias muy importantes. En primer lugar, una vez que se consi-

gue simular un flujo, es posible medir *todo* sobre él, incluyendo magnitudes básicas, como la vorticidad, muy difíciles de medir por experimentación física. Estas magnitudes forman parte intrínseca de la simulación numérica y están disponibles sin esfuerzo adicional a la vez que otras magnitudes de las que sí se podría obtener información experimental. Por otra parte, es posible realizar experimentos numéricos en situaciones esencialmente imposibles para los experimentos físicos. Por supuesto, hay muchos flujos cuya complicación excede todavía la capacidad de los ordenadores más potentes, y en algunos de ellos el experimento físico sigue siendo aun imprescindible para esclarecer el problema.

Como ocurría con los métodos experimentales, a pesar de que los métodos numéricos constituyen cada vez más una de las herramientas más útiles para resolver problemas fluidomecánicos, es difícil incluirlos en un apretado programa de un curso introductorio a la Mecánica de Fluidos, en el que *debe* tener cabida aspectos más básicos de esta ciencia. Por ello estos métodos se *suelen* dejar para un curso más avanzado de Mecánica de Fluidos Computacional. De todas formas, unos pocos aspectos numéricos básicos serán introducidos en algunas de las lecciones que siguen. Información básica y avanzada puede obtenerse, por ejemplo, en los siguientes textos: R. Peyret y T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer, 1983; C. Canuto, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, 1988; M.B. Abbot y D. Basco, *Computational Fluid Mechanics*, Wiley, 1989; J.F. Wendt (ed.), *Computational Fluid Dynamics*, Springer, 1992; P.J. Roache, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, 1998; J.D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1995; R. Peyret (ed.), *Handbook of Computational Fluid Dynamics*, Academic, 1999. También, en los apuntes de la asignatura *Mecánica de Fluidos Computacional*, de la E.T.S.I. Industriales de Málaga, por J. Ortega Casanova y R. Fernández Fera, 2000.

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- R. B. BIRD et al. 1960. Capítulo 18.
- L. D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo II.
- G. MILLÁN BARBANY, 1975. Capítulo I.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 6.

- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulos I y III.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulo V.

Capítulo 11

Análisis dimensional y semejanza física

11.1. Introducción

El análisis dimensional es importante por dos motivos principales. Por un lado permite conocer el mínimo número de variables que gobierna un determinado problema, reduciendo las variables físicas originales a un conjunto menor de parámetros adimensionales. De esta forma racionaliza la experimentación, ya que establece cuáles son los parámetros realmente relevantes en un determinado proceso. Por ejemplo, en el experimento de Reynolds que se describió en la sección 10.4, aunque la transición de flujo laminar a turbulento viene en principio gobernada por las propiedades del líquido, ρ y μ , por el diámetro del conducto, D , y por el caudal (o velocidad media U), el análisis dimensional nos dice que el proceso no está gobernado por cada una de estas variables por separado, sino por una combinación adimensional de ellas, $\rho DU/\mu$ (el número de Reynolds), y que es, por tanto, el parámetro que debemos controlar experimentalmente. Esta minimización de las variables también permite establecer de una forma precisa cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que exista *semejanza física* entre dos problemas: no hay más que exigir que las variables adimensionales sean iguales. En el ejemplo anterior, para que dos flujos sean físicamente semejantes no hace falta que sean iguales todos los parámetros físicos, ρ , μ , D y U (lo cual exigiría que los flujos fuesen idénticos), sino que es suficiente con que el número de Reynolds sea el mismo. El otro motivo por el cual el análisis dimensional es importante es que permite conocer con precisión cuando una determinada variable es relevante o no en un problema, ya que las nuevas variables son *puros números* adimensionales; basta averiguar

si alguno de esos números es siempre muy pequeño, o muy grande, o aproximadamente constante, para que esa *variable* no influya, prácticamente, en el proceso.

El análisis dimensional está basado simplemente en que las leyes físicas, que relacionan magnitudes cuyos valores dependen del sistema de unidades utilizado, son independientes de las dimensiones usadas. Si estas leyes son conocidas explícitamente, como ocurre con las ecuaciones de Navier-Stokes en la Mecánica de Fluidos, una forma de aplicar el análisis dimensional consiste en *adimensionalizar* las ecuaciones, es decir, en escribirlas en términos de variables sin dimensiones, lo cual proporciona el conjunto de parámetros adimensionales que gobierna el proceso, cuyo número es siempre menor que el de los parámetros dimensionales originales. Pero el análisis dimensional se puede aplicar incluso si no se conocen las leyes explícitamente (por ejemplo, cuando lo que queremos es, precisamente, hallar esas leyes experimentalmente), si se conocen las magnitudes físicas que *pueden* influir en el proceso considerado. Antes de pasar a formular la teoría general del análisis dimensional basada en el Teorema II de Buckingham (sección 11.4), vamos a adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes para conocer cuáles son los parámetros adimensionales más importantes que aparecen en la Mecánica de Fluidos, algunos de los cuales ya han sido introducidos en las lecciones anteriores.

11.2. Parámetros adimensionales de la Mecánica de Fluidos

Para adimensionalizar las ecuaciones de Navier-Stokes (10.1)-(10.5) definimos las siguientes variables:

$$t^* = t/t_o, \quad \vec{x}^* = \vec{x}/L_o, \quad \vec{v}^* = \vec{v}/V_o, \quad p^* = p/p_o, \quad \rho^* = \rho/\rho_o, \quad \mu^* = \mu/\mu_o, \\ \mu_v^* = \mu_v/\mu_o, \quad \vec{f}_m^* = \vec{f}_m/g_o, \quad T^* = T/T_o, \quad K^* = K/K_o, \quad c_v^* = c_v/c_{vo}. \quad (11.1)$$

Las variables con asterisco son adimensionales y las magnitudes con subíndice cero son valores característicos, o típicos, de las respectivas magnitudes en el problema que estemos considerando, de forma que las variables adimensionales son de orden unidad (para las fuerzas másicas suponemos que éstas son sólo gravitatorias, y g_o es la aceleración de la gravedad a nivel del mar). Introduciendo estas nuevas variables en las ecuaciones (10.1)-(10.5), se obtiene

$$\frac{\rho_o}{t_o} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o}{L_o} \nabla^* (\rho^* \vec{v}^*) = 0 \quad , \quad (11.2)$$

$$\frac{\rho_o V_o}{t_o} \rho^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o^2}{L_o} \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\frac{p_o}{L_o} \nabla^* p^* + \frac{\mu_o V_o}{L_o^2} \nabla^* \cdot \vec{\tau}^* + \rho_o g_o \rho^* \vec{f}_m^* \quad , \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_o c_{vo} T_o}{t_o} \rho^* \frac{\partial e^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_o V_o c_{vo} T_o}{L_o} \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* e^* \\ & = -\frac{p_o V_o}{L_o} p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu_o V_o^2}{L_o^2} \Phi^* + \frac{K_o T_o}{L_o^2} \nabla^* \cdot (K^* \nabla^* T^*) \quad , \quad (11.4) \end{aligned}$$

donde ∇^* es el operador nabla en la variable \vec{x}^* y se ha supuesto, por simplicidad, que no hay aportes volumétricos de calor. Para que todos los términos que aparecen en las ecuaciones sean adimensionales, hay que dividirlos por alguno de los factores dimensionales que multiplican a las variables con asterisco. Para que aparezcan los parámetros adimensionales que normalmente se utilizan, dividimos por los factores que multiplican al segundo término (término convectivo) de cada una de las ecuaciones, resultando:

$$\frac{L_o}{V_o t_o} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0, \quad (11.5)$$

$$\frac{L_o}{V_o t_o} \rho^* \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* \vec{v}^* = -\frac{p_o}{\rho_o V_o^2} \nabla^* p^* + \frac{\mu_o}{\rho_o V_o L_o} \nabla^* \cdot \vec{\tau}^* + \frac{L_o g_o}{V_o^2} \rho^* \vec{f}_m^*, \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{L_o}{V_o t_o} \rho^* \frac{\partial e^*}{\partial t^*} + \rho^* \vec{v}^* \cdot \nabla^* e^* \\ & = -\frac{p_o}{\rho_o c_{vo} T_o} p^* \nabla^* \cdot \vec{v}^* + \frac{\mu_o V_o}{\rho_o c_{vo} T_o L_o} \Phi^* + \frac{K_o}{\rho_o c_{vo} V_o L_o} \nabla^* \cdot (K^* \nabla^* T^*). \quad (11.7) \end{aligned}$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en cada término da una idea de la importancia de ese término en relación a los términos convectivos, que están multiplicados por la unidad. A continuación se enumeran dichos parámetros adimensionales y se comenta su significado físico.

Número de Strouhal,

$$St \equiv \frac{L_o}{V_o t_o} \quad , \quad (11.8)$$

que aparece multiplicando a los términos que en cada ecuación representa las variaciones temporales. Este número es el cociente entre el *tiempo de residencia*, L_o/V_o , y el tiempo característico t_o , siendo una medida de la importancia

de la variación local frente a la variación por el movimiento del fluido. Si $St \ll 1$, los términos de variación local son despreciables frente a los términos convectivos, y el movimiento se denomina *casi estacionario*. Físicamente, si $St \ll 1$, el fluido recorre, con velocidad característica V_o , la longitud característica del problema L_o en un tiempo (L_o/V_o) mucho menor que el tiempo característico t_o de variación de las magnitudes fluidas con el tiempo, por lo que el fluido *no se entera* de la variación temporal y el flujo se puede considerar estacionario. Por el contrario, si $St \gg 1$, la variación temporal es mucho más importante (más rápida) que la asociada al movimiento del fluido, y se pueden despreciar los términos convectivos de las ecuaciones.

Número de Euler,

$$Eu \equiv \frac{p_o}{\rho_o V_o^2} \quad , \quad (11.9)$$

que representa la importancia relativa de las fuerzas de presión frente a la convección de cantidad de movimiento o *fuerzas de inercia*. Este número está relacionado con dos que ya hemos definido con anterioridad, dependiendo que el fluido sea un gas (ideal) o un líquido (incompresible). En el caso en que el fluido sea un gas ideal, se tiene

$$Eu = \frac{p_o}{\rho_o V_o^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_o^2}{V_o^2} = \frac{1}{\gamma M^2} \quad , \quad (11.10)$$

donde a_o es la velocidad del sonido del gas, γ es la relación de calores específicos y M es el **número de Mach** o cociente entre la velocidad del gas y la velocidad del sonido (ver sección 10.2), todo ello en las condiciones p_o, ρ_o . Así, para un gas ideal, el número de Euler está relacionado con el inverso del cuadrado del número de Mach y, por tanto, nos da una idea de la compresibilidad del gas en el flujo considerado. Si $Eu \gg 1$, al ser γ siempre de orden unidad, $M^2 \ll 1$ y, como se discutió en la sección 10.2, el flujo se puede considerar como incompresible o solenoidal.

Para un líquido ideal ($\rho = \text{constante}$), el número de Euler está relacionado con el **número de cavitación** Ca , definido también en la sección 10.2, puesto que si $p_o \gg p_v$, $Eu \simeq Ca/2$. Por tanto, está relacionado con la posibilidad de cavitación del líquido: cuanto más pequeño sea Eu , mayor es la posibilidad de cavitación, ya que la *depresión* dinámica originada por el movimiento, del orden de $\rho_o V_o^2$, es mayor para una p_o dada. Así, pues, el número de Euler está relacionado, tanto para gases como para líquidos, con la compresibilidad del fluido (recuérdese que, en la mayoría de las situaciones, la única posibilidad para que un líquido pueda ser compresible es que cavite; véase sección 10.2).

Número de Reynolds,

$$Re \equiv \frac{\rho_o V_o L_o}{\mu_o} = \frac{V_o L_o}{\nu_o} \quad (11.11)$$

Es una medida de la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las fuerzas viscosas. Si $Re \ll 1$, el término convectivo puede despreciarse frente al viscoso en la ecuación de cantidad de movimiento, y al contrario, si $Re \gg 1$, el término viscoso es despreciable frente al de inercia, teniéndose lo que se denomina un *flujo ideal* (en el límite formal $Re \rightarrow \infty$). El número de Reynolds es el parámetro adimensional más importante de la Mecánica de Fluidos por dos razones fundamentales: porque la división de los movimientos fluidos en flujos a altos y bajos números de Reynolds, es decir, movimientos ideales y movimientos con viscosidad dominante, ha sido históricamente la división fundamental de la Mecánica de Fluidos, y es la que utilizaremos en lo que sigue (véase sección 10.5.2); por otra parte, en ausencia de otras fuerzas que no sean las de viscosidad, el número de Reynolds es el parámetro que caracteriza la formación de inestabilidades y la transición a la turbulencia, cuando su valor es mayor que un cierto valor crítico que depende del tipo de flujo.

Número de Froude,

$$Fr \equiv \frac{V_o^2}{g_o L_o} \quad (11.12)$$

que mide la importancia relativa de las fuerzas de inercia frente a las gravitatorias. Si $Fr \gg 1$, las fuerzas gravitatorias pueden despreciarse en el movimiento del fluido y, por el contrario, si $Fr \ll 1$, son dominantes frente a la convección de cantidad de movimiento.

El parámetro $p_o/\rho_o c_{vo} T_o$ representa la relación entre el trabajo de compresión y la convección de energía interna teniendo sentido, por tanto, únicamente en fluidos compresibles. Para un gas ideal se puede escribir:

$$\frac{p_o}{\rho_o c_{vo} T_o} = \frac{R_g}{c_{vo}} = \gamma - 1 \quad (11.13)$$

por lo que es una propiedad del gas y no del tipo de movimiento.

El parámetro $\mu_o V_o/\rho_o c_{vo} T_o L_o$ es una medida de la importancia de la energía disipada por viscosidad frente a la convección de energía interna. Para los líquidos este parámetro suele ser muy pequeño, por lo que la disipación viscosa es generalmente despreciable. Por ejemplo, para el agua a $T_o = 20^\circ C$ ($\nu_o \simeq 10^{-6} m^2/s$, $c_{vo} \simeq 4,18 \times 10^3 J/kgK$) se tiene $\mu_o V_o/\rho_o c_{vo} T_o L_o \simeq 8 \times 10^{-13} s^{-1} \times V_o/L_o$, por lo que sólo cuando las velocidades son extremadamente altas o cuando las magnitudes fluidas varían en longitudes pequeñísimas, la

disipación viscosa cuenta en los movimientos de agua. Para ciertos líquidos como los aceites o la glicerina, que tienen una viscosidad mucho mayor que la del agua (el aceite de oliva tiene una viscosidad del orden de 100 veces la del agua, mientras que la viscosidad de la glicerina a temperatura ambiente es unas 2000 veces mayor que la del agua), las condiciones para que la disipación viscosa cuente no son tan extremas. Para los gases ideales, el parámetro $\mu_o V_o / \rho_o c_{vo} T_o L_o$ es idéntico al parámetro (10.30a) si uno cambia c_v por c_p y está, por tanto, también relacionado con la influencia de la disipación viscosa en la compresibilidad del fluido. Haciendo uso de la ecuación de estado del gas ideal y de las definiciones anteriores se puede escribir

$$\frac{\mu_o V_o}{\rho_o c_{vo} T_o L_o} = \gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re}, \quad (11.14)$$

que suele ser muy pequeño (ver más adelante).

El número de Peclet,

$$Pe \equiv \frac{\rho_o V_o L_o c_{vo}}{K_o}, \quad (11.15)$$

representa la relación entre la convección de energía interna y el calor transportado por conducción. En la práctica se suele sustituir c_v por c_p en la definición del número de Peclet, teniendo

$$Pe \equiv \frac{\rho_o V_o L_o c_{po}}{K_o} = Re Pr, \quad (11.16)$$

donde

$$Pr \equiv \frac{\mu_o c_{po}}{K_o} = \frac{\nu_o}{\alpha_o}, \quad (11.17)$$

es el **número de Prandtl**, ya introducido anteriormente (sección 9.7). El número de Prandtl es una propiedad del fluido que representa la importancia relativa que en ese fluido tienen dos fenómenos de transporte molecular: la difusión viscosa o de cantidad de movimiento y la difusión de calor o energía. Para los gases ya vimos en la sección 9.7 que el número de Prandtl es de orden unidad (en particular, vale exactamente $2/3$ para los gases monoatómicos), lo cual es debido a que en los gases ambos transportes se realizan por colisiones moleculares, que son prácticamente igual de efectivas para intercambiar cantidad de movimiento y energía entre las moléculas. Por tanto, el número de Peclet para los gases es del mismo orden que el número de Reynolds, y si las fuerzas viscosas son despreciables en la ecuación de cantidad de movimiento ($Re \gg 1$), también lo es la conducción de calor en la ecuación de la energía (y

viceversa, si las fuerzas viscosas son dominantes, también lo es la conducción de calor). Así, la condición $Re \gg 1$ implica viscosidad y conducción de calor despreciables en el movimiento, lo que *normalmente* se entiende por un fluido ideal.

En los líquidos el número de Prandtl tiene un rango de variación muy amplio. Líquidos *comunes* como el agua, el alcohol etílico, etc., tienen un número de Prandtl de orden unidad,¹ por lo que se puede aplicar lo dicho anteriormente para los gases. Líquidos como los aceites son más efectivos transportando cantidad de movimiento que calor, es decir, tienen un número de Prandtl alto ($Pr \simeq 117$ para el aceite de oliva a $15^\circ C$), de forma que si el número de Reynolds es alto, el número de Peclet lo es mucho más, y la condición $Re \gg 1$ sigue caracterizando a los flujos ideales. Por el contrario, si $Re \ll 1$, pero no *excesivamente* pequeño, puede ocurrir que las fuerzas viscosas sean dominantes en la ecuación de cantidad de movimiento sin que lo sea la conducción de calor en la ecuación de la energía. Lo opuesto a esta situación ocurre en los metales líquidos, caracterizados por un número de Prandtl muy pequeño al ser mucho más efectiva la conducción de calor que el transporte molecular de cantidad de movimiento. En estos líquidos, la condición $Re \gg 1$ generalmente no implica que la conducción de calor sea despreciable.

Si el fluido no tiene composición homogénea, además de las ecuaciones (11.5)-(11.7) hay que tener en cuenta las ecuaciones de conservación de la masa para las distintas especies. Adimensionalizando la ecuación (6.31) de forma análoga a como se ha hecho anteriormente, se llega a (téngase en cuenta que la fracción másica es *ya* adimensional):

$$\frac{L_o}{V_o t_o} \rho^* \frac{\partial Y_i}{\partial t^*} + \rho^* \bar{v}^* \cdot \nabla^* Y_i = \frac{D_{io}}{V_o L_o} \nabla^* \cdot (\rho^* D_i^* \nabla^* Y_i) \quad , \quad (11.18)$$

donde D_{io} es una difusividad másica característica de la especie i , y no se ha tenido en cuenta, por simplicidad, el término de reacción química.² El único parámetro adimensional nuevo es $D_{io}/V_o L_o$, que representa la relación entre la difusión molecular de masa de la especie i y la convección de masa de la especie i . El inverso de este número es el equivalente al número de Peclet para el transporte de masa:

¹En realidad son más bien del orden de la decena; así, a $20^\circ C$, $Pr \simeq 7$ para el agua y $Pr \simeq 15$ para el etanol.

²Las reacciones químicas introduce tiempos característicos de reacción que *enriquece* mucho el problema en cuanto a parámetros adimensionales nuevos, pero que no se tratarán aquí. El alumno interesado puede consultar, por ejemplo, R. Aris, 1975, *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts* (Clarendon Press, Oxford). Volumen I, capítulo 2.

$$\frac{V_o L_o}{D_{io}} = Re Sc_i \quad , \quad (11.19)$$

donde Sc_i es el **número de Schmidt** para la especie i ,

$$Sc_i \equiv \frac{\nu_o}{D_{io}} \quad , \quad (11.20)$$

que es el análogo al número de Prandtl en el transporte de masa, representando la importancia relativa del transporte molecular de cantidad de movimiento frente al transporte molecular de masa de la especie i . Lo dicho anteriormente para el número de Prandtl se aplica, en gran medida, al número de Schmidt. Así, para los gases, $Sc = O(1)$, por las mismas razones que $Pr = O(1)$, con lo que $Re \gg 1$ implica también que la difusión másica es despreciable frente a la convectiva (otro fenómeno disipativo más cuya ausencia caracteriza al fluido ideal), y al contrario, $Re \ll 1$ implica que la difusión másica es dominante frente al transporte convectivo de masa. Para los líquidos el número de Schmidt es siempre mucho mayor que la unidad, es decir, en los líquidos la difusión másica es siempre mucho más *lenta* que la difusión de cantidad de movimiento, por lo que la difusión másica puede ser despreciable incluso en situaciones en que $Re \ll 1$.

En relación a los fenómenos de transporte, a veces también se utiliza el denominado **número de Lewis**, que relaciona la difusión másica y la difusión de calor,

$$Le_i \equiv \frac{D_{oi}}{\alpha_o} \quad . \quad (11.21)$$

Este número es de orden unidad para los gases y mucho menor que la unidad para los líquidos.

Además de los números adimensionales definidos hasta ahora, que son los más comunes, en algunos problemas aparecen otros asociados a fenómenos físicos que no se han incluido en la descripción anterior como, por ejemplo, la tensión superficial, fuerzas originadas por un sistema de referencia no inercial, fuerzas másicas aparte de las gravitatorias, fuerzas de flotabilidad asociada a diferencias de temperaturas, etc. Algunos de estos nuevos parámetros adimensionales se introducirán en lecciones posteriores.

Para finalizar esta sección sobre los parámetros adimensionales más comunes, vamos a escribir una importante relación, debida a von Kármán, entre el **número de Knudsen**, que como se recordará (sección 8.1) relaciona el camino libre medio λ con la longitud característica L_o , siendo una medida de la aproximación al equilibrio termodinámico local, y el número de Reynolds y

el número de Mach. De las ecuaciones (8.2), (8.4), (9.20), (9.61) y (11.11) se tiene

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L_o} \sim \frac{c_T \tau_c}{L_o} \sim \sqrt{3R_g T_o} \frac{\mu_o}{p_o L_o} = \sqrt{3\gamma} \frac{M}{Re} \quad (11.22)$$

Esta relación, que estrictamente es válida para un gas monoatómico, pero que en orden de magnitud es válida para todo gas ideal, nos dice que la aproximación de equilibrio termodinámico local para el flujo de un gas se verifica si

$$\frac{M}{Re} \ll 1. \quad (11.23)$$

Si el flujo es no estacionario se debe verificar, además, que $Kn_t = \tau_c/t_o \ll 1$, lo cual implica $StM^2/Re \ll 1$. Como en los movimientos más comunes de gases un aumento del número de Mach (e.g., de la velocidad del gas para una temperatura dada) va normalmente acompañado de un aumento aún mayor del número de Reynolds, las relaciones anteriores se suelen verificar para la mayoría de los movimientos de gases.³ Esta es la razón por la cual se comentó anteriormente que el parámetro (11.14), que mide la relación entre la energía disipada por viscosidad y la convección de energía interna en los flujos de gases ideales, suele ser muy pequeño (si no lo fuese estaría en juego algo más que el *simple* hecho de que la disipación viscosa cuente, ya que la hipótesis de equilibrio termodinámico local se vendría abajo, y con ella la validez de las ecuaciones que estamos considerando). Sólo en movimientos en condiciones muy extremas, como, por ejemplo, en el interior de las *ondas de choque* de intensidad fuerte (ver lección 22), M/Re no es pequeño (por supuesto, dentro de las ondas de choque la disipación viscosa es importante).

11.3. Semejanza física

Para que dos problemas fluidomecánicos sean físicamente semejantes no es necesario que sean *idénticos*, sino que es suficiente con que todos los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes que los gobiernan, así como los que aparecen en las condiciones de contorno, sean iguales. Esto es debido a que, si se cumple esa igualdad, la solución *adimensional* del problema es la misma en ambos. La solución *física* para cada problema se

³Por ejemplo, en un flujo de aire a $15^\circ C$ ($\nu_o = 1,45 \times 10^{-5} m^2/s$, $a_o = 340,6 m/s$) con $L_o = 1 cm$ y $V_o = 10 m/s$, se tiene $M \simeq 0,03$, $Re \simeq 6900$, $M/Re \simeq 4,4 \times 10^{-6}$; y con $V_o = 1000 m/s$, $M \simeq 2,93$, $Re \simeq 6,9 \times 10^6$, $M/Re \simeq 4,2 \times 10^{-7}$.

obtiene sin más que *deshacer* los cambios de variables utilizando las magnitudes características de cada problema.

Una de las consecuencias prácticas más importantes de la semejanza física es que permite hacer experimentación con *modelos* de una forma rigurosa, extrapolándose sin ambigüedad los resultados al problema *real*. Así, por ejemplo, para estudiar las corrientes que crearían una nueva instalación portuaria, no haría falta hacer la instalación real y comprobar después, sino que se puede hacer un modelo a escala (la igualdad de las condiciones de contorno adimensionales exige la **semejanza geométrica** entre el modelo y el problema real) y experimentar sobre él teniendo en cuenta que los parámetros adimensionales sean los mismos (no haría falta utilizar el mismo fluido, agua salada, sino solamente exigir que los números de Re , Fr , etc., fuesen los mismos; es más, la igualdad de estos números exige casi siempre que el fluido en el modelo tenga propiedades físicas distintas que en la realidad).

Uno de los problemas que se suele encontrar al aplicar la semejanza física a la experimentación con modelos es que, en la mayoría de los casos, no es posible exigir que *todos* los parámetros adimensionales sean iguales. Pero el análisis dimensional también nos da información sobre qué parámetros adimensionales son los más relevantes en el problema considerado, por los que podemos descartar algunos de ellos y hacer una **semejanza física parcial**, es decir, exigir que sólo algunos parámetros adimensionales (los más relevantes en el problema dado) sean iguales en el modelo y en el problema real. El análisis dimensional también nos da información sobre el orden de magnitud de los errores cometidos con esta aproximación, puesto que sabemos los valores típicos de los parámetros adimensionales descartados (estos parámetros pueden no tenerse en cuenta porque, o bien son muy pequeños, con lo que el error cometido sería del orden de ellos mismos; o bien son muy grandes, siendo el error del orden del inverso de su valor, o, finalmente, son aproximadamente constantes, con lo que el error es del orden de las fluctuaciones alrededor de esas constantes).

11.4. Teorema Π de Buckingham

La reducción de las variables físicas de las cuales depende un determinado proceso físico mediante el uso de variables adimensionales se puede demostrar de una forma general, independientemente de las relaciones o leyes que gobiernan el proceso, basándose en la homogeneidad o *invariancia* de dichas leyes en relación al sistema dimensional de unidades utilizado. En otras palabras, todos los términos de una determinada ley física deben de ser dimensionalmente

homogeneos, hecho que se ha utilizado para *adimensionalizar* las ecuaciones de Navier-Stokes en la sección 11.2. El siguiente teorema, tradicionalmente denominado Teorema II, se debe a Buckingham (1914).

Considérese un problema físico gobernado por $n + 1$ variables físicas, a_o, a_1, \dots, a_n , y que satisfacen una cierta relación:

$$a_o = f(a_1, a_2, \dots, a_n), \tag{11.24}$$

la cual puede ser conocida teóricamente, o desconocida en principio, pero que se quiere determinar mediante una serie de experimentos. El valor numérico de cada cantidad física (dimensional) a_i depende del sistema de unidades de medida que se utilice. Supongamos que existen $k \leq n + 1$ dimensiones independientes, es decir, de las $n + 1$ variables a_i hay k que son *dimensionalmente independientes*. Por ejemplo, en un problema puramente mecánico hay tres dimensiones independientes, que pueden ser una masa, una longitud y un tiempo, o cualquier combinación entre ellas; si el problema es termodinámico, hay que añadir una más, por ejemplo una temperatura, etc. El Teorema II establece que el número de variables de que depende el problema puede reducirse a $n + 1 - k$ si se utilizan variables adimensionales convenientemente elegidas.

En efecto. Supongamos que las variables dimensionalmente independientes son a_1, a_2, \dots, a_k . Esto quiere decir que las dimensiones de las restantes variables se pueden expresar como producto de las dimensiones de a_1, a_2, \dots, a_k (las cuales se designan por $[a_1], [a_2], \dots, [a_k]$) elevadas a ciertas potencias:

$$\begin{aligned} [a_o] &= [a_1]^{b_{0,1}} [a_2]^{b_{0,2}} \dots [a_k]^{b_{0,k}} \quad , \\ [a_{k+1}] &= [a_1]^{b_{k+1,1}} [a_2]^{b_{k+1,2}} \dots [a_k]^{b_{k+1,k}} \quad , \\ &\dots \\ [a_n] &= [a_1]^{b_{n,1}} [a_2]^{b_{n,2}} \dots [a_k]^{b_{n,k}} \quad , \end{aligned}$$

donde los $b_{i,j}$ son números racionales. Si definimos las variables adimensionales

$$\begin{aligned} \pi_o &\equiv a_o / (a_1^{b_{0,1}} a_2^{b_{0,2}} \dots a_k^{b_{0,k}}) \quad , \\ \pi_{k+1} &\equiv a_{k+1} / (a_1^{b_{k+1,1}} a_2^{b_{k+1,2}} \dots a_k^{b_{k+1,k}}) \quad , \\ &\dots \\ \pi_n &\equiv a_n / (a_1^{b_{n,1}} a_2^{b_{n,2}} \dots a_k^{b_{n,k}}) \quad , \end{aligned}$$

la relación física (11.24) puede escribirse como

$$\pi_o = \frac{f[a_1, a_2, \dots, a_k, (\pi_{k+1} a_1^{b_{k+1,1}} a_2^{b_{k+1,2}} \dots a_k^{b_{k+1,k}}), \dots, (\pi_n a_1^{b_{n,1}} a_2^{b_{n,2}} \dots a_k^{b_{n,k}})]}{a_1^{b_{0,1}} a_2^{b_{0,2}} \dots a_k^{b_{0,k}}} , \quad (11.25)$$

es decir,

$$\pi_o = g(a_1, a_2, \dots, a_k, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n) \quad (11.26)$$

Como la ecuación tiene que ser dimensionalmente homogénea, no puede depender de a_1, a_2, \dots, a_k ,

$$\pi_o = g(\pi_{k+1}, \dots, \pi_n) \quad (11.27)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Si la relación (11.24) se quiere obtener experimentalmente, está claro que la minimización del número de variables es esencial, pues reduce considerablemente el número de experimentos a realizar. En el caso muy particular en que $n = k$, sólo queda un parámetro adimensional, por ejemplo π_o , que se determina ¡con un único experimento! Por otra parte, como se comentó en la sección anterior, el uso de parámetros adimensionales permite establecer de una forma rigurosa las condiciones mínimas que se deben verificar para que exista semejanza física, total o parcial, entre dos problemas físicos y, así, el uso experimental de modelos.

11.5. Ejemplos

11.5.1. Alcance de un proyectil puntual

Supongamos que queremos averiguar experimentalmente cual es el alcance X de un proyectil de masa m , supuesto puntual (es decir, despreciamos la resistencia del aire, que se considera en el ejemplo siguiente). El proyectil es lanzado con una velocidad V y un ángulo de inclinación α . Está claro que X es una función de α, V, m y la aceleración de la gravedad g :

$$X = X(\alpha, m, V, g) \quad (11.28)$$

Como es un problema mecánico, el número de variables se puede reducir a $5 - 3 = 2$. Para ello tomamos como variables dimensionalmente independientes m, V y g , cuyas dimensiones son:

$$[m] = [M] \quad , \quad [V] = [L][t]^{-1} \quad , \quad [g] = [L][t]^{-2} \quad , \quad (11.29)$$

donde $[M]$, $[L]$ y $[t]$ representan las dimensiones de masa, longitud y tiempo, respectivamente. Al ser el ángulo α adimensional, la única variable que debemos adimensionalizar es X . Para ello buscamos una combinación apropiada de m , V y g :

$$[X] = [L] = [m]^\beta [V]^\gamma [g]^\delta \quad (11.30)$$

Claramente, $\beta = 0$, $\gamma = 2$ y $\delta = -1$, por lo que el parámetro adimensional asociado a X es:

$$\pi_x = \frac{Xg}{V^2} \quad (11.31)$$

El teorema II nos dice que

$$\pi_x = f(\alpha) \quad , \quad (11.32)$$

es decir,

$$X = \frac{V^2}{g} f(\alpha) \quad , \quad (11.33)$$

donde f es una función (desconocida *a priori*) de α . Así, el problema se reduce a hacer una sola serie de experimentos variando únicamente α , sin tener siquiera que variar V , m , ni, por supuesto g , ya que la dependencia con estas variables es conocida (en particular, X no depende de la masa).

Por supuesto, la función $f(\alpha)$ en este problema tan sencillo se puede conocer sin hacer ningún experimento, puesto que las ecuaciones que describen el fenómeno son muy sencillas:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \quad , \quad (11.34)$$

$$t = 0 \quad , \quad x = z = 0 \quad , \quad dx/dt = V \cos \alpha \quad , \quad dz/dt = V \sin \alpha \quad , \quad (11.35)$$

cuya solución es $x = V \cos \alpha t$, $z = -gt^2/2 + V \sin \alpha t$; es decir, el proyectil describe la parábola $z = x[\tan \alpha - 2gx/(V^2 \cos^2 \alpha)]$, que proporciona

$$X = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha \quad , \quad (11.36)$$

o $f(\alpha) = \sin 2\alpha$. Pero si no conociésemos este resultado, el análisis dimensional nos ha proporcionado la variable, en este caso única, sobre la que tenemos que dirigir nuestros esfuerzos experimentales.

11.5.2. Alcance de un proyectil teniendo en cuenta la resistencia aerodinámica

Si quisiéramos obtener el alcance X teóricamente, habría que resolver las ecuaciones siguientes:

$$m \frac{d^2 \vec{x}_{cm}}{dt^2} = m\vec{g} + \vec{F}_r \quad , \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z \quad , \quad (11.37)$$

$$t = 0 \quad , \quad \vec{x}_{cm} = 0 \quad , \quad d\vec{x}_{cm}/dt = (V \cos \alpha, 0, V \sin \alpha) \quad , \quad (11.38)$$

$$X \equiv x_{cm}(t = t_F) \quad , \quad z(t_F) = 0 \quad , \quad (11.39)$$

donde \vec{x}_{cm} es la posición del centro de masa del proyectil y \vec{F}_r es la fuerza de resistencia que ejerce el aire sobre el proyectil. Para hallar esta fuerza hay que resolver las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el movimiento del aire alrededor del proyectil. Suponiendo que el flujo del aire es prácticamente incompresible ($M^2 \ll 1$ y $T \simeq \text{constante}$), se tiene

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad (11.40)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g} \quad , \quad (11.41)$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{sobre} \quad S(\vec{x}) = 0 \quad , \quad p \rightarrow p_a \quad \text{y} \quad \vec{v} = -d\vec{x}_{cm}/dt \quad \text{para} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \quad , \quad (11.42)$$

donde $S(\vec{x}) = 0$ es el contorno del proyectil, situado en el origen de coordenadas y caracterizado, por ejemplo, por dos parámetros, longitud L y grosor c . Lejos del proyectil ($|\vec{x}| \rightarrow \infty$), la velocidad del aire es, respecto a unos ejes que se mueven con el centro de masa del proyectil, $-d\vec{x}_{cm}/dt$, y la presión es la atmosférica, p_a . Una vez que se han obtenido $\vec{v}(\vec{x}, t)$ y $p(\vec{x}, t)$ alrededor del proyectil, la fuerza de resistencia se calcula mediante

$$\vec{F}_r = \int_{S(\vec{x})=0} (p\vec{n} - \vec{\tau}' \cdot \vec{n}) ds = \int_{S(\vec{x})=0} [(p - p_a)\vec{n} - \vec{\tau}' \cdot \vec{n}] ds \quad . \quad (11.43)$$

Evidentemente, este problema es muy complejo, al menos así planteado de forma general. El análisis dimensional nos permite obtener el número mínimo de parámetros adimensionales que lo gobierna, simplificando la experimentación. Por otra parte, este análisis nos permitirá establecer con precisión qué condiciones se deben verificar para que los resultados del ejemplo anterior sean aproximadamente válidos, es decir, para que la resistencia del aire no cuente.

Para proceder de una forma más *pedagógica* (aunque no más simple), vamos a suponer primero que estuviésemos interesados solamente en calcular la fuerza de resistencia \vec{F}_r . De las ecuaciones (11.40)-(11.43), esta fuerza depende de las siguientes magnitudes:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_r(\rho, \mu, g, L, U, t, c, \beta) \quad , \quad (11.44)$$

donde el valor de $d\vec{x}_{cm}/dt$ se ha sustituido por dos parámetros, su módulo U y el ángulo β que forma con el eje del proyectil. La dependencia de la fuerza de resistencia con el tiempo proviene de que tanto U como β dependen del tiempo (con condiciones iniciales $U(t=0) = -V$ y $\beta(t=0) = \alpha$). La presión atmosférica p_a no aparece puesto que es una presión uniforme que lógicamente no afecta a \vec{F}_r [si uno hace el cambio $p' = p - p_a$ en (11.40)-(11.43), desaparece el parámetro p_a del problema].

Si aplicamos el Teorema II a la expresión anterior, los parámetros adimensionales que aparecen (aparte de los que provienen de las condiciones de contorno) deben de estar relacionados con algunos de los definidos en la sección 11.2, ya que éstos provenían de adimensionalizar las ecuaciones del movimiento. En particular, si elegimos ρ , U y L como magnitudes dimensionalmente independientes, se tiene

$$\frac{\vec{F}_r}{\rho U^2 L^2} = \vec{f}\left(\frac{\mu}{\rho UL}, \frac{gL}{U^2}, \frac{tU}{L}, \frac{c}{L}, \beta\right) \quad , \quad (11.45)$$

es decir,

$$\vec{F}_r = \rho U^2 L^2 \vec{f}(Re, Fr, St, c/L, \beta) \quad . \quad (11.46)$$

Esta dependencia se puede simplificar bastante más en la mayoría de las situaciones. Para empezar, el número de Strouhal suele ser muy pequeño, ya que el tiempo que tarda el aire en *pasar* por el proyectil, U/L , suele ser mucho menor que el tiempo característico de variación de las condiciones de contorno [$U(t)$ y $\beta(t)$], que es del orden del *tiempo de vuelo* del proyectil, t_F ; es decir $St = (L/U)/t_F \ll 1$. Por ejemplo, supongamos que la velocidad típica del proyectil es $100m/s$ y su longitud $10cm$; el tiempo de residencia sería del orden de $10^{-3}s$, que, evidentemente es mucho menor que el tiempo de vuelo del proyectil, y el problema se puede considerar casi estacionario. Por otro lado, el número de Froude, $Fr = U^2/gL$, suele ser muy grande: con los valores anteriores para U y L resulta $Fr = 10^4$. Esto quiere decir que la gravedad tiene muy poca influencia en el movimiento del aire alrededor del proyectil, lo cual es lógico debido a su pequeño tamaño [por supuesto, la gravedad si influye en el movimiento del proyectil, pero no a través de \vec{F}_r , sino actuando sobre la

masa del proyectil según la ecuación (11.37)]; para que las fuerzas gravitatorias fuesen importantes en el movimiento del aire alrededor del proyectil, el tamaño de éste debería ser del orden de $L \sim U^2/g$ ($\sim 1000m$ si $U = 100m/s$). Por último, en cuanto al número de Reynolds, su valor suele ser muy alto: tomando $\nu \simeq 10^{-5}$ (aire a temperatura ambiente), $Re = UL/\nu \simeq 10^6$. Por tanto, en este problema,

$$\vec{F}_r \simeq \rho U^2 L^2 \vec{f}(c/L, \beta) \quad , \quad (11.47)$$

puesto que al ser St , Fr y Re o bien muy grandes, o bien muy pequeños, su influencia en el problema es despreciable [en otras palabras, desarrollamos la función \vec{f} en potencias de $Re^{-1} \ll 1$, $Fr^{-1} \ll 1$ y $St \ll 1$, y nos quedamos con el orden más bajo]. La fuerza de resistencia es pues, en estas condiciones, cuadrática con la velocidad, siendo la constante de proporcionalidad ρL^2 multiplicado por una cierta función que sólo depende de las características geométricas del problema, que se puede determinar experimentalmente. Obsérvese que la dependencia temporal ha desaparecido de forma explícita, aunque aparece a través de $U(t)$ y $\beta(t)$ (por ello se denomina *casi estacionario*; en las ecuaciones desaparece el término $\partial \vec{v}/\partial t$, pero el tiempo sigue apareciendo en las condiciones de contorno).

Abordemos ahora el problema del alcance del proyectil X . Una vez simplificada la expresión para \vec{F}_r , este problema se puede resolver analíticamente sin más que sustituir la expresión (11.47) (determinando previamente la función \vec{f} para una forma de proyectil dada mediante una serie de experimentos) en (11.37)-(11.39). Sin embargo, continuando con nuestro análisis dimensional, X depende de las siguientes magnitudes físicas:

$$X = X(m, V, g, \alpha, \rho, \mu, L, c) \quad . \quad (11.48)$$

El tiempo no aparece explícitamente porque, aunque \vec{F}_r dependa del tiempo, X es una longitud que proviene de la integración de (11.37) imponiendo la condición $z = 0$, la cual se verifica en un tiempo t_F que depende de las mismas variables que X . Por la misma razón no aparecen $U(t)$ ni $\beta(t)$ [- $U(0) = V$ y $\beta(0) = \alpha$ sí que influyen en X]. Al aplicar el Teorema II a (11.48), en buena lógica deberían aparecer los parámetros que teníamos en el ejemplo anterior más los que aparecieron al adimensionalizar la fuerza de resistencia. Sin embargo, la elección de ρ , U y L como variables dimensionalmente independientes, aunque es apropiada para adimensionalizar \vec{F}_r , ya que éstas son las magnitudes que caracterizan el movimiento del aire alrededor del proyectil, no es muy afortunada para adimensionalizar (11.48) puesto que los parámetros

adimensionales resultantes serían o muy pequeños o muy grandes (por ejemplo, X/L es muy grande), y no serían relevantes en el movimiento *global* del proyectil. Por ello utilizamos m , g y V como magnitudes dimensionalmente independientes, como se hizo en el ejemplo anterior, elección que nos permitirá, además, averiguar más fácilmente las condiciones para que la aproximación de resistencia nula hecha en el ejemplo anterior sea válida. Aplicando el Teorema II se tiene:

$$\frac{Xg}{V^2} = f \left(\alpha, \frac{\rho V^6}{mg^3}, \frac{\mu V^3}{mg^2}, \frac{Lg}{V^2}, \frac{cg}{V^2} \right) \quad (11.49)$$

Claramente, Lg/V^2 y cg/V^2 son siempre muy pequeños, puesto que $X \sim V^2/g$ y $X \gg L$, $X \gg c$. Por otro lado, $\rho V^6/mg^3$, cuyo inverso nos da una idea de la influencia de la gravedad en la fuerza de resistencia, es siempre muy grande (por las razones que se discutieron anteriormente): si el proyectil pesa $1kg$ y se mueve en aire con $V = 100m/s$, $\rho V^6/mg^3 = 10^9$, que es gigantescamente grande. Por tanto, la expresión anterior queda

$$X \simeq \frac{V^2}{g} f \left(\alpha, \frac{\mu V^3}{mg^2} \right) \quad (11.50)$$

donde sólo aparece un parámetro adicional en relación a (11.33), $\mu V^3/mg^3$, que mide la influencia de la viscosidad en la resistencia del aire sobre el proyectil. Por tanto, para que la resistencia aerodinámica sea despreciable y el resultado del ejemplo anterior sea (aproximadamente) válido se debe cumplir que $\mu V^3/mg^2 \ll 1$. Para los valores numéricos dados anteriormente (junto con $\mu \simeq 10^{-5}kg/ms$), se tiene $\mu V^3/mg^2 \simeq 0,1$, que no es excesivamente pequeño [con estos valores numéricos los errores de (11.33) son pues alrededor del diez por ciento; si hubiésemos tomado $m = 0,1kg$, los errores serían del cien por cien].

Resumiendo, de este par de ejemplos podemos sacar las conclusiones siguientes: (a) El análisis dimensional permite reducir de una manera eficiente el número de magnitudes físicas de las que depende un problema físico [compare las ecuaciones (11.48) y (11.50), donde se ha reducido de 9 variables de las que dependía X a sólo dos de las que realmente depende Xg/V^2]. Esta reducción es particularmente importante a la hora de realizar experimentos. (b) El análisis dimensional permite conocer con rigor cuándo una determinada magnitud física no tiene influencia apreciable en un problema, y estimar el orden de magnitud del error que se comete al despreciar la influencia de esa magnitud. (c) Aunque la aplicación del Teorema II, o la adimensionalización directa de las ecuaciones, sigue un procedimiento estándar, la *buena elección*

de las magnitudes con las cuales se adimensionaliza (magnitudes dimensionalmente independientes) es fundamental para obtener resultados óptimos, y aquí es importante algún conocimiento físico previo del problema por parte de quien lo resuelve.

Referencias.

- G.I. BARENBLATT, 1996. Capítulos 0 y 1.
- R.A. GRANGER, 1995. Capítulo 7.
- J. PALACIOS, 1964.
- J. A. ROBERSON y C. T. CROWE, 1997. Capítulo 8.
- L. J. SEDOV, 1959.
- F. M. WHITE, 1983. Capítulo 5.
- J. ZIEREP, 1971.

Parte IV

FLUIDOSTÁTICA

Capítulo 12

Fluidostática

12.1. Ecuaciones generales

Las soluciones más sencillas, en principio, de las ecuaciones de Navier-Stokes (10.1)-(10.7) son aquellas correspondientes a un fluido en reposo ($\vec{v} = 0$), o soluciones fluidostáticas. Si en algún sistema de referencia (inercial o no) $\vec{v} = 0$, esas ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (12.1)$$

$$-\nabla p + \rho \vec{f}_m = 0, \quad (12.2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla T) + Q_r, \quad (12.3)$$

$$e = e(T, p) \quad , \quad p = p(\rho, T) \quad , \quad K = K(T). \quad (12.4)$$

La ecuación de continuidad nos dice que, si el fluido está en reposo, la densidad sólo puede ser función de la posición. La ecuación de cantidad de movimiento es un balance entre las fuerzas de presión y las fuerzas másicas. Estas últimas son, en ausencia de campos eléctricos o magnéticos, suma de las fuerzas gravitatorias y de las fuerzas de inercia debidas al movimiento del sistema de referencia en el caso de que éste no sea inercial [ecuación (7.3)]:

$$\vec{f}_m = \vec{g} - \vec{a}_o - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}), \quad (12.5)$$

donde las fuerzas de Coriolis no aparecen debido a que $\vec{v} = 0$. La ecuación de la energía es un balance entre la conducción de calor, la variación local de la energía interna y el calor por radiación, siendo similar a la ecuación de

la energía interna para un *sólido*. Si c_v y K fuesen constantes y $Q_r = 0$, esta ecuación sería la *ecuación del calor* (10.13). Por último las condiciones iniciales y de contorno deben ser compatibles con $\vec{v} = 0$.

12.2. Condiciones de equilibrio

La ecuación (12.2) establece que las fuerzas másicas por unidad de volumen, $\rho \vec{f}_m$, derivan de un potencial, siendo éste igual a $-p$. Por tanto, no toda fuerza másica es compatible con un fluido en reposo. La condición que deben verificar estas fuerzas se obtienen sin más que tomar el rotacional de (12.2):

$$\nabla \wedge (\rho \vec{f}_m) = \rho \nabla \wedge \vec{f}_m + \nabla \rho \wedge \vec{f}_m = 0 \quad . \quad (12.6)$$

Multiplicando escalarmente por \vec{f}_m , se tiene la condición general para \vec{f}_m :

$$\vec{f}_m \cdot \nabla \wedge \vec{f}_m = 0. \quad (12.7)$$

Una condición suficiente para que esta relación se satisfaga es que \vec{f}_m derive de un potencial.¹ Ciñéndonos a esta condición y a las fuerzas másicas (12.5), se debe verificar que la velocidad angular del sistema de referencia sea independiente del tiempo, siendo el potencial de fuerzas másicas

$$\vec{f}_m = -\nabla U \quad , \quad U = -\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{a}_o \cdot \vec{x} - (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^2/2. \quad (12.8)$$

Por supuesto, \vec{a}_o y $\vec{\Omega}$ son independientes de la posición y, aunque $\vec{\Omega}$ no puede depender del tiempo para que \vec{f}_m derive de un potencial, ya que el término $d\vec{\Omega}/dt \wedge \vec{x}$ no se puede escribir como un gradiente, \vec{a}_o es, en general, una función del tiempo. La comprobación del último término de U en la expresión anterior es inmediata si se hace uso de (1.42).

La ecuación (12.7) es la condición general que deben verificar las fuerzas másicas para que pueda existir **equilibrio mecánico** ($\vec{v} = 0$) en un fluido. Sin embargo, un fluido puede estar en equilibrio mecánico sin que exista **equilibrio térmico**, siempre que la distribución de temperaturas satisfaga la ecuación (12.3) y la densidad no varíe con el tiempo. Pero esto no es suficiente, puesto que la solución de las ecuaciones (12.1)-(12.4) puede ser **inestable**. Es decir, aunque las distribuciones de ρ , p y T satisfagan (12.1)-(12.4) junto con

¹Un campo vectorial que verifique la condición (12.7) se suele denominar *complejo lamellar* (ver, por ejemplo, R. Aris, 1989, capítulo 3). En dicha referencia se demuestra que si se cumple (12.7), existen dos campos escalares φ_1 y φ_2 tales que $\vec{f}_m = \varphi_1 \nabla \varphi_2$. Por tanto, la condición que \vec{f}_m derive de un potencial es un caso particular correspondiente a $\varphi_1 = \text{constante}$.

condiciones de contorno e iniciales compatibles, es necesario que estas distribuciones cumplan ciertos requisitos adicionales para que sean estables, ya que si el equilibrio fuese inestable aparecerían corrientes ($\vec{v} \neq 0$) que tenderían a uniformizar la temperatura (a equilibrar térmicamente el fluido). Por tanto, el estudio de la estabilidad de las soluciones fluidostáticas es esencial cuando el equilibrio mecánico no esté emparejado con un equilibrio térmico. El problema de la estabilidad será abordado en el capítulo 30.

Sustituyendo (12.8) en la ecuación de cantidad de movimiento (12.2) se tiene

$$\nabla p + \rho \nabla U = 0. \quad (12.9)$$

Esta expresión establece que las superficies equipotenciales en un fluido en reposo son también superficies isobaras. Además, estas superficies son también de densidad constante, puesto que $\rho = -(\partial p / \partial U)_t$. Otra consecuencia es que **un fluido en reposo es barótopo**: de (12.9) se tiene $p = p(U, t)$, y de la relación anterior para la densidad, $\rho = \rho(U, t)$ [pero la dependencia $U(t)$ debe ser tal que $\rho \neq \rho(t)$]; por tanto, $p = p(\rho, t)$, es decir, $\nabla \rho$ y ∇p son paralelos y su producto vectorial es nulo. Físicamente, si el fluido no fuese barótopo, las fuerzas de presión producirían un par distinto de cero que originaría vorticidad en el fluido, dejando de estar en reposo [término de Bjerkness, ver sección 7.6]. En términos de la función de barotropía (7.55), la ecuación (12.9) se escribe:

$$\nabla(w + U) = 0, \quad w + U = C(t), \quad (12.10)$$

donde $C(t)$ es una *constante* de integración que en general depende del tiempo y que viene fijada por las condiciones de contorno.

12.3. Hidrostática

En el caso de un líquido ($\rho = \text{constante}$; en general fluido incompresible), la ecuación anterior queda

$$p + \rho U = C(t). \quad (12.11)$$

Si la única fuerza másica presente es la gravitatoria, $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, la distribución de presiones hidrostática es:

$$p + \rho g z = \text{constante}. \quad (12.12)$$

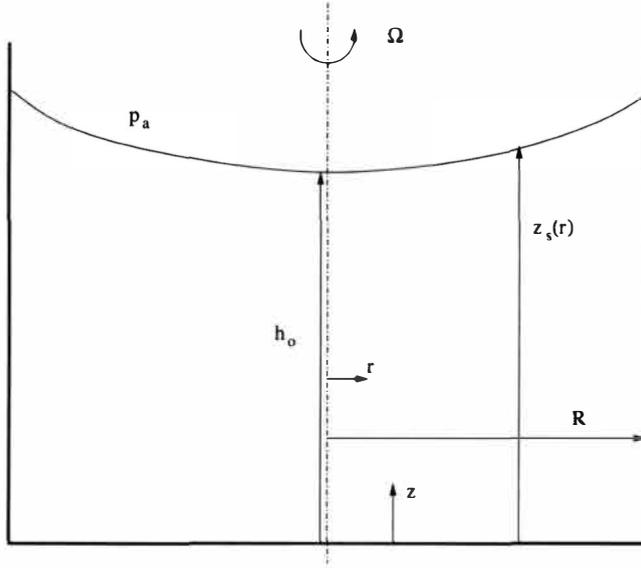


Figura 12.1: Equilibrio mecánico de un líquido en un recipiente que gira.

Así, por ejemplo, la presión en el interior de un depósito con una altura H de líquido y abierto a la atmósfera sería $p = p_a + \rho g(H - z)$, donde p_a es la presión atmosférica y z se mide desde el fondo del depósito.

Si el depósito fuese cilíndrico (de radio R) y girase con velocidad angular constante Ω alrededor de su eje de simetría, transcurrido un tiempo suficiente para que el líquido adquiriera un movimiento solidario con el recipiente, la distribución de presión de equilibrio en un sistema de referencia que se mueva con el recipiente sería, de acuerdo con (12.11) y (12.8):

$$p + \rho g z - \rho \Omega^2 r^2 / 2 = \text{constante} = p_a + \rho g z_s(r) - \rho \Omega^2 r^2 / 2, \quad (12.13)$$

donde la constante se ha evaluado en la superficie libre del líquido $z_s(r)$ (ver figura 12.1). Es decir,

$$p = p_a + \rho g [z_s(r) - z]. \quad (12.14)$$

Aplicando (12.13) al punto de la superficie libre en el eje ($z = h_0$, $r = 0$), se tiene

$$p_a + \rho g h_0 = p_a + \rho g z_s(r) - \rho \Omega^2 r^2 / 2, \quad (12.15)$$

que proporciona la ecuación de la superficie libre en función de h_0 :

$$z_s(r) = h_o + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{g} r^2 \quad (12.16)$$

La constante h_o se obtiene a partir del volumen V del líquido:

$$V = \int_0^R dr 2\pi r z_s(r) = \pi R^2 h_o \left(1 + \frac{\Omega^2 R^2}{4gh_o} \right) \quad , \quad h_o = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} \quad (12.17)$$

12.4. Fuerza sobre un cuerpo sumergido. Principio de Arquímedes

Consideremos un cuerpo sólido de volumen V y superficie S sumergido en un fluido en equilibrio mecánico. La fuerza (de presión) que el líquido ejerce sobre la superficie del sólido es:

$$\vec{F} = - \int_S p \vec{n} ds = - \int_V \nabla p dV = - \int_V \rho \vec{f}_m dV \quad , \quad (12.18)$$

donde se ha aplicado el Teorema de Gauss y se ha hecho uso de (12.2). La fuerza está dirigida en sentido opuesto a las fuerzas másicas. Suponiendo que las fuerzas másicas son exclusivamente gravitatorias, se tiene

$$\vec{F} = g \vec{e}_z \int_V \rho dV = g M \vec{e}_z \quad , \quad M \equiv \int_V \rho dV \quad ; \quad (12.19)$$

es decir, un cuerpo sumergido en un fluido en reposo está sometido a una fuerza (*empuje*) que es igual al peso del fluido que *desaloja* el cuerpo, en sentido opuesto a la acción de la gravedad (**Principio de Arquímedes**). En el caso de un líquido, $M = \rho V$. Para que el cuerpo permanezca en reposo (y, por tanto, el fluido), esta fuerza debe estar equilibrada con el peso del mismo. Además, el momento de las fuerzas de presión que el fluido ejerce sobre el cuerpo debe estar también equilibrado. Este momento, en relación a un punto fijo \vec{x}_o , vale

$$\begin{aligned} \vec{M} &= - \int_S p \vec{n} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) ds = - \int_V \nabla \wedge [p(\vec{x} - \vec{x}_o)] dV \\ &= - \int_V \nabla p \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) dV = - \int_V \rho \vec{f}_m \wedge (\vec{x} - \vec{x}_o) dV \quad . \end{aligned} \quad (12.20)$$

Si $\vec{f}_m = -g \vec{e}_z$,

$$\vec{M} = g\vec{e}_z \wedge \int_V \rho(\vec{x} - \vec{x}_o) dV = gM\vec{e}_z \wedge (\vec{x}_{cm} - \vec{x}_o) \quad , \quad (12.21)$$

donde \vec{x}_{cm} es el centro de masa del cuerpo sumergido si su volumen lo ocupase el fluido que desaloja. Este momento debe estar equilibrado con el momento del peso del sólido (que está aplicado en su centro de masa) con respecto a \vec{x}_o para que el cuerpo permanezca en reposo.

12.5. Equilibrio de gases. Atmósfera estándar

En el caso de un gas ideal bajo la acción de la gravedad, la ecuación (12.10) se puede escribir:

$$U + w = gz + \int^p \frac{dp}{\rho} = gz + R_g \int^p T \frac{dp}{p} = \text{constante.} \quad (12.22)$$

Como p , ρ y T sólo dependen de z , es más fácil utilizar la forma original de la ecuación de cantidad de movimiento (es decir, derivar con respecto a z la ecuación anterior):

$$g + \frac{R_g T}{p} \frac{dp}{dz} = 0 \quad , \quad (12.23)$$

que integrada proporciona

$$\frac{p}{p_o} = \exp \left[-\frac{g}{R_g} \int_0^z \frac{dz}{T(z)} \right] . \quad (12.24)$$

Luego para conocer la distribución de presión en equilibrio mecánico se debe conocer la distribución de temperatura, la cual debe satisfacer la ecuación (12.3) junto con condiciones de contorno apropiadas.

Un ejemplo típico lo constituye el aire de la atmósfera supuesto en reposo. En sus capas más cercanas al suelo el aire se calienta, principalmente por conducción de calor desde suelo y, en menor medida, por radiación solar directa, aunque esta última es más importante en las capas altas de la atmósfera. Para los cálculos fluidostáticos, sin embargo, no se suele resolver la ecuación (12.3) para la temperatura, sino que se supone una distribución $T(z)$ obtenida experimentalmente, siendo la correspondiente a la denominada *atmósfera estándar* la representada en la figura 12.2.

Desde un punto de vista práctico, la capa más importante es la *troposfera* o capa más cercana al suelo, donde se supone que, en primera aproximación, el perfil de temperatura es lineal:

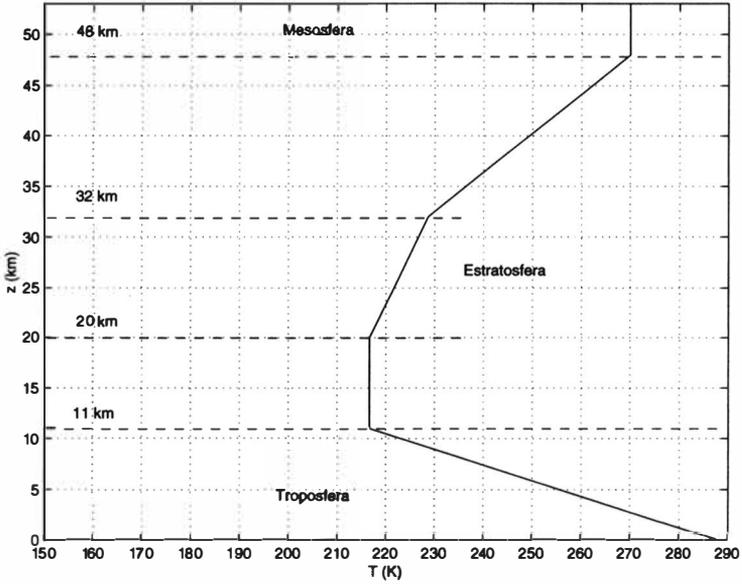


Figura 12.2: Distribución de temperatura en la atmósfera estándar.

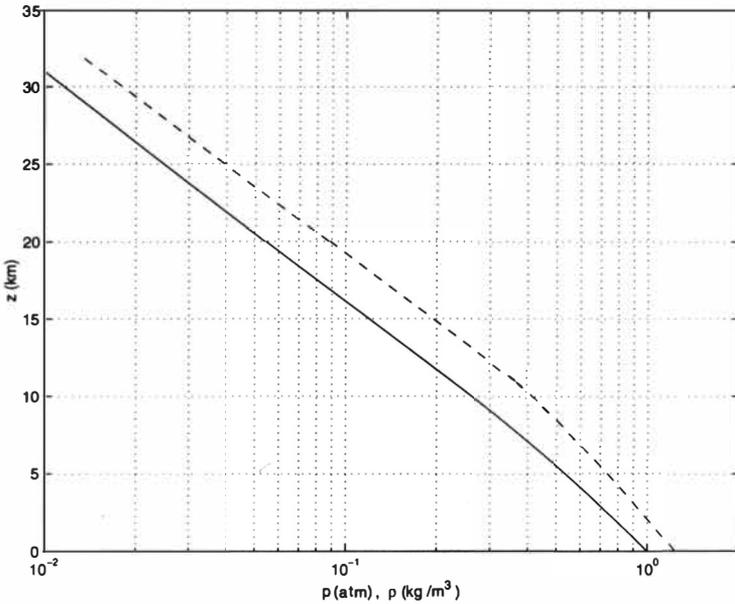


Figura 12.3: Distribución de presión (línea continua) y densidad (línea discontinua) en la atmósfera estándar.

$$T = T_o - \alpha z \quad , \quad (12.25)$$

siendo $T_o = 288K$ y $\alpha = 6,5K/km$ en la atmósfera estándar. Sustituyendo en (12.24), se tiene la distribución de presiones

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o} \right)^{g/\alpha R_g} ; \quad (12.26)$$

y, de la ecuación de estado,

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o} \right)^{g/\alpha R_g - 1} , \quad (12.27)$$

siendo $p_o = 1atm$, $\rho_o = p_o/R_g T_o = 1,25kg/m^3$. De forma análoga se hallarían las distribuciones de presión y densidad en las restantes capas de la atmósfera estándar utilizando los perfiles de temperatura de la figura 12.2 (ver figura 12.3).

La expresión (12.27) proporciona un criterio *estático* de estabilidad de la atmósfera: para que sea estable, la densidad debe disminuir con la altura, pues en caso contrario las fuerzas de *flotabilidad* originarían un movimiento vertical; es decir,

$$\frac{g}{\alpha R_g} - 1 > 0 \quad \text{o} \quad \alpha < \frac{g}{R_g} \simeq 34,9K/km \quad . \quad (12.28)$$

Este criterio *no* es una condición suficiente para que la atmósfera sea estable, ya que si fuese así, la atmósfera estándar sería siempre estable, lo cual, evidentemente, no es cierto. El estudio de la estabilidad de la atmósfera requiere considerar la estabilidad *dinámica*, o estabilidad frente a pequeñas perturbaciones de la distribución de equilibrio anterior (ver capítulo 30), perturbaciones que siempre están presentes en la atmósfera. De todas formas, el criterio anterior nos da una idea del grado de estabilidad de la atmósfera: cuanto más pequeña sea la constante α , más estable será. Por ejemplo, en condiciones de *inversión térmica* ($\alpha < 0$), lo cual ocurre a veces en las proximidades del suelo en ciertos núcleos urbanos donde los niveles de contaminación son muy altos, la atmósfera se hace muy estable, con lo que los gases contaminantes permanecen *anclados* en la ciudad. Otro ejemplo significativo de estabilidad lo constituye la *estratosfera*, donde α es marcadamente negativo (ver figura 12.2), siendo, por tanto, extraordinariamente estable, y de ahí su nombre: el aire de la estratosfera está estratificado, sin apenas mezcla de unas capas con otras (ésta se produce casi exclusivamente por difusión, no por convección).

Por ello es tan peligroso que algunos agentes contaminantes lleguen a la estratosfera.

Referencias.

- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo I.
- J.M.WALLACE y P.V. HOBBS, 1977. Capítulo 1.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 2.

Capítulo 13

Tensión superficial

13.1. Introducción

En esta lección nos vamos a ocupar de la fluidostática de sistemas en los que existen superficies de separación entre fluidos inmiscibles.

Realmente, entre dos fluidos inmiscibles, por ejemplo, entre un líquido y un gas, o entre dos líquidos inmiscibles, existe una capa de transición de espesor finito, pero suele ser tan delgada que se puede considerar como una superficie. El hecho experimental es que esta *superficie* de separación tiende a tomar una forma especial; por ejemplo, un gas en el seno de un líquido tiende a formar, en equilibrio, burbujas esféricas; análogamente, un líquido en el seno de un gas tiende a formar gotas esféricas. Desde un punto de vista termodinámico se puede postular que existe una energía (libre) asociada a la superficie de separación de tal forma que hace falta realizar un trabajo para aumentar dicha superficie, puesto que, en equilibrio, la superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles tiende a ser mínima. A esta energía libre, por unidad de área, la designamos por σ , que es una función de estado del sistema. Así, la energía libre total de un sistema en equilibrio constituido por dos fluidos inmiscibles, 1 y 2, sería $\rho_1 V_1 f_1 + \rho_2 V_2 f_2 + \sigma A$, donde las f_i son las energías libres por unidad de masa de cada uno de los fluidos con densidades ρ_i y volúmenes V_i , y A es la superficie de separación o *interfaz*. Por definición de energía libre, el trabajo isoterma y reversible necesario para incrementar el área de la interfaz en una cantidad δA sería $\sigma \delta A$ (de igual modo, el trabajo necesario para aumentar el volumen del sistema en $\delta V_1 + \delta V_2$ sería $\rho_1 f_1 \delta V_1 + \rho_2 f_2 \delta V_2$).

De una forma alternativa, la interfaz entre dos fluidos inmiscibles se comporta como si fuera una *membrana* en tensión (tensión que sería uniforme en toda la superficie para un sistema en equilibrio), siendo esta *tensión superficial*

σ (definida como una fuerza por unidad de longitud) una propiedad de los dos fluidos en contacto y de la temperatura. La equivalencia entre esta tensión superficial y la energía libre definida anteriormente es inmediata, puesto que para aumentar la interfaz en un área $\delta A = \delta l_1 \delta l_2$, donde l_1 e l_2 son longitudes curvilíneas definidas sobre la superficie, hay que aplicar una fuerza, por ejemplo en la dirección de l_1 , de valor $\sigma \delta l_2$, con lo que el trabajo necesario sería $\sigma \delta l_1 \delta l_2 = \sigma \delta A$, que es la energía libre asociada a ese aumento de área.

La tensión superficial tiene su origen en las fuerzas de cohesión intermoleculares. Una molécula en el *interior* de un fluido se ve afectada por las fuerzas de cohesión de las moléculas que se encuentran a su alrededor, siendo la energía libre asociada independiente de la posición (en equilibrio). Una molécula en las proximidades de la interfaz, a distancias menores que el rango de acción de las fuerzas de cohesión intermolecular, no tiene compensadas las fuerzas de cohesión a un lado y otro de la superficie (decimos superficie porque el rango de las fuerzas de cohesión es muy pequeño, del orden de $10^{-9}m$), creándose un estado tensional que, idealmente, se asocia a la interfaz como si tuviese entidad física real.¹ En equilibrio, esta tensión superficial es uniforme ya que en todos los elementos de la superficie el *desfase* en la cohesión molecular es el mismo. Si uno de los fluidos es un gas y el otro un líquido, las fuerzas de cohesión molecular por parte del gas son despreciables comparadas con las del líquido, por lo que las moléculas del líquido cercanas a la interfaz se ven fuertemente atraídas hacia el interior del líquido y la interfaz tiende a ser la menor posible (en equilibrio, gotas y burbujas esféricas). En estos casos la tensión superficial es positiva, ya que se necesita realizar un trabajo para aumentar el área de la interfaz. En el caso de dos líquidos, la tensión superficial puede ser positiva o negativa. Si es negativa, los líquidos son *miscibles*, ya que la interfaz aumenta espontáneamente.

Como se dijo anteriormente, la tensión superficial depende de la naturaleza de los fluidos en contacto y del estado termodinámico de la interfaz, fundamentalmente de la temperatura, disminuyendo cuando ésta aumenta. También se ve afectada por los cambios de concentración, en el caso de soluciones, y por la presencia de campos electromagnéticos. Hay sustancias (denominadas sustancias capilar o superficialmente activas) que añadidas en cantidades muy pequeñas, disminuyen notablemente la tensión superficial. Ejemplos son los alcoholes superiores y los jabones, que añadidos al agua en proporciones muy pequeñas disminuyen drásticamente su tensión superficial. Estas sustancias se

¹Es como si existiese una *membrana* delgadísima en la interfaz de separación entre dos fluidos inmiscibles sometida a una tensión superficial σ . De hecho, algunos insectos caminan sobre la superficie del agua.

distribuyen en el estrato superficial en concentración mayor que en el resto del líquido, y las disoluciones acuosas de estas sustancias forman fácilmente espuma (mayor superficie) y tienen un mayor poder *mojante*.

La tensión superficial se determina mediante diversos procedimientos, siendo el más sencillo el que se basa en la elevación capilar, consistente en medir la fuerza necesaria para elevar una placa o un anillo metálico parcialmente sumergido, y relacionarla con el aumento de superficie producido. Algunos valores de la tensión superficial de algunos líquidos en contacto con aire, a $20^{\circ}C$, son los siguientes (en *dinas/cm*): agua, 72.75; alcohol metílico, 22.61; alcohol etílico, 22.27; acetona, 23.70; éter, 17.0; glicerina, 63.4; mercurio, 466.0. A $0^{\circ}C$ la tensión superficial aire-agua es 75.7, mientras que a $40^{\circ}C$ es 69.6.

13.2. Equilibrio en la interfaz

El equilibrio termodinámico de la interfaz de separación de dos fluidos inmiscibles requiere equilibrio térmico y mecánico. El equilibrio térmico exige que a ambos lados de la superficie las temperaturas y los flujos de calor sean iguales [véase ecuación (10.41)]:

$$T_1 = T_2 \quad , \quad K_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \quad , \quad (13.1)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan los fluidos a uno y otro lado de la interfaz, y \vec{n} es la dirección normal a la misma.

El equilibrio dinámico exige igualdad de las velocidades de los dos fluidos en la interfaz y, si no existiese tensión superficial, igualdad de esfuerzos [ecuación (10.40)]. La existencia de tensión superficial produce un *salto* entre los esfuerzos a ambos lados de la superficie que equilibra la tensión superficial. Para obtener esta relación entre esfuerzos y tensión superficial, consideremos un elemento de interfaz de área δS que separa dos fluidos inmiscibles, 1 y 2, como se esquematiza en la figura 13.1. Si $d\vec{l}$ es el vector de longitud dl tangente al borde δL de δS y \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie dirigido desde el fluido 1 hacia el 2, la fuerza de tensión superficial en cada punto del borde δL tiene una dirección perpendicular tanto a $d\vec{l}$ como a \vec{n} , es decir, está orientada según la dirección $d\vec{l} \wedge \vec{n}$. Por tanto, la fuerza de tensión superficial que actúa sobre el borde de δS viene dada por

$$\oint_{\delta L} d\vec{l} \wedge \vec{n}\sigma = \int_{\delta S} (d\vec{s} \wedge \nabla) \wedge (\vec{n}\sigma) = \int_{\delta S} ds(\vec{n} \wedge \nabla) \wedge (\vec{n}\sigma) \quad , \quad (13.2)$$

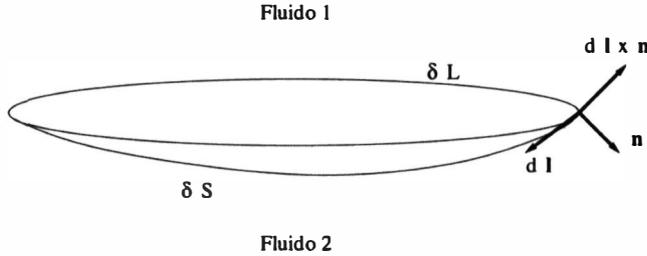


Figura 13.1: Equilibrio mecánico en la interfaz.

donde la tensión superficial σ no es constante, en general, y por ello se ha mantenido dentro de la integral, y se ha hecho uso del teorema de Stokes (1.69). Desarrollando el doble producto vectorial, (13.2) se escribe

$$\int_{\delta S} ds[\nabla(\vec{n}\sigma) \cdot \vec{n} - \vec{n}\nabla \cdot (\vec{n}\sigma)] = \int_{\delta S} ds[\nabla\sigma - \vec{n}\vec{n} \cdot \nabla\sigma] - \int_{\delta S} ds\vec{n}\sigma\nabla \cdot \vec{n}, \quad (13.3)$$

donde se ha tenido en cuenta que $(\nabla\vec{n}) \cdot \vec{n} = \nabla n^2/2$ y $n^2 = 1$. Esta fuerza tiene que ser igual a la diferencia de las fuerzas que cada fluido ejerce sobre la superficie:

$$\int_{\delta S} ds[\bar{\tau}_2 \cdot \vec{n} - \bar{\tau}_1 \cdot \vec{n}] = \int_{\delta S} ds\nabla_s\sigma - \int_{\delta S} ds\vec{n}\sigma\nabla \cdot \vec{n}. \quad (13.4)$$

En esta expresión, $\nabla_s\sigma \equiv \nabla\sigma - \vec{n}\vec{n} \cdot \nabla\sigma$ es la proyección de $\nabla\sigma$ sobre la superficie, es decir, el gradiente bidimensional de σ sobre la interfaz. Como esta ecuación se cumple para cualquier elemento de superficie δS , la igualdad se verifica también en la forma diferencial de los integrandos. Proyectando en las direcciones normal y tangente a la superficie, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales para el equilibrio de esfuerzos en la superficie de separación entre dos fluidos inmiscibles cuando se tiene en cuenta la tensión superficial, que sustituyen a las dos últimas ecuaciones escritas en (10.40):

$$\vec{n} \cdot (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1) \cdot \vec{n} = -\sigma\nabla \cdot \vec{n}, \quad (13.5)$$

$$[\bar{\tau}_2 \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \bar{\tau}_2 \cdot \vec{n})\vec{n}] - [\bar{\tau}_1 \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \bar{\tau}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}] = \nabla_s\sigma. \quad (13.6)$$

Obsérvese que todas las cantidades anteriores son funciones de la posición sobre la interfaz y, en general, del tiempo. La magnitud $-\nabla \cdot \vec{n}$ es la **curvatura** local de la superficie (ver sección siguiente). Por tanto, la ecuación (13.5) nos dice que si la interfaz no es plana, los esfuerzos normales a ambos

lados son distintos, siendo el coeficiente de proporcionalidad entre curvatura y diferencia de esfuerzos la tensión superficial. La ecuación (13.6) nos dice que si la tensión superficial varía de un punto a otro de la superficie (por ejemplo, si la temperatura no es uniforme, o existe un gradiente de concentración, o la superficie tiene carga eléctrica distribuida no uniformemente), se produce una diferencia entre los esfuerzos tangenciales a ambos lados de la superficie, por lo que la interfaz tenderá a moverse (no hay equilibrio mecánico). Este conjunto de ecuaciones, junto con $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ y la condición que la interfaz es una superficie fluida [ecuación (10.39)], constituyen las condiciones de contorno de las ecuaciones de ambos fluidos inmiscibles sobre la interfaz, cuya posición se obtiene de la resolución del problema. Sin embargo, en esta lección nos vamos a limitar a situaciones en las que ambos fluidos y, por tanto, la interfaz, están en reposo (fluidostática).

13.3. Ecuación de Young-Laplace

En el caso en que los fluidos a ambos lados de la superficie estén en equilibrio mecánico ($\vec{v}_i = 0, i = 1, 2$), se tiene $\bar{\tau}_i = -p\bar{I}$, por lo que la ecuación (13.6) nos dice que la tensión superficial debe ser uniforme en toda la superficie, y la ecuación (13.5) se reduce a

$$p_1 - p_2 = -\sigma \nabla \cdot \vec{n}, \tag{13.7}$$

que es la llamada ecuación de Young-Laplace. Ésta es una ecuación diferencial que nos proporciona la forma de la interfaz, conocidas las presiones p_1 y p_2 y la tensión superficial σ . Por ejemplo, si la superficie $S(\vec{x}) = 0$ viene dada, en coordenadas cartesianas, por $z = z_s(x, y)$ [es decir, $S(x, y, z) = z - z_s(x, y)$], el vector unitario \vec{n} sería

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\left(-\frac{\partial z_s}{\partial x}, -\frac{\partial z_s}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}}, \tag{13.8}$$

y la curvatura

$$-\nabla \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial z_s}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\frac{\partial z_s}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_s}{\partial y}\right)^2}} \right] \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{13.9}$$

R_1 y R_2 son los radios de curvatura en las direcciones x e y , respectivamente. De acuerdo con esto, es habitual escribir la ecuación de Young-Laplace (13.7) en la forma

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (13.10)$$

donde R_1 y R_2 son los dos radios de curvatura locales de la interfaz en cualquier sistema ortogonal de coordenadas que se utilice para definir la superficie, no necesariamente cartesiano. Esta forma tiene la ventaja de que, en algunas situaciones en las que se tiene una idea previa de cómo son los radios de curvatura, es más directo obtener una solución aproximada de la ecuación de Young-Laplace (véase más adelante).

Si uno de los radios de curvatura es infinito, por ejemplo, si la superficie es bidimensional y viene dada por $z = z_s(x)$, se tiene que $1/R_2 = 0$ y

$$\frac{1}{R_1} = \left(\frac{z'_s}{\sqrt{1 + z'^2_s}} \right)' = \frac{z''_s}{[1 + z'^2_s]^{3/2}}, \quad (13.11)$$

donde las primas significan d/dx . La ecuación de Young-Laplace se convierte así en una ecuación diferencial ordinaria para $z_s(x)$. Otro caso de interés es el de una interfaz axilsimétrica, que en coordenadas cilíndricas vendría dada por $z = z_s(r)$ o $S(r, \theta, z) \equiv z - z_s(r) = 0$. En este caso, el vector unitario \vec{n} sería

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{(-z'_s(r), 0, 1)}{\sqrt{1 + z'^2_s(r)}}, \quad (13.12)$$

y los dos radios de curvatura serían:

$$-\nabla \cdot \vec{n} = \frac{1}{r} \left(r \frac{z'_s}{\sqrt{1 + z'^2_s}} \right)' = \frac{z''_s}{(1 + z'^2_s)^{3/2}} + \frac{z'_s}{r\sqrt{1 + z'^2_s}} \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (13.13)$$

Como condiciones de contorno para resolver la ecuación de Young-Laplace, se suele imponer la condición de que los volúmenes de los fluidos son conocidos, condiciones de simetría y la imposición de ciertos ángulos que forma la interfaz en sus extremos, que suelen ser líneas a lo largo de las cuales tres fases están en contacto. Por ejemplo, una gota de líquido sobre una superficie sólida [ver figura 13.2(a)] forma un cierto **ángulo de contacto** entre la superficie del sólido y la interfaz líquido-aire. Este ángulo no puede ser cualquiera ya que el equilibrio en la línea de contacto proyectado sobre la superficie sólida exige

$$\sigma_{12} = \sigma_{31} + \sigma_{23} \cos \theta, \quad (13.14)$$

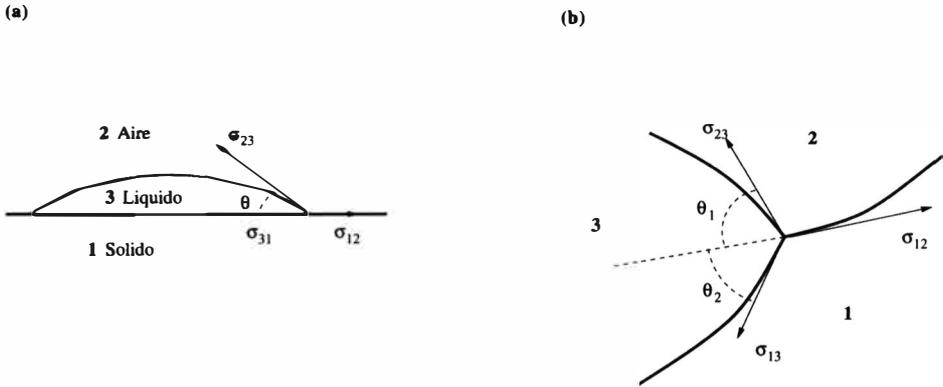


Figura 13.2: (a): Ángulo de contacto. (b): Contacto entre tres fluidos inmiscibles.

puesto que es una línea *inmaterial* (la componente normal a la superficie, $\sigma_{23} \sin \theta$, está equilibrada con la correspondiente reacción de la superficie sólida). Como σ_{31} y σ_{12} son difíciles de determinar, el ángulo de contacto se suele evaluar experimentalmente para cada terna líquido-gas-sólido. Si $\theta < \pi/2$, se dice que el líquido *moja* la superficie (como ocurre para agua-aire y la mayoría de los sólidos, como vidrio, metales, etc.); mientras que si $\theta > \pi/2$, el líquido no moja (como ocurre con el mercurio, cuyo ángulo de contacto es alrededor de 150° para muchos sólidos).

En el caso de una línea de contacto entre tres fluidos (por ejemplo, dos líquidos inmiscibles y aire), el equilibrio viene definido por dos ángulos de contacto (figura 13.2(b)). Si $|\sigma_{12}| > |\sigma_{23}| + |\sigma_{31}|$, como por ejemplo ocurre con algunos aceites minerales en agua en contacto con aire, la condición de equilibrio en la línea de contacto no se puede satisfacer, siendo el sistema inestable.

Cuando no existen campos de fuerzas externos, o el efecto de éstos es despreciable, las presiones fluidostáticas p_1 y p_2 son constantes y la ecuación de Young-Laplace nos dice que la curvatura es constante:

$$-\nabla \cdot \vec{n} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{constante.} \tag{13.15}$$

Si, además, la superficie es libre (en el sentido de que no está soportada a lo largo de ninguna curva de contacto con un sólido), la ecuación anterior nos dice que la superficie es una esfera, como ocurre, por ejemplo, para burbujas o gotas pequeñas. En el caso más general en que los campos de fuerzas sean importantes, la distribución de presión a cada lado de la superficie viene dada por la ecuación fluidostática (12.9). Por ejemplo, si como ocurre normalmente, las

únicas fuerzas másicas son las gravitatorias, y las densidades de ambos fluidos en contacto se pueden considerar constantes (al menos en las proximidades de la interfaz), se tiene que $p_i + \rho_i g z = p_{oi}$, donde p_{oi} , $i = 1, 2$ son constantes. Sustituyendo en la ecuación de Young-Laplace, se obtiene la siguiente ecuación diferencial que debe satisfacer la interfaz:

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (\rho_1 - \rho_2) g z = \text{constante.} \quad (13.16)$$

La importancia relativa de cada uno de los términos de esta ecuación viene dada por el parámetro adimensional

$$B \equiv \frac{|\rho_1 - \rho_2| g L^2}{\sigma}, \quad (13.17)$$

donde L es una longitud característica de la superficie, llamado **número de Bond**. Este número nos da una idea de la importancia relativa de las fuerzas gravitatorias frente a las fuerzas de tensión superficial o capilares. Si el número de Bond es muy pequeño, las fuerzas de tensión superficial son dominantes, y la ecuación (13.16) se reduce, en primera aproximación, a (13.15), siendo la interfaz aproximadamente esférica. Por el contrario, si el número de Bond es muy grande, las fuerzas gravitatorias son dominantes y la interfaz es aproximadamente plana ($z \simeq \text{constante}$). Que el número de Bond sea grande o pequeño viene condicionado, en gran medida, por las dimensiones del sistema (longitud característica L). Se denomina **longitud capilar** a la longitud en la cual las fuerzas de tensión superficial son importantes; es decir, la longitud para la que el número de Bond es de orden unidad:

$$L_c = \sqrt{\frac{\sigma}{|\rho_1 - \rho_2| g}}. \quad (13.18)$$

En el caso habitual en que uno de los fluidos (por ejemplo el 1) es aire y el otro es un líquido, se tiene que $\rho_1 \ll \rho_2$, y la longitud capilar viene dada por $L_c \simeq \sqrt{\sigma/\rho g}$, donde ρ es la densidad del líquido. Para agua-aire a 20°C $L_c = 0,272\text{cm}$. En la sección siguiente consideraremos algunos ejemplos significativos con $B \ll 1$ y con $B \gg 1$.

13.4. Ejemplos

13.4.1. Tubo sumergido en un líquido

Considérese un tubo sumergido en un líquido. Si el líquido moja la superficie del conducto ($\theta < \pi/2$), el líquido ascenderá por él debido a las fuerzas

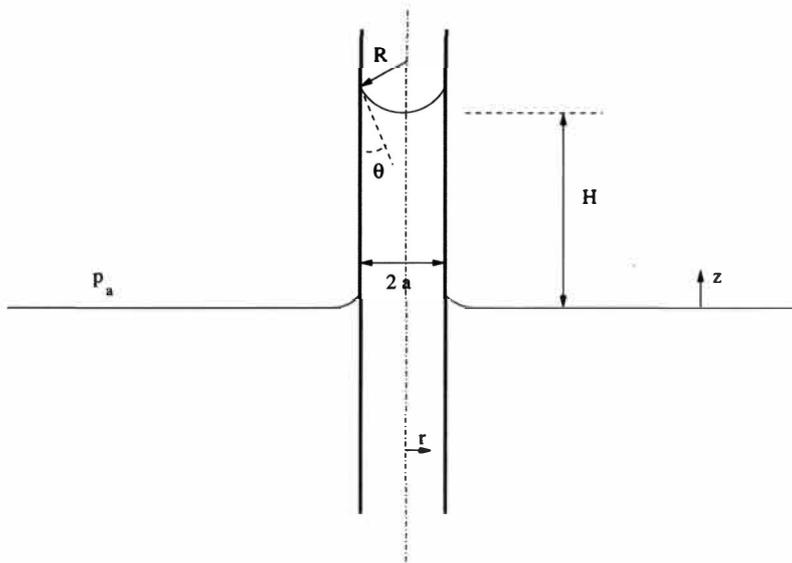


Figura 13.3: Ascensión de un líquido por un tubo capilar.

originadas por la tensión superficial (ver figura 13.3), mientras que si $\theta > \pi/2$, el líquido descenderá.

Si el conducto tiene de radio interior a , la ecuación y condiciones de contorno que gobiernan la forma de la superficie son [(13.7) junto con (13.13) y las condiciones de contorno de la figura 13.3]:

$$\rho g z_s = \sigma \frac{1}{r} \left(r \frac{z'_s}{\sqrt{1 + z_s'^2}} \right)', \quad (13.19)$$

$$z'_s(0) = 0, \quad z'_s(a) = \cot\theta, \quad (13.20)$$

donde se ha supuesto despreciable la densidad del aire frente a la del líquido ρ , y se ha considerado que la presión en el aire es p_a . Esta ecuación, además de la forma de la superficie, proporciona la altura H a la que asciende el líquido por acción de la tensión superficial:

$$H \equiv z_s(0). \quad (13.21)$$

Es conveniente definir las variables adimensionales η y ξ ,

$$z_s = H + a\eta, \quad r = a\xi, \quad (13.22)$$

de forma que (13.19)-(13.20) queda

$$B(\eta + \beta) = \frac{1}{\xi} \left(\xi \frac{\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}} \right)', \quad (13.23)$$

$$\eta'(0) = 0, \quad \eta'(1) = \cot\theta, \quad (13.24)$$

donde las primas ahora denotan diferenciación respecto a ξ ,

$$B \equiv \frac{\rho g a^2}{\sigma} \equiv \frac{a^2}{L_c^2} \quad (13.25)$$

es el número de Bond, y $\beta \equiv H/a$.

Este problema tiene solución analítica en términos de las funciones de Bessel. Sin embargo, es más interesante obtener soluciones más simples en los dos límites $B \ll 1$ y $B \gg 1$. En el primer caso, en el que la tensión superficial es dominante, el término $B\eta$ se puede despreciar en primera aproximación en (13.23) al ser η de orden unidad. Esto quiere decir que la curvatura es constante y, por tanto, la superficie es esférica. En efecto, sin el término $B\eta$, la ecuación (13.23) se puede integrar una vez:

$$\frac{\xi \eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}} = B\beta \frac{\xi^2}{2}, \quad (13.26)$$

donde la constante de integración se ha hecho cero en virtud de la primera condición (13.24). Esta expresión, junto con la segunda condición (13.24), proporciona $\beta = 2 \cos \theta / B$. Es decir, la altura a la que asciende un líquido por acción de las fuerzas de tensión superficial en un **tubo capilar** (entendiéndose por tubo capilar aquél que es tan delgado que su radio verifica $a \ll L_c$ ó $B \ll 1$) es:

$$H = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g a}. \quad (13.27)$$

Para obtener la forma de la superficie hay que integrar otra vez (13.26), que se puede escribir como

$$\eta' = \frac{\xi \cos \theta}{\sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \theta}}. \quad (13.28)$$

Integrando esta ecuación y teniendo en cuenta que $\eta(0) = \beta$, se tiene

$$\eta = \beta + \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2 \cos^2 \theta}}{\cos \theta}. \quad (13.29)$$

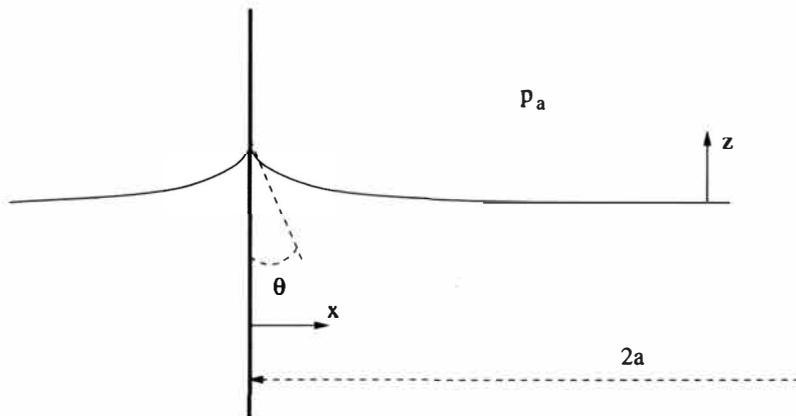


Figura 13.4: Conducto con radio mucho mayor que la longitud capilar.

Esta expresión corresponde a una superficie esférica, que en variables dimensionales se puede escribir como

$$[z_s - (H + R)]^2 + r^2 = R^2, \tag{13.30}$$

donde

$$R \equiv \frac{a}{\cos \theta} \tag{13.31}$$

es el radio de la esfera. De hecho, la curvatura de la superficie es [sustituyendo (13.30) en (13.13)]:

$$-\nabla \cdot \vec{n} = \frac{2}{R}. \tag{13.32}$$

Es decir, los dos radios de curvatura son constantes iguales a R .

En el límite opuesto de tensión superficial despreciable ($B \gg 1$ ó $a \gg L_c$), la ecuación (13.23) proporciona, en primera aproximación, $\eta + \beta \simeq 0$. Es decir, la superficie es plana y de altura nula:

$$z_s = 0; \quad H = z_s(0) = 0. \tag{13.33}$$

Esta solución es aproximadamente válida (con errores del orden de $L_c^2/a^2 \ll 1$) en todo el conducto, excepto muy cerca de la pared. Concretamente, en una *capa límite* de espesor del orden de la longitud capilar, el segundo miembro de (13.23) es del mismo orden que el primero, y (13.33) deja de ser válida. Esto sugiere *expandir* las coordenadas en las proximidades de la pared mediante (ver figura 13.4)

$$z_s = L_c \eta, \quad x \equiv a - r = L_c \xi \quad (13.34)$$

donde las nuevas coordenadas adimensionales (ξ, η) son de orden unidad en la capa límite de espesor L_c . Sustituyendo en (13.19) se tiene

$$\frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}} - \eta = 0, \quad (13.35)$$

donde se ha despreciado el segundo sumando de la curvatura [ver (13.13)] por ser de orden $L_c/a \ll 1$ respecto al primero. Obsérvese que el problema tiene ahora geometría plana [la curvatura es la misma que en (13.11)], valiendo la ecuación tanto para la parte interior como exterior del conducto (en general, para cualquier superficie sólida plana que se introduzca verticalmente en el líquido). Esta ecuación debe resolverse con las condiciones de contorno

$$\eta'(0) = -\cot\theta, \quad \eta(\xi \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (13.36)$$

La segunda condición proviene de la primera condición de contorno (13.20), con errores del orden de $L_c/a \ll 1$. Este problema tiene solución analítica:

$$\xi = \sqrt{2(1 + \sin\theta)} - \sqrt{4 - \eta^2} + \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \eta^2/4})(1 - \sqrt{(1 + \sin\theta)/2})}{(1 - \sqrt{1 - \eta^2/4})(1 + \sqrt{(1 + \sin\theta)/2})}. \quad (13.37)$$

13.4.2. Gota que pende de un tubo

Como último ejemplo, considérese el caso de una gota de un líquido que pende de un conducto vertical de radio interno a (figura 13.5). El problema es muy similar al anterior, pero, ahora, el ángulo θ depende sobre todo del volumen de la gota y, por tanto, de la presión en el interior en el conducto, que es desconocida. Las ecuaciones y condiciones de contorno serían:

$$\sigma \frac{1}{r} \left(r \frac{z'_s}{\sqrt{1 + z_s'^2}} \right)' + \rho g z_s = \text{constante}, \quad (13.38)$$

$$z'_s(a) = -\cot\theta, \quad z'_s(0) = 0, \quad z_s(a) = 0, \quad (13.39)$$

donde ρ es la densidad del líquido.

El ángulo de contacto θ debe ser tal que la fuerza de tensión superficial en la línea de contacto equilibre el peso de la gota (si el volumen de la gota es mayor que un valor crítico, la gota cae). Utilizando las variables adimensionales

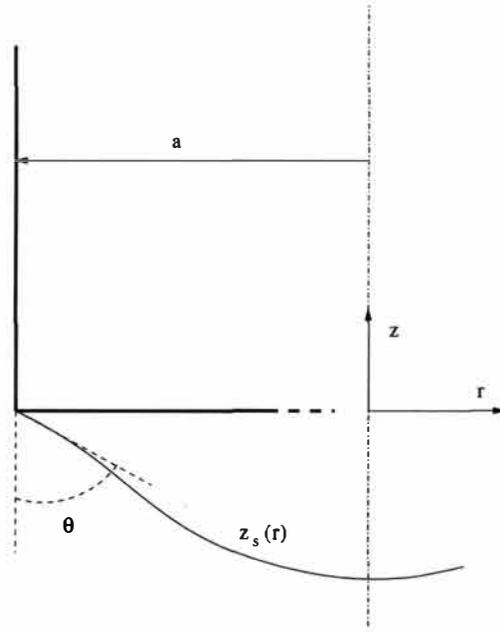


Figura 13.5: Gota que pende de un tubo de sección circular.

$$\xi = \frac{r}{a}, \quad \eta = \frac{z_s}{a}, \tag{13.40}$$

las expresiones (13.38)-(13.39) se escriben

$$B\xi\eta + \left(\frac{\xi\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} \right)' = K\xi, \tag{13.41}$$

$$\eta'(1) = -\cot\theta, \quad \eta'(0) = 0, \quad \eta(1) = 0, \tag{13.42}$$

donde

$$B = \frac{\rho g a^2}{\sigma} \tag{13.43}$$

es el número de Bond y K es una constante arbitraria. Aquí se considerará sólo el límite $B \ll 1$ (el límite $B \gg 1$ y, por supuesto, el caso general, tiene soluciones bastantes más complejas). Como en el ejemplo anterior, en primera aproximación, con errores del orden de B , la ecuación (13.41) se puede integrar una vez,

$$\frac{\xi\eta'}{\sqrt{1+\eta'^2}} = K \frac{\xi^2}{2}, \quad (13.44)$$

donde la constante de integración se ha hecho cero utilizando la condición de contorno en $\xi = 0$ y, de la primera condición de contorno en (13.42), $K = -2 \cos \theta$. Esta ecuación se puede escribir como

$$\eta' = -\frac{\cos \theta \xi}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \xi^2}},$$

que integrada otra vez, y después de la aplicación de la condición de contorno restante, proporciona la solución:

$$\eta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta \xi^2}}{\cos \theta} - \tan \theta. \quad (13.45)$$

Por supuesto, dado que el número de Bond es cero en primera aproximación, esta solución corresponde a una superficie esférica que se apoya en el tubo formando el ángulo θ (el cual queda fijado por el peso de la gota).

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 1.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo VII.
- S. MIDDLEMAN, 1995.
- A.D. MYSHKIS, et al., 1987. Capítulo 2.
- L. PRANDTL y O.G. TIETJENS, 1957a. Capítulo IV.

Parte V

FLUJOS VISCOSOS

Capítulo 14

Movimientos unidireccionales de líquidos

La dificultad fundamental para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (exacta o aproximadamente) reside en los términos no lineales que introduce la convección. En esta lección consideraremos algunos flujos en los que el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento es idénticamente nulo. Las soluciones de las ecuaciones lineales resultantes son, por tanto, las más simples posibles, aparte de la trivial $\vec{v} = 0$ considerada en la lección 12. Los ejemplos que consideramos a continuación constituyen algunos de los relativamente pocos casos en los que existen soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes (un repertorio más amplio de soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes puede consultarse en las referencias citadas al final de la lección). No se considerará la estabilidad de estos flujos.

14.1. Flujos con líneas de corriente rectas

14.1.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno

Con las ecuaciones escritas en coordenadas cartesianas, el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento desaparece en los movimientos incompresibles si todas las componentes del vector velocidad, excepto una, son nulas (movimientos unidireccionales). Tomando $\vec{v} = u\vec{e}_x$, la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ proporciona

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (14.1)$$

con lo que $u = u(y, z, t)$. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento se simplifica a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_{mx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (14.2)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_{my}, \quad (14.3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{mz}, \quad (14.4)$$

donde los términos convectivos son idénticamente nulos debido a que u no depende de x y al ser nulas las componentes de la velocidad según y y z . Se ha supuesto que la viscosidad es constante para que así el problema mecánico esté desacoplado del térmico.

Las proyecciones y y z de la ecuación de cantidad de movimiento establecen, simplemente, que existe equilibrio hidrostático en las direcciones perpendiculares al movimiento. Si las fuerzas másicas derivan de un potencial, $\vec{f}_m = -\nabla U$, se tiene que $p + \rho U$ (que se suele denominar **presión reducida**) no depende de y y z :

$$p + \rho U = f(x, t) \quad (14.5)$$

Definiendo

$$p_l \equiv -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho U) \quad (14.6)$$

la ecuación (14.2) queda:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = p_l + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (14.7)$$

Como u no depende de x , tampoco p_l ,

$$p_l = p_l(t) \quad (14.8)$$

Suponiendo que la capacidad calorífica y la conductividad térmica son constantes, la correspondiente ecuación de la energía se escribe:

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} \right) = K \nabla^2 T + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + Q_r \quad (14.9)$$

Obsérvese que aunque esta última ecuación no es lineal, al estar desacoplada de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, la función $u(y, z, t)$ es conocida previamente a su resolución, y a efectos prácticos el problema es también lineal para la temperatura. En los ejemplos que siguen sólo resolveremos el problema mecánico; se ha escrito la ecuación de la energía para completar el problema y para futura referencia.

Como condiciones iniciales se deben imponer

$$t = 0 \quad , \quad u = u_o(y, z) \quad , \quad T = T_o(x, y, z) \quad . \quad (14.10)$$

Las condiciones de contorno para la velocidad u deben ser, por supuesto, compatibles con la unidireccionalidad del movimiento, pudiendo corresponder a tres tipos de problemas: (a) flujos en conductos de sección uniforme; (b) flujos generados por el movimiento de un contorno plano en la dirección x , y (c) flujos confinados entre dos contornos paralelos e infinitos (por ejemplo dos placas) producidos por un gradiente de la presión (reducida) independiente de la posición. [El tercer supuesto se puede tomar como un caso particular de (a).] A continuación vamos a considerar varios ejemplos (estacionarios y no estacionarios) correspondientes a los casos (b) y (c). El caso (a) se estudiará, de una forma ligeramente más general, en la lección siguiente. Por ello no escribimos las condiciones de contorno en forma general, sino en cada caso particular. En cuanto a la temperatura, se debe especificar o bien su valor o bien el flujo de calor en los contornos sólidos (ver sección 10.3; no las especificamos aquí puesto que no vamos a resolver el problema térmico).

Antes de pasar a ver los ejemplos concretos conviene señalar que la linealidad del problema permite la **superposición** de distintas soluciones correspondientes a distintas condiciones de contorno. Por otra parte, aunque pocos problemas reales son *exactamente* unidireccionales, las soluciones que veremos a continuación se pueden tomar como soluciones *aproximadas* de algunos problemas reales. Además, estas soluciones nos van a permitir introducir algunos conceptos físicos y matemáticos de mucha utilidad para resolver problemas reales más complejos.

14.1.2. Corriente de Couette

El movimiento unidireccional más sencillo posible es el confinado entre dos placas paralelas e infinitas producido por el movimiento de una de ellas relativo a la otra. En este caso el movimiento es estacionario y sólo depende de una coordenada transversal (y), siendo, además, $p_l = 0$. La ecuación (14.7) queda, simplemente,

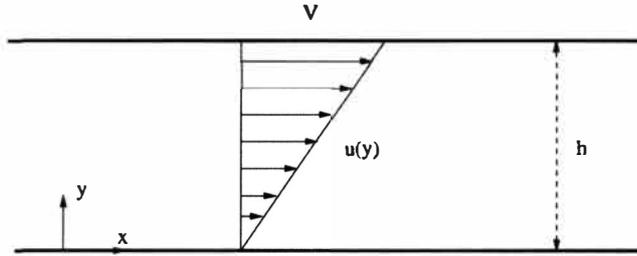


Figura 14.1: Corriente de Couette.

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad , \quad (14.11)$$

y las condiciones de contorno son (ver figura 14.1):

$$u(y = 0) = 0 \quad , \quad u(y = h) = V \quad , \quad (14.12)$$

donde se ha supuesto que la velocidad de la placa inferior es nula y la de la superior V . La solución es un perfil lineal de velocidad (corriente de Couette):

$$u = Vy/h \quad . \quad (14.13)$$

El esfuerzo viscoso, $\tau'_{xy} = \mu \partial u / \partial y$, es constante en todo el flujo e igual a $\mu V/h$, siendo ésta, por tanto, la fuerza por unidad de superficie necesaria para mover la placa superior con velocidad V y la que es necesario hacer, pero en sentido contrario, para que la placa inferior no sea *arrastrada* por el movimiento del fluido. (La medición de esta fuerza constituye un procedimiento simple para determinar experimentalmente la viscosidad de un líquido.) El caudal que circula es, por unidad de longitud en la dirección z ,

$$\int_0^h u dy = \frac{Vh}{2} \quad . \quad (14.14)$$

14.1.3. Corriente de Poiseuille

Es el movimiento originado entre dos placas paralelas por un gradiente de presión (reducida) constante. La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x y las condiciones de contorno (ver figura 14.2) quedan

$$0 = p_l + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad p_l = \text{constante}, \quad (14.15)$$

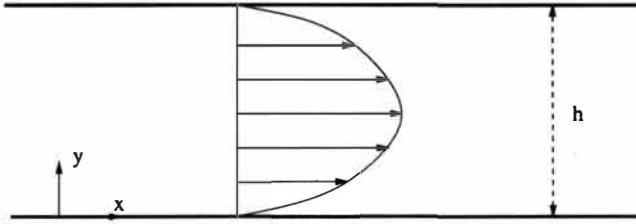


Figura 14.2: Corriente de Poiseuille bidimensional.

$$u(y = 0) = u(y = h) = 0 . \tag{14.16}$$

La solución es el perfil parabólico de velocidad

$$u = \frac{pl}{2\mu}y(h - y) . \tag{14.17}$$

El esfuerzo viscoso es nulo en el centro ($y = h/2$) y máximo en las paredes:

$$\tau'_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{pl}{2}(h - 2y) \quad , \quad \tau'_{xy}(y = 0) = \frac{plh}{2} = -\tau'_{xy}(y = h) . \tag{14.18}$$

El caudal por unidad de longitud es:

$$q = \int_0^h u dy = \frac{h^3 pl}{12\mu} \quad , \tag{14.19}$$

el cual se suele denominar de Poiseuille debido al flujo análogo en un conducto de sección circular (ver lección siguiente) que fue estudiado experimentalmente por Poiseuille sobre 1840.

El perfil de velocidad correspondiente al movimiento originado por un gradiente de presión constante y por el movimiento de una de las placas (e.g. la superior) se obtiene sin más que sumar (14.13) y (14.17) en virtud de la linealidad del problema:

$$u = \frac{Vy}{h} + \frac{pl}{2\mu}y(h - y) \quad , \tag{14.20}$$

siendo el caudal por unidad de longitud

$$q = Vh/2 + h^3 pl/12\mu . \tag{14.21}$$

Este campo de velocidad (Couette + Poiseuille) es la base de la lubricación fluidomecánica que se considerará en la lección 16, donde se generaliza para $h(x, t)$ y $p_l(t)$, suponiendo que h varía muy lentamente con x , y que las fuerzas de viscosidad son dominantes.

14.1.4. Problema de Rayleigh

Como ejemplo de flujo unidireccional no estacionario, consideramos primero el movimiento originado en un líquido por una placa que en $t = 0$ pasa *súbitamente* de estar en reposo a moverse paralelamente a si misma con velocidad V constante (Rayleigh, 1880). La ecuación y condiciones iniciales y de contorno que gobierna el campo de velocidades $u(y, t)$ son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (14.22)$$

$$u(0, t) = V \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(\infty, t) = 0 \quad ; \quad u(y, 0) = 0 \quad . \quad (14.23)$$

La ecuación anterior es la típica ecuación de difusión o ecuación del calor [ecuaciones (6.32) y (10.13)], y la solución que veremos a continuación [en general, la solución con cualquier ley $V = V(t)$] se obtiene por analogía con el problema de conducción de calor.

Como el problema es lineal, la constante V se puede eliminar mediante el cambio de variable

$$v = u/V \quad , \quad (14.24)$$

quedando

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad (14.25)$$

$$v(0, t) = 1 \quad , \quad t > 0 \quad , \quad v(\infty, t) = 0 \quad ; \quad v(y, 0) = 0 \quad . \quad (14.26)$$

El análisis dimensional permite reducir la ecuación anterior a una ecuación diferencial ordinaria. En efecto, de (14.25)-(14.26),

$$v = v(y, t, \nu) \quad , \quad (14.27)$$

donde v es ya adimensional. Tomando como magnitudes dimensionalmente independientes t y ν se tiene:¹

$$v = f(y/\sqrt{\nu t}) \quad . \quad (14.28)$$

Así, v no depende de y y t por separado, sino de una combinación de esas dos variables dada por

¹ Obsérvese que, tal como está escrito, este problema es puramente cinemático, puesto que la masa ha desaparecido del problema al dividir la ecuación de cantidad de movimiento por la densidad; por tanto, sólo hay dos dimensiones independientes, longitud y tiempo.

$$\eta \equiv y/\sqrt{\nu t} \quad . \quad (14.29)$$

Básicamente, lo que ocurre es que al no tener el problema ninguna longitud característica para adimensionalizar la coordenada y (el líquido ocupa el semi-espacio $0 \leq y < \infty$), la adimensionalización se tiene que hacer necesariamente con la otra variable independiente (t), reduciendo así su número. La nueva variable independiente η se denomina de semejanza, y la solución con ella obtenida se llama **solución de semejanza**, debido a que los perfiles de velocidad $v(y)$ son *semejantes* para los diferentes tiempos de acuerdo con la variable η . Esta variable convierte la ecuación en derivadas parciales (14.25) en una ecuación diferencial ordinaria, que se obtiene sin más que sustituir (14.28) en (14.25), teniendo en cuenta que $\partial v/\partial t = -(\eta/2t)f'$ y $\partial^2 v/\partial y^2 = f''/\nu t$, donde las primas significan derivadas con respecto a η :

$$f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0, \quad (14.30)$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(\infty) = 0. \quad (14.31)$$

Obsérvese que la condición inicial $v(y, 0) = 0$ y la condición de contorno $v(\infty, t) = 0$ dan lugar a la misma condición de contorno $f(\infty) = 0$ (si no se redujese también el número de condiciones de contorno la solución no sería de semejanza).

Una primera integral de (14.30) es

$$f' = C_1 e^{-\eta^2/4} \quad , \quad (14.32)$$

que integrada de nuevo da

$$f = C_2 + C_1 \int_0^\eta e^{-\xi^2/4} d\xi \quad ; \quad (14.33)$$

sustituyendo las condiciones de contorno se obtiene

$$v = \frac{u}{V} = \operatorname{erfc}(\eta/2) = \operatorname{erfc}(y/2\sqrt{\nu t}), \quad (14.34)$$

donde

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad , \quad (14.35)$$

es la función error complementaria. Esta solución nos dice que la capa de fluido próxima a la pared que se pone en movimiento tiene un espesor que crece con el tiempo proporcionalmente a $\sqrt{\nu t}$. Para $t \rightarrow \infty$, $u \rightarrow V$, es decir, todo el

fluido se mueve rígidamente con la placa. El esfuerzo de fricción que el líquido ejerce sobre la placa es:

$$\tau_f \equiv \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\rho V \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}}. \quad (14.36)$$

El problema anterior se complica notoriamente si se incluye una placa fija paralela a la móvil a una cierta distancia h de ella, puesto que introduce una longitud característica (h) que no permite la existencia de soluciones de semejanza. Definiendo las variables adimensionales

$$v = \frac{u}{V}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{t}{t_o} \quad (14.37)$$

donde t_o es un tiempo característico que se elegirá convenientemente a continuación, el problema viene gobernado por

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\nu t_o}{h^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (14.38)$$

$$v(0, \tau) = 1, \quad \tau > 0, \quad v(1, \tau) = 0; \quad v(\eta, 0) = 0. \quad (14.39)$$

La ecuación se simplifica tomando $t_o = h^2/\nu$, que es el tiempo característico en el que el movimiento de la placa inferior se *transmite* a todo el fluido (como se verá más claramente en lo que sigue).

Este problema no tiene una solución analítica tan simple como (14.34),² pero sí es posible encontrar soluciones aproximadas sencillas para tiempos grandes y pequeños comparados con h^2/ν , es decir, en los límites $\tau \gg 1$ y $\tau \ll 1$.

Para $\tau \gg 1$ ($t \gg h^2/\nu$), el primer término de (14.38) es despreciable con errores del orden de τ^{-1} y el problema queda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \simeq 0, \quad v(0, \tau) = 1, \quad v(1, \tau) = 0. \quad (14.40)$$

(Por supuesto, no se puede imponer condición inicial.) La solución es:

$$v = u/V = 1 - \eta = 1 - y/h, \quad (14.41)$$

²Por separación de variables, utilizando series de Fourier, o mediante el método de la transformada de Laplace, se encuentra que $v(\eta, \tau) = 1 - \eta - \sum_{n=1}^{\infty} (2/n\pi) \exp(-n^2\pi^2\tau) \sin(n\pi\eta)$ (ver, por ejemplo, G.K. Batchelor, 1967; ver también sección 15.4 para una solución similar en coordenadas cilíndricas).

que es un flujo de Couette. Es decir, cuando ha transcurrido un tiempo mucho mayor que h^2/ν , todo el líquido entre las placas se ha puesto en movimiento, llegándose a un movimiento estacionario de Couette.

Para $\tau \ll 1$ ($t \ll h^2/\nu$), en primera aproximación se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \simeq 0 \quad , \quad (14.42)$$

que proporciona $v \simeq \text{constante} = 0$, para que satisfaga la condición de contorno en $\eta = 1$. Evidentemente, esta solución no puede ser válida en todo el dominio fluido, puesto que cerca de la pared móvil el fluido tiene que moverse con ella. Matemáticamente, al desprejarse el término que contiene las derivadas espaciales, no se pueden imponer todas las condiciones de contorno; en particular, la de la placa móvil, y la solución no puede ser válida cerca de ella. Por tanto, existe una capa delgada (**capa límite**) en las cercanías de la pared móvil ($\eta = 0$) donde la solución anterior no es válida. Para hallar el espesor y la solución aproximada dentro de esa capa delgada, reescalamos las variables de acuerdo con

$$\tau = \alpha \theta \quad , \quad \eta = \delta \xi \quad , \quad (14.43)$$

donde las nuevas variables θ y ξ son de orden unidad en el interior de la capa límite, por lo que $\alpha \ll 1$; δ nos da el orden de magnitud del espesor de la capa límite, que también debe ser muy pequeño como se determinará a continuación. Escribiendo la ecuación (14.38) en estas nuevas variables, se llega a

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad ; \quad (14.44)$$

por tanto, δ debe ser del orden de $\sqrt{\alpha} \ll 1$ para que el segundo término cuente en la capa límite. En otras palabras, para $\tau \ll 1$, el líquido permanece en reposo en todo el dominio fluido salvo en una capa delgada cerca de la pared móvil cuyo espesor es de orden $\sqrt{\tau}$ (que crece, por tanto, con el tiempo).

Para describir el movimiento en el interior de esta capa delgada, la placa superior es como si estuviese en el infinito, y tenemos, en primera aproximación (errores del orden de τ) el problema anterior de Rayleigh: tomando $\delta = \sqrt{\alpha}$,

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad , \quad (14.45)$$

$$v(0, \theta) = 1 \quad , \quad v(\infty, \theta) = 0 \quad , \quad v(\xi, 0) = 0 \quad , \quad (14.46)$$

que admite la variable de semejanza $\xi/\sqrt{\theta} = y/\sqrt{\nu t}$, y cuya solución es (14.34).

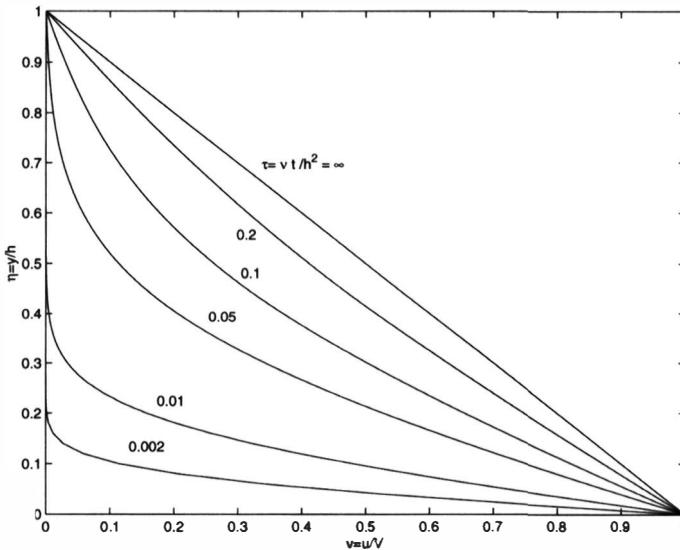


Figura 14.3: Movimiento de un líquido entre dos placas, una en reposo y otra súbitamente puesta en movimiento en $t = 0$ con velocidad V , para distintos tiempos.

Para tiempos intermedios, del orden de h^2/ν [es decir, $\tau = O(1)$], las soluciones aproximadas anteriores no son válidas y no hay más remedio que resolver el problema (14.38)-(14.39) completo. En la figura 14.3 se representa la solución $v = u/V$ para distintos tiempos, calculada tomando 50 términos de la serie de Fourier (ver nota de pie de página número 2). Para $\tau \ll 1$ la solución es la de Rayleigh (14.34), mientras que para $\tau \rightarrow \infty$ se tiene el perfil de Couette (14.41) [en la figura se observa que el perfil lineal de Couette es, de hecho, aproximadamente válido incluso para $\tau = O(1)$].

14.1.5. Corriente de Stokes

Un problema similar al de Rayleigh es el movimiento originado por una placa que oscila paralelamente a sí misma con velocidad $V(t) = U \cos \omega t$ (Stokes, en 1850, consideró el caso general en que $V(t)$ es una función arbitraria del tiempo, obteniendo, en particular, una expresión general para la fuerza de fricción sobre la placa.) La ecuación y condiciones de contorno que gobiernan el problema son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad y \geq 0, \quad (14.47)$$

$$u(0, t) = U \cos \omega t, \quad U(\infty, t) = 0. \quad (14.48)$$

No imponemos condiciones iniciales puesto que buscamos soluciones periódicas en el tiempo.

Es mucho más fácil resolver el problema equivalente

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad (14.49)$$

$$u_1(0, t) = U e^{i\omega t}, \quad u_1(\infty, t) = 0; \quad (14.50)$$

como la ecuación es lineal, la solución de (14.47)-(14.48) es la parte real de la solución de (14.49)-(14.50):

$$u = \text{Real}[u_1]. \quad (14.51)$$

La dependencia temporal de u_1 es de la forma $e^{i\omega t}$, por lo que definimos

$$u_1 = e^{i\omega t} f(y). \quad (14.52)$$

Sustituyendo en (14.49)-(14.50) se tiene

$$i\omega f = \nu f'' \quad (14.53)$$

$$f(0) = U, \quad f(\infty) = 0. \quad (14.54)$$

La solución de este problema es:

$$u_1 = U e^{-\sqrt{\omega/2\nu} y} e^{i(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu} y)}, \quad (14.55)$$

con lo que la solución del problema de Stokes se escribe

$$u = \text{Real}[u_1] = U e^{-\sqrt{\omega/2\nu} y} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/2\nu} y). \quad (14.56)$$

Este movimiento constituye una onda, amortiguada por la viscosidad, que transmite el movimiento de la placa al líquido. La distancia hasta la cual se *deja sentir* el movimiento de la placa es del orden de

$$\delta_v = \sqrt{\nu/\omega}, \quad (14.57)$$

que se denomina **longitud de influencia o penetración viscosa**. La velocidad de fase de la onda (es decir, la velocidad a la que se mueven los frentes de onda en la dirección y), es $\omega/\sqrt{\omega/2\nu} = \sqrt{2\nu\omega}$.

La resistencia viscosa que ejerce el líquido sobre la placa es, por unidad de área,

$$\tau_f \equiv \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -\rho \sqrt{\nu \omega} U \cos(\omega t + \pi/4) \quad , \quad (14.58)$$

que se opone al movimiento de la placa, pero con un *desfase* de $\pi/4$ radianes en relación a su movimiento.

Similarmente a como se hizo con el problema de Rayleigh, *complicamos ligeramente* el problema de Stokes considerando que el líquido no es ilimitado en la dirección y , sino que existe una placa fija a una distancia h de la móvil. El problema viene gobernado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad (14.59)$$

$$u(0, t) = U \cos \omega t \quad , \quad u(h, t) = 0 \quad . \quad (14.60)$$

Este problema tiene solución analítica:

$$u = U \cos \omega t \exp[-\sqrt{\omega/2\nu} y] \sin[\sqrt{\omega/2\nu} (h - y)] / \sin[\sqrt{\omega/2\nu} h] \quad , \quad (14.61)$$

pero es más instructivo obtener soluciones analíticas simples en dos límites diferenciados de los parámetros del problema. Definiendo las variables adimensionales

$$v = \frac{u}{U} \quad , \quad \eta = \frac{y}{h} \quad , \quad \tau = t\omega \quad , \quad (14.62)$$

la ecuación y condiciones de contorno (14.59)-(14.60) quedan

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \beta \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \quad , \quad (14.63)$$

$$v(0, \tau) = \cos \tau \quad , \quad v(1, \tau) = 0 \quad , \quad (14.64)$$

donde

$$\beta \equiv \frac{\nu/\omega}{h^2} = \frac{\delta_v^2}{h^2} \quad (14.65)$$

es una medida de la longitud de penetración viscosa en relación a la separación entre placas.

En el **límite** $\beta \gg 1$ ($\delta_v \gg h$), el primer miembro de (14.63) es despreciable, en primera aproximación, respecto al segundo y el problema es casi estacionario, obteniéndose un flujo de Couette que varía con el tiempo a través de la condición de contorno:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \simeq 0, \quad v(0, \tau) = \cos \tau, \quad v(1, \tau) = 0, \quad (14.66)$$

$$v \simeq (1 - \eta) \cos \tau. \quad (14.67)$$

Físicamente, cuando la longitud de influencia viscosa es mucho mayor que h , *todo* el fluido se pone en movimiento al *unísono* con la velocidad armónica de la palca inferior, variando la velocidad linealmente con y para satisfacer la condición de contorno en $y = h$.

La solución anterior, que tiene errores del orden de $\beta^{-1} \ll 1$, se puede hacer tan exacta como se quiera sin más que expandir v en potencias de β^{-1} :

$$v = v_o + \beta^{-1}v_1 + \beta^{-2}v_2 + \dots, \quad (14.68)$$

donde v_o, v_1, v_2, \dots son funciones de η y τ , que se obtienen sustituyendo la expansión anterior en (14.63)-(14.64) e igualando términos con potencias iguales de β . En el orden más bajo se obtiene (14.66), por lo que v_o viene dado por el flujo de Couette (14.67). El término de orden β^{-1} satisface

$$\frac{\partial v_o}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2}, \quad v_1(0, \tau) = v_1(1, \tau) = 0. \quad (14.69)$$

Sustituyendo $v_o = (1 - \eta) \cos \tau$, se obtiene

$$v_1 = [\eta^3/6 - \eta^2/2 + \eta/3] \sin \tau. \quad (14.70)$$

La solución $v = v_o + \beta^{-1}v_1$ tendría errores del orden de β^{-2} , y así sucesivamente. Este método de solución permite obtener una solución exacta como se quiera (siempre que $\beta^{-1} < 1$) y se denomina **método de perturbaciones regulares**.

En el límite $\beta \ll 1$ ($\delta_v \ll h$), el primer término de (14.62) es el dominante, teniéndose,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \simeq 0; \quad (14.71)$$

la solución que satisface la condición de contorno en $\eta = 1$ es

$$v \simeq 0. \quad (14.72)$$

Obviamente, esta solución no es uniformemente válida en todo el dominio fluido puesto que no satisface la condición de contorno en $\eta = 0$. Físicamente, cuando la longitud de influencia viscosa es mucho menor que h , la mayor

parte del fluido *no se entera* de que la placa inferior se está moviendo y, en primera aproximación, se puede considerar que el fluido está en reposo. Pero existirá una capa delgada de fluido en las proximidades de la placa inferior (capa límite) en la cual la solución estacionaria exterior no es válida. El espesor de esta capa se determina exigiendo que los dos términos de la ecuación (14.63) sean del mismo orden en ella. Definiendo

$$\eta = \delta \xi \quad , \quad (14.73)$$

donde la nueva variable ξ se supone de orden unidad en la capa límite, y sustituyendo en (14.63) se tiene

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\beta}{\delta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad , \quad (14.74)$$

por lo que el espesor δ es del orden de $\beta^{1/2} \ll 1$. Haciendo $\delta \equiv \beta^{1/2}$ y teniendo en cuenta que $\eta = 1$ equivale a

$$\xi = 1/\delta \rightarrow \infty \quad , \quad \delta = \beta^{1/2} \rightarrow 0 \quad , \quad (14.75)$$

el problema dentro de la capa límite se reduce, en primera aproximación, al problema Stokes anterior:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \quad , \quad v(0, \tau) = \cos \tau \quad , \quad v(\infty, \tau) = 0 \quad , \quad (14.76)$$

cuya solución es (14.56), que escrita en las nuevas variables es

$$v = e^{-\xi/\sqrt{2}} \cos(\tau - \xi/\sqrt{2}) \quad . \quad (14.77)$$

Esta solución tiene errores del orden de $\beta \ll 1$. La obtención de soluciones de mayor orden (errores de orden menor) es más complicada que en el caso anterior puesto que habría que obtener la solución exterior en las siguientes aproximaciones ($v_e = v_{e0} + \beta^{1/2}v_{e1} + \dots$, $v_{e0} = 0$) y *acoplarlas* con las sucesivas aproximaciones de la solución en la capa límite o solución interior [$v_i = v_{i0} + \beta^{1/2}v_{i1} + \dots$, donde v_{i0} es la solución de Stokes (14.77)] en el límite $\eta \rightarrow 0$ para v_e y $\xi \rightarrow \infty$ para v_i . Este esquema de solución se denomina **método de perturbaciones singulares** (o de los desarrollos asintóticos acoplados) y en general hay que utilizarlo cuando en la aproximación de orden menor desaparece el término que contiene las derivadas de mayor orden en la ecuación, con lo que no se pueden imponer la totalidad de las condiciones de contorno (el problema clásico de este tipo es la capa límite de Prandtl, correspondiente al límite $Re \rightarrow \infty$, que se considerará en la parte VIII de la asignatura).

14.2. Flujos con líneas de corriente circulares

Otro tipo de movimiento fluido simple para el que existen algunas soluciones exactas es aquel en el cual las líneas de corriente son círculos centrados en un eje de simetría común. En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , tomando el eje z como eje de simetría, estos movimientos vienen caracterizados por $\vec{v} = u\vec{e}_\theta$, es decir, son *unidireccionales* en la dirección circunferencial \vec{e}_θ .

14.2.1. Ecuaciones y condiciones iniciales y de contorno

Similarmente al caso cartesiano, la ecuación de continuidad

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (14.78)$$

nos dice que u no puede depender de θ . Las ecuaciones de cantidad de movimiento según las coordenadas r, θ y z son:

$$-\rho \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_{mr}, \quad (14.79)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] + \rho f_{m\theta}, \quad (14.80)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_{mz}. \quad (14.81)$$

En la dirección z hay balance hidrostático. En la dirección radial, las fuerzas másicas (asociadas, por ejemplo, a las fuerzas centrífugas de un sistema de referencia que gire), están equilibradas con las fuerzas de presión y las centrífugas asociadas al movimiento del fluido. En la dirección θ los términos convectivos son idénticamente nulos.

Para que el movimiento sea puramente circunferencial, las fuerzas másicas en las direcciones radial y azimutal sólo pueden ser las inerciales asociadas a un movimiento giratorio con simetría axial del sistema de referencia. Si la velocidad angular es $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{e}_z$, de acuerdo con (7.3) se tiene:

$$f_{mr} = -\Omega^2 r - 2\Omega u, \quad (14.82)$$

$$f_{m\theta} = -\Omega' r, \quad \Omega' \equiv d\Omega/dt. \quad (14.83)$$

Por otra parte, las fuerzas gravitatorias (o las asociadas a la aceleración lineal del sistema de referencia) deben ser axiales: $f_{mz} = -g$ (donde g puede incluir una aceleración lineal a_o). La ecuación (14.81) nos dice que la presión debe ser de la forma

$$p \equiv P(r, \theta, t) - \rho g z \quad , \quad (14.84)$$

que sustituida en (14.79) implica que u no puede depender de z y P no puede depender de θ :

$$u = u(r, t) \quad , \quad (14.85)$$

$$P = P(r, t) \quad . \quad (14.86)$$

Físicamente, una dependencia axial de u originaría, debido a las fuerzas centrífugas y de Coriolis, una dependencia axial de P que produciría un movimiento axial, destruyendo el flujo puramente circunferencial. Por tanto, los movimientos puramente circunferenciales son también bidimensionales.

Las ecuaciones (14.79)-(14.80) quedan pues

$$\rho \frac{u^2}{r} + \rho \Omega^2 r + 2\rho \Omega u = \frac{\partial P}{\partial r} \quad , \quad (14.87)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \Omega' r = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \quad , \quad (14.88)$$

que son dos ecuaciones diferenciales para $u(r, t)$ y $P(r, t)$. Como condición inicial se debe especificar

$$u(r, 0) = u_o(r) \quad ; \quad (14.89)$$

las condiciones de contorno dependen de como se genere el movimiento y de la geometría del problema (se considerarán algunos ejemplos a continuación). En cuanto a la ecuación de la energía, que está desacoplada de (14.87)-(14.88), se escribe

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = K \nabla^2 T + \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right]^2 + Q_r \quad . \quad (14.90)$$

14.2.2. Movimiento entre dos cilindros que giran coaxialmente

Considérese el movimiento de un líquido contenido entre dos cilindros coaxiales e infinitos, de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), que giran alrededor de su eje con velocidades angulares Ω_1 y Ω_2 constantes. Para describir el movimiento, que es estacionario, podemos tomar un sistema de referencia que gira con alguno de los cilindros, pero es quizá más fácil tomar uno fijo (por supuesto, el resultado sería el mismo). La ecuación (14.88) queda:

$$0 = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad (14.91)$$

siendo las condiciones de contorno

$$u(r = R_1) = \Omega_1 R_1, \quad u(r = R_2) = \Omega_2 R_2. \quad (14.92)$$

La solución general de (14.91) es

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r, \quad (14.93)$$

y teniendo en cuenta (14.92) resulta

$$u(r) = \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \right) \frac{1}{r} + \left(\frac{\Omega_1 R_1^2 - \Omega_2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) r. \quad (14.94)$$

Una vez obtenida la distribución de velocidad, la presión (reducida) se puede obtener, salvo una constante arbitraria, mediante (14.87):

$$\rho \frac{u^2}{r} = \rho \left(\frac{C_1^2}{r^3} + C_2^2 r + \frac{2C_1 C_2}{r} \right) = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (14.95)$$

$$P - P_o = \rho \left(-\frac{C_1^2}{2r^2} + \frac{C_2^2 r^2}{2} + 2C_1 C_2 \ln r \right), \quad (14.96)$$

donde las constantes C_1 y C_2 son las dadas en (14.92)-(14.93).

El esfuerzo viscoso viene dado por

$$\tau'_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = -\frac{2C_1 \mu}{r^2} = - \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \right) \frac{2\mu}{r^2}. \quad (14.97)$$

El par por unidad de longitud axial que habría que hacer para mover, por ejemplo, el cilindro exterior de radio R_2 sería:

$$\text{Par} = -2\pi R_2^2 \tau'_{r\theta}(r = R_2) = 4\pi\mu \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{R_1^{-2} - R_2^{-2}} \right) \quad (14.98)$$

(Obsérvese que el par es independiente de r , por lo que sería el mismo, pero cambiado de signo, en $r = R_1$.) La medida experimental de este par es un procedimiento comunmente usado para determinar la viscosidad de los líquidos. Normalmente se mantiene fijo el cilindro exterior ($\Omega_2 = 0$) y se hace girar el interior con velocidad angular Ω , siendo el par necesario $4\pi\mu\Omega/(R_1^{-2} - R_2^{-2})$.

Casos particulares del movimiento anterior serían, por ejemplo, el generado en el interior de un único cilindro de radio R que gira con velocidad Ω . En este caso, la regularidad en el eje exige $C_1 = 0$ en (14.93), y el líquido gira como un sólido rígido:

$$u = \Omega r \quad (14.99)$$

Si en el exterior de este único cilindro que gira existe una masa ilimitada de líquido, su distribución de velocidades viene dada por [$C_2 = 0$ en (14.93)] para que $u \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$]:

$$u = \frac{R^2\Omega}{r} \quad (14.100)$$

Este movimiento es irrotacional, siendo la circulación alrededor de cualquier curva cerrada que rodee al cilindro $2\pi R^2\Omega$. El par necesario para mover el cilindro (en el supuesto de que sólo hay fluido en el exterior) sería $4\pi\mu R^2\Omega$.

La combinación de un movimiento giratorio dado por (14.99) para $r \leq R$ y del *torbellino potencial* (14.100) para $r \geq R$ se suele denominar **torbellino o vórtice de Rankine**.

14.2.3. Difusión de un torbellino potencial

Como ejemplo simple de un movimiento no estacionario, consideremos la disipación por viscosidad de un torbellino bidimensional cuyo campo de velocidad inicial es

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (14.101)$$

donde $\Gamma = \text{constante}$ es la intensidad (circulación) del torbellino. Este campo de velocidades puede ser generado, por ejemplo, por un cilindro de radio R que gire en el seno del líquido con velocidad angular Ω [ecuación (14.100)] en

el límite formal $R \rightarrow 0, \Omega \rightarrow \infty$, de forma que $R^2\Omega \rightarrow \text{constante} = \Gamma/2\pi$. En términos de la vorticidad,

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \vec{e}_z \equiv \omega \vec{e}_z, \quad (14.102)$$

ω es cero en todo el campo fluido excepto en el eje, que es infinita, pero con circulación Γ constante alrededor de cualquier curva cerrada que rodee al eje. Es decir, la vorticidad está *concentrada* inicialmente en el eje de simetría y queremos averiguar cómo se difunde en el seno del fluido a lo largo del tiempo. El torbellino bidimensional (14.101) se suele denominar **torbellino potencial**, y está originado por una *línea de vorticidad* infinita situada en el eje de simetría.

El problema viene gobernado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu (\nabla^2 \vec{v})_\theta = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right), \quad (14.103)$$

$$u(r, 0) = \Gamma/2\pi r, \quad r > 0; \quad u(0, t) \neq \infty, \quad t > 0; \quad u(\infty, t) = 0. \quad (14.104)$$

Este problema es más fácil de resolver utilizando la vorticidad (14.102) en lugar de la velocidad, siendo, además, más directa su interpretación física. Como \vec{v} y $\vec{\omega}$ son perpendiculares y se trata del movimiento de un líquido, la ecuación de la vorticidad (7.43) se reduce a una ecuación de difusión o conducción de calor con simetría cilíndrica:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right). \quad (14.105)$$

La razón por la cual la ecuación anterior para ω es (ligeramente) más simple que la ecuación (14.104) para u reside, simplemente, en que $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ está dirigida según el eje *cartesiano* z , mientras que $\vec{v} = u \vec{e}_\theta$ es a lo largo de circunferencias; así, mientras $\nabla^2 \vec{\omega} = (\nabla^2 \omega) \vec{e}_z$, $\nabla^2 \vec{v} = (\nabla^2 u - u/r^2) \vec{e}_\theta$ (ver sección 1.1). La ecuación anterior hay que resolverla con las condiciones iniciales y de contorno

$$\omega(r, 0) = 0, \quad r > 0; \quad \omega(0, t) \neq \infty, \quad t > 0; \quad \omega(\infty, t) = 0. \quad (14.106)$$

Este problema es similar al de Rayleigh (sección 14.1.4), pero con simetría cilíndrica. Mediante análisis dimensional se demuestra que admite solución de

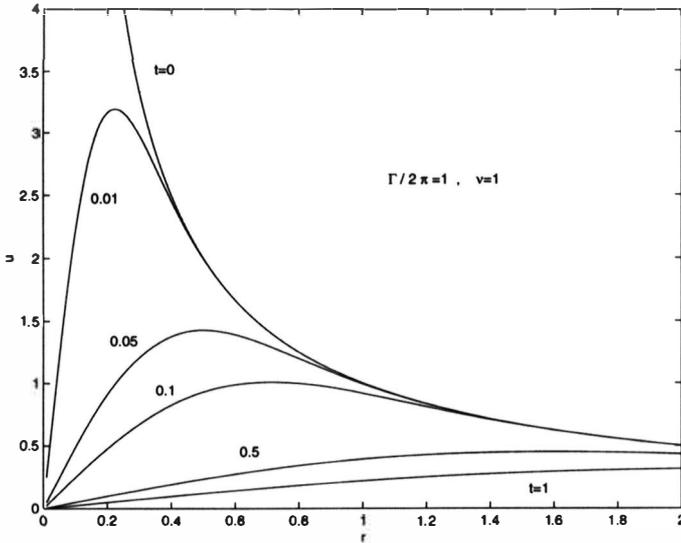


Figura 14.4: Difusión de un torbellino potencial: velocidad u dada por (14.108) en función de r para distintos tiempos. Las unidades son tales que $\Gamma/2\pi = 1$ y $\nu = 1$.

semejanza, de forma que $\omega\nu t/\Gamma$ (ó ur/Γ) es función sólo de la variable de semejanza $r/\sqrt{\nu t}$. La solución es:

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (14.107)$$

La velocidad viene dada por (véase figura 14.4)

$$u(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^r \omega r dr = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right] \quad (14.108)$$

Para r pequeño ($r \ll \sqrt{4\nu t}$), el movimiento es un giro como sólido rígido con velocidad angular $\Gamma/8\pi\nu t$,

$$u(r, t) \simeq \frac{\Gamma r}{8\pi\nu t}; \quad (14.109)$$

mientras que para distancias grandes del eje ($r \gg \sqrt{4\nu t}$) el movimiento es irrotacional, tal y como era inicialmente,

$$u(r, t) \simeq \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (14.110)$$

Es decir, el movimiento se asemeja a un torbellino de Rankine, excepto para $r = O(\sqrt{4\nu t})$. Para $t \rightarrow \infty$, todo el fluido se mueve como un sólido rígido de acuerdo con (14.109), pero con velocidad angular que tiende a cero. En cuanto a la vorticidad, ésta se *difunde* radialmente desde su valor infinito inicial en el eje.³ A medida que transcurre el tiempo, la vorticidad va *impregnando* al fluido, y va transformando el movimiento irrotacional inicial (14.101) en el movimiento rotacional (14.109) (giro como sólido rígido; ver figura 14.4).

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 4.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo II.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulo III.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulo V.

³El problema es similar al de conducción de calor en un sólido uniforme desde una fuente infinita de calor situada en $r = 0$ para $t = 0$, ya que la ecuación y las condiciones de contorno de estos dos problemas son las mismas.

Capítulo 15

Movimiento laminar de líquidos en conductos

15.1. Corriente de Poiseuille en un conducto circular

Considérese un conducto infinito de sección circular constante. El flujo unidireccional y estacionario originado por un gradiente de presión reducida $p_l \equiv -\partial(p + \rho U)/\partial x$ constante, donde x es la coordenada axial a lo largo del conducto, viene gobernado por la ecuación (14.15), que en coordenadas cilíndricas (x, r, θ) se escribe

$$0 = p_l + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad , \quad (15.1)$$

siendo $\vec{u} = u\vec{e}_x$. La solución general de esta ecuación es

$$u = -\frac{p_l r^2}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2 \quad . \quad (15.2)$$

Como la velocidad no puede ser singular en el eje, $C_1 = 0$; por otra parte, la velocidad debe ser nula en la pared del conducto, $r = D/2$, donde D es el diámetro del conducto, lo cual proporciona el perfil parabólico de velocidad

$$u = \frac{p_l D^2}{16\mu} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] \quad . \quad (15.3)$$

El esfuerzo de fricción en la pared es

$$\tau_f \equiv (-\tau'_{rx})_{r=D/2} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=D/2} = \frac{p_l D}{4}, \quad (15.4)$$

mientras que el caudal que circula por el conducto es

$$Q \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{D/2} dr r u = \frac{\pi D^4}{128\mu} p_l = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}. \quad (15.5)$$

Esta es la conocida **ley de Hagen-Poiseuille**, que estos autores obtuvieron experimentalmente (Hagen, 1839; Poiseuille, 1840) relacionando el caudal que circula por un conducto circular con la caída de presión entre sus extremos. En particular, si en dos secciones (1 y 2) de un conducto separadas por una longitud L ($L \gg D$) se conocen las presiones, p_1 y p_2 (en general la relación anterior es válida para la presión reducida $P = p + \rho U$, pero Hagen y Poiseuille consideraron tubos horizontales y sin fuerza másica alguna en la dirección del movimiento), como p_l es constante, se tiene que $p_l = (p_1 - p_2)/L$, y la ecuación anterior queda

$$Q = \frac{\pi D^4 (p_1 - p_2)}{128\mu L}, \quad (15.6)$$

que es la expresión obtenida experimentalmente por Hagen y Poiseuille.¹ Este resultado confirmó experimentalmente la hipótesis de no deslizamiento del fluido en la pared hecha por Stokes (la cual se ha utilizado como condición de contorno en la pared), además de la ley de Stokes para fluidos Newtonianos. Por otra parte, la comparación de (15.6) con los resultados experimentales es un método directo muy simple para determinar la viscosidad de un fluido.

La fuerza total que por fricción el fluido ejerce sobre la pared de un conducto horizontal entre las secciones 1 y 2 se obtiene sustituyendo $p_l = (p_1 - p_2)/L$ en (15.4):

$$F_f = \pi D L \tau_f = \pi D^2 (p_1 - p_2) / 4, \quad (15.7)$$

¹El médico francés Poiseuille, que estudiaba la circulación de la sangre, expresó esta ley de la siguiente forma: el tiempo que tarda un determinado volumen de líquido en salir del conducto es, por unidad de volumen (es decir, Q^{-1}), proporcional a la longitud del conducto, inversamente proporcional a la diferencia de presiones entre los extremos e inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro. Por supuesto, ni Hagen ni Poiseuille se dieron cuenta que la constante de proporcionalidad está relacionada con la viscosidad del líquido, puesto que la primera deducción teórica del perfil de velocidades (15.3) no fue hecha hasta 1859 por Hagenbach y F. Neumann, que la obtuvieron independientemente.

expresión que se podría haber obtenido aplicando, simplemente, la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en forma integral al volumen contenido entre las dos secciones y la pared del conducto.

El perfil de velocidad (15.3) se suele también expresar en términos de la velocidad media V , definida como

$$V \equiv \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{D^2 p_l}{32\mu} \quad , \quad (15.8)$$

teniéndose

$$u = 2V \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] . \quad (15.9)$$

Es decir, la velocidad máxima (en el eje) es dos veces la media. Por otra parte, la expresión de Hagen-Poiseuille (15.5) a veces se utiliza en función del número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad , \quad (15.10)$$

en la forma

$$\frac{(p + \rho U)_1 - (p + \rho U)_2}{\rho V^2 / 2} = \frac{L}{D} \frac{64}{Re} \quad \text{o} \quad \lambda \equiv \frac{4\tau_f}{\rho V^2 / 2} = \frac{64}{Re} . \quad (15.11)$$

Como se comentó en la sección 10.4 (ver lección 30 para más detalles), la solución anterior, aunque en teoría es válida para cualquier número de Reynolds, se hace inestable para Re mayor que un cierto valor crítico Re^* (aproximadamente igual a 2300 en las condiciones más desfavorables), dejando de tener significado físico para $Re > Re^*$. El flujo se hace entonces turbulento y será considerado en la última parte. Ya en 1839, casi 50 años antes que Reynolds hiciera sus famosos experimentos, Hagen indicó la existencia de dos regímenes diferenciados en el flujo de un líquido por un conducto. Hagen observó que la caída de presión, $\Delta p = p_1 - p_2$, era lineal con la velocidad media cuando ésta era menor que un cierto valor [ley de Hagen - Poiseuille (15.11)], y que por encima de ese valor, pasada una cierta transición, Δp era proporcional a la velocidad media al cuadrado, aproximadamente. Esta última ley es equivalente a decir que la expresión (15.11) es independiente del número de Reynolds, lo cual veremos que ocurre en tubos rugosos para Re mayores que un cierto valor Re^r , que depende de la rugosidad. Para números de Reynolds intermedios ($Re^* < Re < Re^r$), la dependencia de Δp con la velocidad media

sigue leyes intermedias entre la dependencia lineal y la cuadrática. En particular, para $2300 < Re < 10^4$, aproximadamente, se produce la *transición* entre los regímenes laminar y turbulento, e Δp varía de manera fluctuante con V ; para $10^4 < Re < Re^r$, Δp tiene una dependencia logarítmica con Re (y por tanto con V) que se obtendrá en la lección 32.

15.2. Flujo laminar en conductos de sección arbitraria lentamente variable

La solución anterior, que es exacta para conductos infinitos de sección circular constante, es aproximadamente válida para conductos de sección *lentamente variable* cuando el número de Reynolds es pequeño (fuerzas viscosas dominantes frente a las inerciales; ver más abajo para una especificación más precisa).

En efecto. Considérese un conducto cuya sección (que se supondrá de forma arbitraria) varía lentamente; es decir, si D es un diámetro característico y L la longitud del conducto, $D/L \ll 1$. Por otra parte, el conducto no tiene que ser necesariamente rectilíneo, pero se supone que si es curvo, lo es *suavemente*; es decir, $D/R_c \ll 1$, donde R_c es cualquier radio de curvatura del conducto. En estas condiciones es lícito tomar, en primera aproximación y con errores del orden de $D/R_c \ll 1$, ejes cartesianos, siendo el eje x la dirección axial a lo largo del conducto. La ecuación de continuidad para el movimiento del líquido,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad , \quad (15.12)$$

nos dice que

$$\frac{V}{L} \sim \frac{V_T}{D} \quad , \quad (15.13)$$

donde V es el orden de magnitud de la velocidad axial a lo largo del conducto (v_x) y V_T es el orden de magnitud de las velocidades en las direcciones transversales y y z . Por tanto,

$$V_T \sim \frac{D}{L} V \ll V \quad , \quad (15.14)$$

y el movimiento se puede considerar *casi unidireccional*. Las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x, y, z se escriben:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (15.15)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = - \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (15.16)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (15.17)$$

En los términos correspondientes a las fuerzas viscosas, está claro que los sumandos que involucran $\partial^2/\partial x^2$ son despreciables frente a los otros con errores del orden de $(D/L)^2 \ll 1$.

Se supondrá, en primer lugar, que los términos de fuerzas viscosas son dominantes frente a los convectivos. Teniendo en cuenta la ecuación (15.15), esta condición implica

$$\rho \frac{V^2}{L} \ll \mu \frac{V}{D^2}, \quad (15.18)$$

y de las ecuaciones (15.16)-(15.17)

$$\rho \frac{V_T^2}{D} \ll \mu \frac{V_T}{D^2}; \quad (15.19)$$

ambas expresiones proporcionan la condición:

$$Re \frac{D}{L} \ll 1, \quad (15.20)$$

donde $Re = VD/\nu$ es el número de Reynolds basado en el diámetro. Obsérvese que la condición de términos viscosos dominantes frente a los convectivos no necesariamente implica que $Re \ll 1$, puesto que $D/L \ll 1$, siendo una consecuencia, mayormente, de la casi unidireccionalidad del movimiento; por tanto, esta condición puede verificarse, incluso, para Re relativamente altos.

Supondremos, además, que el movimiento es casi estacionario. Comparando los términos de aceleración local con los viscosos, esta hipótesis requiere que

$$\frac{D}{L} ReSt = \frac{D^2}{\nu t_o} \ll 1, \quad (15.21)$$

donde t_o es un tiempo característico de variación de las magnitudes fluidas. Con estas hipótesis, las variaciones transversales de $p + \rho U$ son despreciables frente a sus variaciones longitudinales: de (15.15) se tiene

$$\frac{\Delta_L(p + \rho U)}{L} \sim \mu \frac{V}{D^2}, \quad (15.22)$$

donde Δ_L denota variaciones longitudinales a lo largo del conducto, y de (15.16)-(15.17),

$$\frac{\Delta_T(p + \rho U)}{D} \sim \mu \frac{V_T}{D^2}, \quad (15.23)$$

por lo que

$$\frac{\Delta_T(p + \rho U)}{\Delta_L(p + \rho U)} \sim \left(\frac{D}{L}\right)^2 \ll 1. \quad (15.24)$$

Consecuentemente, las dos ecuaciones transversales pueden no tenerse en cuenta en primera aproximación y suponer que

$$p + \rho U \neq f(y, z) \quad ; \quad (15.25)$$

es decir, $p + \rho U$ es constante en cada sección del conducto (con errores del orden de $D^2/L^2 \ll 1$).²

Con todas estas aproximaciones, con errores del orden de ReD/L , $(D/L)^2$ y $D^2/\nu t_o$, las ecuaciones de cantidad de movimiento se reducen a

$$0 = p_t + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (15.26)$$

donde $u \equiv v_x$ y $p_t = -\partial(p + \rho U)/\partial x$, que depende sólo de x y de t (a través de las condiciones de contorno, puesto que el movimiento es casi unidireccional y casi estacionario). Como condiciones de contorno, u debe ser finita en el interior de la sección $S(x; y, z)$ y $u = 0$ sobre el contorno $c(x; y, z) = 0$. Por tanto, el fluido se comporta en cada sección del conducto como si éste tuviese longitud infinita y sección constante (la local); la coordenada x y el tiempo actúan como parámetros. Utilizando las variables adimensionales

²Se puede comprobar que esta aproximación es independiente de la hipótesis $ReD/L \ll 1$, siendo una consecuencia de $D/L \ll 1$ exclusivamente.

$$v = \frac{\mu}{p_l D^2} u \quad , \quad \xi = \frac{y}{D} \quad , \quad \eta = \frac{z}{D} \quad , \quad (15.27)$$

donde $D = D(x)$ y $p_l = p_l(x, t)$, la ecuación anterior y la condición de contorno en la pared se transforman en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = -1, \quad (15.28)$$

$$v = 0 \quad \text{en} \quad c(\xi, \eta) = 0. \quad (15.29)$$

El caudal viene dado por

$$Q = \int_{S(x; y, z)} u \, dydz = \int_{S(\xi, \eta)} \frac{p_l D^2}{\mu} v D^2 d\xi d\eta = \frac{p_l D^4}{\mu} \Gamma, \quad (15.30)$$

donde

$$\Gamma \equiv \int_S v \, d\xi d\eta \quad , \quad (15.31)$$

es un *número* que depende del tipo de sección (obsérvese que en las ecuaciones (15.28)-(15.29) no aparece ningun parámetro físico). La relación anterior es una generalización de la ley de Hagen-Poiseuille para secciones de forma arbitraria (lo cual está reflejado en Γ) y que pueden variar (lentamente) con x [contemplado en $p_l(x, t)$ y $D(x)$; téngase en cuenta que $p_l(x, t)D^4(x)$ no puede depender de x , puesto que Q es función, a lo sumo, de t].

Para una sección circular, la ecuación (15.28) y las condiciones de contorno se escriben, en coordenadas cilíndricas con $\xi = r/D$,

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = -1, \quad (15.32)$$

$$v(\xi = 1/2) = 0 \quad , \quad v(\xi = 0) \neq \infty \quad , \quad (15.33)$$

que proporciona

$$v = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \quad (15.34)$$

y

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \xi^2 \right) \xi d\xi = \frac{\pi}{128} \quad , \quad (15.35)$$

lo cual está de acuerdo con (15.3) y (15.5). Como otro ejemplo, en el caso de un **flujo a través de una sección anular**, $R_1 < r < R_2$, la ecuación (15.32) sigue siendo válida, pero cambian las condiciones de contorno:

$$v(\xi = a) = v(\xi = 1) = 0 \quad , \quad (15.36)$$

donde se ha tomado R_2 para adimensionalizar r , $\xi = r/R_2$, y $a = R_1/R_2 < 1$. La solución es

$$v = \frac{1}{4} \left[1 - \xi^2 - \frac{1 - a^2}{\ln a} \ln \xi \right] \quad , \quad (15.37)$$

que proporciona

$$\Gamma = \frac{\pi}{8} \left[1 - a^4 + \frac{(1 - a^2)^2}{\ln a} \right] \quad . \quad (15.38)$$

El perfil de velocidades anterior se asemeja a una parábola que recorre la región anular, cuyo máximo está en

$$\frac{r}{R_2} = \left(\frac{1 - a^2}{2 \ln(1/a)} \right)^{1/2} \quad . \quad (15.39)$$

15.3. Tubos de longitud finita. Efecto de entrada

La ley de Hagen-Poiseuille (15.5) [o (15.30)] es válida para tubos infinitos (si $Re \leq 2300$ para conductos circulares), en los que el perfil de velocidades viene dado por (15.3). Obviamente, no existen conductos infinitos y en la región de entrada de los mismos el perfil de velocidades no es el parabólico (15.3). Justo en la sección de entrada la velocidad es prácticamente uniforme e igual a u_e (ver figura 15.1). Ya dentro del conducto, el efecto de frenado por viscosidad del fluido en la pared va modificando el perfil de velocidad de forma que existe un núcleo central no viscoso de velocidad uniforme, en el cual el fluido se acelera al ser el caudal constante, y una capa límite cerca de la pared donde la viscosidad sí es importante, cuyo espesor va creciendo hasta que la viscosidad *impregna* todo el fluido y se llega al perfil de velocidad *desarrollado* de Poiseuille (donde la velocidad en el centro es $2u_e$). La longitud (de entrada) L_e en la cual el fluido pasa de tener velocidad uniforme hasta llegar al perfil parabólico se puede estimar teniendo en cuenta que en esta región el término convectivo de la ecuación de cantidad de movimiento es tan importante como el viscoso:

$$|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}| \sim \rho u_e^2 / L_e \sim |\mu \nabla^2 \vec{v}| \sim \mu u_e / D^2 \quad , \quad (15.40)$$

de donde

$$\frac{L_e}{D} \sim Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} \quad . \quad (15.41)$$

Experimentalmente se encuentra que $L_e/D \simeq 0,06Re$; por tanto, la longitud de entrada máxima, para $Re = Re^* \simeq 2300$, es $L_e \simeq 138D$. La caída de presión en esta región de entrada es despreciable frente a la total en todo el conducto de longitud L si

$$\frac{L_e}{L} \sim Re \frac{D}{L} \ll 1 \quad , \quad \frac{\Delta_e(p + \rho U)}{\Delta_L(p + \rho U)} \sim \frac{\rho u_e^2}{\mu u_e L / D^2} \sim Re \frac{D}{L} \ll 1 \quad , \quad (15.42)$$

lo cual coincide con la hipótesis de validez de la ley de Hagen-Poiseuille.

En el caso en que L_e sea del orden de L (tubos cortos), la caída de presión en la región de entrada es una fracción importante de la total, siendo necesario obtener el campo de velocidades y de presiones en dicha región. Para ello hay que resolver el problema reteniendo los términos convectivos y viscosos en la ecuación de cantidad de movimiento. En un conducto circular, si $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_r$, tomando las variables adimensionales

$$\xi = \frac{2x}{DRe} \quad , \quad \eta = \frac{2r}{D} \quad , \quad \bar{u} = u/u_e \quad , \quad \bar{v} = v/u_e \quad , \quad \bar{p} = (p + \rho U) / \rho u_e^2 \quad , \quad (15.43)$$

las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento según el eje x en coordenadas cilíndricas se escriben

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \bar{v}) = 0 \quad , \quad (15.44)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right) \quad , \quad (15.45)$$

$$\xi = 0 \quad , \quad \bar{u} = 1 \quad , \quad \bar{v} = 0 \quad , \quad \bar{p} = \bar{p}_e \quad ; \quad \eta = 1 \quad , \quad \bar{u} = \bar{v} = 0 \quad , \quad (15.46)$$

donde se ha supuesto que el movimiento es estacionario y que $D \ll L$, lo cual hace innecesaria, en primera aproximación y con errores del orden $D^2/L^2 \ll 1$, la ecuación de cantidad de movimiento según la dirección radial. La ecuación

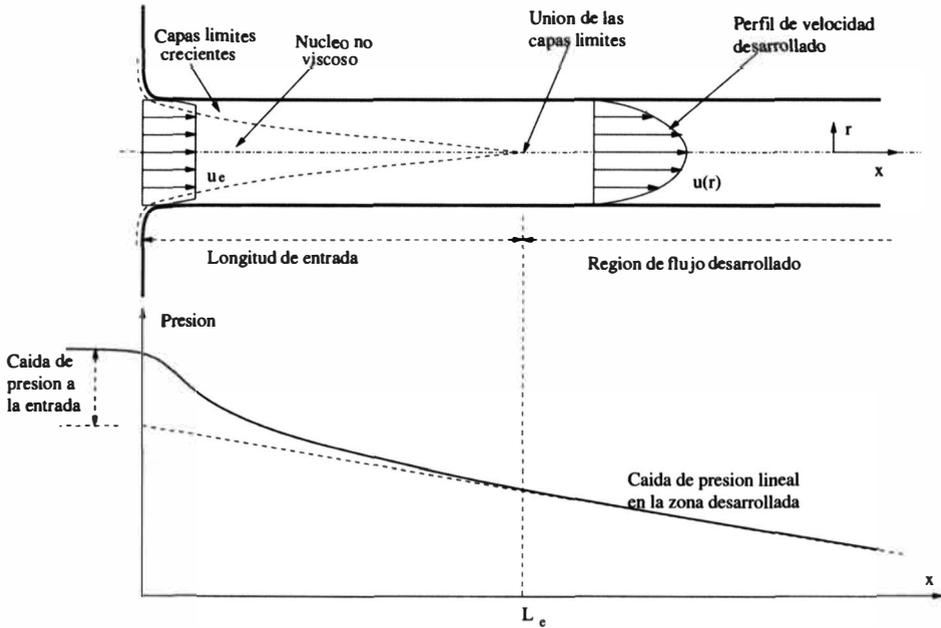


Figura 15.1: Perfil de velocidad y caída de presión en la región de entrada (adaptada de White, 1983).

(15.45) es parabólica, y el sistema de ecuaciones se resuelve numéricamente sin excesiva dificultad, proporcionando la caída de presión $\bar{p}_e - \bar{p}(\xi)$. Sin embargo, muchas veces se utiliza una estimación de esta caída de presión obtenida mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento a un volumen de control constituido por la pared del conducto, la sección de entrada $x = 0$ donde $u = u_e$, y la sección de salida $x = x$, donde se supone que se ha alcanzado ya el perfil parabólico $u = V_{max}[1 - (2r/D)^2]$. La ecuación de conservación de la masa proporciona:

$$-u_e \pi \frac{D^2}{4} + \int_0^{D/2} V_{max} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] 2\pi r dr = 0 \quad , \quad (15.47)$$

es decir, $V_{max} = 2u_e$, como ya sabemos. La ecuación de cantidad de movimiento según el eje x da (suponiendo que no hay fuerzas másicas, es decir, el conducto es horizontal):

$$-\rho u_e^2 \pi \frac{D^2}{4} + \int_0^{D/2} 4\rho u_e^2 \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right]^2 2\pi r dr = [p_e - p(x)] \pi \frac{D^2}{4} + \int_0^x \tau_f(x, D/2) \pi D dz \quad (15.48)$$

de donde

$$\frac{p_e - p(x)}{\rho u_e^2/2} = \frac{2}{3} - \frac{8}{\rho D u_e^2} \int_0^x \tau_f(x, D/2) dx \quad (15.49)$$

Obviamente, $\tau_f \equiv \mu(\partial u/\partial r)_{r=D/2}$ no se conoce puesto que para ello habría que resolver el problema (15.44)-(15.46). Pero, aproximadamente, podemos suponer que τ_f viene dado por el perfil de velocidades parabólico, obteniéndose

$$\frac{p_e - p(x)}{\frac{1}{2}\rho u_e^2} = \frac{2}{3} + \frac{64}{ReD} \frac{x}{D}, \quad Re = \frac{\rho u_e D}{\mu} \quad (15.50)$$

Se observa que el segundo sumando es el mismo que el proporcionado por la ley de Hagen-Poiseuille [ecuación (15.11)], siendo dominante frente al primero (corrección debida al efecto de entrada) cuando $ReD/x \ll 1$, como ya sabemos. Si se resuelve numéricamente el problema (15.44)-(15.46) se encuentra que $(p_e - p(x))/\frac{1}{2}\rho u_e^2$ se aproxima bastante rápidamente a $k + 64x/(ReD)$ cuando x crece, siendo prácticamente coincidente cuando $64x/(ReD) \simeq 1$, pero con $k \simeq 1,16$ en vez de $2/3$ (esta rápida aproximación es debida a que $64 \gg k$).

15.4. Flujo laminar no estacionario en un conducto circular

Para terminar esta lección se considerará la corriente de Poiseuille no estacionaria en un conducto de sección circular; en particular, consideraremos el transitorio desde el reposo hasta que se alcanza el perfil de velocidad de Poiseuille (15.3) cuando en un conducto de longitud $L \gg D$ se aplica un gradiente de presión constante $p_l = -\partial(p + \rho U)/\partial x = [(p + \rho U)_1 - (p + \rho U)_2]/L$. La ecuación de cantidad de movimiento axial y las condiciones iniciales y de contorno son:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = p_l + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (15.51)$$

$$t = 0, \quad u = 0 \quad (0 \leq r \leq D/2); \quad r = D/2, \quad u = 0; \quad r = 0, \quad u \neq \infty. \quad (15.52)$$

Esta ecuación se puede hacer homogénea (eliminar la constante p_l) mediante el cambio de variable

$$U = \frac{p_l D^2}{16\mu} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right] - u, \quad (15.53)$$

donde el primer sumando del segundo miembro es el perfil de velocidades de Poiseuille (15.3), o solución estacionaria a la que tiende u cuando $t \rightarrow \infty$ [cuando el primer miembro de (15.51) se hace cero]. La ecuación queda:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right). \quad (15.54)$$

Aunque el tiempo que tarda en alcanzarse la solución estacionaria (que en la nueva variable es $U = 0$) es infinito, el orden de magnitud efectivo de este tiempo se obtiene por comparación de los dos términos de la ecuación anterior, resultando que este tiempo es del orden de $t_o \sim D^2/\nu$. Esto nos sugiere introducir las variables adimensionales

$$\tau = \frac{t}{t_o} = \frac{t4\nu}{D^2}, \quad \xi = \frac{2r}{D}, \quad v = \frac{U16\mu}{p_l D^2}, \quad (15.55)$$

que transforman (15.54) y (15.52) en

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \quad (15.56)$$

$$\tau = 0, \quad v = 1 - \xi^2 \quad (0 \leq \xi \leq 1); \quad \xi = 0, \quad v \neq \infty; \quad \xi = 1, \quad v = 0. \quad (15.57)$$

La solución general de la ecuación anterior se puede obtener por separación de variables:

$$v(\xi, \tau) = F(\tau)G(\xi), \quad (15.58)$$

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{G\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dG}{d\xi} \right) = -\lambda^2, \quad (15.59)$$

donde λ es una constante, en principio arbitraria. La solución es:

$$F = Ce^{-\lambda^2\tau}, \quad (15.60)$$

$$G = AJ_o(\lambda\xi) + BY_o(\lambda\xi), \quad (15.61)$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias y J_o y Y_o son funciones de Bessel de orden cero. Como Y_o es singular en el eje ($\xi = 0$), se tiene que $B = 0$. Por otra parte, $G(\xi)$ tiene que anularse en $\xi = 1$, por lo que la constante λ no puede ser cualquiera, sino un *cero* de J_o . Teniendo en cuenta que las funciones $J_o(\lambda_n\xi)$, donde los λ_n son los ceros positivos de J_o , forman un conjunto completo de funciones (definidas en $0 \leq \xi \leq 1$), la solución se puede escribir como:

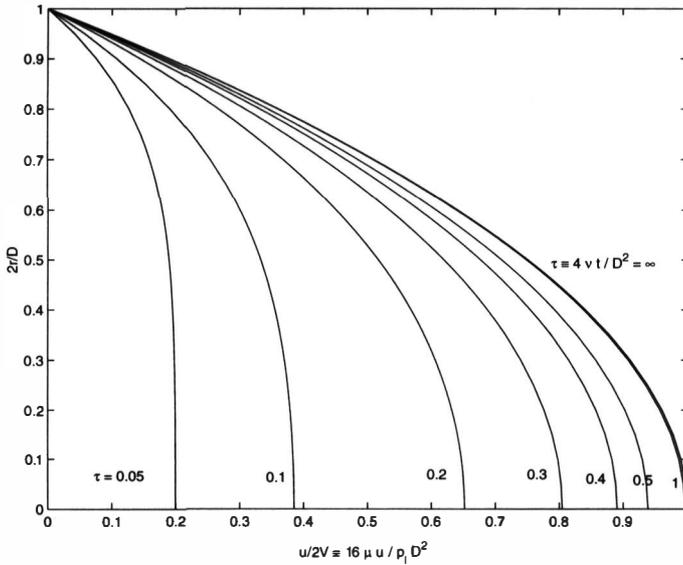


Figura 15.2: Puesta en marcha de un flujo laminar en un tubo circular: Perfiles de velocidad para distintos tiempos.

$$v(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \xi) e^{-\lambda_n^2 \tau} \quad (15.62)$$

Las constantes A_n se obtienen mediante la condición inicial, que no se ha impuesto todavía:

$$1 - \xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n \xi) \quad (15.63)$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones $J_0(\lambda_n \xi)$,

$$\int_0^1 J_0(\lambda_n \xi) J_0(\lambda_m \xi) \xi d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2} [J_1(\lambda_m)]^2 & \text{si } m = n \end{cases} \quad (15.64)$$

multiplicando (15.63) por $\xi J_0(\lambda_m \xi)$ e integrando entre $\xi = 0$ y $\xi = 1$, se obtiene

$$A_m = \frac{8}{\lambda_m^3 J_1(\lambda_m)} \quad (15.65)$$

donde también se ha hecho uso de

$$\int_0^1 (1 - \xi^2) J_0(\lambda_m \xi) \xi d\xi = \frac{4J_1(\lambda_m)}{\lambda_m^3} \quad , \quad (15.66)$$

siendo J_1 la función de Bessel de orden uno.³ Así, la solución se puede expresar en la forma

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \xi) e^{-\lambda_n^2 \tau} \quad , \quad (15.67)$$

o, en variables dimensionales,

$$u(r, t) = \frac{p_l D^2}{16\mu} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} J_0 \left(\lambda_n \frac{2r}{D} \right) e^{-\lambda_n^2 4\nu t / D^2} \right] . \quad (15.68)$$

La solución es suma de un término transitorio, expresado como una serie infinita, y la corriente estacionaria de Poiseuille (15.3), a la cual tiende la solución cuando $t \rightarrow \infty$. Cuando t es mayor que aproximadamente $t_o = D^2/4\nu$, el término exponencial se hace muy pequeño y la solución se puede aproximar por la corriente de Poiseuille, lo cual es otra forma de ver que t_o es el tiempo característico en el que la solución alcanza el estado estacionario [comparar con la condición (15.21) de validez de la solución de Poiseuille]. Algunos perfiles $u/u_{max} \equiv u/2V \equiv u16\mu/D^2 p_l$ se representan en la figura 15.2. Esta distribución de velocidad fue calculada, originariamente, por Szymanski en 1932. En la figura se han tomado 5 términos de la serie (15.68), los cuales son suficientes para que la serie converja con errores menores del uno por ciento para tiempos pequeños y sea prácticamente exacta para $\tau = O(1)$.

Referencias.

- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 4.
- R.B. BIRD et al. 1960. Capítulos 2 y 4.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 6.

³Para las propiedades generales de las funciones de Bessel, así como su uso en desarrollos en serie, puede consultarse, por ejemplo, R.V. Churchill y J.M. Brown, 1987, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, capítulo 8.

Capítulo 16

Lubricación fluidomecánica

16.1. Introducción

Sabido es que dos superficies sólidas en contacto pueden deslizar mucho más fácilmente una sobre otra si entre ellas existe una capa de fluido. Sin un lubricante, el rozamiento sería mucho mayor, originando el desgaste de las superficies sólidas, e incluso su deformación debido al calentamiento por fricción. Bajo ciertas condiciones, en la capa de fluido se genera una sobrepresión que puede sustentar a uno de los sólidos en contacto, facilitando su deslizamiento. Por ejemplo, si dejamos caer una hoja de papel sobre un suelo liso, a veces ésta se desliza suavemente largo tiempo sobre el suelo debido a la sobrepresión creada en la capa de aire en movimiento entre la hoja y el suelo, que sustenta a la hoja de papel. Existen muchas situaciones de interés en la práctica ingenieril donde se hace uso de este fenómeno. Un ejemplo típico que consideraremos con algún detalle es el cojinete cilíndrico: un eje gira en el interior de una carcasa, ambos cilíndricos; para reducir la fricción y evitar el contacto entre las superficies sólidas se introduce un fluido entre ellas. Este fluido se elije de tal modo que, para la velocidad de giro dada, la sobrepresión originada en la capa fluida por el movimiento (que puede llegar a ser muy importante) sea suficiente como para sustentar el peso del eje y todo lo gira con él, evitando así el contacto entre las superficies y, por tanto, el desgaste. Básicamente, este fenómeno se basa en que, al ser muy delgada la capa fluida, los esfuerzos de fricción originados por el movimiento son muy grandes, los cuales pueden dar lugar a gradientes de presión muy importantes si se elije apropiadamente la geometría de la capa fluida. Para ilustrar el fenómeno consideraremos primero el movimiento en el interior de una capa fluida delgada bidimensional entre dos superficies sólidas originado por un gradiente de presión (reducida) y por

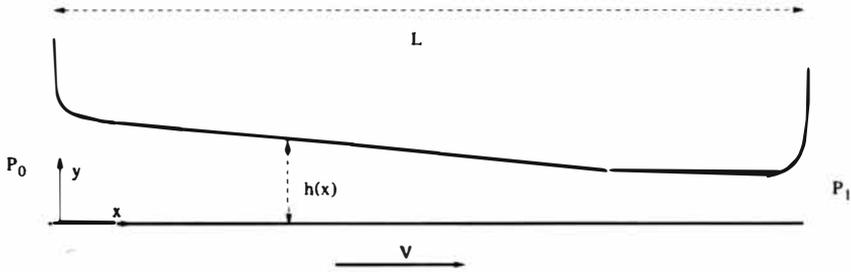


Figura 16.1: Película líquida bidimensional.

el movimiento de una de las superficies sólidas, lo cual es una generalización del flujo de Couette y de Poiseuille considerado en la sección 14.1.3. Este problema se generalizará a capas delgadas tridimensionales, obteniéndose la denominada Ecuación de Reynolds de la lubricación fluidomecánica. Por último se considerará el caso particular de los cojinetes cilíndricos, de gran interés práctico.

16.2. Movimiento en películas delgadas. Efecto cuña

Considérese una película líquida¹ bidimensional, confinada por una superficie plana y otra superficie no necesariamente plana, de forma que el espesor de la película es una función $h(x)$ conocida (ver figura 16.1). El líquido de esta película se mueve debido al movimiento de la superficie plana paralelamente a sí misma con velocidad V en relación a la otra superficie y debido a una diferencia de presión reducida, $P_0 - P_1 \equiv p_0 + \rho U_0 - (p_1 + \rho U_1)$, entre sus extremos, donde U es el potencial de fuerzas másicas. Supondremos que la capa líquida es muy delgada, es decir,

$$h \ll L \quad (16.1)$$

para cualquier x . De la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad (16.2)$$

donde $\vec{v} \equiv u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$, esta condición implica que el movimiento es casi unidireccional: $v \sim (h/L)u \ll u \sim V$. Las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x e y se escriben

¹En general, todo lo que se va a ver a continuación es válido si el flujo se puede considerar como incompresible, no necesariamente de un líquido

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (16.3)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (16.4)$$

donde se ha despreciado en los términos viscosos $\partial^2 u / \partial x^2$ y $\partial^2 v / \partial x^2$ frente a $\partial^2 u / \partial y^2$ y $\partial^2 v / \partial y^2$, respectivamente, con errores de orden de $(h/L)^2$. También se ha supuesto que el movimiento es casi estacionario, lo cual implica que, o bien V , P_o y P_1 son independientes del tiempo (en cuyo caso el movimiento sería estrictamente estacionario), o bien si varían con el tiempo lo hacen tan *lentamente* que el tiempo característico de variación, t_o , satisface

$$\frac{h_o^2}{t_o \nu} \ll 1, \quad (16.5)$$

donde h_o es un valor característico de $h(x)$. Por último, supondremos que las fuerzas viscosas son dominantes frente a las inerciales, es decir,

$$\frac{V h_o}{\nu} \frac{h_o}{L} \equiv Re \frac{h_o}{L} \ll 1, \quad (16.6)$$

condición que puede ser satisfecha incluso para Re moderadamente altos debido a que $h_o/L \ll 1$.

Las variaciones de presión reducida en la dirección y son, debido a que $h_o \ll L$, mucho menores que las variaciones en la dirección principal del movimiento, x . Por este motivo, con errores del orden de $(h_o/L)^2 \ll 1$, se puede suponer que $p + \rho U$ es independiente de y , siendo, por tanto, innecesaria la ecuación (16.4) en el orden de aproximación más bajo. Las ecuaciones y condiciones de contorno que gobiernan el movimiento quedan

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (16.7)$$

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (16.8)$$

$$u(y = 0) = V, \quad u(y = h) = 0, \quad v(y = 0) = 0;$$

$$(p + \rho U)_{x=0} = P_o, \quad (p + \rho U)_{x=L} = P_1, \quad (16.9)$$

donde en vez de una condición de contorno para u según x se tiene una segunda condición de contorno para $p + \rho U$.² El gradiente de presión reducida

$$p_l \equiv -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}, \quad (16.10)$$

que es independiente de y en primera aproximación, es una función *suave* de x y de t , ya que esta dependencia es a través de las condiciones de contorno en donde aparecen las funciones $h(x)$, $V(t)$, $P_o(t)$ y $P_1(t)$ [téngase en cuenta las condiciones (16.1), (16.5) y (16.6); h también podría depender del tiempo en esta aproximación siempre que se cumpliera la condición (16.5)]. La integración de (16.8) junto con las condiciones de contorno para u proporciona el perfil de velocidad (Couette + Poiseuille):

$$u(y; x, t) = -\frac{p_l}{2\mu}y(y - h) + V\left(1 - \frac{y}{h}\right). \quad (16.11)$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, integrando con respecto a y e imponiendo la condición de contorno $v(y = 0) = 0$, se obtiene

$$v = \left[\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_l}{\partial x} \left(\frac{y}{3} - \frac{h}{2} \right) - \left(\frac{p_l}{4\mu} + \frac{V}{2h^2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \right] y^2. \quad (16.12)$$

Como $v = 0$ también en $y = h$, esta expresión proporciona una ecuación diferencial para p_l , que se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{12\mu} p_l + \frac{Vh}{2} \right] = 0; \quad (16.13)$$

es decir,

$$\frac{h^3}{12\mu} p_l + \frac{Vh}{2} \equiv q \quad (16.14)$$

es independiente de x . Esta es otra forma de expresar la ecuación de continuidad: el caudal por unidad de longitud,

$$q \equiv \int_0^{h(x)} u dy = \frac{h^3}{12\mu} p_l + \frac{Vh}{2} \quad (16.15)$$

²Las condiciones de contorno para la presión (reducida) son aproximadamente válidas, puesto que en las regiones de entrada y salida de la película líquida la condición (16.1) no se satisface. Pero el error cometido es del orden de $h_o/L \ll 1$, puesto que la caída de presión en estas regiones, de espesores $\Delta x \sim h$, es del orden $\Delta P \sim \mu V/h_o$, mientras que la caída de presión en toda la película líquida es del orden de $\Delta P \sim \mu V L/h_o^2$. Por supuesto, la solución que veremos a continuación no es válida en las proximidades de la entrada y de la salida, en regiones cuyas longitudes son del orden de $h_o \ll L$.

[comparese con la expresión (14.21)] es independiente de x (puede ser una función de t a través de las condiciones de contorno si éstas dependen del tiempo). Para obtener esta *constante* q y la distribución de presión reducida aplicamos las dos condiciones de contorno para la presión reducida:

$$-p_l \equiv \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \frac{6\mu V}{h^2} - \frac{12\mu q}{h^3}, \quad (16.16)$$

$$p + \rho U - P_o = 6\mu V \int_o^x \frac{dx}{h^2(x)} - 12\mu q \int_o^x \frac{dx}{h^3(x)}, \quad (16.17)$$

$$q = \left[6\mu V \int_o^L \frac{dx}{h^2} - P_1 + P_o \right] / \left[12\mu \int_o^L \frac{dx}{h^3} \right]. \quad (16.18)$$

Conocida $h(x)$, (16.18) nos da el caudal por unidad de longitud que circula por la película líquida, q , que, sustituido en (16.17), proporciona la distribución de presión reducida $p + \rho U$. Una vez obtenido $p + \rho U$, la expresión (16.11) permite conocer la velocidad u .³

El fluido ejerce sobre las superficies una fuerza debida a la presión y a los esfuerzos viscosos. Sobre la superficie inferior, la fuerza de presión es en la dirección $-\vec{e}_y$, y está compensada con una reacción normal; la fuerza de fricción es en la dirección $-\vec{e}_x$, y es la que hay que vencer para mover la superficie con velocidad V , siendo por unidad de longitud,

$$F_f(y = 0) = \int_o^L \tau_f(y = 0) dx = - \int_o^L \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx = \int_o^L \left(\frac{\mu V}{h} - \frac{p_l h}{2} \right) dx, \quad (16.19)$$

Sobre la superficie superior, las fuerzas de fricción y presión tienen componentes según los ejes x e y . Como $dh/dx \sim h_o/L \ll 1$, la componente x de la fuerza de presión y la componente y de la fuerza de fricción son muy pequeñas comparadas con las otras proyecciones. La componente x de la fuerza de fricción está compensada por una reacción en dirección opuesta, ya que la superficie superior es fija. Por último, la componente y de la fuerza de presión es, descontada la correspondiente a la presión atmosférica:

$$F_p \simeq \int_o^L (p - p_a) dx, \quad (16.20)$$

donde no se ha especificado $y = h$ puesto que p no depende de y en primera aproximación, y donde tampoco se ha concretado que es la componente según

³Esta solución fue obtenida por Reynolds en su artículo de 1886 sobre la teoría de la lubricación fluidomecánica.

el eje y puesto que la normal a la superficie es prácticamente paralela al eje y al ser $dh/dx \ll 1$.

La fuerza de presión (16.20) debe *sustentar*, en las aplicaciones prácticas de la lubricación fluidomecánica, al sólido superior (ver sección 16.3). Para ello es necesario que se produzca una importante sobrepresión en el interior de la película líquida, lo cual es posible si h decrece en la dirección del movimiento o, expresado más generalmente si $h(x=0) > h(x=L)$. De una forma intuitiva, la existencia de esta sobrepresión se deduce fácilmente de la ecuación (16.15): como el caudal total q es constante, y el *caudal de Couette* $Vh/2$ es mayor en $x=0$ que $x=L$, el *caudal de Poiseuille* $h^3 p_l / 12\mu$ debe ser negativo en $x=0$ y positivo en $x=L$, lo cual implica que la presión en el interior de la película líquida debe ser mayor que en los extremos. Este es el llamado *efecto cuña* que hace posible la lubricación fluidomecánica, estando asociado a una *contracción* de la película líquida en la dirección del movimiento. Para cuantificar este efecto, consideremos el caso sencillo en que $h(x)$ es lineal:

$$h(x) = h_o - \frac{h_o - h_1}{L} x \quad , \quad (16.21)$$

Por simplicidad suponemos que $P_o = P_1 = p_a$ (es decir, el movimiento del líquido está originado únicamente por el movimiento de la superficie inferior; lo cual no quiere decir que no se produzca un gradiente de presiones en el interior y , por tanto, una corriente tipo Poiseuille). De (16.18) y (16.17) se tiene

$$q = V \frac{h_o h_1}{h_o + h_1} \quad , \quad (16.22)$$

$$\phi \equiv \frac{(p - p_a) h_o^2}{6\mu V L} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{s(1 - s)}{[1 + (\alpha - 1)s]^2} \quad , \quad (16.23)$$

donde

$$\alpha \equiv \frac{h_1}{h_o} \quad , \quad s \equiv \frac{x}{L} \quad . \quad (16.24)$$

La función $\phi(s)$ se representa en la figura 16.2 para distintos valores de α . Esta función presenta un extremo en $s = (1 + \alpha)^{-1}$, que es un máximo si $\alpha < 1$. Es decir, se produce una sobrepresión en el interior de la película líquida si $dh/dx = -h_o(1 - \alpha)/L < 0$ ($\alpha < 1$). Este máximo de la presión vale, en forma adimensional,

$$\frac{p_{max} - p_a}{\rho V^2 / 2} = \frac{3\mu L(1 - \alpha)}{\rho V h_o^2 (1 + \alpha)\alpha} = \frac{1}{Re} \frac{L}{h_o} \frac{3(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)\alpha} \quad , \quad (16.25)$$

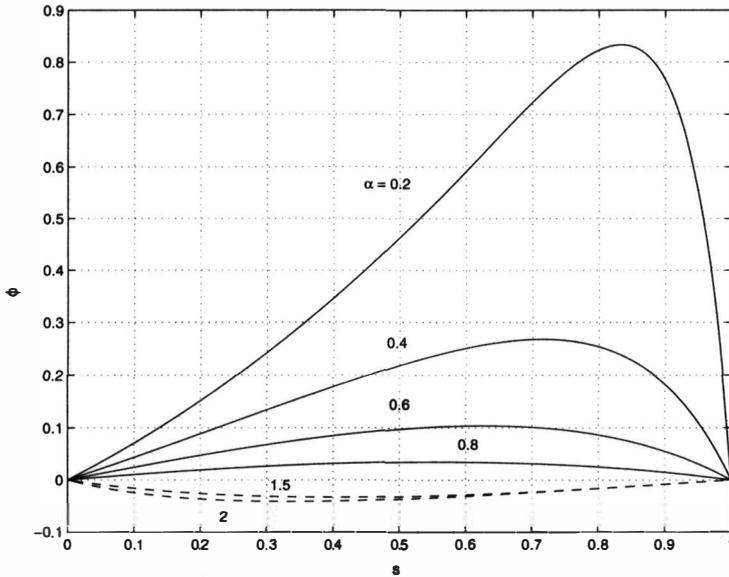


Figura 16.2: Función $\phi(s)$ [ecuación (16.23)] para diversos valores de α .

que es un número muy grande (recuérdese que $Reh_o/L \ll 1$), salvo que $\alpha \simeq 1$, es decir, salvo que las superficies sean prácticamente paralelas. De aquí la importancia del efecto cuña, que hace posible la lubricación fluidomecánica. La fuerza de presión (16.20) vale

$$F_p = \frac{6\mu VL^2}{h_o^2(1-\alpha^2)} \left[\frac{1+\alpha}{\alpha-1} \ln \alpha - 2 \right], \quad (16.26)$$

mientras que la fuerza de fricción (16.19) sobre la superficie inferior es

$$F_f = \frac{6\mu VL}{h_o(1+\alpha)} \left[\frac{2}{3} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \ln \alpha - 1 \right]. \quad (16.27)$$

De (16.26) se encuentra que F_p es máxima para $\alpha \simeq 0,456$, resultando $F_p \simeq 0,776\mu VL^2/h_o^2$ y $F_f \simeq 1,657\mu VL/h_o$. Si $1-\alpha = O(1)$, el cociente entre la fuerza de fricción y la de presión es una cantidad pequeña:

$$\left| \frac{F_f}{F_p} \right| = \frac{|h_o - h_1|}{L} \frac{\frac{2}{3} \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \ln \alpha - 1}{\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \ln \alpha - 2} \sim \frac{|h_o - h_1|}{L} \ll 1, \quad (16.28)$$

lo cual es, como se apuntó en la introducción, la base de la lubricación fluidomecánica.

16.3. Ecuación de Reynolds

La solución anterior se generaliza fácilmente para una película líquida tridimensional. Supongamos que la película se extiende sobre una superficie en la que definimos unas coordenadas curvilíneas ortogonales (α, β) . Un punto de la película líquida viene definido por las coordenadas (α, β, y) , siendo y la coordenada normal a la superficie. Si se verifican las hipótesis de la sección anterior, es decir,

$$\frac{h_o}{L} \ll 1 \quad , \quad \frac{V h_o}{\nu} \frac{h_o}{L} \ll 1 \quad , \quad \frac{h_o^2}{\nu t_o} \ll 1 \quad , \quad (16.29)$$

donde h_o , L , V y t_o son, respectivamente, un espesor característico de la película líquida, una longitud característica, una velocidad característica y un tiempo característico, las componentes α y β de la ecuación de cantidad de movimiento se escriben, en primera aproximación,

$$0 = \frac{p_\alpha}{h_\alpha} + \mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} \quad , \quad (16.30)$$

$$0 = \frac{p_\beta}{h_\beta} + \mu \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial y^2} \quad , \quad (16.31)$$

donde $\vec{v} = u_\alpha \vec{e}_\alpha + u_\beta \vec{e}_\beta + v \vec{e}_y$, $|v| \ll |u_\alpha|$, $|v| \ll |u_\beta|$,

$$p_\alpha \equiv -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \alpha} \quad , \quad p_\beta \equiv -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial \beta} \quad , \quad (16.32)$$

y $d\vec{l} = h_\alpha d\alpha \vec{e}_\alpha + h_\beta d\beta \vec{e}_\beta$ es el elemento de longitud sobre la superficie. Al igual que antes, la componente y de la ecuación de cantidad de movimiento nos dice que, con errores del orden de $(h/L)^2 \ll 1$, $p + \rho U$ no es función de y , siendo por tanto prácticamente constante transversalmente a la película líquida. Suponiendo que la superficie que se mueve es la inferior ($y = 0$), con velocidad $\vec{V} \equiv V_\alpha \vec{e}_\alpha + V_\beta \vec{e}_\beta$, las condiciones de contorno para (16.30)-(16.31) son:

$$u_\alpha(y = 0) = V_\alpha \quad , \quad u_\beta(y = 0) = V_\beta \quad , \quad u_\alpha(y = h) = u_\beta(y = h) = 0 \quad , \quad (16.33)$$

donde $h = h(\alpha, \beta; t)$ es el espesor de la película líquida. La solución es, por tanto,

$$u_\alpha = -\frac{p_\alpha}{2\mu h_\alpha} y(y - h) + V_\alpha \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad , \quad (16.34)$$

$$u_\beta = -\frac{p_\beta}{2\mu h_\beta}y(y-h) + V_\beta \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (16.35)$$

Los caudales en las direcciones α y β , por unidad de longitud en las respectivas direcciones transversales β y α , son:

$$q_\alpha \equiv \int_0^h u_\alpha dy = \frac{h^3}{12\mu h_\alpha} p_\alpha + \frac{V_\alpha h}{2}, \quad (16.36)$$

$$q_\beta \equiv \int_0^h u_\beta dy = \frac{h^3}{12\mu h_\beta} p_\beta + \frac{V_\beta h}{2}. \quad (16.37)$$

La ecuación que satisface la presión (reducida) se obtiene, al igual que antes, aplicando una ecuación de conservación de la masa a la solución anterior. Si el flujo es incompresible, la ecuación de continuidad se escribe

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (h_\beta u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (u_\beta h_\alpha) \right] + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Integrando entre $y = 0$ e $y = h$ y teniendo en cuenta que $v(y = h) \simeq \partial h / \partial t$, se llega a

$$h_\alpha h_\beta \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} (q_\alpha h_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} (q_\beta h_\alpha) = 0, \quad (16.38)$$

que es la Ecuación de Reynolds. De acuerdo con (16.36)-(16.37) y (16.32), ésta es una ecuación en derivadas parciales, de segundo orden, para $p + \rho U$. Al ser elíptica, su resolución requiere que se conozca sobre todo el contorno $C(\alpha, \beta) = 0$ de la película líquida la presión reducida, o bien su derivada normal [lo cual es equivalente, de acuerdo con (16.36)-(16.37), a especificar q_α y q_β]. Es decir, sobre $C(\alpha, \beta) = 0$,

$$p + \rho U = P_o(\alpha, \beta) \quad \text{o} \quad q_n \equiv q_\alpha n_\alpha + q_\beta n_\beta = q_o(\alpha, \beta) \quad , \quad (16.39)$$

donde n_α y n_β son las componentes del vector unitario normal al contorno en las direcciones α y β . Cada una de estas condiciones de contorno puede también especificarse sobre una parte de la superficie. Por último, no son necesarias condiciones iniciales puesto que la derivada temporal no afecta a la presión (el problema es casi estacionario, y las variaciones temporales vienen dadas a través de las condiciones de contorno, $h(t)$, $V_\alpha(t)$, etc., debiéndose verificar $h_o^2 / \nu t_o \ll 1$).

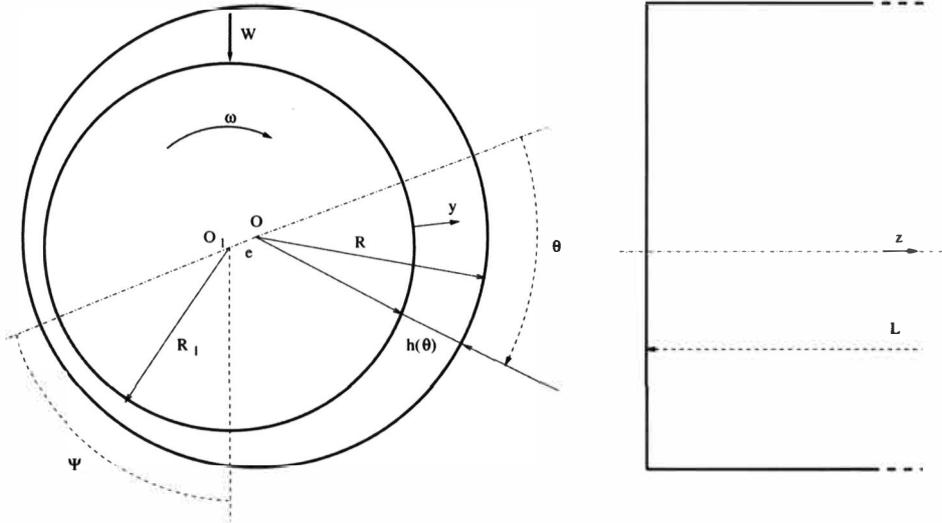


Figura 16.3: Cojinete cilíndrico.

16.4. Cojinetes cilíndricos

Como aplicación práctica de la Ecuación de Reynolds (16.38) consideraremos el caso de un cojinete cilíndrico, esquematizado en la figura 16.3. Básicamente, un eje cilíndrico de radio R_1 gira con velocidad angular ω en el interior de una carcasa, también cilíndrica, de radio R , siendo $R - R_1 \ll R$; en el espacio entre ellos existe un líquido (fluido incompresible, en general) de viscosidad μ y de densidad ρ , que actúa como lubricante. Como consecuencia del giro se produce una *escentricidad* e entre los ejes O_1 y O de los dos cilindros, de forma que la recta $\overline{O_1O}$ forma un ángulo ψ con la vertical. Esta *escentricidad* se traduce en un espesor variable de la película líquida que produce un *efecto cuña*, el cual debe ser suficiente para sustentar la carga que gira con cilindro interior, de peso W .

El problema que se va a resolver es el siguiente: Dados R , R_1 , ω y las propiedades del fluido, se calcularán las distribuciones de presión y velocidad en la película líquida. Con estos resultados se obtendrá, por una parte, la fuerza de fricción que el fluido ejerce sobre el eje, y, por tanto, el par necesario para hacerlo girar; por otra parte se calculará la fuerza de presión sobre el eje, la cual tiene que igualar el peso del cilindro; este balance proporcionará el ángulo ψ , y una relación entre la *escentricidad* e , el peso del eje W , y las propiedades del fluido, las cuales se elegirán *a posteriori* para que $e < R - R_1$, es decir, para que los cilindros no se toquen (si las características del fluido son

fijas, habría que variar la velocidad de giro ω o los radios R y R_1 , pero esto no es lo habitual). En la elección del líquido también intervienen otros requisitos como la condición de que no cavite como consecuencia de las importantes depresiones que se producen en la película líquida (se considerará este efecto en la sección 16.4.4), que sea estable frente a los incrementos de temperatura originados, etc.

Para resolver este problema utilizamos coordenadas cilíndricas (z, θ) sobre la superficie del cilindro interior (el ángulo θ se mide, por ejemplo, a partir de la recta $\overline{O_1O}$), y la coordenada y perpendicular a esta superficie. El espesor $h(\theta)$ de la película líquida viene dado por la relación

$$R_1^2 = [R - h(\theta)]^2 + e^2 - 2e[R - h(\theta)] \cos(\pi - \theta) \quad ; \quad (16.40)$$

como

$$R - R_1 \sim e \ll R \quad , \quad h(\theta) \ll R \quad , \quad (16.41)$$

en primera aproximación se tiene

$$h(\theta) = R - R_1 + e \cos \theta. \quad (16.42)$$

Teniendo en cuenta que $h_z = 1$ y $h_\theta = R_1$, y que $V_z = 0, V_\theta = \omega R_1$, los caudales por unidad de longitud q_z y q_θ son [ecuaciones (16.36)-(16.37)]:

$$q_z = \frac{h^3}{12\mu} p_z = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \quad , \quad (16.43)$$

$$q_\theta = \frac{h^3}{12\mu R_1} p_\theta + \frac{\omega R_1 h}{2} = -\frac{h^3}{12R_1\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R_1 h}{2} \quad , \quad (16.44)$$

donde se ha supuesto que las fuerzas gravitatorias son poco importantes (el cojinete es horizontal y su radio no es muy grande). Introduciendo estas expresiones en la Ecuación de Reynolds (16.38) se tiene la siguiente ecuación diferencial para la presión:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{h^3}{12R_1\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R_1 h}{2} \right) + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0. \quad (16.45)$$

Como condiciones de contorno imponemos

$$p(\pm L/2, \theta) = p_a \quad , \quad p(z, 0) = p_o = p(z, 2\pi) \quad , \quad (16.46)$$

donde p_a y p_o son presiones conocidas. Para escribir este problema en forma adimensional definimos

$$\eta = \frac{h}{R - R_1} = 1 + \epsilon \cos \theta \quad , \quad \epsilon = \frac{e}{R - R_1} \quad , \quad (16.47)$$

$$\xi = \frac{z}{L} \quad , \quad \phi = \frac{(p - p_a)(R - R_1)^2}{6\mu\omega R_1^2} \quad , \quad (16.48)$$

quedando

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \eta \right) + \beta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0 \quad , \quad (16.49)$$

$$\phi(\pm 1/2, \theta) = 0 \quad , \quad \phi(\xi, 0) = \phi(\xi, 2\pi) = \phi_o \equiv \frac{(p_o - p_a)(R - R_1)^2}{6\mu\omega R_1^2} \quad , \quad (16.50)$$

donde

$$\beta \equiv R_1/L \quad , \quad (16.51)$$

que junto con ϵ y ϕ_o son los únicos parámetros que aparecen en el problema. Aunque este problema tiene solución analítica, es lo suficientemente complicada como para que sea interesante obtener soluciones aproximadas para valores límites del único parámetro que no necesariamente es de orden unidad en el problema, $\beta = R_1/L$.

16.4.1. Cojinetes largos

En primera aproximación se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \eta \right) = 0 \quad , \quad (16.52)$$

que integrada da

$$\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \eta = q \quad , \quad (16.53)$$

donde la constante q no es otra que el caudal $-q\theta$ adimensional [el problema se reduce, pues, al de una película líquida bidimensional como las consideradas en 16.1, con el espesor h dado por (16.42)]. Integrando otra vez e imponiendo $\phi(\theta = 0) = \phi_o$, se tiene

$$\phi(\theta) - \phi_o = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} + q \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \quad . \quad (16.54)$$

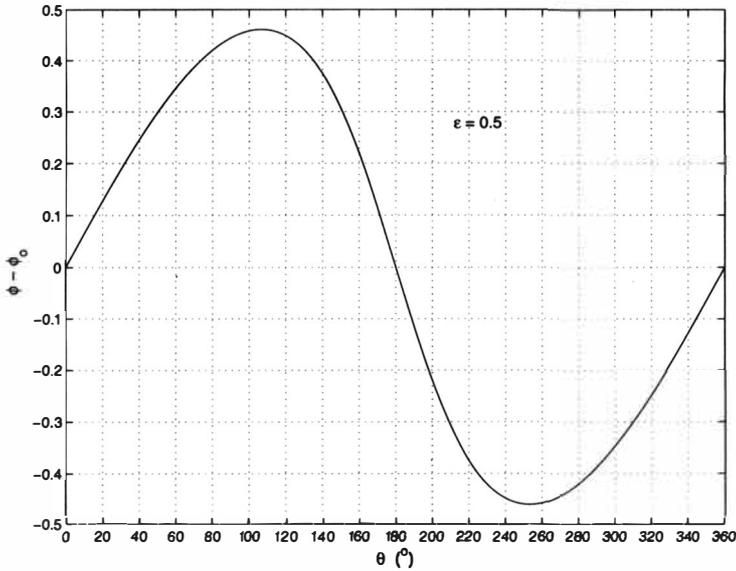


Figura 16.4: Distribución de presión en un cojinete cilíndrico *largo* para $\epsilon = 0,5$.

Teniendo en cuenta que $\phi(\theta = 2\pi) = \phi_o$, se obtiene el caudal q :

$$q = \frac{-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\epsilon \cos \theta)^3}} = -\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon^2/2} \quad (16.55)$$

La distribución de presión queda

$$\phi(\theta) - \phi_o = \frac{(p - p_o)(R - R_1)^2}{6\mu\omega R_1^2} = \frac{\epsilon \sin \theta (2 + \epsilon \cos \theta)}{(2 + \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos \theta)}, \quad (16.56)$$

que se representa en la figura 16.4 para una escentricidad $\epsilon = 0,5$. Esta solución fue obtenida por Sommerfeld en 1904.

La solución anterior no vale cerca de los extremos del cojinete, $\xi = \pm 1/2$, ya que la presión no depende de z y no se pueden verificar las condiciones de contorno. En las proximidades de $\xi = \pm 1/2$, sendas capas límites de espesores de orden $\beta \ll 1$, en las que todos los términos de (16.49) cuentan, se encargan de que se cumplan las condiciones de contorno $\phi(\xi = \pm 1/2) = 0$, pero que no consideraremos aquí puesto que su efecto es despreciable (errores del orden β) en las fuerzas de fricción y de presión que el fluido ejerce sobre el cojinete.

La fuerza de fricción que el líquido ejerce sobre el eje es, por unidad de área:

$$\begin{aligned} \tau_f &= -\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{h}{2R_1} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu\omega R_1}{h} \\ &= \frac{\mu\omega R_1}{(R - R_1)(1 + \epsilon \cos \theta)} \left[4 - \frac{3(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon^2/2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta} \right], \end{aligned} \quad (16.57)$$

donde se ha hecho uso de

$$u_\theta = \frac{1}{2R_1\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} y(y - h) + \omega R_1 \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (16.58)$$

y de (16.42) y (16.56). El par necesario para mover el eje es, por unidad de longitud,

$$\frac{\text{Par}}{L} = \int_0^{2\pi} \tau_f R_1^2 d\theta = \frac{4\pi\mu\omega R_1^3}{R - R_1} \frac{1 + 2\epsilon^2}{\sqrt{1 - \epsilon(2 + \epsilon^2)}} \quad (16.59)$$

Debido a que $p(\theta) - p_o$ es una función impar de θ [ecuación (16.56); ver figura 16.4], la fuerza de presión es perpendicular a la recta $\overline{O_1O}$, y como ésta debe igualar al peso W del eje, el ángulo de $\overline{O_1O}$ con la vertical es $\psi = \pi/2$. El balance entre W y la fuerza de presión da la siguiente relación entre W y los demás parámetros del problema:

$$\frac{W}{L} = \int_0^{2\pi} (p - p_o) R_1 \sin \theta d\theta = \frac{12\mu\omega R_1^3}{(R - R_1)^2} \frac{\epsilon}{(2 + \epsilon^2)\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (16.60)$$

Dada una configuración geométrica (R y R_1), una velocidad de giro (ω) y un fluido (μ), esta ecuación nos relaciona la carga del cojinete por unidad de longitud con la escentricidad. Para $W = 0$, $\epsilon = 0$ (cilindros concéntricos), mientras que para $W \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 1$ (los cilindros se tocan en $\theta = \pi$). La carga máxima no está, por tanto, condicionada por limitaciones de escentricidad, aunque para $\epsilon \rightarrow 1$ el par necesario para hacer girar al eje tiende a infinito. Hay otros condicionantes que limitan la escentricidad máxima y, por tanto, la carga máxima. Quizá el más importante es la cavitación: De la expresión (16.56), se tiene que a medida que ϵ aumenta la presión máxima aumenta, pero también disminuye la presión mínima al ser $p(\theta) - p_o$ una función impar de θ (ver figura 16.4). La presión mínima no debe ser inferior a la presión de vapor del líquido a la temperatura de trabajo para evitar que cavite. Este requerimiento impone una escentricidad ϵ máxima y, por tanto, una carga máxima. A veces, por requerimientos físicos (por ejemplo, la carga, ω y el

fluido son dados), se admite un movimiento con cavitación en alguna región de la película líquida. En esas condiciones la solución que acabamos de ver no es válida, y se considerará en la sección 16.4.4.

Por último, es interesante señalar que, análogamente al caso de una película líquida bidimensional con $h(x)$ lineal (ver final de la sección 16.1), la fuerza de viscosidad es despreciable frente a la fuerza de presión [siempre que $\epsilon = O(1)$]:

$$\frac{\tau_f}{p - p_o} \sim \frac{\mu\omega R_1/(R - R_1)}{\mu\omega R_1^2/(R - R_1)^2} = \frac{R - R_1}{R_1} \ll 1 \quad (16.61)$$

16.4.2. Cojinetes cortos

En este límite, la definición de ϕ dada en (16.48) no es apropiada puesto que la diferencia de presión característica no es $6\mu\omega R_1^2/(R - R_1)^2$, sino $6\mu\omega L^2/(R - R_1)^2$. En su lugar definimos, por tanto,

$$\phi = \frac{(p - p_a)(R - R_1)^2}{6\mu\omega L^2} \quad (16.62)$$

y la ecuación (16.45) queda

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\beta^{-1} \eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \eta \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (16.63)$$

En primera aproximación, con errores del orden de $\beta^{-1} \ll 1$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta^3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = -\epsilon \sin \theta \quad (16.64)$$

$$\phi(\xi = \pm 1/2) = 0 \quad (16.65)$$

cuya solución es

$$\phi = -\frac{\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^3} \frac{1}{2} \left(\xi^2 - \frac{1}{4} \right) \quad (16.66)$$

Por supuesto, esta solución no es válida en las proximidades de $\theta = 0$, donde una capa límite de espesor β^{-1} se encarga de que se satisfaga la condición de contorno $p(\theta = 0) = p(\theta = 2\pi) = p_o$ (sí sería válida en el caso particular en que $p_o = p_a$).

El esfuerzo de fricción en el eje es

$$\tau_f = -\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{h}{2R_1} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\omega R_1 \mu}{h} \simeq \frac{\omega R_1 \mu}{h} \quad (16.67)$$

donde la contribución del flujo de Poiseuille se ha despreciado con errores del orden de $\beta^{-2} \ll 1$. El par necesario es, por tanto,

$$\text{Par} = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \tau_f R_1^2 d\theta L d\xi = \frac{\pi \mu \omega R_1^3 L}{2(R - R_1) \sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (16.68)$$

La componente de la fuerza de presión perpendicular a $\overline{O_1 O}$ es

$$F_{\perp} = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (p - p_a) \sin \theta R_1 d\theta L d\xi = \frac{\mu \omega L^3 R_1}{(R - R_1)^2} \frac{\pi \epsilon}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} \quad (16.69)$$

mientras que la componente según $\overline{O_1 O}$ es

$$F_{\parallel} = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} (p - p_a) \cos \theta R_1 d\theta L d\xi = -\frac{\mu \omega L^3 R_1}{(R - R_1)^2} \frac{4\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} \quad (16.70)$$

Como la fuerza total de presión debe igualar al peso W , el ángulo ψ que forma $\overline{O_1 O}$ con la vertical es

$$\Psi = \arctan \frac{F_{\perp}}{F_{\parallel}} = \arctan \left(-\frac{\pi \sqrt{1 - \epsilon^2}}{4\epsilon} \right) \quad (16.71)$$

y la relación entre W y ϵ queda

$$W = \sqrt{F_{\perp}^2 + F_{\parallel}^2} = \frac{\mu \omega L^3 R_1}{(R - R_1)^2} \frac{\pi \epsilon}{(1 - \epsilon^2)^2} \sqrt{1 + \epsilon^2 \left(\frac{16}{\pi} - 1 \right)} \quad (16.72)$$

16.4.3. Cojinetes cilíndricos finitos con escentricidad pequeña

Cuando $\beta = O(1)$, la ecuación (16.49) tiene una solución aproximada fácil de obtener en el límite en que la escentricidad es muy pequeña,

$$\epsilon = e/(R - R_1) \ll 1 \quad (16.73)$$

correspondiente a cargas W pequeñas. En primera aproximación se tiene

$$\eta \simeq 1 \quad , \quad \partial \eta / \partial \theta = -\epsilon \sin \theta \ll 1 \quad (16.74)$$

y la ecuación (16.49) queda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = -\sin \theta \quad (16.75)$$

donde se ha redefinido ϕ como

$$\phi = \frac{(p - p_a)(R - R_1)^2}{6\mu\omega R_1^2 \epsilon} \quad , \quad (16.76)$$

siendo ahora la diferencia de presión característica del orden de $6\mu\omega R_1^2 \epsilon / (R - R_1)^2$. Las condiciones de contorno son:

$$\phi(\xi = \pm 1/2) = 0, \quad \phi(\theta = 0) = \phi(\theta = 2\pi) = \phi_o = (p_o - p_a)(R - R_1)^2 / (6\mu\omega R_1^2 \epsilon). \quad (16.77)$$

En el caso particular en que $p_o = p_a$ ($\phi_o = 0$), este problema admite soluciones en la forma

$$\phi = \sin \theta G(\xi) \quad , \quad (16.78)$$

donde G satisface

$$\beta^2 \frac{d^2 G}{d\xi^2} - G = -1 \quad , \quad G(\xi = \pm 1/2) = 0 \quad ; \quad (16.79)$$

es decir,

$$G(\xi) = 1 - \frac{\cosh(\xi/\beta)}{\cosh(1/2\beta)} \quad . \quad (16.80)$$

La distribución de presión queda pues

$$\phi(\xi, \theta) = \frac{(p - p_a)(R - R_1)^2}{6\mu\omega R_1^2 \epsilon} = \sin \theta \left[1 - \frac{\cosh(\xi/\beta)}{\cosh(1/2\beta)} \right] \quad . \quad (16.81)$$

Análogamente al caso de cojinetes largos, al ser ϕ una función impar de θ , $\psi = \pi/2$, y el balance entre las fuerzas de presión y la carga proporciona

$$W = \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} (p - p_a) R_1 \sin \theta d\theta L d\xi = \frac{6\pi\epsilon\mu\omega R_1^3 L}{(R - R_1)^2} \left[1 - \beta \tanh \left(\frac{1}{2\beta} \right) \right] \quad , \quad (16.82)$$

que es una relación lineal entre W y ϵ (válida para $\epsilon \ll 1$). El par necesario para hacer girar al eje es:

$$\text{Par} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} \tau_f R_1^2 d\theta L d\xi \simeq \frac{2\pi\mu\omega R_1^3 L}{R - R_1} \quad , \quad (16.83)$$

donde se ha despreciado el término correspondiente al flujo de Poiseuille por ser del orden de $\epsilon \ll 1$ en relación al término de Couette.

16.4.4. Cavitación

Si en algún punto de la película líquida la presión desciende por debajo de la presión de vapor del líquido a la temperatura de trabajo, $p_v(T)$, se produce la cavitación del líquido, dejando de ser válidas las soluciones anteriores. Cuando hay cavitación, una solución aproximada, propuesta por Sommerfeld, consiste en suponer que la solución es la obtenida en las secciones anteriores para $p > p_v$ y, en la región $\theta_1 < \theta < \theta_2$ donde $p < p_v$, sustituirla por $p = p_v$. Esta solución, que para cojinetes largos se suele denominar *solución medio-Sommerfeld*, para distinguirla de la solución de Sommerfeld *completa* (16.56), es continua para ϕ , pero tiene derivadas $\partial\phi/\partial\theta$ discontinuas, lo cual da lugar a discontinuidades en el caudal, puesto que de (16.53),

$$q = \eta^3 \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \eta. \quad (16.84)$$

Para paliar esta dificultad, Reynolds propuso (para el caso de cojinetes largos) una solución que no tiene discontinuidad en la derivada de ϕ . Antes de que se produzca la cavitación, la cual tiene lugar en un $\theta = \theta_1$ desconocido *a priori*, se supone que la solución es (16.54):

$$\phi(\theta) - \phi_o = \int_o^\theta \frac{d\theta}{\eta^2} + q \int_o^\theta \frac{d\theta}{\eta^3}, \quad 0 < \theta < \theta_1. \quad (16.85)$$

El valor de q se obtiene de (16.84) suponiendo que en $\theta = \theta_1$, $\partial\phi/\partial\theta = 0$, para que no haya discontinuidad en $\partial\phi/\partial\theta$ al pasar a la región de cavitación, donde $\phi = \phi_v = \text{constante}$; es decir,

$$q = -\eta(\theta_1). \quad (16.86)$$

Por otra parte, de (16.85) aplicada en $\theta = \theta_1$, como $\phi(\theta_1) = \phi_v$, se tiene

$$\phi_v - \phi_o = \int_o^{\theta_1} \frac{d\theta}{\eta^2} - \eta(\theta_1) \int_o^{\theta_1} \frac{d\theta}{\eta^3}, \quad (16.87)$$

lo cual es una relación que permite obtener θ_1 para una ϕ_v dada. Para $\theta_1 < \theta < \theta_2$, donde θ_2 es de momento desconocido, $\phi = \phi_v = \text{constante}$. En $\theta = \theta_2$ la cavitación cesa y se regenera la capa de líquido. Como $\phi(\theta = 2\pi) = \phi_o$, se tiene la siguiente relación para θ_2 :

$$\phi_o - \phi_v = \int_{\theta_2}^{2\pi} \frac{d\theta}{\eta^2} - \eta(\theta_1) \int_{\theta_2}^{2\pi} \frac{d\theta}{\eta^3}. \quad (16.88)$$

Una vez calculado θ_2 , para $\theta_2 < \theta < 2\pi$ se tiene,

$$\phi(\theta) - \phi_v = \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{d\theta}{\eta^2} - \eta(\theta_1) \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{d\theta}{\eta^3} \quad , \quad \theta_2 < \theta < 2\pi \quad . \quad (16.89)$$

Esta solución presenta, sin embargo, una discontinuidad en $\partial\phi/\partial\theta$ para $\theta = \theta_2$, pasando de valer cero a valer

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_2} = \frac{1}{\eta^2(\theta_2)} - \frac{\eta(\theta_1)}{\eta^3(\theta_2)} \quad , \quad (16.90)$$

aunque q permanece constante.

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 7.
- G. K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 4.
- B.J. HAMROCK, 1994.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.
- S. M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 10.
- A. Z. SZERI, 1998. Capítulo 3.

Capítulo 17

Movimiento alrededor de cuerpos con número de Reynolds pequeño

17.1. Ecuaciones de Stokes

En esta lección se considerará el flujo de un fluido incompresible [i.e., se verifican las condiciones (10.26) y (10.30)] alrededor de cuerpos cuando las fuerzas de viscosidad son dominantes frente a las de inercia.

En general, las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y las condiciones iniciales y de contorno que gobiernan el movimiento de un fluido incompresible alrededor de un cuerpo definido por la superficie $S(\vec{x}, t) = 0$, referidas a unos ejes que se mueven con él, son:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (17.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho(\vec{g} - \vec{a}_o), \quad \vec{g} = -g\vec{e}_z; \quad (17.2)$$

$$t = 0, \quad \vec{v} = \vec{v}_o; \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{v} = \vec{V}_\infty, \quad p = p_{\infty, o} - \rho g z; \quad (17.3)$$

$$S(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{x}; \quad (17.4)$$

donde se ha supuesto que la viscosidad permanece constante (variaciones de temperatura poco importantes). Lejos del cuerpo, el fluido se mueve con velocidad \vec{V}_∞ en relación a los ejes ligados a él, siendo $\vec{a}_o = -d\vec{V}_\infty/dt$ la aceleración de este sistema de referencia con respecto a uno inercial en el que el fluido *no perturbado* por el cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad uniforme; como consecuencia, la distribución de presión lejos del cuerpo es la hidrostática, donde $p_{\infty,o}$ es una constante. Sobre la superficie, la velocidad es $\vec{\Omega} \wedge \vec{x}$, donde $\vec{\Omega}(t)$ es la velocidad angular de giro del cuerpo (los ejes, aunque móviles con el cuerpo, se mueven paralelamente a sí mismos).

Es conveniente descomponer la presión en dos sumandos, uno correspondiente a la presión hidrostática y el otro a las variaciones de presión generadas por el movimiento, lo cual se puede hacer debido a que la ecuación de cantidad de movimiento es lineal en relación a la presión. Es decir, definimos

$$p \equiv p_h + p_d \quad , \quad (17.5)$$

donde

$$-\nabla p_h + \rho \vec{g} = 0 \quad (17.6)$$

y

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p_d + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \frac{d\vec{V}_\infty}{dt} \quad , \quad (17.7)$$

cuya suma es (17.2). Consecuentemente,

$$p_h = p_{\infty,o} - \rho g z \quad , \quad (17.8)$$

y la fuerza debida a la presión que el fluido ejerce sobre el cuerpo se descompone en la fuerza de flotabilidad de Arquímedes (sección 12.4) y la resistencia de presión (también llamada de forma) originada por el movimiento del fluido:

$$\vec{F}_p = - \int_s p_h \vec{n} ds - \int_s p_d \vec{n} ds = -\rho g V - \int_s p_d \vec{n} ds \quad , \quad (17.9)$$

donde V es el volumen del cuerpo y \vec{n} es la normal hacia fuera de S . La fuerza total que el fluido ejerce sobre el cuerpo es suma de (17.9) y la fuerza de fricción viscosa:

$$\vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_p = \int_s \vec{\tau}' \cdot \vec{n} ds - \rho g V - \int_s p_d \vec{n} ds \quad ; \quad (17.10)$$

la fuerza *puramente* de resistencia, que se opone al movimiento del cuerpo, es:

$$\vec{F}_r = \int_s \vec{\tau}' \cdot \vec{n} ds - \int_s p_d \vec{n} ds \quad . \quad (17.11)$$

En el límite en que

$$Re = \frac{\rho DV_\infty}{\mu} \ll 1, \quad ReSt = \frac{\rho DV_\infty}{\mu} \frac{D}{V_\infty t_o} = \frac{\rho D^2}{\mu t_o} \ll 1, \quad (17.12)$$

donde D es una longitud característica del cuerpo y t_o un tiempo característico (de variación de V_∞ y Ω), los términos $\rho \partial \vec{v} / \partial t$, $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ y $\rho d\vec{V}_\infty / dt$ son despreciables frente al término viscoso $\mu \nabla^2 \vec{v}$, y el problema viene gobernado, en primera aproximación, por:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (17.13)$$

$$-\nabla p_d + \mu \nabla^2 \vec{v} = 0, \quad (17.14)$$

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{v} = \vec{V}_\infty, \quad p_d = 0, \quad (17.15)$$

$$S(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{x}. \quad (17.16)$$

Las ecuaciones (17.13)-(17.14), que son el límite de las ecuaciones de Navier-Stokes para movimientos *lentos* o *reptantes*, se suelen denominar ecuaciones de Stokes, quien resolvió este problema para el movimiento alrededor de una esfera que se mueve con velocidad constante V_∞ (sin giro) en 1851 (ver sección siguiente). Obsérvese que aunque estas ecuaciones son análogas a las consideradas en las lecciones precedentes, allí los términos convectivos eran despreciables debido, principalmente, a la casi unidireccionalidad del movimiento, mientras que aquí el movimiento es esencialmente *tridimensional* [compárese las condiciones (17.12) con, por ejemplo, (15.20)-(15.21)].

Las ecuaciones de Stokes se suelen escribir separando p_d y \vec{v} . Para ello se tiene en cuenta que [ecuación (1.43)]

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) = -\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{v}), \quad (17.17)$$

donde se ha hecho uso de (17.13). Por tanto, (17.14) se puede escribir

$$\nabla p_d + \mu \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{v} = 0 \quad . \quad (17.18)$$

Tomando la divergencia de esta ecuación,

$$\nabla^2 p_d = 0, \quad (17.19)$$

mientras que tomando el rotacional

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{v} = 0 \quad \text{o} \quad \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{\omega} = -\nabla^2 \vec{\omega} = 0, \quad (17.20)$$

que son dos ecuaciones donde la presión y la velocidad (o la vorticidad) entran por separado [en (17.20) se ha hecho uso de $\nabla \cdot \vec{\omega} \equiv \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{v}) = 0$]. Obsérvese que en ambos casos el problema se reduce a resolver una ecuación de Laplace. Normalmente se resuelve (17.20), puesto que las condiciones de contorno suelen venir expresadas en términos de la velocidad; una vez obtenida \vec{v} , se sustituye en (17.14) y se obtiene la distribución de presión. En algunos problemas, sin embargo, las condiciones de contorno se expresan más fácilmente en términos de la presión, por lo que se procede a la inversa: se resuelve (17.19) y se sustituye en (17.14) para obtener \vec{v} . En cuanto a las condiciones de contorno, éstas se pueden tratar por separado basándose en la linealidad del problema, que admite superposición. Por ejemplo, el problema (17.13)-(17.16) se puede resolver definiendo $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, donde \vec{v}_1 y \vec{v}_2 satisfacen las ecuaciones de Stokes (17.13)-(17.14), y las condiciones de contorno son

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{v}_1 = \vec{V}_\infty; \quad S(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{v}_1 = 0; \quad (17.21)$$

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{v}_2 = \vec{0}; \quad S(\vec{x}, t) = 0, \quad \vec{v}_2 = \vec{\Omega} \wedge \vec{x}. \quad (17.22)$$

Esto permite obtener soluciones de movimientos complejos sin más que sumar soluciones de problemas más sencillos.

17.2. Movimiento alrededor de una esfera. Ley de Stokes

Consideremos el flujo con viscosidad dominante alrededor de una esfera de radio R que se mueve con velocidad constante V en la dirección $-\vec{e}_x$ (o la esfera está fija y sobre ella pasa una corriente que en $|x| \rightarrow \infty$ vale $V\vec{e}_x$). De acuerdo con lo visto anteriormente, el problema a resolver es:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad \nabla \wedge \nabla \wedge \nabla \wedge \vec{v} = 0 \quad (\text{o} \quad \nabla^2 \vec{\omega} = 0), \quad (17.23)$$

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad \vec{v} = V\vec{e}_x; \quad |x| = R, \quad \vec{v} = 0. \quad (17.24)$$

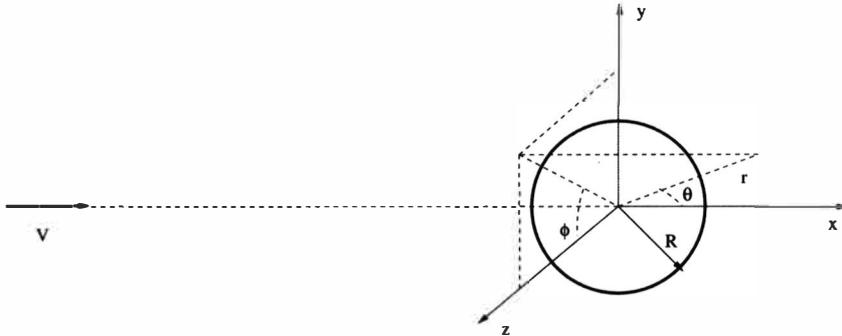


Figura 17.1: Coordenadas en el flujo alrededor de una esfera.

Obviamente, este problema se resuelve más fácilmente en coordenadas esféricas (r, θ, φ) (ver figura 17.1). Como el movimiento tiene simetría con respecto al eje x (nada depende de la coordenada azimutal φ siendo, además, $v_\varphi = 0$), es posible escribir \vec{v} en términos de una función de corriente ψ (ver sección 6.2):

$$\vec{v} \equiv \nabla \wedge \left(\frac{\psi}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \right) \quad , \quad (17.25)$$

de donde

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad , \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad (17.26)$$

de esta forma, la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0 \quad , \quad (17.27)$$

se satisface automáticamente. Obsérvese que la definición de la función de corriente no es única. La elección dada por (17.26) se suele denominar **función de corriente de Stokes**. En términos de ψ , el vector vorticidad se escribe

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \psi \vec{e}_\varphi) = -\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \vec{e}_\varphi \quad , \quad (17.28)$$

que sólo tiene componente según \vec{e}_φ . Consecuentemente, la ecuación de cantidad de movimiento $\nabla^2 \vec{\omega} = 0$ se convierte en la siguiente ecuación escalar para ψ :

$$E^2(E^2\psi) = 0, \quad E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \right), \quad (17.29)$$

que es una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden.

En coordenadas esféricas, las condiciones de contorno (17.24) se escriben

$$r = R, \quad v_r = v_\theta = 0, \quad (17.30)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad v_r \rightarrow V \cos\theta, \quad v_\theta \rightarrow -V \sin\theta, \quad (17.31)$$

que proporcionan las siguientes condiciones de contorno para ψ :

$$r = R, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0, \quad (17.32)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi \rightarrow \frac{V}{2} r^2 \sin^2\theta + \text{constante}. \quad (17.33)$$

Tenemos, pues, tres condiciones de contorno, siendo la ecuación (17.29) de cuarto orden, lo cual es una consecuencia de que al utilizar la función de corriente se ha introducido una derivada más. Sin embargo, por la misma razón, para hallar \vec{v} , cualquier constante aditiva de ψ es irrelevante, por lo que podemos hacer la constante que aparece en (17.33) igual a cero, y el problema ya tiene el número correcto de condiciones de contorno.

Este problema admite separación de variables: Sugerido por (17.33), donde aparece la única dependencia de las condiciones de contorno, en θ , escribimos

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2\theta, \quad (17.34)$$

que sustituido en (17.29) y (17.32)-(17.33) proporciona

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0, \quad (17.35)$$

$$r = R, \quad f = \frac{df}{dr} = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow Vr^2/2. \quad (17.36)$$

La ecuación del tipo denominado de Euler (17.35) admite soluciones potenciales para r . En efecto, ensayando la solución $f \sim r^n$, se encuentra que admite los valores $n = 2, -1, 4$ y 1 . Así la solución general de (17.35) es

$$f = A_1 r^2 + \frac{A_2}{r} + A_3 r^4 + A_4 r, \quad (17.37)$$

donde las A_i son constantes arbitrarias. Para que la dependencia de $f(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ sea de la forma $f \sim r^2$, A_3 tiene que ser nula. Las otras tres constantes se calculan de las condiciones (17.36), obteniéndose

$$\psi = \frac{VR^2}{2} \left[\frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{R}{r} - \frac{3}{2} \frac{r}{R} \right] \sin^2 \theta \quad , \quad (17.38)$$

de donde

$$v_r = \left[1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{R}{r} \right] V \cos \theta, \quad v_\theta = - \left[1 - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} - \frac{3}{4} \frac{R}{r} \right] V \sin \theta. \quad (17.39)$$

Por otra parte, sustituyendo en

$$\nabla p_d = \mu \nabla^2 \vec{v}; \quad r \rightarrow \infty, \quad p_d \rightarrow 0, \quad (17.40)$$

se llega a

$$p_d = - \frac{3\mu VR \cos \theta}{2r^2}. \quad (17.41)$$

La fuerza de resistencia que el fluido ejerce sobre la esfera es en la dirección del movimiento y obviamente se opone a él, $\vec{F}_r = F_r \vec{e}_x$, siendo

$$F_r = 2\pi \int_0^\pi [(-p_d + \tau'_{rr}) \cos \theta - \tau'_{r\theta} \sin \theta]_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta. \quad (17.42)$$

Sustituyendo

$$(\tau'_{rr})_{r=R} = 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=R} = 0 \quad , \quad (17.43)$$

$$(\tau'_{r\theta})_{r=R} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]_{r=R} = - \frac{3\mu V \sin \theta}{R} \quad , \quad (17.44)$$

y (17.41) en (17.42) se obtiene

$$F_r = 6\pi\mu VR, \quad (17.45)$$

que es conocida como la **ley de Stokes** para la fuerza de resistencia de una esfera a bajos números de Reynolds. Se observa que la fricción viscosa $\tau'_{r\theta}$ es responsable de 2/3 de la resistencia, mientras que las fuerzas de presión son responsables del tercio restante. Experimentalmente se encuentra que esta ley

es aproximadamente válida incluso hasta $Re \simeq 1$ (ver figura 17.2). Esta ley se suele escribir en forma adimensional en términos del coeficiente de resistencia,

$$C_D \equiv \frac{F_r}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2}, \quad (17.46)$$

de forma que,

$$C_D = \frac{24}{Re}, \quad (17.47)$$

donde

$$Re = \frac{2RV\rho}{\mu}. \quad (17.48)$$

A la fuerza anterior hay que añadir la fuerza de flotabilidad de Arquímedes, que actúa en dirección opuesta a la gravedad $\vec{F}_h = (\rho g 4\pi R^3/3)\vec{e}_z$. Un problema práctico de cierta relevancia es la **sedimentación** de partículas (más o menos) esféricas. En este caso, a la fuerza de la gravedad que hace caer a la partícula, $-(\rho_p g 4\pi R^3/3)\vec{e}_z$, donde ρ_p es la densidad de la partícula, se le oponen la fuerza de Arquímedes y la fuerza de resistencia fluidomecánica, que viene dada por la ley de Stokes (17.45) si se verifican las condiciones (17.12). La ecuación que gobierna la velocidad de sedimentación de la partícula, $-V\vec{e}_z$, es:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu V R. \quad (17.49)$$

Obsérvese que aunque en este caso $V = V(t)$, si se cumple que $\rho R^2/\mu t_o \ll 1$, donde t_o es un tiempo característico de variación de V , la fuerza de resistencia dada por la ley de Stokes sigue siendo aproximadamente válida. Se llama **velocidad terminal** a la velocidad constante que se alcanza cuando las fuerzas que ejerce el fluido sobre la partícula igualan al peso de la misma:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_p - \rho)g - 6\pi\mu V_t R = 0, \quad V_t = \frac{2(\rho_p - \rho)R^2 g}{9\mu}. \quad (17.50)$$

Definiendo las variables adimensionales

$$v = \frac{V}{V_t}, \quad \tau = \frac{t}{t_o}, \quad (17.51)$$

si la partícula parte del reposo, el problema queda

$$\frac{2\rho_p R^2}{9\mu t_o} \frac{dv}{d\tau} = 1 - v, \quad v(\tau = 0) = 0. \quad (17.52)$$

Definiendo

$$t_o = \frac{2\rho_p R^2}{9\mu} \quad , \quad (17.53)$$

todos los términos son del orden unidad, por lo que $t_o \sim \rho_p R^2 / \mu$. Esto nos dice que (17.49) [o (17.52)] es válida, de acuerdo con la condición $t_o \gg \rho R^2 / \mu$, si $\rho_p \gg \rho$. La solución es

$$v = 1 - e^{-\tau} \quad , \quad (17.54)$$

de forma que cuando $t = t_o = 2\rho_p R^2 / 9\mu$ ($\tau = 1$), v ha alcanzado el sesenta por ciento de su valor final ($v = 1, V = V_t$), aproximadamente. Si $\rho_p \sim \rho$, o $\rho_p < O(\rho)$, la solución anterior no es válida puesto que la ley de Stokes deja de ser válida. Para hallar la fuerza de resistencia habría que resolver la ecuación de cantidad de movimiento reteniendo la aceleración local, $\rho \partial \vec{v} / \partial t$, y la fuerza de inercia asociada a la aceleración del sistema de referencia, $-\rho d\vec{V} / dt$ [ecuación (17.7); por supuesto, se supone que $Re \ll 1$ para que el término convectivo no cuente]. Como el problema es lineal, esto daría lugar a una fuerza de resistencia que constaría de tres términos: uno de ellos sería la ley de Stokes (17.45), y los otros dos resultarían de los dos nuevos términos de la ecuación de cantidad de movimiento (el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Richardson, 1989). Por supuesto, la velocidad terminal seguiría siendo la misma, puesto que estos nuevos términos de la fuerza de resistencia son nulos cuando $t \rightarrow \infty$.

Para terminar es conveniente señalar que la ley de Stokes (17.45) se suele usar, de forma aproximada, incluso cuando la partícula no es exactamente esférica, siempre que se cumplan las hipótesis (17.12), sustituyendo R por un radio característico de la partícula. Debe observarse, además, que el análisis dimensional del problema (ver final de la sección siguiente) nos dice que $F_r = \text{constante} \times \mu V R$ si se cumple (17.12), donde la constante depende de la geometría de la partícula (vale 6π para una esfera), y R es un tamaño característico de la misma.

17.3. Aproximación de Oseen

La solución anterior de Stokes tiene la dificultad de que no es válida lejos de la partícula: De (17.39) se tiene que

$$\mu \nabla^2 v_r = \mu V \cos \theta \left[2 \frac{R^3}{r^5} - \frac{2}{r^2} + \frac{3R}{r^3} \right] \quad , \quad (17.55)$$

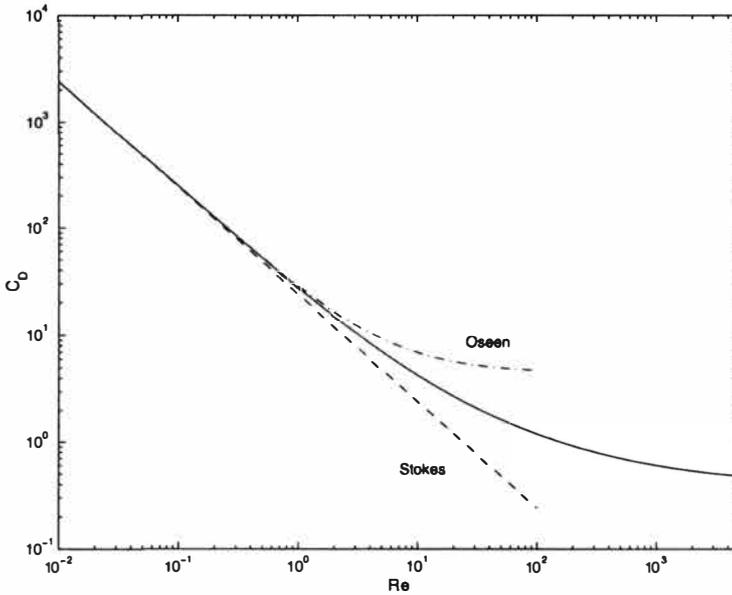


Figura 17.2: Coeficiente de resistencia C_D para una esfera. La curva continua es una interpolación de numerosos datos experimentales dada por $C_D = 24/Re + 6/(1 + \sqrt{Re}) + 0,4$ (White, 1991), válida hasta $Re \approx 2,5 \times 10^5$ (ver también figura 27.10 más adelante). La curva a trazos es la ley de Stokes (17.47) y la curva de trazos y puntos es la ley de Oseen (17.62).

$$\begin{aligned} \rho \vec{v} \cdot \nabla v_r &= \rho V^2 \cos^2 \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \left(\frac{3R}{2r^2} - \frac{3}{2} \frac{R^3}{r^4} \right) \\ &+ \frac{\rho V^2 \sin^2 \theta}{r} \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right), \end{aligned} \quad (17.56)$$

por lo que para $r \gg R$ el término viscoso y el término convectivo son del mismo orden si $r/R \sim Re^{-1} \gg 1$:

$$\mu \nabla^2 v_r \sim \frac{\mu V}{r^2} \sim \rho \vec{v} \cdot \nabla v_r \sim \rho \frac{V^2}{r}, \quad \frac{r}{R} \sim \frac{\mu}{\rho V R} \sim Re^{-1} \gg 1. \quad (17.57)$$

En otras palabras, la condición $Re \ll 1$ permite no tener en cuenta el término convectivo en la ecuación de cantidad de movimiento en relación al término de fuerzas viscosas siempre que la longitud característica del campo de velocidad

sea el diámetro de la partícula, en la que está basado Re . Esto es rigurosamente cierto cerca de la partícula. Pero a medida que nos alejamos de ella, la longitud característica se hace mayor puesto que el flujo se hace cada vez más uniforme; suficientemente lejos de la partícula [en particular, cuando se cumple (17.57)], el término convectivo se hace del mismo orden que el viscoso, y no está justificado despreciar el primero respecto al segundo, a pesar de que Re basado en D es pequeño. Si $Re \rightarrow 0$, esta dificultad no sería tal puesto que la solución sería válida hasta $r \rightarrow \infty$. Para $Re \ll 1$, pero finito, es necesario corregir la solución de Stokes. Esto lo hizo Oseen (1910) linealizando el término convectivo para $r \rightarrow \infty$, con lo cual, obtuvo una corrección de la ley de Stokes que viene a ser el siguiente término en el desarrollo en potencias de $Re \ll 1$.

Básicamente, como el término convectivo empieza a contar en la solución de Stokes cuando $r/R \sim Re^{-1} \gg 1$, se puede suponer que allí la velocidad del fluido es aproximadamente la de la corriente en el infinito, $V\vec{e}_x$. Es decir,

$$\rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} \simeq \rho V\vec{e}_x \cdot \nabla\vec{v} = \rho V \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \quad (17.58)$$

De esta forma, la ecuación de cantidad de movimiento sigue siendo lineal:

$$\rho V \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} = -\nabla p_d + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (17.59)$$

Esta ecuación se suele denominar **ecuación de Oseen**. Análogamente a como se hizo en la sección 17.1, sustituyendo $\nabla^2 \vec{v} = -\nabla \wedge \vec{\omega}$ y tomando la divergencia y el rotacional de la ecuación anterior se llega a:

$$\nabla^2 p_d = 0, \quad (17.60)$$

$$\left(\nabla^2 - 2k \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{\omega} = 0, \quad (17.61)$$

donde para hallar (17.60) se ha hecho uso de la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, y en (17.61) $k = \rho V / 2\mu$ y se ha hecho uso de $\nabla \wedge \partial\vec{v}/\partial x = \partial\vec{\omega}/\partial x$. Para el flujo alrededor de una esfera, la ecuación (17.61) se debe resolver con las condiciones de contorno (17.30)-(17.31). La solución de este problema se obtiene más fácilmente utilizando coordenadas cilíndricas con el eje x como eje axial, pudiéndose obtener, por separación de variables, una solución en términos de funciones de Bessel esféricas (ver, por ejemplo, Rosenhead, 1988). Reteniendo los primeros términos de la expansión se llega a la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia:

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re \right], \quad (17.62)$$

donde el término $3Re/16$ es la corrección de Oseen a la ley de Stokes (17.42). En la figura 17.2 se representa las leyes de Stokes y de Oseen junto con resultados experimentales.

La solución de Oseen fue perfeccionada por Proudman y Pearson en 1957, y por otros investigadores posteriores (ver, por ejemplo, Rosenhead, 1988), utilizando la técnica de los *desarrollos asintóticos acoplados*, de la cual un ejemplo sencillo fue considerado en la sección 14.1.5 (límite $\beta \ll 1$; allí, la solución *básica* dejaba de valer cerca de la pared; aquí, la solución de Stokes deja de valer lejos de la esfera). Aunque no vamos a entrar en detalles, básicamente, la solución de Stokes corresponde al orden más bajo del desarrollo en potencias de Re de la solución cerca de la esfera, mientras que la solución de Oseen es el siguiente orden [$O(Re)$] de ese desarrollo cerca de la esfera. Proudman y Pearson calcularon el desarrollo en potencias de Re de la solución lejos de la esfera y la acoplaron con la solución cerca de la misma para distancias intermedias. De esta forma obtuvieron la corrección de Oseen de una forma más rigurosa, además de correcciones de mayor orden. Sin embargo, como se observa en la figura 17.2, la resistencia calculada con la aproximación de primer orden (Oseen) prácticamente coincide con los resultados experimentales hasta $Re = 1$ (para $Re > 1$, el método de desarrollar la solución en potencias de Re obviamente no vale). Aunque para hallar la corrección de Oseen en el caso de una esfera no es necesario utilizar la técnica de los desarrollos asintóticos acoplados (sí para su justificación matemática), en el caso de la corriente alrededor de un cilindro, que veremos a continuación, esta técnica es necesaria incluso para hallar la solución de orden menor.

17.4. Movimiento alrededor de un cilindro circular. Paradoja de Stokes

Consideramos ahora, brevemente, el caso de un cilindro de longitud infinita y radio R sobre el que incide, normalmente a su eje, una corriente de un fluido incompresible de viscosidad μ y densidad ρ , que lejos del cilindro tiene una velocidad $V\vec{e}_x$. Veremos que la solución de este problema es bastante diferente al problema de la esfera.

Suponiendo que el eje del cilindro está alineado según el eje \vec{e}_z , tomamos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de forma que la dirección de la corriente es $x = r \cos \theta$ (ver figura 17.3). El campo de velocidades es bidimensional, con

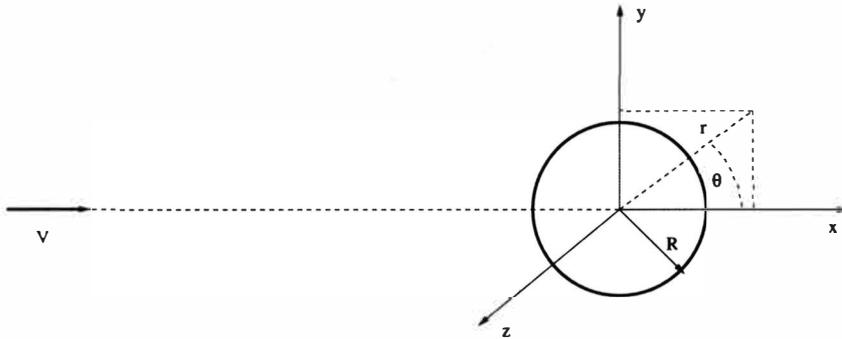


Figura 17.3: Geometría del flujo alrededor de un cilindro.

$v_z = 0$, y ninguna magnitud fluida depende de z , por lo que es posible definir la función de corriente ψ como

$$\vec{v} = \nabla \wedge \psi \vec{e}_z \quad ; \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad , \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad . \quad (17.63)$$

El vector vorticidad sólo tiene componente según z :

$$\vec{\omega} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \vec{e}_z \quad , \quad (17.64)$$

y la ecuación (17.23) queda

$$F^2(F^2\psi) = 0, \quad F^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} . \quad (17.65)$$

Como condiciones de contorno se tiene

$$r = R, \quad v_r = v_\theta = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad v_r = V \cos \theta, \quad v_\theta = -V \sin \theta; \quad (17.66)$$

o, equivalentemente,

$$r = R, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad \psi \rightarrow Vr \sin \theta . \quad (17.67)$$

Análogamente al caso de la esfera, la condición de contorno en el infinito, la que contiene la única información sobre la variación de ψ con θ , nos induce a suponer que

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta \quad . \quad (17.68)$$

Sustituyendo en (17.65) y (17.67) se obtiene

$$\left(\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{d}{dr} - \frac{3}{r^4} \right) f = 0, \quad (17.69)$$

$$r = R, \quad f = df/dr = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow Vr, \quad (17.70)$$

que, efectivamente, sólo involucra a r . Ensayando soluciones tipo $f \sim r^n$, se obtiene que $n = -1, 1$ ó 3 . La cuarta solución independiente es de tipo logarítmico. Probando $f \sim r^n \ln r$ se obtiene que $n = 1$. Luego la solución general es

$$\psi = \left(\frac{C_1}{r} + C_2 r + C_3 r \ln r + C_4 r^3 \right) \sin \theta \quad (17.71)$$

La condición de contorno en el infinito exige que

$$C_2 = V, \quad C_3 = C_4 = 0, \quad (17.72)$$

lo cual nos impide satisfacer las *dos* condiciones de contorno en la superficie del cilindro. Por otro lado, si imponemos las dos condiciones de contorno en $r = R$ y elegimos la solución *menos divergente* cuando $r \rightarrow \infty$ ($C_4 = 0$ pero $C_3 \neq 0$), se obtiene

$$\psi = C_3 V R \sin \theta \left[\frac{r}{R} \ln \frac{r}{R} - \frac{r}{2R} + \frac{R}{2r} \right], \quad (17.73)$$

que proporciona un campo de velocidades que diverge logarítmicamente cuando $r \rightarrow \infty$:

$$v_r = C_3 V \cos \theta \left[\ln \frac{r}{R} - \frac{1}{2} + \frac{R^2}{2r^2} \right], \quad v_\theta = -C_3 V \sin \theta \left[\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} - \frac{R^2}{2r^2} \right]. \quad (17.74)$$

Por tanto, no existe solución a este problema (flujo estacionario y *lento* alrededor de un cilindro) tal y como la estamos buscando. Esta es la llamada **paradoja de Stokes**, que, por supuesto, no es una paradoja real, puesto que flujo alrededor de un cilindro se puede dar a números de Reynolds tan pequeños como se quiera. Esta paradoja nos dice, simplemente, que alguno de los requisitos que hemos impuesto para obtener la solución anterior no se satisface.

De hecho, la solución anterior adolece de la misma dificultad que la solución de Stokes para una esfera: lejos del cilindro el término convectivo y el viscoso son del mismo orden: de (17.74), se tiene que

$$\frac{\rho \vec{v} \cdot \nabla v_r}{\mu \nabla^2 v_r} \sim Re \frac{r}{R} \ln \frac{r}{R}, \quad (17.75)$$

que se hace de orden unidad cuando $\frac{r}{R} \ln \frac{r}{R} \sim Re^{-1} \gg 1$. Así, la solución anterior es *tan válida* como la solución de Stokes para el flujo alrededor de una esfera (es decir, ninguna de las dos son válidas lejos del origen), con la única diferencia que para el flujo alrededor de un cilindro la ruptura de la solución lejos del origen se hace más dramática que en el caso de la esfera, al diverger el campo de velocidad [en el caso de la esfera la paradoja era más *sutil* puesto que, aunque la hipótesis de fuerzas viscosas dominantes no es válida lejos de la esfera, el campo de velocidad (17.39) obtenido con esta hipótesis no sólo no diverge cuando $r \rightarrow \infty$, sino que cumple las condiciones de contorno]. En definitiva, aunque $Re \ll 1$, lejos del cuerpo el término convectivo se hace tan importante como el de fuerzas viscosas en la ecuación de cantidad de movimiento, y aunque en el caso de una esfera esto afectaba *poco* al campo de velocidad, en el caso de un cilindro no se puede obtener una solución uniformemente válida para \vec{v} sin retener el término convectivo. Por tanto, hay que utilizar la técnica de los desarrollos asintóticos acoplados, reteniendo el término convectivo y utilizando la aproximación de Oseen, incluso para obtener el orden de aproximación más bajo.

Utilizando la aproximación de Oseen,

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \simeq \rho V \vec{e}_x \cdot \nabla \vec{v}, \quad (17.76)$$

la ecuación de cantidad de movimiento es (17.61). Al igual que en el caso de la esfera, la solución cerca del cilindro se puede expresar en términos de una serie infinita de funciones de Bessel (ver, por ejemplo, Rosenhead, 1988); los dos primeros términos del desarrollo en potencias de Re de la solución cerca del cilindro es (ver referencia anterior):

$$\begin{aligned} \psi \simeq & \frac{VR \sin \theta}{2C} \left[\frac{r}{R} \left(2 \ln \frac{r}{R} - 1 \right) + \frac{R}{r} \right] \\ & + Re \frac{VR \sin 2\theta}{2} \left[\frac{1}{8C} \frac{r^2}{R^2} \ln \frac{r}{R} - \frac{1}{8} \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{16C} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16C} - \frac{1}{8} \right) \frac{R^2}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (17.77)$$

el acoplamiento con la solución asintótica lejos del cilindro fija el valor de la constante C :

$$C = \frac{1}{2} - \gamma + \ln \frac{8}{Re}, \quad (17.78)$$

siendo $\gamma \simeq 0,5772157$ la constante de Euler. Esta solución proporciona el siguiente coeficiente de resistencia en función del número de Reynolds, $Re = \rho V 2R / \mu$:

$$C_D = \frac{8\pi}{ReC} \left[1 - \frac{1}{32} \left(\frac{5}{16C} - \frac{1}{2} + C \right) Re^2 + O([Re^2 \ln Re]^2) \right]. \quad (17.79)$$

Este coeficiente de resistencia corresponde, por supuesto, a la fuerza de resistencia por unidad de longitud del cilindro, puesto que éste es infinito:

$$C_D = \frac{F'_r}{\frac{1}{2}\rho V^2 2R}, \quad (17.80)$$

$$F'_r = \int_0^{2\pi} [(-p_d + \tau'_{rr}) \cos \theta - \tau'_{r\theta} \sin \theta]_{r=R} R d\theta. \quad (17.81)$$

Si se hubiese utilizado la solución *divergente* (17.74), se hubiera obtenido

$$F'_r = 4\pi\mu V C_3, \quad C_D = \frac{8\pi C_3}{Re}, \quad (17.82)$$

es decir, el primer término de (17.79), pero con la diferencia de que la constante C es conocida [depende de Re de acuerdo con (17.78)], mientras que C_3 era desconocida [del acoplamiento con la solución lejos del cilindro se obtiene $C_3 = C^{-1}$; compárese también (17.77) con (17.73)].

La diferencia tan notoria que acabamos de ver entre el flujo alrededor de una esfera y el flujo alrededor de un cilindro infinito se podía haber previsto mediante un simple análisis dimensional: Para una esfera, la fuerza de resistencia F_r a bajos números de Reynolds debe ser función del radio R , de la velocidad V y de la viscosidad μ (de la densidad ρ no, puesto que el término convectivo es despreciable en la ecuación de cantidad de movimiento); consecuentemente, el grupo adimensional $F_r / \mu V R$ debe ser una constante y, de hecho, la ley de Stokes (17.45) nos dice que esta constante es 6π . Para un cilindro infinito, la fuerza de resistencia por unidad de longitud F'_r debe ser función de las mismas magnitudes R , V y μ ; pero, ahora, el análisis dimensional nos dice que $F'_r / \mu V$ es una constante, lo cual es imposible puesto que F'_r debe depender del radio del cilindro. Así, la densidad ρ debe entrar en el problema y, por tanto, la inercia debe contar en el flujo alrededor de un cilindro, como acabamos de demostrar matemáticamente. De esta forma, $F'_r / \mu V$ es una función del número de Reynolds $\rho V 2R / \mu$.

El argumento dimensional anterior sirve para hallar, mediante un *solo experimento*, la fuerza de resistencia alrededor de un cuerpo de forma arbitraria

a bajos números de Reynolds, ya que $F_r/\mu V R$, donde ahora R es una longitud característica para una serie de cuerpos geoméricamente semejantes, debe ser una constante. Equivalentemente, $C_D = K/Re$, donde la constante K se obtiene con un solo experimento para cuerpos geoméricamente semejantes.

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 7.
- H. LAMB, 1975. Capítulo XI.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996. Capítulo XXII.
- S. M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 8.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulo IV.
- F.M. WHITE, 1991. Capítulo 3.

Capítulo 18

Flujo en medios porosos

18.1. Introducción

La denominación de *medio poroso* se aplica, de una forma simple y general, a un sólido con *agujeros* interconectados entre sí (los poros) a través de los cuales puede fluir un fluido. Normalmente, está constituido por partículas sólidas compactadas cuyos intersticios constituyen los poros. El tamaño y forma de los poros, que puede variar mucho de un medio poroso a otro, tienen, en general, una distribución más o menos aleatoria. Ejemplos prácticos de interés son el terreno de un acuífero o de un depósito petrolífero, el material poroso de un reactor catalítico o de un equipo de filtración, etc. El estudio del flujo a través de medios porosos tiene interés, por tanto, en la ingeniería hidráulica de suelos, en la minería del petróleo y del gas natural y en la ingeniería química, principalmente.

En esta lección se va a presentar una breve introducción a la dinámica de fluidos en medios porosos considerándolos como un **medio continuo**. Es decir, supondremos que el diámetro característico a de los poros es, independientemente de su forma y distribución, mucho menor que la longitud característica L en la que las propiedades del flujo varían apreciablemente. Esta hipótesis permitirá hacer una descripción continua del flujo, en la cual las magnitudes del flujo en cada punto son, en realidad, promedios de esas magnitudes en un volumen δV lo suficientemente grande para que contenga muchos poros, pero lo suficientemente pequeño para que se pueda considerar como un diferencial matemático en la escala de variación de las magnitudes promediadas:

$$a \ll (\delta V)^{1/3} \ll L. \quad (18.1)$$

Obviamente, esta restricción es muchísimo más fuerte que la de medio continuo

introducida en la sección 2.2, pues en el interior de cada poro se supone que el fluido ya se comporta como un medio continuo. Afortunadamente, la gran mayoría de los flujos en medios porosos de interés práctico satisfacen más o menos holgadamente esa condición. Flujos que no satisfacen (18.1) son mucho más difíciles de analizar y no se considerarán aquí. Tampoco se tendrá en cuenta en esta lección introductoria al flujo en los medios porosos el efecto de la tensión superficial, entre otras razones porque se considerará únicamente el movimiento de una sola fase fluida, lo cual sí que constituye una limitación importante, pues se excluye así el estudio de algunos flujos de interés práctico. Para éstos y otros muchos aspectos fisicoquímicos de los medios porosos se remite al lector a las referencias citadas al final.

En las secciones siguientes se derivarán las ecuaciones que gobiernan el flujo en medios porosos, promediando las ecuaciones fluidodinámicas en un volumen δV , se introducirán las aproximaciones fenomenológicas o empíricas más usuales que cierran esas ecuaciones, se discutirán las condiciones de contorno y se verán algunos ejemplos significativos. El estudio de estos flujos se incluye en esta parte dedicada a los flujos viscosos debido a que, dentro de los poros, el movimiento suele tener un número de Reynolds, basado en el diámetro característico a , muy pequeño. De hecho, la ecuación de cantidad de movimiento que se utilizará tiene una forma muy similar a la ecuación que describe el movimiento en el interior de un conducto en el límite $ReD/L \ll 1$.

18.2. Ecuaciones para un fluido homogéneo

18.2.1. Magnitudes promediadas. Porosidad

Considérese un volumen infinitesimal δV (en el sentido descrito anteriormente) del medio poroso. Una parte δV_p de este volumen estará ocupada por los poros (es decir, por el fluido), y el resto $\delta V - \delta V_p$ por el material sólido (impermeable). Una magnitud fundamental en un medio poroso es la **porosidad** Υ , definida como la fracción volumétrica de poros:

$$\Upsilon \equiv \frac{\delta V_p}{\delta V}. \quad (18.2)$$

Esta magnitud es, en general, una función de la posición y del tiempo (esta última dependencia puede estar originada por el propio movimiento del fluido). Sin embargo, por simplicidad se supondrá en lo que sigue que la porosidad es una propiedad del material que no se ve afectada por el movimiento del fluido. Es decir, se supondrá que el material poroso es lo suficientemente *rígido* como para que $\Upsilon = \Upsilon(\vec{x})$. Si el medio poroso es homogéneo, Υ es una constante.

Las magnitudes fluidas en el medio poroso se suelen definir promediando sobre el volumen de poros. Así, si se designan con primas a las magnitudes fluidas en el interior de los poros, la densidad ρ , la presión p , la velocidad \vec{v} y la temperatura T , promediadas en un punto \vec{x} y en cada instante t , se definen:

$$\rho = \frac{1}{\delta V_p} \int_{\delta V_p} \rho' dV, \quad (18.3)$$

$$p = \frac{1}{\delta V_p} \int_{\delta V_p} p' dV, \quad (18.4)$$

$$\delta A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} = \int_{\delta A_p} \rho' \vec{v}' \cdot \vec{n} ds, \quad (18.5)$$

$$T = \frac{1}{\delta V_p} \int_{\delta V_p} T' dV. \quad (18.6)$$

En (18.5), δA es un elemento de área en \vec{x} orientada según \vec{n} y δA_p es la parte de esa sección ocupada por los huecos de los poros.

18.2.2. Ecuación de conservación de la masa

Dado un δV en un punto \vec{x} , si δA_p es la parte de la superficie que encierra a δV ocupada por los poros, la ecuación de conservación de la masa aplicada al volumen de poros δV_p se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\delta V_p} \rho' dV_p + \int_{\delta A_p} \rho' \vec{v}' \cdot \vec{n} ds = 0. \quad (18.7)$$

Aplicando las definiciones anteriores y el teorema de Gauss se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta V_p \rho) + \delta V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (18.8)$$

Finalmente, utilizando (18.2), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Upsilon \rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (18.9)$$

que es la ecuación de continuidad para un fluido homogéneo en medio poroso de porosidad Υ .

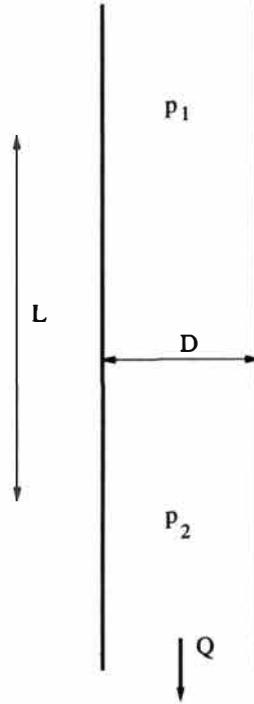


Figura 18.1: Esquema del experimento de Darcy.

18.2.3. Ley de Darcy

La ecuación de cantidad de movimiento también se puede derivar teóricamente promediando la correspondiente ecuación en el interior de los poros. Sin embargo, dada la dificultad de modelar de forma precisa las fuerzas que el material sólido del medio poroso ejerce sobre el fluido, que inevitablemente requiere la utilización de modelos semiempíricos, es mucho más práctico recurrir a leyes experimentales más o menos fundamentadas que proporcionan el campo de velocidad \vec{v} directamente.

De éstas, la más usada es la denominada ley de Darcy. En 1856 Darcy publicó un trabajo sobre las fuentes de la ciudad francesa de Dijon, en el que presentaba sus investigaciones sobre el flujo de agua en columnas de arena que actuaban como filtros (ver figura 18.1). Básicamente encontró que el caudal Q que circulaba por el filtro era proporcional a la sección multiplicada por la diferencia de presión reducida, e inversamente proporcional a la longitud del filtro:

$$Q = \text{constante} \times \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g \right). \quad (18.10)$$

La constante dependía del fluido (agua) y del material poroso. Esta ley se puede justificar teóricamente si se sustituye el material poroso por un conjunto de N tubitos verticales de diámetro a . Suponiendo que las fuerzas de viscosidad dominan en el movimiento del líquido en cada tubo, es decir, $Rea/L \ll 1$, donde Re es un número de Reynolds basado en a y en una velocidad característica, el caudal Q_i que circula por cada tubo obedece la ley de Hagen-Poiseuille. Sumando los caudales de los N tubos, se tiene

$$Q = NQ_i = N \frac{\pi a^4}{128\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} + \rho g \right). \quad (18.11)$$

Teniendo en cuenta que la sección ocupada por los tubitos es una fracción k de la sección total, $Na^2 = kD^2$, donde k depende de cómo de juntos estén los tubos, es decir, de las características del material poroso, la constante en (18.10) vale, en este particular medio poroso,

$$\frac{ka^2}{32\mu}. \quad (18.12)$$

Es decir, es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido y proporcional a una característica física del medio poroso que tiene que ver con la sección disponible para el paso del fluido.

La ley (18.10) se puede escribir en forma general como una relación lineal entre \vec{v} y $\nabla p + \rho \nabla U$:

$$\vec{v} = -\frac{1}{\mu} \overline{\overline{\Pi}} \cdot (\nabla p + \rho \nabla U), \quad (18.13)$$

donde $\overline{\overline{\Pi}}$ es el tensor de **permeabilidad** del medio poroso. Si éste es isotrópico, el tensor se reduce a una sola constante, $\overline{\overline{\Pi}} = \Pi \overline{\overline{I}}$, y la ley de Darcy se escribe

$$\vec{v} = -\frac{\Pi}{\mu} (\nabla p + \rho \nabla U), \quad (18.14)$$

donde Π es la permeabilidad, que es una propiedad física del medio poroso (experimentalmente se determina, por ejemplo, midiendo el caudal en un dispositivo como el de la figura 18.1) Obsérvese que la permeabilidad tiene dimensiones de área y, de acuerdo con (18.12), es proporcional al tamaño medio del poro al cuadrado (a^2). Si Π/μ es constante, (18.14) implica que el campo de velocidad media en los poros \vec{v} es potencial y, por tanto, el flujo medio

es irrotacional (a pesar de que, para que la ley de Darcy sea válida, las fuerzas viscosas deben ser dominantes en el flujo en el interior de los poros, con velocidad \vec{v}^*):

$$\vec{v} = \nabla\phi, \quad \phi = -\frac{\Pi}{\mu}(p + \rho U); \quad \nabla \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Teniendo en cuenta que en un medio isotrópico el tamaño y la longitud de los poros son del mismo orden a , de acuerdo con las consideraciones anteriores, la ley de Darcy es válida siempre que el número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho a V_c}{\mu}, \quad (18.15)$$

donde V_c es una velocidad característica del fluido, es mucho menor que la unidad. Experimentalmente se corrobora que, efectivamente, la ley de Darcy se verifica cuando $Re \ll 1$, siendo ésta la situación más común en la práctica debido a que el tamaño de los poros suele ser muy pequeño y las velocidades no suelen ser muy grandes. Se han propuesto leyes más generales, válidas para cualquier número de Reynolds, pero que no se verán aquí (ver referencias citadas al final). Sólo indicar que, en el límite opuesto $Re \gg 1$, el gradiente de presión reducida es proporcional a la velocidad al cuadrado (concretamente a $\rho v \vec{v}$).

18.2.4. Ecuación para la presión

En el caso de un flujo incompresible, la ecuación de continuidad (18.9) se reduce a $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Sustituyendo la ley de Darcy (18.14) y suponiendo que tanto la permeabilidad como la viscosidad son constantes, el problema se reduce a la resolución de una única ecuación para la presión reducida:

$$\nabla^2(p + \rho U) = 0. \quad (18.16)$$

Se tiene, pues, que el problema viene gobernado por una ecuación de Laplace.

Si el flujo es compresible (un gas), para cerrar el problema hace falta una ecuación de la energía y las ecuaciones de estado. Si $Re \ll 1$, la ecuación de la energía se suele simplificar a $T \simeq \text{constante} = T_s$, donde T_s es la temperatura del sólido. Esto está justificado teniendo en cuenta que si los poros son muy pequeños y la velocidad de paso es también muy pequeña, todo el fluido tiende a estar en equilibrio térmico con el material sólido. Sustituyendo la ecuación de estado $p/\rho = R_g T \simeq \text{constante}$ y la ley de Darcy en la ecuación de continuidad, se llega a la siguiente ecuación para la presión

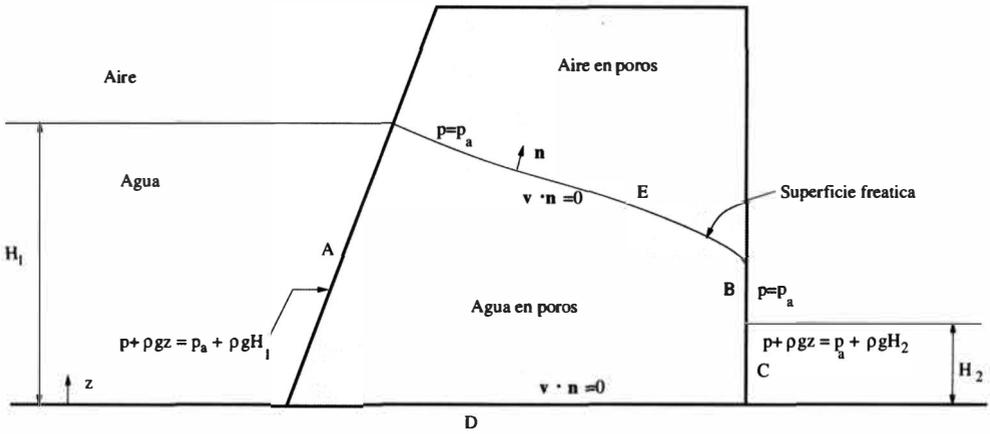


Figura 18.2: Condiciones de contorno en el flujo a través de un dique.

$$\Upsilon \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\Pi}{\mu} \nabla \cdot (p \nabla p) = 0, \quad (18.17)$$

donde se han despreciado las fuerzas másicas por tratarse de un gas y se ha supuesto que la porosidad no depende del tiempo y que Π/μ es constante.

18.2.5. Condiciones de contorno

Para resolver (18.16) o (18.17) hay que fijar condiciones de contorno para la presión [en el caso de (18.17), hace falta también imponer una condición inicial, que consistirá en el valor de la presión en $t = 0$, $p(\vec{x}, 0) = p_0(\vec{x})$]. Debido al operador laplaciano, se deben especificar condiciones de contorno en todo el contorno del flujo en el interior del medio poroso. Para fijar ideas, se considerará el ejemplo del flujo de agua a través de un dique de terreno poroso (figura 18.2).

En las superficies de separación entre un fluido libre y el fluido en el interior del medio poroso (superficies *A*, *B* y *C* en la figura 18.2) normalmente se conoce la presión. En las superficies impermeables (*D* en la figura 18.2), se tiene que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ que, utilizando la ley de Darcy, se convierte en una condición de tipo Neumann para la presión: $\partial p / \partial n + \rho \partial U / \partial n = 0$ en el caso de un líquido, o $\partial p / \partial n = 0$ para un gas. Por último, en las superficies libres de separación entre dos fluidos inmiscibles en el interior del medio poroso (superficie *E* en la figura 18.2) se tiene que la presión es la misma a ambos lados de la superficie (en el caso de la figura se puede suponer que la presión por el lado del aire es la atmosférica y, por tanto, conocida). La posición de la superficie libre no es

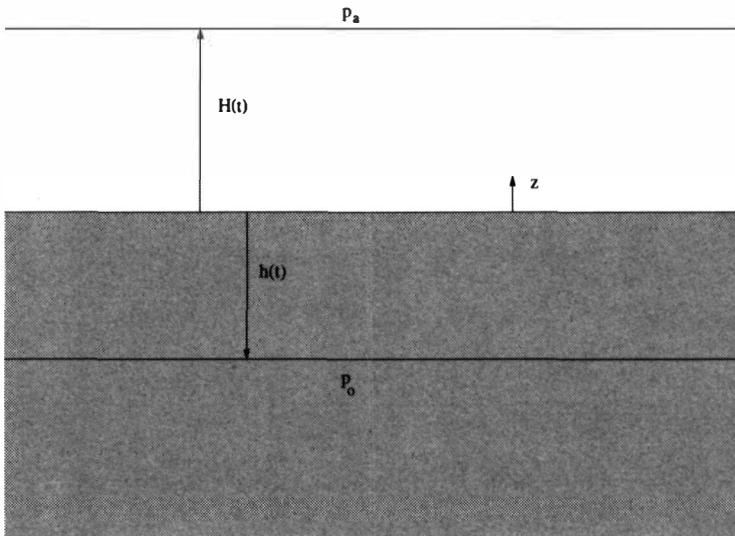


Figura 18.3:

conocida, por lo que hay que imponer la condición adicional de que la superficie $S(\vec{x}, t) = 0$ es una superficie fluida: $\partial S/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla S = 0$. Como $\vec{n} = \nabla S/|\nabla S|$, la segunda condición de contorno queda $\vec{v} \cdot \vec{n} = -(\partial S/\partial t)/|\nabla S| = -(\Pi/\mu)\partial(p + \rho U)/\partial n$, sobre $S(\vec{x}, t) = 0$.

18.3. Ejemplos

Si la geometría no es sencilla, normalmente hay que recurrir a la integración numérica de las ecuaciones (18.16) o (18.17) con sus respectivas condiciones de contorno. Aquí se van a considerar dos ejemplos con geometrías muy simples que tienen solución analítica.

18.3.1. Avance de una superficie freática plana en un medio poroso infinito

Considérese un líquido de viscosidad μ que reposa sobre un medio poroso semiinfinito, de permeabilidad Π y porosidad Υ , inicialmente *seco*. Por acción de la gravedad, el líquido, que inicialmente tiene una altura H_o , avanza a través del medio poroso, de manera que el frente húmedo alcanza una posición $z = -h$ en el instante t (ver figura 18.3). La ecuación (18.16) en este caso se escribe

$$\frac{\partial^2(p + \rho gz)}{\partial z^2} = 0, \quad (18.18)$$

que hay que resolver con las condiciones de contorno

$$z = 0, \quad p = p_a + \rho gH(t); \quad z = -h(t), \quad p = p_o, \quad (18.19)$$

donde p_o es la presión de saturación del líquido. La solución es:

$$p + \rho gz = \left[\frac{p_a - p_o + \rho gH}{h} + \rho g \right] z + p_a + \rho gH. \quad (18.20)$$

De acuerdo con la ley de Darcy, la velocidad de avance del líquido es

$$v_z = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z} = -\frac{\Pi}{\mu} \left[\frac{p_a - p_o + \rho gH}{h} + \rho g \right]. \quad (18.21)$$

Como esta velocidad no depende de z , coincide con la velocidad de avance del frente húmedo,

$$v_z = -\frac{dh}{dt}. \quad (18.22)$$

Por otro lado, el nivel $H(t)$ se puede relacionar con $h(t)$ teniendo en cuenta que el caudal por unidad de superficie que entra en el medio poroso es igual al caudal que avanza por él:

$$-\frac{dH}{dt} = \frac{d\Upsilon h}{dt}; \quad t = 0, \quad H = H_o, \quad h = 0, \quad (18.23)$$

de donde

$$H(t) = H_o - \Upsilon h(t). \quad (18.24)$$

Sustituyendo (18.21) y (18.24) en (18.22), y utilizando las variables adimensionales

$$\eta = \frac{h}{H_o}, \quad \tau = t \frac{\Pi(p_a - p_o + \rho gH_o)}{H_o^2 \mu}, \quad (18.25)$$

se tiene la siguiente ecuación diferencial para $\eta(\tau)$:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{\eta} + \alpha; \quad \eta(0) = 0, \quad (18.26)$$

donde se ha definido el parámetro adimensional

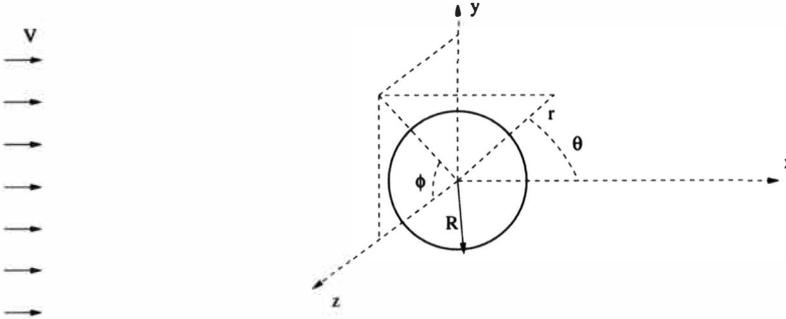


Figura 18.4:

$$\alpha = \frac{\rho g(1 - \Upsilon)H_o}{p_a - p_o + \rho g H_o}. \quad (18.27)$$

Por tanto, el frente de avance viene dado, en forma implícita, por

$$\alpha\tau = \eta - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha\eta). \quad (18.28)$$

Obsérvese que todo el líquido ha pasado al medio poroso ($H = 0$) cuando $\eta = 1/\Upsilon$, lo cual ocurre cuando $\tau = 1/(\alpha\Upsilon) - [\ln(1 + \alpha/\Upsilon)]/\alpha^2$.

18.3.2. Flujo en un medio poroso con una cavidad esférica

Considérese ahora el flujo a través de un medio poroso ilimitado en el que existe una cavidad esférica de radio $R \gg a$. Del infinito viene una corriente con velocidad $\vec{v} = V\vec{e}_x$ (ver figura 18.4), y se quiere averiguar cómo afecta la cavidad al campo de velocidad uniforme en el medio poroso.

Teniendo en cuenta que la presión reducida $p_r = p + \rho U$ no depende de ϕ , la ecuación de Laplace (18.16) se escribe, en coordenadas esféricas,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p_r}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (18.29)$$

que debe ser resuelta con las condiciones de contorno

$$r = R, \quad p_r = p_o; \quad r \rightarrow \infty, \quad \vec{v} \rightarrow V \cos \theta \vec{e}_r - V \sin \theta \vec{e}_\theta, \quad (18.30)$$

donde se ha supuesto que en la cavidad la presión reducida del líquido es uniforme y constante. Utilizando la ley de Darcy, la condición de contorno en el infinito para p_r se escribe

$$r \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial p_r}{\partial r} \rightarrow -\frac{\mu V}{\Pi} \cos \theta, \quad \frac{\partial p_r}{\partial \theta} \rightarrow \frac{\mu V}{\Pi} r \sin \theta. \quad (18.31)$$

Teniendo en cuenta la ecuación y las condiciones de contorno, se sospecha que p_r tiene la forma

$$p_r(r, \theta) = p_o + f(r) \cos \theta, \quad (18.32)$$

lo cual se corrobora sustituyendo en (18.29) y (18.31), que proporciona la ecuación diferencial y condiciones de contorno para $f(r)$ siguientes:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} \right) f = 0, \quad (18.33)$$

$$f(R) = 0; \quad r \rightarrow \infty, \quad f \rightarrow -\frac{\mu V}{\Pi}. \quad (18.34)$$

La ecuación (18.33) es del tipo de Euler, teniendo por solución general

$$f = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad (18.35)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración, que, de (18.34), valen

$$C_1 = \frac{\mu V R^3}{\Pi}, \quad C_2 = -\frac{\mu V}{\Pi}. \quad (18.36)$$

Finalmente, la solución queda

$$p_r = p_o - \frac{\mu V}{\Pi} \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) r \cos \theta. \quad (18.37)$$

Aplicando la ley de Darcy, el campo de velocidad se escribe

$$\vec{v} = V \cos \theta \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \vec{e}_r - V \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{e}_\theta. \quad (18.38)$$

El caudal de líquido que atraviesa el agujero de radio R vale

$$Q = \int_0^{\pi/2} \Upsilon [\vec{v} \cdot \vec{e}_r 2\pi r \sin \theta r d\theta]_{r=R} = 3\pi R^2 \Upsilon V, \quad (18.39)$$

lo cual implica que se triplica el caudal que pasaría por la misma sección del medio poroso en el caso de que no existiera la cavidad, $Q = \pi R^2 \Upsilon V$.

Referencias.

- G.I. BARENBLATT, V.M. ENTOV y V.M. RYZHIK, 1990.
- J. BEAR, 1988.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 8

Parte VI

**FLUJOS DE FLUIDOS NO
VISCOSOS O IDEALES**

Capítulo 19

Movimientos con número de Reynolds grande

19.1. Introducción

Los efectos viscosos y de conducción de calor en el movimiento de un fluido (y también los efectos de difusión másica en el caso de que el fluido esté constituido por varias especies químicas) son poco importantes en muchos flujos reales, por lo que pueden ser despreciados en primera aproximación, al menos en ciertas regiones del flujo. Esto es consecuencia de que los fluidos más comunes tienen una viscosidad y una conductividad térmica relativamente pequeñas (para el agua a $20^{\circ}C$, $\nu \simeq 10^{-6} m^2/s$, $\alpha \simeq 1,42 \times 10^{-7} m^2/s$, mientras que para el aire en condiciones normales, $20^{\circ}C$ y $1 atm.$, $\nu \simeq 1,5 \times 10^{-5} m^2/s$, $\alpha \simeq 2,08 \times 10^{-5} m^2/s$), por lo que en la mayoría de los flujos de interés su efecto suele ser muy pequeño. Esta parte de la asignatura se dedica a estudiar este tipo de flujos donde, en primera aproximación y en casi todo el dominio fluido, se pueden despreciar los efectos disipativos de la viscosidad y la conductividad térmica (y la difusión másica si la hubiese), también llamados flujos de fluidos ideales.

Ya se vió en la sección 11.2 que la condición que debe verificarse para que las fuerzas viscosas sean despreciables frente a la convección de la cantidad de movimiento es

$$Re = \frac{VL}{\nu} \gg 1, \quad (19.1)$$

donde V y L son una velocidad y una longitud característica del flujo y ν es la viscosidad cinemática. Por otro lado, la conducción de calor es despreciable

frente a la convección de energía interna en la ecuación de la energía si

$$Pe = RePr = \frac{VL}{\alpha} \gg 1 \quad , \quad (19.2)$$

siendo α la difusividad térmica. También se vió que para la gran mayoría de los fluidos esta segunda condición se verifica si la condición (19.1) se satisface, puesto que el número de Prandtl es de orden unidad o mayor para casi todos los fluidos (exceptuando los metales líquidos, para los que $Pr \ll 1$). Por todo ello, se concluía que los efectos disipativos son despreciables frente a los convectivos si se cumple que el número de Reynolds es muy grande. Esta condición también incluye a los flujos con varias especies químicas puesto que los efectos disipativos debidos a la difusión másica son despreciables frente a la convección de masa en la ecuación de conservación de la masa de cada especie i si

$$ReSc_i = \frac{VL}{D_i} \gg 1 \quad , \quad (19.3)$$

donde D_i es el coeficiente de difusión de la especie i en el seno de la mezcla, y el número de Schmidt es siempre de orden unidad o mayor. Así, pues, la condición (19.1), número de Reynolds alto, caracteriza a los flujos de fluidos ideales.

19.2. Ecuaciones de Euler

Si (19.1) se satisface, las ecuaciones del movimiento (10.1)-(10.7) en primera aproximación se escriben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad , \quad (19.4)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m \quad , \quad (19.5)$$

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = Q_r \quad , \quad (19.6)$$

$$\rho = \rho(p, T) \quad , \quad s = s(p, T) \quad , \quad (19.7)$$

donde en lugar de la ecuación de la energía interna se ha utilizado la ecuación de la entropía (8.27) puesto que ésta se simplifica notoriamente al no haber fenómenos de transporte o disipativos. Si hubiese más de una especie química,

a la ecuación de continuidad habría que añadir la ecuación de conservación de cada especie química i (6.31), salvo una, que en primera aproximación se escribe:

$$\rho \frac{DY_i}{Dt} = \omega_i. \quad (19.8)$$

Este sistema de ecuaciones que describe el movimiento de un fluido ideal se denomina ecuaciones de Euler.¹ A veces, en vez de la ecuación de la entropía conviene usar otras formas de la ecuación de la energía, que se escriben aquí para futuras referencias:

$$\rho \frac{D(e + v^2/2)}{Dt} = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r, \quad (19.9)$$

$$\rho \frac{D(h + v^2/2)}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r, \quad (19.10)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \vec{v} + Q_r, \quad (19.11)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + Q_r. \quad (19.12)$$

Una particularidad importante de las ecuaciones anteriores, desde un punto de vista matemático (aunque como se verá tiene también importantes implicaciones físicas), es que con los efectos disipativos han desaparecido también los términos que contenían las derivadas de orden mayor (segundo orden) para la velocidad, la temperatura y las concentraciones en las ecuaciones (en lo que sigue nos olvidaremos de las concentraciones suponiendo que el fluido está constituido por una única especie química o, si varias, están en equilibrio). Ello implica que no se pueden imponer la totalidad de las condiciones de contorno para estas magnitudes. Por ejemplo, en el flujo alrededor de un

¹Desde un punto de vista histórico, Euler dedujo las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento (19.4)-(19.5) y para un fluido incompresible [$\nabla \cdot \vec{v} = 0$ en vez de (19.4)], por lo que, estrictamente, sólo a este conjunto de dos ecuaciones se le debería dar el nombre de ecuaciones de Euler. Sin embargo, por extensión, se suele denominar ecuaciones de Euler al conjunto de todas las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido ideal. Conviene resaltar también que Euler dedujo sus ecuaciones casi un siglo antes que se establecieran las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso, por lo que el estudio de los fluidos ideales (la hidrodinámica clásica) constituyó una ciencia independiente, incluso después de que se empezara a estudiar los movimientos viscosos, hasta el advenimiento de la teoría de la capa límite, creada por Prandtl en 1904, que unió formalmente estas dos hasta entonces inconexas ciencias.

obstáculo considerado en la sección 10.3, si se usa el sistema de ecuaciones anterior para describir el flujo, se pueden imponer todas las condiciones iniciales y de contorno, excepto las condiciones de contorno en la superficie del obstáculo, (10.33) y (10.36). Ello implica que la solución no puede ser uniformemente válida en todo el dominio fluido puesto que sobre el obstáculo no se satisface (en general) que la velocidad y la temperatura del fluido sean iguales a las del sólido. Físicamente, lo que ocurre es que, aunque $Re \gg 1$ y la viscosidad y conductividad térmica no son importantes en el flujo, cerca de la superficie del cuerpo esto no es cierto, y existe una *capa límite* delgada en sus proximidades donde, a pesar de que $Re \gg 1$, los efectos viscosos y de conducción de calor son tan importantes como la convección, y ellos son los que se *encargan de hacer cumplir* las condiciones de contorno. A pesar de su importancia, de momento nos olvidaremos de esta capa límite, la cual será tratada en la parte VIII, y nos limitaremos a obtener soluciones de las ecuaciones de Euler.

Desde un punto de vista más general, al haber desaparecido las derivadas de mayor orden en las ecuaciones de Euler, éstas no representan uniformemente a las ecuaciones de Navier-Stokes, ni siquiera en el límite formal $Re \rightarrow \infty$, y no existen, en general, soluciones continuas y/o con derivadas continuas del problema constituido por las ecuaciones de Euler y las correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Así, en las soluciones aparecen superficies de discontinuidad, en forma de ondas de choque, capas límites, etc. En *realidad*, estas discontinuidades no son tales, sino, como acabamos de decir, son capas muy delgadas en las que al ser los gradientes de velocidad y/o temperatura muy elevados, los efectos disipativos son importantes, a pesar de que la viscosidad y conductividad térmica son relativamente pequeñas. De momento no tendremos en cuenta estas capas delgadas y admitiremos la existencia de discontinuidades en las soluciones de Euler.

19.3. Ecuación de Bernoulli

La ecuación de cantidad de movimiento para un fluido ideal (19.5) puede, bajo ciertas condiciones, integrarse a lo largo de líneas de corriente. En efecto: si hacemos uso de la identidad vectorial $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \nabla v^2/2 - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$, y multiplicamos la ecuación escalarmente por \vec{v} , se tiene

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^2/2 + \frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \nabla p - \vec{v} \cdot \vec{f}_m = 0 \quad . \quad (19.13)$$

Ahora bien, $\vec{v} \cdot \nabla \equiv v \partial / \partial l$, donde l es la coordenada a lo largo de las distintas líneas de corriente, por lo que dividiendo por v y suponiendo que las fuerzas

másicas derivan del potencial U (al menos a lo largo de las líneas de corriente, es decir, $\vec{v} \cdot \vec{f}_m = -v\partial U/\partial l$),

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = 0. \quad (19.14)$$

Si, además, el flujo es barótropro (con función de barotropía $w \equiv \int^p dp/\rho$) y casi estacionario, finalmente se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + w + U \right) = 0, \quad (19.15)$$

que integrada proporciona,

$$\frac{v^2}{2} + w + U = H(t), \quad (19.16)$$

donde H es una *constante* para cada línea de corriente, y que puede depender del tiempo (suavemente) a través de las condiciones de contorno. Así, pues, el Teorema de Bernoulli nos dice que, si se verifican las condiciones: (i) fluido ideal, (ii) componente de las fuerzas másicas sobre las líneas de corriente deriva de un potencial U , (iii) flujo barótropro y (iv) flujo casi estacionario ($St \equiv L/Vt_o \ll 1$), la magnitud $H \equiv v^2/2 + w + U$ es constante a lo largo de cada línea de corriente. Esta magnitud H se suele denominar función de Bernoulli o, simplemente, *el Bernoulli* del flujo, y la ecuación (19.16) también se llama de Bernoulli. Para un líquido ($w = p/\rho$) bajo la acción de la gravedad, (19.16) queda

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = H. \quad (19.17)$$

En las ecuaciones anteriores H puede ser distinta en cada línea de corriente. Sin embargo, hay un caso particular importante en el cual H es la misma constante en todo el campo fluido: cuando el flujo es irrotacional. Si el flujo es irrotacional, $\nabla \wedge \vec{v} = 0$, y además se cumplen las otras condiciones del Teorema de Bernoulli (fluido ideal, flujo barótropro y casi estacionario, fuerzas másicas derivan de un potencial), la ecuación de cantidad de movimiento se escribe

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + U \right) = 0, \quad (19.18)$$

que integrada da

$$\frac{v^2}{2} + w + U = H(t) \quad . \quad (19.19)$$

Obsérvese que, cuando el flujo es irrotacional, $\nabla H = 0$, mientras que si no es irrotacional, esta igualdad está restringida a lo largo de líneas de corriente: $\partial H / \partial l = \vec{v} \cdot \nabla H = 0$. Sobre los flujos irrotacionales e ideales volveremos en la lección siguiente, donde veremos que la condición de irrotacionalidad y las condiciones bajo las cuales el teorema de Bernoulli es válido no son totalmente independientes.

19.4. Flujos isentrópicos

Si no hubiesen aportes volumétricos de calor ($Q_r = 0$), la ecuación de la entropía (19.6) nos dice que la entropía se conserva a lo largo del movimiento

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad . \quad (19.20)$$

Es decir, la entropía de las distintas partículas fluidas se conserva, lo cual es consecuencia de que se han despreciado todos los efectos disipativos. Estos flujos se denominan isentrópicos. Si todas las partículas fluidas tuviesen la misma entropía s_o en algún instante (por ejemplo, si todo el fluido tuviese inicialmente la misma temperatura y presión), la entropía sería la misma en todo instante en la región ocupada por las mismas partículas fluidas. Estrictamente esto sería un movimiento isentrópico.

Si el flujo es casi estacionario, la ecuación (19.6) implica que la entropía se conserva a lo largo de las líneas de corriente: $\vec{v} \cdot \nabla s = 0$ o $\partial s / \partial l = 0$; $s = s_o(t)$, donde s_o es una constante para cada línea de corriente. Si s_o es la misma para todas las líneas de corriente, la entropía de todo el campo fluido es la misma en cada instante, pero puede variar de instante a instante a través de las condiciones de contorno; esto es lo que se denomina un flujo homentrópico, donde $\nabla s = 0$, pero $\partial s / \partial t$ puede ser distinto de cero, aunque la variación de s con el tiempo debe ser muy lenta para que el flujo se pueda considerar casi estacionario ($St \ll 1$).

Una particularidad de los flujos isentrópicos (y homentrópicos) es que son también barótrpos: De (8.8) se tiene que

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad , \quad (19.21)$$

por lo que si $ds = 0$ (en todo el campo fluido o a lo largo de las líneas de corriente),

$$dh = \frac{dp}{\rho} \quad , \quad (19.22)$$

siendo, por tanto, la función de barotropía igual a la entalpía. Así, pues, las condiciones (i) y (iii) del teorema de Bernoulli (fluido ideal y barotropía a lo largo de las líneas de corriente) se cumplen para los flujos isentrópicos. Si, además, el flujo es casi estacionario, (iv), y las fuerzas másicas sobre las líneas de corriente derivan de un potencial, (ii), se verifica (19.16).

19.5. Conservación de las magnitudes de remanso

Consideremos el flujo de un fluido ideal casi estacionario, en el que no hay aportes volumétricos de calor ($Q_r = 0$) y en el que las fuerzas másicas pueden despreciarse (como ocurre en la mayoría de los flujos de gases). En este caso, de las ecuaciones (19.6) y (19.10) se deduce que tanto la entropía como la entalpía total o de remanso, $h + v^2/2$, se conservan a lo largo de las líneas de corriente:

$$s = s_o \quad , \quad (19.23)$$

$$h + v^2/2 = h_o \quad . \quad (19.24)$$

De esta forma tenemos dos primeras integrales del movimiento que facilitan enormemente la resolución del problema. Obsérvese que la conservación de la entalpía de remanso es equivalente a la ecuación de Bernoulli, puesto que si el flujo es isentrópico la función de barotropía coincide con la entalpía y hemos despreciado las fuerzas másicas: $H = v^2/2 + w = v^2/2 + h = h_o$. Si, además, todas las líneas de corriente parten de alguna región donde las propiedades son uniformes, la entropía y la entalpía de remanso son constantes en todo el campo fluido.

La conservación de la entalpía de remanso sugiere la introducción de otras *magnitudes de remanso*, como la presión, la temperatura y la densidad de remanso, asociadas todas a la entalpía de remanso. Así, para un gas ideal se tiene

$$T_o = h_o/c_p \quad , \quad \frac{p_o}{\rho_o} = R_g T_o \quad , \quad \frac{p_o}{\rho_o^\gamma} = \text{constante} \quad , \quad (19.25)$$

donde la última relación proviene de la conservación de la entropía [ecuación (8.39)]. De estas expresiones se pueden obtener T , p y ρ en función de las magnitudes de remanso, T_o , p_o y ρ_o (las cuales se conservan a lo largo de las líneas de corriente) y del número de Mach, $M \equiv v/a = v/\sqrt{\gamma R_g T}$:

$$\frac{T_o}{T} = \frac{h_o}{h} = \frac{h + \frac{v^2}{2}}{h} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (19.26)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^\gamma = \frac{\rho_o T_o}{\rho T}, \quad (19.27)$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}, \quad (19.28)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}. \quad (19.29)$$

Para un líquido ($\rho = \text{constante}$) se tiene, simplemente,

$$s = s_o, \quad (19.30)$$

$$T = T_o, \quad p + \rho v^2/2 = p_o. \quad (19.31)$$

Las magnitudes de remanso representan, físicamente, las magnitudes que se obtendrían al decelerar el fluido desde la velocidad v hasta la velocidad nula de forma isentrópica y estacionariamente, y en ausencia de fuerzas másicas. Las relaciones anteriores son muy útiles, puesto que permiten conocer todas las magnitudes fluidas si se conocen las magnitudes de remanso (constantes a lo largo de las líneas de corriente, y en muchas situaciones en todo el campo fluido) y una sola magnitud más: el número de Mach en el caso de un gas, o la velocidad en el caso de un líquido. Pero para que éstas relaciones sean válidas, es decir, para que se conserven las magnitudes de remanso, se tienen que verificar ciertas condiciones que resumimos de nuevo: (i) fluido ideal (viscosidad y conductividad térmica despreciables), (ii) fuerzas másicas despreciables, (iii) movimiento sin adición o eliminación de calor y (iv) movimiento casi estacionario [los requisitos (i) y (iii) pueden resumirse en la condición de que el movimiento debe ser isentrópico].

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 1.
- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 3.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 2.

Capítulo 20

Vorticidad

20.1. Ecuación de la vorticidad para fluidos ideales

En este capítulo se verán algunos importantes resultados que conciernen a la evolución de la vorticidad en el flujo de un fluido ideal.

Para un fluido ideal, la ecuación de la vorticidad (7.46) se escribe

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho^3} \nabla \rho \wedge \nabla p \quad , \quad (20.1)$$

donde se ha eliminado el término viscoso $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$ que, como se vió en la sección 14.2.3, representa la difusión de la vorticidad debido al transporte molecular (ver sección 20.6 más adelante), efecto despreciable en un fluido ideal. En la ecuación anterior tampoco aparecen las fuerzas másicas, lo cual es válido si éstas derivan de un potencial. El término de Bjerkness, $\nabla \rho \wedge \nabla p / \rho^2$, representa, según se vió en 7.6, el par ejercido por las fuerzas de presión sobre cada partícula fluida, que da lugar a una variación de la vorticidad de la partícula. Este término es nulo para flujos barótrópos, como son los flujos con densidad constante o los flujos isentrópicos. Por tanto, este término también va a ser nulo para los movimientos que aquí estamos considerando si no hay aportes volumétricos de calor, puesto que entonces el flujo es isentrópico (sección 19.4). Así, la ecuación de la vorticidad para un flujo isentrópico con fuerzas másicas conservativas queda reducida a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \vec{v} . \quad (20.2)$$

Si el flujo es bidimensional, por ejemplo plano, $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$, donde v_x y v_y dependen de x , y y t , la vorticidad sólo tiene componente según el eje z , $\vec{\omega} =$

$(0, 0, \omega)$, y el segundo miembro de la ecuación anterior se anula idénticamente: $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} = \omega\partial\vec{v}/\partial z = \vec{0}$. Por tanto,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = 0 \quad ; \quad (20.3)$$

es decir, $\vec{\omega}/\rho$ se conserva a lo largo del movimiento para un flujo bidimensional y barótopo de un fluido ideal cuando las fuerzas másicas derivan de un potencial. En particular, si el flujo es inicialmente irrotacional, permanecerá siempre irrotacional. En las secciones siguientes veremos que esta última afirmación también se cumple para los flujos tridimensionales, aunque en ellos $(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v}$ no es nulo en general. Se verán, además, otras importantes conclusiones de la ecuación (20.2). Pero antes son pertinentes unas definiciones.

20.2. Líneas y tubos de vorticidad

El campo de vorticidad de un flujo puede visualizarse en forma análoga a como se visualiza un campo de velocidades, o un campo magnético. Así, se define una línea de vorticidad como aquella curva que es tangente al vector vorticidad en todos sus puntos. Matemáticamente viene dada por $d\vec{x} = k\vec{\omega}$, es decir $d\vec{x}$ es paralelo a $\vec{\omega}$, siendo k una constante. En coordenadas cartesianas se tienen las dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} \quad , \quad (20.4)$$

donde ω_1, ω_2 y ω_3 son los tres componentes de $\vec{\omega}$. Al igual que las líneas de corriente de un flujo proporcionan una visualización de las direcciones del flujo en cada instante, las líneas de vorticidad dan una visión de las direcciones de los vectores vorticidad en el campo fluido. En general la orientación de estas líneas cambian de un instante a otro, excepto en un flujo estacionario, en el cual permanecen fijas en el espacio.

Un tubo de vorticidad está constituido por la familia de líneas de vorticidad que pasan por una curva cerrada dada. Debido a que el campo de vorticidad es siempre solenoidal, $\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot \nabla \wedge \vec{v} \equiv 0$, el *flujo* de vorticidad permanece constante a lo largo de todas las secciones transversales de un tubo de corriente:

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{\omega} dV = 0 \quad , \quad (20.5)$$

y, como sobre la superficie lateral del tubo $\vec{\omega}$ es perpendicular a la normal,

$$\vec{\omega}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \vec{\omega}_2 \cdot d\vec{s}_2 \quad , \quad (20.6)$$

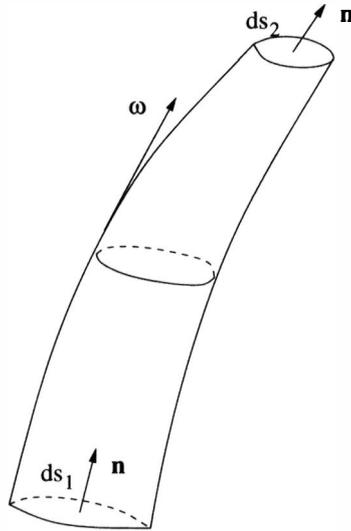


Figura 20.1: Tubo de vorticidad.

para un tubo de vorticidad de sección diferencial (figura 20.1). Es decir, la cantidad $\vec{\omega} \cdot d\vec{s}$, que se denomina **intensidad del tubo de vorticidad**, es constante a lo largo del tubo. De aquí se pueden sacar varias consecuencias: (a) la vorticidad varía a lo largo del tubo inversamente a la sección transversal del mismo; (b) si $\vec{\omega}$ está limitado en todo el flujo (no es infinito en ningún punto), ningún tubo de vorticidad puede *terminar* dentro del fluido, y (c) un tubo de vorticidad debe terminar en los límites del campo fluido o formar un tubo cerrado. Estas propiedades de los tubos de vorticidad son también algunas de las consecuencias de los teoremas de la vorticidad de Helmholtz, que pasamos a ver ahora en forma general.

20.3. Teoremas de la vorticidad de Helmholtz

Demostraremos a continuación que la ecuación (20.2) implica lo siguiente:

- (i) Las líneas de vorticidad son convectadas por el flujo.
- (ii) $|\vec{\omega}|/\rho$ aumenta con el *estiramiento* de la línea de vorticidad.
- (iii) La intensidad de un tubo de vorticidad se mantiene constante en el movimiento del fluido.

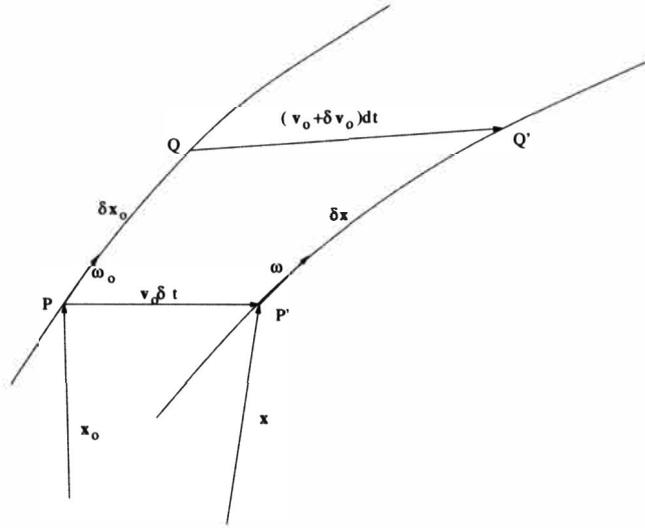


Figura 20.2: Convección de una línea de vorticidad.

- (iv) La vorticidad en cualquier punto de un tubo de vorticidad se incrementa cuando la sección transversal del tubo se reduce en ese punto, y decrece cuando la sección transversal en ese punto crece.

Éstos constituyen los denominados teoremas de la vorticidad de Helmholtz. También demostraremos que

- (v) si el vector posición \vec{x} de todas las partículas fluidas en el instante t es conocido, es decir, si las trayectorias $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t)$ son conocidas, donde \vec{x}_0 es la posición en $t = 0$, entonces la vorticidad en el instante t viene dada por

$$\vec{\omega} = \frac{\rho}{\rho_0} \vec{\omega}_0 \cdot \nabla_0 \vec{x}, \quad (20.7)$$

donde ∇_0 es el operador gradiente con respecto a la variable Lagrangiana \vec{x}_0 , y $\vec{\omega}_0$ es la vorticidad inicial.

Para demostrar todas estas afirmaciones, consideremos una línea de vorticidad en un instante, que podemos considerar el inicial, $t = 0$, y sean dos puntos P y Q infinitesimalmente próximos de esta línea de coordenadas \vec{x}_0 y $\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0$, respectivamente (ver figura 20.2). Por ser una línea de vorticidad, se tiene que

$$\vec{PQ} \equiv \delta\vec{x}_o = \epsilon \frac{\vec{\omega}_o}{\rho_o}, \quad \epsilon \ll 1, \quad (20.8)$$

donde el subíndice o denota que las propiedades están evaluadas en el punto P . Después de un intervalo de tiempo δt , la partícula P es convectada a P' y la Q a Q' , de coordenadas

$$P' : \vec{x} = \vec{x}_o + \vec{v}_o \delta t, \quad (20.9)$$

$$Q' : \vec{x} + \delta\vec{x} = \vec{x}_o + \delta\vec{x}_o + [\vec{v}_o + \delta\vec{x}_o \cdot \nabla_o \vec{v}_o] \delta t, \quad (20.10)$$

respectivamente, donde \vec{v}_o es la velocidad de la partícula P y ∇_o es el gradiente respecto a la coordenada \vec{x}_o . La variación del segmento \vec{PQ} es, por tanto,

$$\frac{\delta\vec{x} - \delta\vec{x}_o}{\delta t} \equiv \frac{P'Q' - \vec{PQ}}{\delta t} = \frac{Q'Q' - P'P'}{\delta t} = \delta\vec{x}_o \cdot \nabla_o \vec{v}_o = \epsilon \frac{\vec{\omega}_o}{\rho_o} \cdot \nabla_o \vec{v}_o. \quad (20.11)$$

Haciendo uso de (20.2), como δt es infinitesimal,

$$\frac{\delta\vec{x} - \delta\vec{x}_o}{\delta t} = \frac{\epsilon}{\delta t} \left[\frac{\vec{\omega}}{\rho} - \frac{\vec{\omega}_o}{\rho_o} \right], \quad (20.12)$$

donde $\vec{\omega}$ y ρ son la vorticidad y densidad del punto P ; es decir,

$$\delta\vec{x} = \epsilon \frac{\vec{\omega}}{\rho}. \quad (20.13)$$

Por tanto, una línea que inicialmente coincidía con una línea de vorticidad, permanece coincidiendo con la línea de vorticidad en el instante siguiente, lo cual prueba (i).

Dividiendo (20.13) por (20.8), se tiene que

$$\frac{|\vec{\omega}|/\rho}{|\vec{\omega}_o|/\rho_o} = \frac{|P'Q'|}{|\vec{PQ}|} = \frac{|\delta\vec{x}|}{|\delta\vec{x}_o|}, \quad (20.14)$$

por lo que $|\vec{\omega}|/\rho$ incrementa en proporción al *estiramiento* de la línea de vorticidad, lo que prueba (ii).

Considérese un pequeño tubo de vorticidad que rodee a la línea de vorticidad que pasa por P en el instante inicial. En el instante δt , este tubo ha sido convectado por el flujo y se transforma en un tubo de vorticidad que rodea al punto P' . Si las secciones transversales de los tubos de vorticidad en P y P' son δA_o y δA , respectivamente, por conservación de masa se tiene que

$$\rho|\delta\vec{x}|\delta A = \rho_o|\delta\vec{x}_o|\delta A_o \quad . \quad (20.15)$$

Sustituyendo en (20.14),

$$\frac{|\vec{\omega}||\delta\vec{x}|\delta A}{|\vec{\omega}_o||\delta\vec{x}_o|\delta A_o} = \frac{|\delta\vec{x}|}{|\delta\vec{x}_o|} \quad ; \quad (20.16)$$

es decir,

$$|\vec{\omega}|\delta A = |\vec{\omega}_o|\delta A_o \quad , \quad (20.17)$$

o

$$\frac{D}{Dt}(\vec{\omega} \cdot \delta\vec{A}) = 0 \quad , \quad (20.18)$$

donde $\delta\vec{A}$ es cualquier elemento de área que contiene al punto P' , cuya vorticidad es $\vec{\omega}$, y que es convectada con el flujo. De esta expresión siguen inmediatamente las afirmaciones (iii) y (iv).

Finalmente, para probar (v), lo cual equivale a integrar formalmente la ecuación de la vorticidad (20.2), consideremos que la trayectoria del punto P viene dada por $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_o, t)$; la del punto Q vendría entonces dada por $\vec{x} + \delta\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_o + \delta\vec{x}_o, t) = \vec{x}(\vec{x}_o, t) + \delta\vec{x}_o \cdot \nabla_o \vec{x}(\vec{x}_o, t)$, donde ∇_o es el operador gradiente con respecto a la variable Lagrangiana \vec{x}_o . Por tanto, el segmento $P'Q' \equiv \delta\vec{x} = \delta\vec{x}_o \cdot \nabla_o \vec{x}(\vec{x}_o, t) = \epsilon\vec{\omega}/\rho$, donde se ha hecho uso de (20.13). Es decir,

$$\vec{\omega} = \frac{\rho}{\epsilon} \delta\vec{x}_o \cdot \nabla_o \vec{x} \quad . \quad (20.19)$$

Sustituyendo (20.8),

$$\vec{\omega} = \frac{\rho}{\rho_o} \vec{\omega}_o \cdot \nabla_o \vec{x} \quad , \quad (20.20)$$

como se quería demostrar.

Una consecuencia importante de esta última expresión es que si $\vec{\omega}_o = 0$ en todo el campo fluido, es decir, si la vorticidad en un instante es nula en todo el campo fluido (por ejemplo, si el fluido está inicialmente en reposo o en un estado de movimiento uniforme), entonces $\vec{\omega} = 0$ para cualquier instante posterior. En otras palabras si un flujo es inicialmente irrotacional, bajo las hipótesis en que (20.2) es válida, permanecerá siempre irrotacional. Esta es, realmente, una de las formas de enunciar el teorema de la circulación de Kelvin, que demostraremos por un procedimiento alternativo en la sección siguiente.

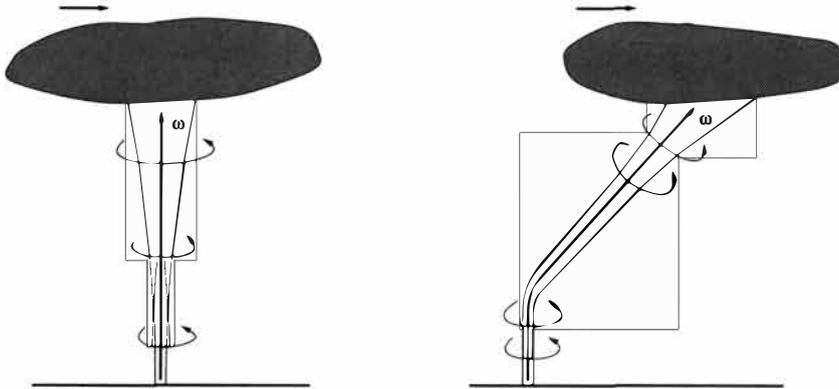


Figura 20.3: Deformación de un tornado cuando las nubes se mueven por encima (adaptada de Acheson, 1990).

En realidad Helmholtz demostró, en 1858, las afirmaciones (i)-(iv) y para un fluido incompresible ($\rho = \text{constante}$), mientras que la demostración anterior está hecha con la condición de que el flujo sea barotrópico, lo cual incluye también, por ejemplo, los flujos isentrópicos de gases. El resultado (v), es decir, la integración formal de (20.2) en la forma (20.7), fue obtenida por Cauchy, y se suele denominar ecuación de Cauchy.

Un ejemplo típico que ilustra muy bien los resultados anteriores es el flujo de aire en un tornado. La convección térmica del aire cerca del suelo hacia las nubes produce, por un mecanismo que no vamos a tratar aquí, un movimiento rotatorio muy intenso, concentrando la vorticidad en el centro del tornado. El centro del tornado se ve porque en la región de giro intenso la presión es muy baja y la humedad del aire se condensa, formando una nube en forma de chimenea, que es lo que normalmente se identifica con el tornado. Esta nube giratoria es una visualización de un tubo de vorticidad muy estrecho donde la vorticidad es muy intensa, que *muere* en las nubes de la tormenta (ver figura 20.3). Cuando las nubes superiores se mueven, el tornado se dobla, es decir, el tubo de corriente es convectado por el flujo, (i), aumentando la vorticidad en gran parte del tornado al estrecharse la sección transversal del tubo de corriente, (ii)-(iv).

20.4. Teorema de la circulación de Kelvin

El teorema dice: Sea un flujo de un fluido no viscoso, barotrópico en donde las fuerzas másicas derivan de un potencial U , y sea $C(t)$ una curva cerrada que se mueve con el fluido. Entonces, la circulación

$$\Gamma = \int_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (20.21)$$

alrededor de $C(t)$ no depende del tiempo. Para demostrarlo, hallamos la derivada sustancial de la circulación:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_C \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \int_C \vec{v} \cdot \frac{Dd\vec{l}}{Dt} \quad , \quad (20.22)$$

El segundo término es idénticamente nulo puesto que $Dd\vec{l}/Dt = d\vec{v}$ (ver figura 20.4) y la integración es sobre una curva cerrada. Por otro lado, de la ecuación de cantidad de movimiento bajo las hipótesis del teorema se tiene que

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla(w + U) \quad , \quad (20.23)$$

donde $\nabla w = \nabla p/\rho$; es decir, la aceleración $D\vec{v}/Dt$ deriva del potencial $w + U$. Como $\nabla(w + U) \cdot d\vec{l} = [\partial(w + U)/\partial l]dl$,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -[w + U]_C = 0 \quad , \quad (20.24)$$

al ser una curva cerrada, con lo que queda demostrado el teorema.

Como consecuencia del este teorema, si inicialmente la circulación a lo largo de cualquier curva cerrada del flujo es cero, ésta permanecerá siendo cero en todo instante posterior. Por el teorema de Stokes se tiene que

$$\Gamma = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \quad , \quad (20.25)$$

donde S es una superficie que se apoya en C . Por tanto, como corolario del teorema de Kelvin, si el movimiento de un fluido ideal y barótripo en presencia de fuerzas másicas que derivan de un potencial es inicialmente irrotacional (por ejemplo, si parte del reposo o de un movimiento uniforme), permanecerá siempre irrotacional.¹ Esta afirmación coincide con la obtenida en la sección anterior a partir de la ecuación de la vorticidad. De hecho, el teorema de Kelvin se podría haber demostrado sin más que aplicar el teorema de Stokes a la variación de la circulación,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} \equiv \frac{D}{Dt} \int_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{D}{Dt} \int_{S(t)} \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \quad , \quad (20.26)$$

¹Ver sección 21.8 más adelante para una matización importante de este corolario.

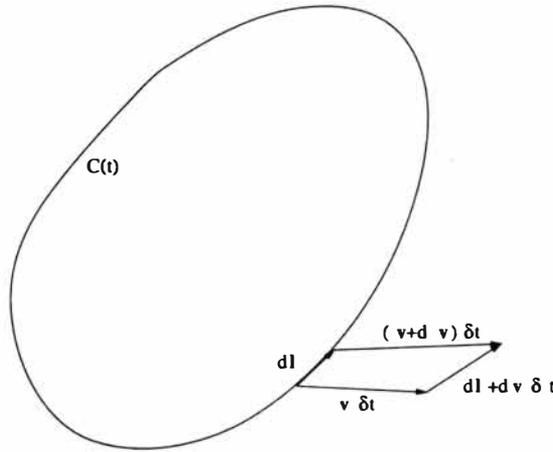


Figura 20.4: Teorema de Kelvin.

y aplicar (20.18). Y viceversa, los teoremas de Helmholtz [afirmaciones (i)-(iv) de la sección anterior] podrían haber sido demostrados utilizando el teorema de Kelvin, o invariancia en el tiempo de la circulación para un flujo barótopo de un fluido ideal en presencia de fuerzas másicas conservativas. Se debe observar, sin embargo, que el teorema de Kelvin es más general, puesto que aunque se ha hecho la hipótesis de un fluido ideal, esta hipótesis sólo afecta al fluido contenido en la curva $C(t)$, por lo que si las fuerzas viscosas son importantes fuera de la curva C , no afectaría a la invariancia de la circulación alrededor de C . Por otra parte, al pasar de hablar de circulación a hacerlo de vorticidad, se hace uso del teorema de Stokes, y las conclusiones respecto a la invariancia de la irrotacionalidad son sólo válidas si la región fluida es simplemente conexa, es decir, si es posible construir una superficie S que se apoye en C y que esté completamente inmersa en el fluido.

20.5. Ecuación de Bernoulli para flujos irrotacionales. Función potencial

La persistencia de los flujos irrotacionales que inicialmente lo son (si se verifican las condiciones de idealidad, barotropía y fuerzas másicas conservativas, y salvo que existan capas límites u otras fuentes de vorticidad) hace que el estudio de estos flujos sea bastante importante desde un punto de vista práctico. Además, el estudio de estos flujos es particularmente simple por el hecho de que se puede utilizar la función potencial de velocidad (sección 3.6):

$$\vec{v} = \nabla\phi. \quad (20.27)$$

La ecuación de cantidad de movimiento para estos flujos se escribe

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla v^2/2 + \nabla w + \nabla U = 0, \quad \nabla w = \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (20.28)$$

(recuérdese que $w = h$ para un flujo isentrópico). Sustituyendo (20.27) e integrando se tiene la ecuación de Bernoulli para flujos irrotacionales:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w + U = H(t), \quad (20.29)$$

donde H es una función arbitraria del tiempo que viene fijada por las condiciones de contorno. A esta ecuación hay que unir la ecuación de continuidad, que en el caso general de un gas sería:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\vec{v} = 0 \quad ; \quad (20.30)$$

la ecuación de la energía (19.6) proporciona la relación $\rho = \rho(p)$ (recuérdese que el flujo es barótrópico), la cual, salvo que existan aportes volumétricos de calor, es la relación isentrópica, que para un gas ideal se escribe

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante}. \quad (20.31)$$

Este sistema de ecuaciones (20.29)-(20.31), junto con $\vec{v} = \nabla\phi$, se simplifica bastante para el caso de un flujo estacionario:

$$\nabla \cdot \rho\vec{v} = 0 \quad , \quad \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla U = 0. \quad (20.32)$$

Desarrollando la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \vec{v} + \frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \nabla\rho = 0 \quad , \quad (20.33)$$

y sustituyendo la definición de la velocidad del sonido (recuérdese que el flujo es isentrópico), se tiene

$$\nabla\rho = \frac{1}{a^2}\nabla p \quad , \quad (20.34)$$

$$\nabla^2\phi + \frac{\nabla\phi}{\rho a^2} \cdot \nabla p = 0 \quad , \quad (20.35)$$

donde se ha sustituido también $\vec{v} = \nabla\phi$. Por último, sustituyendo ∇p de la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene una única ecuación para el potencial de velocidad, donde aparece la velocidad del sonido:

$$a^2 \nabla^2 \phi = \nabla \phi \cdot \nabla [(\nabla \phi / 2)^2 + U] \quad (20.36)$$

El límite de esta ecuación para un flujo incompresible ($\rho = \text{constante}$) se obtiene sin más que hacer $a \rightarrow \infty$:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad , \quad (20.37)$$

que, por supuesto, se podría haber obtenido mucho más fácilmente sin más que sustituir $\vec{v} = \nabla\phi$ en la ecuación de continuidad para un fluido incompresible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Vemos pues que para calcular el movimiento en un flujo irrotacional estacionario es suficiente con resolver una ecuación de tercer orden para ϕ con sus correspondientes condiciones de contorno (realmente solo son necesarias dos condiciones de contorno puesto que cualquier constante aditiva es irrelevante en ϕ , ya que no afecta al campo de velocidad). En el caso de un líquido se tiene, simplemente, una ecuación de Laplace. Si el movimiento es, además, bidimensional, la resolución es particularmente simple puesto que se puede utilizar también la función de corriente y hacer uso de la teoría de funciones analíticas en variable compleja (ver capítulo siguiente). Una vez obtenida la función potencial se obtiene el campo de velocidad y de la ecuación de cantidad de movimiento el campo de presión, que integrado sobre las superficies sólidas nos dan las fuerzas que el fluido ejerce sobre ellas.

20.6. Generación de vorticidad

Hasta aquí hemos considerado fluidos ideales, en los cuales, según hemos visto, el flujo de vorticidad a través de cualquier superficie que se mueva con el fluido se conserva. En los flujos no isentrópicos aparecen, según se vió en §7.6., dos nuevos términos que afectan a la variación de la vorticidad: el movimiento angular generado por las fuerzas de presión, $\nabla \rho \wedge \nabla p / \rho^2$, y la difusión de la vorticidad con difusividad ν , $\nu \nabla^2 \vec{\omega}$. Aunque la difusión de la vorticidad por la viscosidad ya fue considerada en el ejemplo de la sección 14.2.3, aquí se verá de forma más general cómo este término no sólo difunde, sino que, además, es el encargado de producir la vorticidad en una clase importante de flujos.

El cambio de $\vec{\omega}$ en una partícula fluida, que para un fluido ideal se puede visualizar como resultado del estiramiento y curvamiento de los tubos de

vorticidad, se ve suplementado por una difusión que equivale a un flujo cuya velocidad es ν veces el gradiente de $\vec{\omega}$ a lo largo de la normal hacia fuera de la superficie dada, $\vec{f}_\omega = -\nu(\nabla\vec{\omega}) \cdot \vec{n}$, de forma análoga a como se difunde el calor. Así, la intensidad de un tubo de vorticidad ya no permanece constante puesto que la vorticidad se difunde a través de las paredes del tubo. Pero lo más importante es que la conclusión de que una partícula fluida con vorticidad cero continúa con vorticidad nula a lo largo del movimiento es falsa en un fluido viscoso, puesto que existe difusión de vorticidad desde las partículas fluidas vecinas. Sin embargo, para que haya difusión de vorticidad, ésta debe crearse en algún lugar, puesto que la difusión no puede crear vorticidad de la nada. Y ésta se crea en el contacto del fluido con las superficies sólidas. Para verlo, consideremos el flujo unidireccional a lo largo de una placa plana en la dirección de \vec{e}_x : $\vec{v} = u(y, t)\vec{e}_x$. En este flujo, la única componente no nula de la vorticidad sería $\omega_z = -\partial u/\partial y$; es decir, la componente transversal al movimiento, pero en el plano del mismo. El flujo difusivo de esta vorticidad desde la superficie ($y = 0$) hacia el fluido ($y > 0$) sería:

$$-\nu \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \nabla^2 u \quad (20.38)$$

En el caso de un movimiento estacionario se tendría que este flujo de vorticidad es proporcional al gradiente de presión reducida [ver ecuación (14.2) para los flujos unidireccionales]:

$$-\nu \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \quad (20.39)$$

Así, hay una generación neta de vorticidad en la superficie que se difunde al resto del fluido si el movimiento está generado por un gradiente de presión. Esto explica, por ejemplo, que el flujo alrededor de un cuerpo con número de Reynolds alto no sea irrotacional, puesto que se genera vorticidad en la superficie y, aunque su difusión está confinada a una capa límite delgada, ésta se convecta hacia la estela formando un torbellino en el caso de perfiles aerodinámicos (ver sección 21.8 en el capítulo siguiente), o modificando completamente el flujo, el cual deja de ser irrotacional en su mayor parte, cuando el cuerpo es romo (en estos casos se separa la capa límite y los efectos viscosos, confinados originalmente en una capa delgada, terminan por *impregnar* a casi todo el flujo; ver sección 21.8 y capítulo 27).

Referencias y bibliografía complementaria.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 5.
- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 5.
- J. LIGHTHILL, 1986. Capítulos 4 y 5.
- H.J. LUGT, 1983.
- H.J. LUGT, 1996.
- J.M. OTTINO, 1990. Capítulo 3.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulo II.
- P.G. SAFFMAN, 1992. Capítulo 1.
- C.-S. YIH, 1988. Capítulo 3.

Capítulo 21

Movimiento irrotacional y bidimensional de un fluido incompresible

21.1. Introducción

Los movimientos irrotacionales (o potenciales) que además son incompresibles son particularmente fáciles de describir porque la función potencial ϕ ($\vec{v} = \nabla\phi$) satisface la ecuación de Laplace (ver sección 20.5)

$$\nabla \cdot \nabla\phi \equiv \nabla^2\phi = 0. \quad (21.1)$$

Como esta ecuación es lineal, permite aplicar el principio de superposición. Es decir, soluciones de (21.1) con condiciones de contorno complejas y, por tanto, difíciles de obtener directamente, se pueden construir superponiendo (sumando) soluciones sencillas, correspondientes a condiciones de contorno más simples, siempre que la *suma* de estas condiciones de contorno reproduzcan las condiciones de contorno originales. Esta técnica es de mucha utilidad pues se conocen un conjunto de soluciones elementales (con condiciones de contorno sencillas), bidimensionales y tridimensionales, de la ecuación de Laplace. De particular interés son los movimientos bidimensionales, pues se pueden describir mediante una función de corriente que, como se verá, también satisface la ecuación de Laplace. Esto hace que se pueda introducir el denominado potencial de velocidad complejo y utilizar toda la potencia de la teoría de las funciones analíticas en el campo complejo para describir estos movimientos.

En esta lección se utilizarán ambos procedimientos, el de superposición y el de la función potencial compleja, para describir algunos movimientos po-

tenciales e incompresibles de interés. En particular, se aplicará al movimiento potencial alrededor de perfiles aerodinámicos bidimensionales, que históricamente fue la principal aplicación de estas técnicas y que tanto contribuyó al arranque de la aviación a principios del siglo XX. Téngase en cuenta que, una vez que el campo de velocidad potencial se ha obtenido mediante alguno de estos procedimientos, el campo de presión se obtiene directamente de la ecuación de Bernoulli. También se describirán otras técnicas típicas de resolución de la ecuación de Laplace como, por ejemplo, el método de las imágenes.

21.2. Movimientos potenciales elementales

El movimiento potencial más simple posible es la **corriente uniforme unidireccional**, cuyo campo de velocidad viene dado por

$$\vec{v} = U\vec{e}_x, \quad (21.2)$$

donde se ha supuesto que la corriente tiene la dirección del eje x , y U es la magnitud (constante) de la velocidad. La función potencial de velocidad ϕ y la función de corriente ψ de este movimiento se obtienen, en el plano (x, y) , de las ecuaciones

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x = U = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (21.3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_y = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (21.4)$$

de donde, omitiendo constantes aditivas irrelevantes,

$$\phi = Ux, \quad \psi = Uy. \quad (21.5)$$

Obviamente, las líneas de corriente son rectas paralelas al eje x , mientras que las líneas de potencial constante, denominadas líneas equipotenciales, son rectas paralelas al eje y .

Otro movimiento elemental importante es la **fente o manantial bidimensional**, y el correspondiente **sumidero bidimensional**, que son movimientos puramente radiales asociados a un caudal por unidad de longitud constante Q que sale de, o entra en, un punto del plano que se toma como el origen de coordenadas (por supuesto, estos movimientos son singulares en ese punto). En coordenadas cilíndricas planas (r, θ) , el campo de velocidad viene dado por

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r = \pm \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r, \quad (21.6)$$

donde el valor de v_r en función de Q se obtiene hallando el caudal por unidad de longitud perpendicular al plano en un círculo de radio r centrado en el origen y suponiendo que su valor Q no varía con r . El signo positivo corresponde a un manantial o fuente y el negativo a un sumidero (compruébese que, además de incompresible por definición, este movimiento es irrotacional). Las funciones potencial y de corriente se obtienen de las ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = \frac{\pm Q}{2\pi r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (21.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (21.8)$$

de donde

$$\phi = \frac{\pm Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{\pm Q}{2\pi} \theta. \quad (21.9)$$

Las líneas de corriente son rectas que pasan por el origen ($\theta = \text{constante}$), naturalmente, mientras que las curvas equipotenciales son círculos centrados en el origen ($r = \text{constante}$). Obsérvese que, como en el caso anterior, ambos conjuntos de líneas son ortogonales, lo cual será evidente en general cuando introduzcamos el potencial complejo más adelante.

Un tercer movimiento elemental es el denominado **torbellino potencial** o (**irrotacional**) **plano**, ya introducido previamente en la sección 14.2. Se define como el movimiento puramente circunferencial, $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$, que es además irrotacional. Teniendo en cuenta que la componente z (perpendicular al plano) de la vorticidad se escribe

$$(\nabla \wedge \vec{v})_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) = 0, \quad (21.10)$$

se tiene $v_\theta = C/r$. La constante de integración C se suele relacionar con la circulación Γ alrededor de un círculo de radio r centrado en el origen, que se supone independiente de r : $C = \Gamma/(2\pi)$. De hecho, otra forma de definir este tipo de torbellinos es como un movimiento plano puramente circunferencial cuya circulación alrededor de cualquier curva cerrada que encierra al origen es siempre igual a Γ . Obsérvese que, a pesar de que el movimiento es irrotacional, su circulación a lo largo de una curva cerrada que encierra al origen no es cero. Pero esto no vulnera el teorema de Stokes porque el campo de velocidad, que viene dado por

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \quad (21.11)$$

es singular en el origen. Si Γ es positivo, el torbellino gira en el sentido de θ creciente, es decir, en el sentido opuesto a las agujas del reloj (si tanto las coordenadas $r - \theta$ como el reloj son los que se usan convencionalmente). Las funciones potencial y de corriente se obtienen de las ecuaciones

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (21.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (21.13)$$

de donde

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (21.14)$$

Obsérvese que las líneas de corriente son círculos centrados en el origen y las líneas equipotenciales son rectas que cruzan el origen.

Para terminar con los movimientos elementales *planos*, se considerará el **dipolo bidimensional**. Se define como la superposición de un manantial centrado en $(x = -a, y = 0)$ y un sumidero centrado en $(x = a, y = 0)$, ambos con la misma intensidad Q , en el límite en que $a \rightarrow 0$, $Q \rightarrow \infty$, pero con el producto Qa manteniéndose constante. Para hallar la correspondiente función de corriente, primero se escribe la función de corriente de cada uno de sus dos elementos de acuerdo con (21.9), pero en coordenadas cartesianas [$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$], y desplazando el origen a los centros respectivos del sumidero y del manantial:

$$\psi_\pm = \pm \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x \pm a}. \quad (21.15)$$

Haciendo $\psi = \psi_+ + \psi_-$ y hallando el límite $a \rightarrow 0$, se obtiene

$$\psi = -\frac{2aQ}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \equiv -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (21.16)$$

donde $M \equiv 2aQ$ se denomina intensidad del dipolo, que tiene unidades de caudal. El signo negativo proviene de que se ha colocado al manantial a la izquierda del sumidero. Si se cambia el manantial por el sumidero, la expresión sería la misma, pero con signo positivo. En ambos casos, las líneas de corriente son circunferencias centradas en algún punto del eje y tangentes al eje x en el origen. En coordenadas cilíndricas, (21.16) se escribe

$$\psi = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r}. \quad (21.17)$$

El campo de velocidad y el potencial de velocidad se obtienen de (21.17) utilizando las ecuaciones

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{M \cos \theta}{2\pi r^2}, \quad (21.18)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r^2}, \quad (21.19)$$

de donde

$$v_r = -\frac{M \cos \theta}{2\pi r^2}, \quad v_\theta = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r^2}, \quad (21.20)$$

$$\phi = \frac{M \cos \theta}{2\pi r}. \quad (21.21)$$

En cuanto a los movimientos potenciales tridimensionales simples, se considerará primero la **fente** o **manantial tridimensional** (y el correspondiente sumidero tridimensional) que se define, de forma análoga al caso bidimensional, como el movimiento incompresible puramente radial originado por un caudal Q que sale de (o entra en) un punto que se toma como el origen de coordenadas (obsérvese que, en el caso tridimensional, Q tiene unidades de caudal). En coordenadas esféricas (r, θ, φ) , el campo de velocidad viene dado por (téngase en cuenta que r y θ tienen aquí un significado distinto que las en coordenadas cilíndricas anteriores; véase la figura 1.1 del capítulo 1):

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r = \frac{\pm Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r. \quad (21.22)$$

Esta expresión se obtiene calculando el caudal que atraviesa una esfera de radio r e imponiendo el requisito de que su valor Q no varía con r . El signo positivo corresponde a un manantial y el negativo a un sumidero. Se comprueba fácilmente que este movimiento es irrotacional, por lo que admite potencial de velocidades. También se puede definir una función de corriente pues, aunque tridimensional, el movimiento es unidireccional en coordenadas esféricas. Esto último hace que la ecuación de continuidad tenga un sólo término en estas coordenadas, de forma que la función de corriente se puede definir en el plano (r, θ) o en el plano (r, φ) . Por razones evidentes es preferible utilizar la primera posibilidad; en particular, se suele usar la denominada función de corriente de Stokes (véase sección 17.2). Así, las funciones potencial y de corriente se obtienen de las ecuaciones

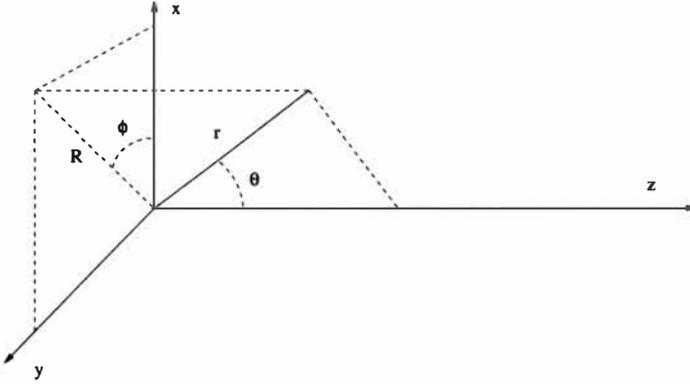


Figura 21.1:

$$v_r = \frac{\pm Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (21.23)$$

$$v_\theta = 0 = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad (21.24)$$

de donde

$$\phi = \frac{\mp Q}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{\mp Q}{4\pi} \cos \theta. \quad (21.25)$$

A diferencia de las funciones de corriente bidimensionales (planas) que se ha utilizado anteriormente, que en virtud de $(\nabla \wedge \vec{v})_z = 0$ siempre satisfacen la ecuación de Laplace $\nabla^2 \psi = 0$ (tanto en coordenadas cartesianas como en cilíndricas), la función de corriente de Stokes no satisface la ecuación de Laplace. En efecto, sustituida en $(\nabla \wedge \vec{v})_\varphi = 0$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0,$$

que, aunque lineal, no es una ecuación de Laplace.

Por último se considerará el **dipolo tridimensional**. Para ello se definen las coordenadas polares (R, φ, z) asociadas a las coordenadas esféricas (r, θ, φ) (véase figura 21.1). Tanto el manantial como el sumidero, ambos de la misma intensidad Q , se sitúan en el eje polar z ($R = 0$), el primero en $z = -a$ y el segundo en $z = a$. Escribiendo la función de corriente superposición de ambos elementos en las coordenadas polares y hallando el límite $a \rightarrow 0$, pero con el producto Qa finito, se llega a

$$\psi = -\frac{Qa}{2\pi} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{Qa \sin^2 \theta}{2\pi r} \equiv -\frac{M}{4\pi r} \sin^2 \theta, \quad (21.26)$$

donde $M \equiv 2Qa$ es la intensidad del dipolo, que ahora tiene dimensiones de caudal por longitud. De (21.26) se obtienen el campo de velocidad y la función potencial, que valen:

$$v_r = -\frac{M}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad v_\theta = -\frac{M}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad (21.27)$$

$$\phi = \frac{M}{4\pi r^2} \cos \theta. \quad (21.28)$$

21.3. Superposición de movimientos elementales

En esta sección se considerarán varios ejemplos de superposición de algunos de los flujos potenciales elementales anteriores que dan lugar a flujos potenciales también simples y de interés práctico.

Por ejemplo, la superposición de una corriente uniforme con velocidad U y una fuente bidimensional en el origen de intensidad Q simula la corriente potencial alrededor de un cuerpo bidimensional semiinfinito, cuya forma se obtendrá a continuación. Para ello se escribe la función de corriente suma de las funciones de corriente de estos dos elementos [ecuaciones (21.5) y (21.9)] en coordenadas cartesianas:

$$\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}. \quad (21.29)$$

El campo de velocidad viene dado por

$$v_x = U + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (21.30)$$

En la figura 21.2 se representan las líneas de corriente de este movimiento para diversos valores de $2\pi\psi/Q \equiv C$. Se observa que el eje x ($y = 0$) es una línea de corriente, correspondiente a $C = 0$. En esta línea se sitúa el único punto de remanso del flujo, que, haciendo uso de (21.30), viene dado por [$x = x_R = -Q/(2\pi U)$, $y = 0$]. De este punto de remanso parten dos líneas de corriente, correspondientes a $C = \pm\pi$, de manera que todo el caudal que sale de la fuente permanece entre esas dos líneas, mientras que la corriente procedente de $x \rightarrow -\infty$ no atraviesa nunca a esas dos líneas de corriente. De esta forma, el campo de velocidad (21.30) simula el flujo potencial e incompresible alrededor de un

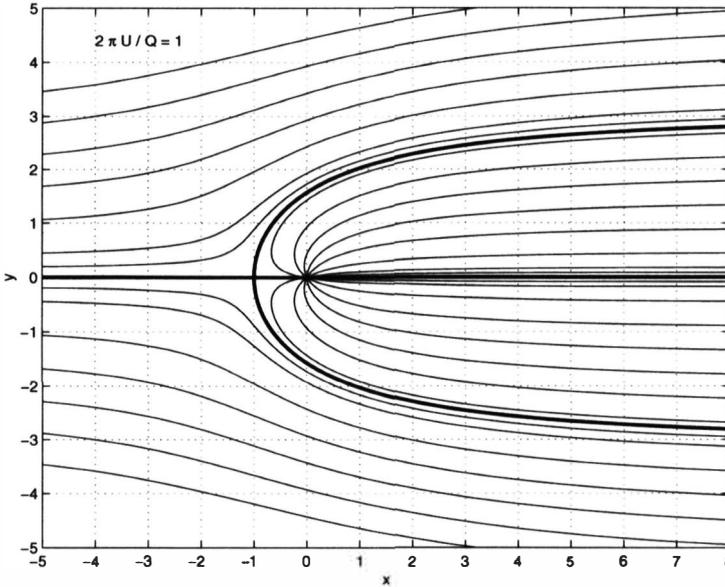


Figura 21.2: Líneas de corriente dadas por (21.29) con $2\pi U/Q = 1$ para diversos valores de $C \equiv 2\pi\psi/Q$.

cuerpo semiinfinito bidimensional que viene dado por las líneas de corriente correspondientes a $C = \pm\pi$; es decir, dado por las curvas

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\pm\pi - \frac{2\pi U}{Q}y\right), \quad (21.31)$$

que en la figura 21.2 están en trazo grueso. Las ordenadas de estas dos líneas tienden asintóticamente a $y \rightarrow \pm Q/(2U)$ cuando $x \rightarrow \infty$, lo cual se podría haber predicho de antemano sabiendo que la corriente es uniforme con velocidad U lejos de la fuente, y que todo el caudal Q que sale de la fuente pasa por entre esas dos asíntotas. Se puede decir, por tanto, que el presente flujo simula el movimiento potencial e incompresible alrededor de una placa semiinfinita de espesor Q/U con un borde de ataque romo dado por (21.31).

Si quisiéramos simular el flujo potencial de una corriente uniforme con velocidad U sobre un cuerpo bidimensional *finito*, habría que añadir un sumidero a la derecha de la fuente, con la misma intensidad Q , para que se *trague* todo el caudal que sale del manantial. Supongamos, por simplicidad, que el manantial está situado en $(x = -a, y = 0)$ y el sumidero en $(x = a, y = 0)$. La función de corriente y el campo de velocidad se obtienen de la superposición de los tres movimientos elementales. En coordenadas cartesianas se escribe

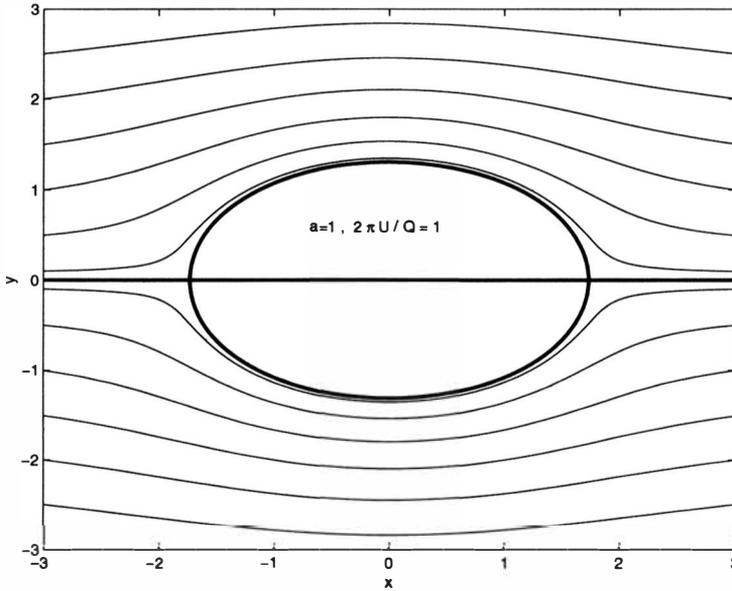


Figura 21.3: Líneas de corriente dadas por (21.32) con $2\pi U/Q = 1$ y $a = 1$. No se han dibujado líneas de corriente en el interior del óvalo.

$$\psi = Uy + \frac{Q}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x+a} - \arctan \frac{y}{x-a} \right), \quad (21.32)$$

$$v_x = U + \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right],$$

$$v_y = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right]. \quad (21.33)$$

El campo de velocidad tiene ahora dos puntos de remanso situados en el eje x (que sigue siendo una línea de corriente), dados por

$$x_R = \pm a \sqrt{1 + \frac{Q}{\pi a U}}, \quad y_R = 0. \quad (21.34)$$

En estos dos puntos de remanso se cruzan las líneas de corriente $y = 0$, correspondiente a $\psi = 0$, y las dos líneas de corriente correspondientes a $2\pi\psi/Q \equiv C = \pm\pi$. La unión de estas dos últimas líneas de corriente forman una curva cerrada, cuya forma exacta depende de los dos parámetros a

y $2\pi U/Q$, que a veces se denomina óvalo de Rankine. Así, el campo de velocidad dado por (21.33) simula el flujo potencial e incompresible alrededor de un cuerpo cilíndrico cuya sección viene dada por dicho óvalo (ver figura 21.3).

Un caso particular del anterior es el límite $a \rightarrow 0$, pero con Qa finito. Es decir, la superposición de una corriente uniforme de velocidad U y un dipolo de intensidad M . Haciendo uso de (21.5) y (21.17), y utilizando coordenadas cilíndricas, la función de corriente se escribe:

$$\psi = Ur \sin \theta - \frac{M \sin \theta}{2\pi} \frac{1}{r} \equiv Ur \sin \theta \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right), \quad (21.35)$$

donde se ha definido

$$r_o \equiv \sqrt{\frac{M}{2\pi U}}. \quad (21.36)$$

Las dos líneas de corriente correspondiente a $\psi = 0$ son el eje x ($\theta = 0$) y un círculo de radio r_o centrado en el origen. Estas dos líneas de corriente se cortan en los puntos de remanso ($x = \pm r_o, y = 0$), que son los únicos que existen. Por tanto, todas las líneas de corriente del dipolo tangentes al eje x en el origen permanecen dentro de la circunferencia de radio r_o , mientras que todas las líneas de corriente que provienen del infinito no cruzan dicho círculo. Así, el movimiento dado por (21.35), cuyo campo de velocidad se escribe en coordenadas cilíndricas como

$$v_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right), \quad v_\theta = -U \sin \theta \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right), \quad (21.37)$$

representa el flujo potencial e incompresible de una corriente uniforme con velocidad U alrededor de un cilindro circular infinito de radio r_o (figura 21.4).

De forma análoga, la superposición de un dipolo tridimensional de intensidad M , que en las coordenadas esféricas de la figura 21.1 viene dado por (21.26)-(21.28), con una corriente uniforme en la dirección polar z ,

$$\vec{v} = U\vec{e}_z, \quad \psi = \frac{1}{2}UR^2 = \frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta, \quad (21.38)$$

simula el flujo alrededor de una esfera de radio r_o , dado por

$$r_o = \left(\frac{M}{2\pi U} \right)^{1/3}. \quad (21.39)$$

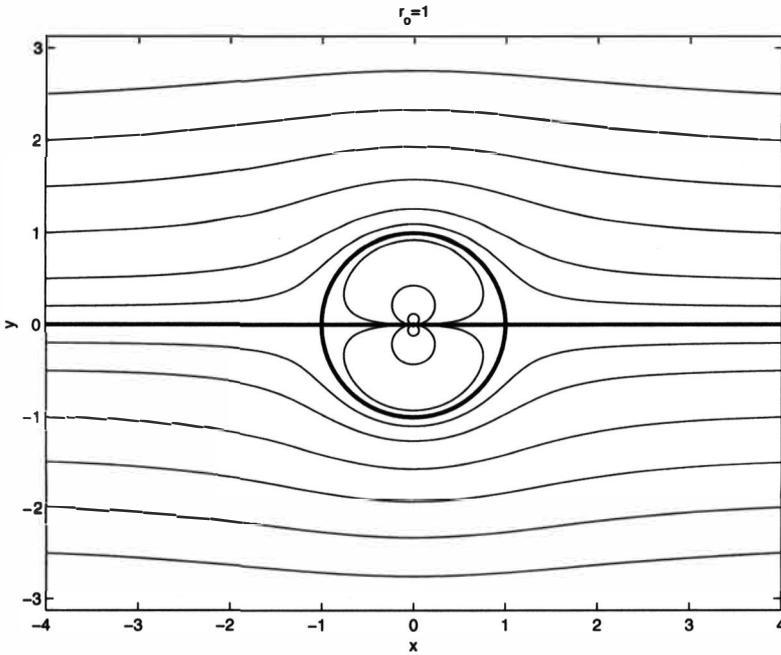


Figura 21.4: Líneas de corriente dadas por (21.35) con $r_0 = 1$.

Téngase en cuenta que las dimensiones de M no son las mismas para un dipolo bidimensional que para un dipolo tridimensional. En coordenadas esféricas, la función de corriente y el campo de velocidad de este flujo se escriben

$$\psi = \frac{1}{2}U \sin^2 \theta r^2 \left[1 - \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 \right], \quad (21.40)$$

$$v_r = U \cos \theta \left[1 - \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 \right], \quad v_\theta = -\frac{1}{2}U \sin \theta \left[2 + \left(\frac{r_o}{r} \right)^3 \right]. \quad (21.41)$$

Esta técnica de superposición de fuentes y sumideros con una corriente uniforme se puede extender para simular el flujo potencial alrededor de una gran variedad de cuerpos planos o con simetría de revolución. Para ello no hay más que distribuir una serie de fuentes y sumideros con diferentes intensidades Q_i a lo largo de un eje. Si la suma neta de los caudales es cero, el cuerpo simulado será finito, mientras que en caso contrario será semiinfinito. Esto se puede generalizar incluso para una distribución continua de fuentes. Considérese, por ejemplo, el caso plano. El flujo alrededor de un cuerpo bidimensional de longitud L (el perfil del ala de un avión, o el del álabe de una turbina), puede ser simulado mediante una *fente continua* con intensidad por unidad de longitud $q(x)$, $0 < x < L$. La función $q(x)$ tiene unidades de caudal por unidad de área (velocidad), y puede tomar valores positivos (fuente) o negativos (sumidero). Para que el cuerpo sea cerrado,

$$\int_0^L q(x) dx = 0. \quad (21.42)$$

La forma del objeto plano simulado se obtiene de la función de corriente. Para ello se tiene en cuenta que una fuente infinitesimal de intensidad $dQ = q(x') dx'$ situada en x' tiene por función de corriente (véase (21.9))

$$d\psi = \frac{q(x') dx'}{2\pi} \arctan \frac{y}{x - x'}, \quad (21.43)$$

de forma que la función de corriente total, superposición de la corriente uniforme y la distribución continua de fuentes, viene dada por (compárese con (21.32))

$$\psi = Uy + \frac{1}{2\pi} \int_0^L q(x') \arctan \frac{y}{x - x'} dx'. \quad (21.44)$$

Conocida la función de corriente se obtendría el campo de velocidad. Este sería el denominado problema inverso, donde conocida la distribución de fuentes se calcularía el flujo potencial alrededor de un objeto dado por esa distribución.

Normalmente a uno le interesa conocer el campo de velocidad alrededor de un objeto de forma conocida, y para ello tiene que calcular la distribución de fuentes que lo origina (problema directo). Esto se puede hacer sustituyendo la forma del objeto para un determinado valor de ψ en (21.44) y resolviendo la ecuación integral resultante para $q(x')$. Existen diversas técnicas para resolver ese tipo de ecuaciones integrales, pero que no van a ser comentadas aquí. En cualquier caso, conocido $\vec{v}(x, y)$, la presión se obtiene de la ecuación de Bernoulli,

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2, \quad c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2}, \quad (21.45)$$

donde p_∞ es la presión en el infinito y c_p es el denominado coeficiente de presión. Conocido p se obtiene la fuerza que la corriente potencial ejerce sobre el objeto, que es lo que se va buscando desde un punto de vista práctico. Sin embargo, uno se encuentra con la sorpresa de que esa fuerza es cero (paradoja de D'Alambert). Este resultado es fácil de intuir a partir de los flujos planos dibujados en las figuras 21.3 y 21.4, donde la simetría del campo de velocidad con respecto a los ejes x e y proporciona, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un campo de presión también simétrico, que da como resultado una fuerza de presión nula. Para que al menos la fuerza en la dirección perpendicular a la corriente no sea nula, y se pueda así simular la fuerza de sustentación sobre un perfil aerodinámico, lo que se suele hacer es superponer una distribución adicional de torbellinos sobre el eje, que rompe la simetría del flujo en relación al eje x . Pero esta técnica se va a considerar más adelante, ya que es más fácil simular perfiles aerodinámicos planos, con sustentación incluida, haciendo uso de la función potencial compleja, que será introducida en la sección 21.5. También se demostrará en general la paradoja de D'Alambert para este tipo de movimientos potenciales planos alrededor de un cuerpo cerrado y se verá cómo la inclusión de circulación alrededor del perfil genera una fuerza de sustentación (secciones 21.7-9).

21.4. Método de las imágenes

Antes de pasar a formular la función potencial compleja, que facilitará el análisis de los movimientos potenciales planos, se comenta brevemente aquí otra de las técnicas generales que se suelen utilizar, junto con el principio de superposición, para *componer* flujos potenciales e incompresibles (bidimensionales o tridimensionales) de interés.

El método de las imágenes se puede emplear siempre que exista algún tipo de simetría que permita reformular el problema original. Para introducirlo se usará un ejemplo sencillo: el flujo potencial originado por una **fente bidimensional en presencia de una pared**. Supongamos, por simplicidad, que la pared se corresponde con el eje y , y la fente (de intensidad Q) está situada a una distancia a de la pared sobre el eje x . Para simular el efecto que la pared tiene sobre el flujo, el método de las imágenes lo que hace es situar otra fente de la misma intensidad con simetría especular con respecto a la pared; es decir, en el punto $x = -a, y = 0$. Aunque el campo de velocidad engendrado por estas dos fuentes no tiene significado físico para $x < 0$, donde no hay fluido, el flujo resultante tiene, por simetría, una línea de corriente que coincide con la pared ($x = 0$) y, por tanto, simula para $x > 0$ el flujo buscado. En particular, la función de corriente correspondiente a las dos fuentes viene dado por

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left(\arctan \frac{y}{x-a} + \arctan \frac{y}{x+a} \right) = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{2xy}{x^2 - a^2 - y^2}, \quad (21.46)$$

con campo de velocidad

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right], \\ v_y &= \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right]. \end{aligned} \quad (21.47)$$

De particular interés en este problema sería calcular la fuerza de presión sobre la pared producida por el manantial. Para calcular la presión sobre la pared se aplica (21.45) con v evaluado en $x = 0$:

$$p(0, y) - p_\infty = -\frac{1}{2\rho} \left[v_x^2(0, y) + v_y^2(0, y) \right] = -\frac{\rho Q^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(y^2 + a^2)^2}, \quad (21.48)$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad es nula en el infinito. La fuerza sobre la pared (en la dirección x) por unidad de longitud se obtendría de la integración de (21.48):

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} (p(0, y) - p_\infty) dy = -\frac{\rho Q^2}{4a\pi}, \quad (21.49)$$

que, lógicamente, tiene signo negativo.

Otra información que se puede obtener de la solución anterior es el efecto que la pared tiene sobre la fente. En particular, si la fente no tiene ninguna

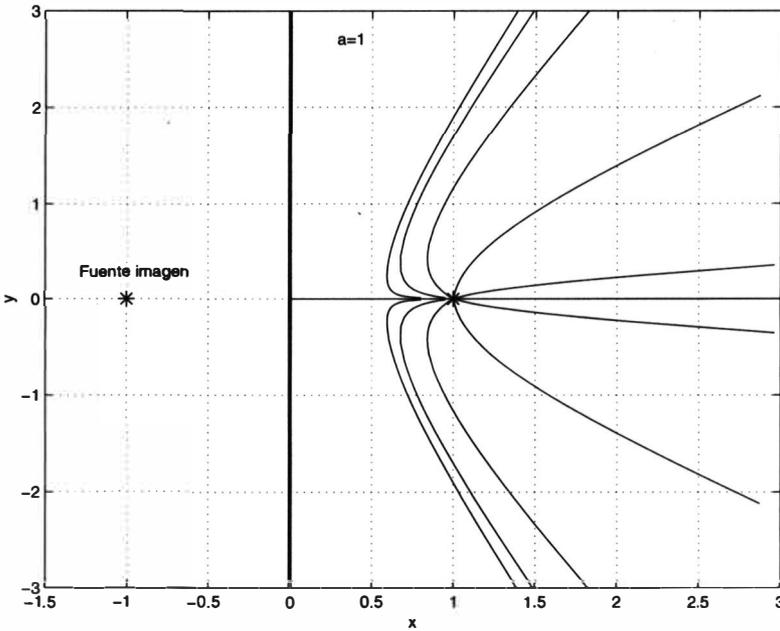


Figura 21.5: Líneas de corriente dadas por (21.46) para $x \geq 0$ con $a = 1$.

ligadura, se mueve con una velocidad que viene dada por el valor del campo de velocidad generado por la otra fuente (que simula la pared) en el punto $(x = a, y = 0)$:

$$\vec{v}_f = \left(\frac{Q}{4\pi a}, 0 \right). \tag{21.50}$$

Por tanto, la fuente se aleja de la pared a lo largo del eje x de acuerdo con

$$\frac{da}{dt} = \frac{Q}{4\pi a}, \quad a(t) = \sqrt{\frac{Qt}{2\pi} + a_0^2}, \tag{21.51}$$

donde a_0 es la posición inicial de la fuente.

Una de las aplicaciones típicas del método de las imágenes es simular el efecto que una pared tiene sobre el flujo alrededor de un perfil aerodinámico. La pared, si está suficientemente cerca del perfil, puede cambiar sustancialmente la distribución de presiones sobre el mismo y, por tanto, la fuerza que la corriente ejerce sobre el perfil. Para simular la pared, se superpone una distribución de fuentes idéntica a la que simula el perfil, pero con simetría especular en relación a la pared.

21.5. Potencial complejo

Como ya se ha comentado anteriormente, en un movimiento irrotacional, incompresible (solenoidal) y bidimensional, es posible hacer uso de la teoría de las funciones analíticas en variable compleja para describir el movimiento fluido, con toda la elegancia y potencia analítica que ello comporta. Con tal fin se define el potencial complejo como se describe a continuación.

En este tipo de movimientos, la función potencial de velocidad ϕ y la función de corriente ψ , proporcionan dos formas alternativas de especificar el campo de velocidad que, en coordenadas cartesianas, están relacionadas mediante

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (21.52)$$

Estas son las conocidas condiciones de Cauchy-Riemann que deben satisfacer las partes reales e imaginarias de las funciones analíticas en variable compleja. Así, se define la función compleja

$$f(z) \equiv \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z \equiv x + iy, \quad (21.53)$$

denominado potencial complejo, que por las relaciones anteriores es una función analítica (o diferenciable, u holomórfica). Una particularidad de las funciones analíticas en el plano complejo es que tanto la parte real como la parte imaginaria satisfacen la ecuación de Laplace, lo cual es algo que ya conocemos del potencial de velocidad y la función de corriente de este tipo de flujos:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0. \quad (21.54)$$

Por otra parte, debido a las condiciones de Cauchy-Riemann, las líneas equipotenciales $\phi = \text{constante}$, o líneas de gradiente de velocidad constante, son ortogonales a las líneas de corriente $\psi = \text{constante}$.

La derivada del potencial complejo es la velocidad conjugada:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (21.55)$$

Los puntos de remanso del flujo vienen dados por la ecuación

$$\frac{df}{dz} = 0. \quad (21.56)$$

21.6. Soluciones elementales

Se enumeran a continuación las soluciones elementales de la ecuación de Laplace más representativas, escritas en términos del potencial complejo, junto con una descripción del flujo potencial que representan. Algunas de ellas se obtienen por superposición de otras más elementales, o por el método de las imágenes. La mayoría de ellas ya se han descrito en las secciones anteriores, pero se repiten aquí para poner de manifiesto la simplicidad de escritura que representa el potencial complejo. Se incluye también un comentario sobre su utilidad en la teoría potencial de perfiles aerodinámicos, que se tratará brevemente más adelante. No se incluye el campo de velocidad o la función de corriente pues se pueden derivar fácilmente de f utilizando (21.55) o (21.53).

21.6.1. Corriente uniforme

Potencial complejo:

$$f(z) = Uze^{-i\alpha}. \quad (21.57)$$

U es la velocidad y α el ángulo que forma la corriente respecto al eje x (ángulo de ataque en la teoría de perfiles).

21.6.2. Manantial o sumidero

Potencial complejo:

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_o). \quad (21.58)$$

Q es la intensidad del manantial ($Q > 0$) o del sumidero ($Q < 0$) situado en el punto del plano $z = z_o$. Se utiliza para simular el espesor de un perfil.

21.6.3. Torbellino potencial

Potencial complejo:

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_o). \quad (21.59)$$

z_o es el centro del torbellino de circulación $-\Gamma$ [el giro dado por (21.59) es en el sentido horario]. Se utiliza para simular el efecto sustentador en un perfil.

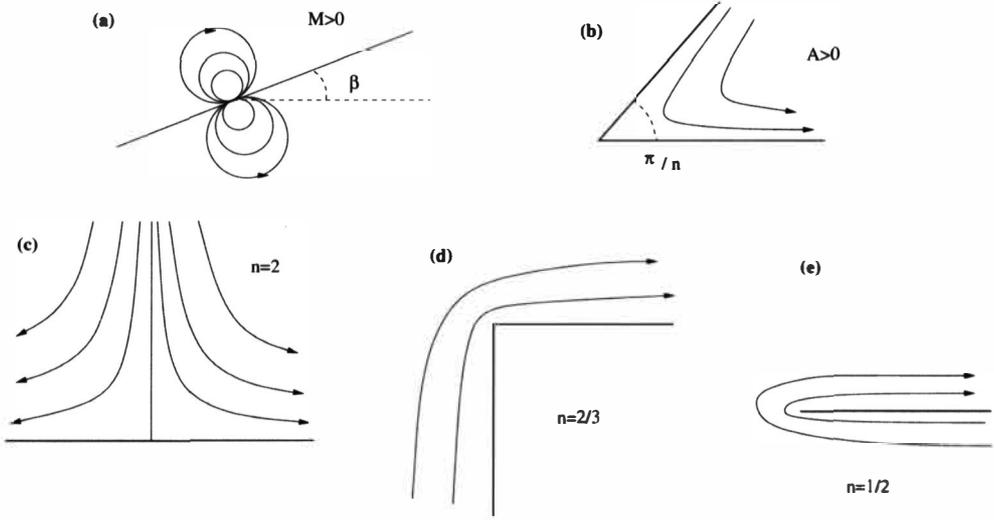


Figura 21.6: (a) Dipolo. (b) Flujo en una esquina. (c) Flujo en las proximidades de un punto de remanso. (d) Flujo sobre una esquina de 90°. (e) Flujo alrededor de una placa plana.

21.6.4. Dipolo

Potencial complejo:

$$f(z) = \frac{M e^{i\beta}}{2\pi} \frac{1}{z - z_o} \tag{21.60}$$

El dipolo, de intensidad $M e^{i\beta}$ de acuerdo con la notación de (21.16), está centrado en $z = z_o$ e inclinado un ángulo β respecto al eje x [ver figura 21.6(a)]. Al igual que las fuentes y sumideros, sirve para simular el efecto de espesor. En particular, sirve para simular el flujo alrededor de un cilindro circular.

21.6.5. Corriente en una esquina

Potencial complejo:

$$f(z) = A z^n \tag{21.61}$$

Las líneas de corriente representan el flujo potencial en una esquina de ángulo π/n [ver figura 21.6(b)]. La constante A es real, representando la intensidad del flujo. Es un ejemplo del método inverso: ¿Qué representa una función analítica sencilla? El caso particular con $n = 2$ sirve para simular el flujo potencial que incide normalmente sobre un plano [flujo en las proximidades de un punto de

remanso; ver figura 21.6(c)]. El caso $n = 2/3$ simula el flujo alrededor de una esquina convexa de 90° [figura 21.6(d)], mientras que el caso $n = 1/2$ simula el flujo potencial alrededor de un plano semiinfinito [figura 21.6(e)].

21.6.6. Corriente incidente sobre un cuerpo romo

Potencial complejo:

$$f(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi} \ln z. \quad (21.62)$$

Como ya se ha visto, la superposición de una corriente uniforme y un manantial en el origen simula un cuerpo plano semiinfinito, con borde de ataque romo (ver figura 21.2) y con espesor Q/U .

21.6.7. Corriente alrededor de un cilindro circular

Potencial complejo:

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right). \quad (21.63)$$

Superposición de una corriente uniforme U y un doblete que simula el flujo potencial alrededor de un cilindro circular de radio a . En la sección 21.8 se le superpondrá también un torbellino potencial para simular el efecto sustentador.

21.6.8. Corriente alrededor de un óvalo de Rankine

Potencial complejo:

$$f(z) = Uz + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}. \quad (21.64)$$

21.6.9. Fuente en la proximidad de una pared

Potencial complejo:

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln[(z-a)(z+a)] = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - a^2). \quad (21.65)$$

a es la distancia de la fuente a la pared, representada por el plano $x = 0$. Como se analizó en la sección 21.4, el flujo se obtiene mediante el método de las imágenes por superposición de dos fuentes simétricas respecto a $x = 0$. Si

la pared está situada en el plano $y = 0$ y la fuente en $x = 0, y = a$, se tiene el potencial complejo

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln[(z - ia)(z + ia)] = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 + a^2).$$

21.6.10. Torbellino en la proximidad de una pared

Potencial complejo:

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z + a}{z - a}. \quad (21.66)$$

También se obtiene por superposición de dos torbellinos especularmente simétricos a la pared, representada en este caso por el plano $x = 0$. Téngase en cuenta que el torbellino imagen, situado en $x = -a, y = 0$, tiene circulación $-\Gamma$.

21.7. Fuerza sobre un perfil. Paradoja de D'Alambert y fórmula de Kutta-Joukowski

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría potencial es el cálculo de la fuerza de sustentación en perfiles aerodinámicos, de interés sobre todo en aeronáutica, en ingeniería naval y en la teoría de las turbomáquinas hidráulicas. En esta sección se derivará de forma general las fuerzas sobre un perfil considerado como la superposición de fuentes, sumideros y torbellinos.

Para ello se aplicará el principio de la conservación de la cantidad de movimiento en forma integral a un volumen de control como el de la figura 21.7:

$$\int_{S_e} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = - \int_{S_e} (p - p_\infty) \vec{n} ds - \vec{F}, \quad (21.67)$$

donde S_e es la superficie cilíndrica con centro en el perfil y radio $R \rightarrow \infty$, y \vec{F} es la fuerza que el flujo ejerce sobre el perfil. El campo de velocidad \vec{v} se obtiene de un potencial complejo $f(z)$ superposición de:

- una corriente uniforme, Uz ;
- una superposición de manantiales y sumideros de intensidad por unidad de longitud $q(z')$, dado por

$$\frac{1}{2\pi} \int q(z') \ln(z - z') dz', \quad \text{con} \quad \int q(z') dz' = 0; \quad (21.68)$$

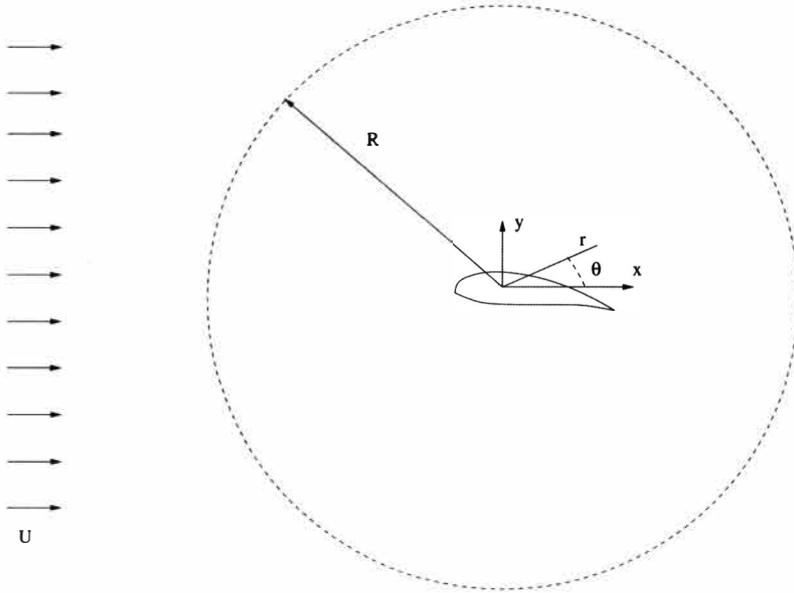


Figura 21.7: Fuerza sobre un perfil.

- una superposición de torbellinos de circulación por unidad de longitud $\gamma(z')$, cuyo potencial complejo es

$$\frac{i}{2\pi} \int \gamma(z') \ln(z - z') dz', \quad \text{con } \int \gamma(z') dz' \equiv \Gamma. \quad (21.69)$$

El potencial total será:

$$f(z) = Uz + \frac{1}{2\pi} \int q(z') \ln(z - z') dz' + \frac{i}{2\pi} \int \gamma(z') \ln(z - z') dz'. \quad (21.70)$$

Sobre la superficie S_e , dada por $|z| \rightarrow \infty$, se tiene

$$\ln(z - z') = \ln z + O\left(\frac{z'}{z}\right),$$

de donde

$$f(z) = Uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z + O\left(\frac{z'}{z}\right) \quad (21.71)$$

sobre S_e . Es decir, lejos del perfil la corriente es, con errores de orden $|z|^{-1} \rightarrow 0$, una superposición de una corriente uniforme y un torbellino centrado en el origen de intensidad Γ . La velocidad conjugada es

$$\frac{df}{dz} = U + \frac{i\Gamma}{2\pi z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (21.72)$$

por lo que las componentes de la velocidad según los ejes x e y son:

$$v_x = U + \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (21.73)$$

$$v_y = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (21.74)$$

De la ecuación de Bernoulli, la presión en S_e viene dada por

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho \frac{U\Gamma}{\pi r} \sin \theta + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (21.75)$$

Si definimos

$$\vec{F} \equiv D\vec{e}_x + L\vec{e}_y, \quad (21.76)$$

siendo D la fuerza de resistencia (componente de la fuerza en la dirección del movimiento) y L la fuerza de sustentación (componente de \vec{F} normal a la corriente exterior), teniendo en cuenta que sobre S_e $\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ y $\vec{v} \cdot \vec{n} = U \cos \theta + O(1/r^2)$, la ecuación integral de cantidad de movimiento proporciona los siguientes valores para D y L :

$$D = \frac{\rho U \Gamma}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta r d\theta - \rho U \int_0^{2\pi} \left(U \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \sin \theta \right) r d\theta = 0, \quad (21.77)$$

$$L = \frac{\rho U \Gamma}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta r d\theta + \frac{\rho U \Gamma}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta r d\theta = \rho \Gamma U. \quad (21.78)$$

La primera expresión es una demostración general de que la fuerza de resistencia es nula para el flujo potencial, estacionario e incompresible sobre un cuerpo cerrado bidimensional. El mismo resultado se obtendría si el cuerpo fuese tridimensional. Este resultado se suele denominar **paradoja de D'Alambert**. La segunda expresión es la denominada **fórmula de Kutta-Joukowski**, que nos dice que la componente perpendicular a la corriente de la fuerza sobre un perfil es distinta de cero si, y sólo si, la circulación en una curva cerrada que lo encierra es distinta de cero.

Evidentemente, la fuerza de resistencia no es nula en fluidos reales. Sin embargo, a diferencia del flujo alrededor de un cuerpo romo (como, por ejemplo, un cilindro), donde el flujo viscoso real se parece muy poco al obtenido

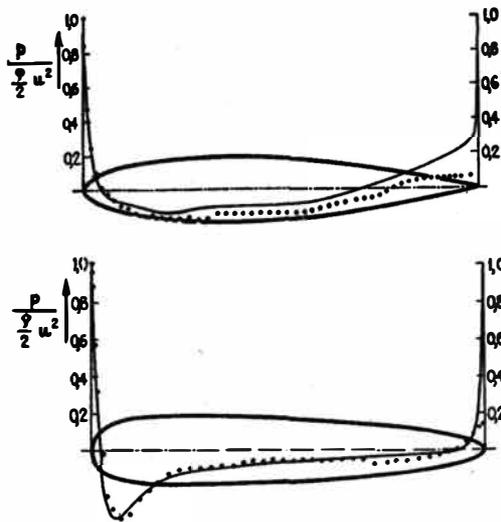


Figura 21.8: Distribución de presión alrededor de dos perfiles en términos del coeficiente de presión. Los puntos corresponden a los valores experimentales medidos en un túnel de viento para un número de Reynolds alto, y la curva continua representa los resultados de la teoría potencial. (Figura tomada de Prandtl y Tietjens (1957), que a su vez reproduce los resultados de la tesis doctoral de Fuhrmann (1912), que constituye uno de los trabajos pioneros en aerodinámica experimental.)

por la teoría potencial, incluso si el número de Reynolds es muy alto (véase sección 21.9), en perfiles esbeltos los resultados de la teoría potencial se parecen mucho a los reales si el número de Reynolds es suficientemente alto (ver figura 21.8) y, aunque la fuerza de resistencia no es nula, es realmente muy pequeña. Dado, por tanto, que la teoría potencial es una buena aproximación en perfiles aerodinámicos esbeltos, y dado que la fuerza de sustentación es, evidentemente, distinta de cero (los aviones vuelan y las turbomáquinas intercambian cantidad de movimiento con el fluido que impulsan), la pregunta que surge es: ¿cómo se genera la circulación Γ en el flujo alrededor de perfiles y cuánto vale?

21.8. Generación de sustentación en perfiles aerodinámicos

En el marco de la teoría del flujo potencial alrededor de un cuerpo, la generación de circulación es un tanto paradójica debido a que el teorema de Kelvin (ver capítulo anterior) nos dice que si la circulación es inicialmente nula (que lo es, pues el flujo parte del reposo), seguirá siendo nula si la aceleración $D\vec{v}/Dt$ deriva de un potencial, lo cual se verifica en el presente flujo [$D\vec{v}/Dt = -\nabla(p/\rho)$]. Como se verá a continuación, lo que ocurre es que aunque la hipótesis de fuerzas viscosas nulas es aproximadamente válida (si $Re \rightarrow \infty$) en la mayor parte del campo fluido, el hecho de que no lo sea en una capa límite muy delgada alrededor del perfil juega un papel muy importante en el establecimiento del movimiento en sus etapas iniciales (en concreto, en el establecimiento de una circulación), aunque una vez que se ha alcanzado el régimen estacionario, la capa límite viscosa no afecta apreciablemente a la distribución de presión y, por tanto, a la fuerza sobre el perfil (salvo, por supuesto, en la resistencia viscosa, y siempre que la separación de la corriente se produzca muy cerca del borde de salida del perfil; véase el capítulo 27).

Considérese un perfil como el de la figura 21.9(a), donde se dibuja un esquema de la configuración del flujo potencial con circulación nula. Existe una línea divisoria que separa la corriente del estradós del intradós; dicha línea se bifurca en el punto de remanso anterior (a), pero ambas ramas salen de nuevo unidas del punto de remanso posterior (b). Esta configuración no puede parecerse a la realidad en las proximidades de la salida ya que la corriente se decelera en el pequeño espacio que hay entre el borde de salida c (donde, teniendo en cuenta que el potencial complejo vendría localmente dado por (21.61), con n próximo a $1/2$, la velocidad es teóricamente infinita) y el punto de remanso b (donde la velocidad es cero). Esta deceleración se traduce en

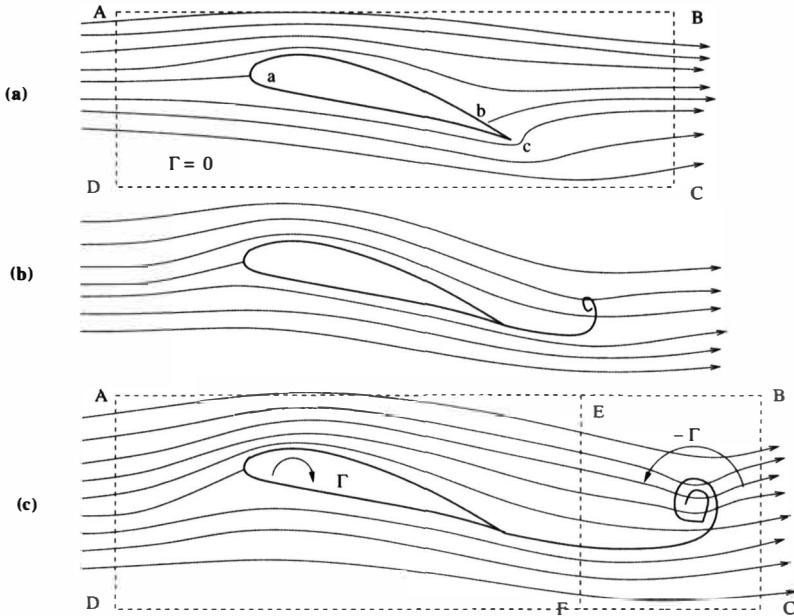


Figura 21.9: (a): Flujo potencial alrededor de un perfil. (b) y (c): Generación de un torbellino aguas abajo.

un gradiente adverso de presión muy intenso y en el desprendimiento de la capa límite (véase lección 27). Ahora bien, el flujo de cortadura resultante es inestable (inestabilidad de Kelvin-Helmholtz; véase capítulo 30), y el resultado es que se forma un torbellino que viaja aguas abajo, como se esquematiza en las figuras 21.9(b) y (c). Alrededor de la curva ABCD de la figura 21.9(a), así como de la figura 21.9(c), donde engloba tanto al torbellino producido como al perfil, la circulación debe ser nula, pues se verifican las hipótesis del teorema de Kelvin. Como consecuencia, aparece una circulación no nula alrededor de la curva AEFD que engloba sólo al perfil, que es de signo contrario y aproximadamente igual en valor absoluto a la del torbellino generado (sería exactamente igual si la viscosidad fuese exactamente cero, pues la circulación a lo largo de ABCD sería exactamente nula).

El efecto de la circulación es aproximar el punto de remanso posterior al borde de salida del perfil, aumentando para ello la velocidad en el estradós a costa de la del intradós. La formación del torbellino continúa hasta que el punto de remanso se sitúa en el borde de salida del perfil (ver figura 21.10(a)). Dicho de otra forma, la circulación es la apropiada para que el borde de salida del perfil sea un punto de remanso, si el borde tiene un ángulo finito, o desaparezca el punto de remanso si el borde de salida es un punto de retroceso (ver sección

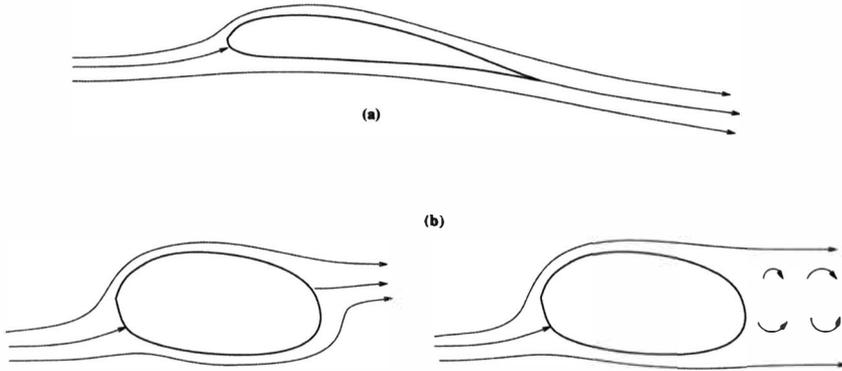


Figura 21.10: (a) Flujo potencial con circulación alrededor de un perfil. (b) Flujo potencial y flujo tras la separación de la corriente alrededor de un cuerpo romo.

21.10 más adelante). Esto se conoce como la **hipótesis de Kutta-Joukowski**.

En el caso de un borde de salida romo [figura 21.10(b)], se forman una serie de torbellinos de signo opuesto de manera que tanto la circulación alrededor de una curva que engloba al objeto y a los torbellinos, como alrededor de una curva que sólo engloba al cuerpo romo, es prácticamente nula. La sustentación, por tanto, es nula, o casi nula, en un cuerpo romo. Por supuesto, la corriente real no se parece en nada a la ideal y el resultado de D'Alambert de resistencia nula no es ni siquiera aproximado. Precisamente aquí es donde reside una de las principales ventajas del perfil aerodinámico sobre el romo: La fuerza de resistencia es mucho menor en el perfil, al ajustarse el flujo real bastante bien al ideal (salvo muy cerca del borde de salida; véase la figura 21.8), siendo esta fuerza principalmente debida a la fricción viscosa, cuyo efecto es mucho menor que el de la presión cuando la corriente se separa en un cuerpo romo. Por otro lado, la sustentación en un perfil aerodinámico es distinta de cero debido a la generación de circulación neta alrededor del perfil, de acuerdo con la hipótesis de Kutta-Joukowski, mientras que en un cuerpo romo la sustentación es prácticamente nula pues los torbellinos generados aguas abajo tienen una circulación neta total casi nula. En el capítulo 27, dedicado a la capa límite, se dará la explicación física de porqué se separa la corriente en un cuerpo romo mucho antes que en un perfil aerodinámico, que a su vez explica la razón por la cual el flujo potencial reproduce mucho mejor el flujo real sobre un perfil esbelto que sobre un cuerpo romo, en el que el flujo potencial tiene muy poco parecido con el real (como también se verá a continuación para el caso particular de un cilindro circular).

21.9. Flujo con circulación alrededor de un cilindro circular

Otro procedimiento muy usado para obtener el flujo alrededor de un perfil aerodinámico, además de la superposición de flujos elementales (con o sin el uso del potencial complejo), es mediante la transformación conforme del flujo alrededor de un cilindro circular, flujo que repasamos en la presente sección con especial énfasis en el efecto sustentador de los torbellinos.

Como ya se ha visto, el flujo potencial alrededor de un cilindro circular se obtiene mediante la superposición de una corriente uniforme y un doblete o dipolo alineado con la corriente ($\alpha = \beta = 0$, por ejemplo):

$$f(z) = Uz + \frac{M}{2\pi z} \equiv U \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad (21.79)$$

donde $a \equiv \sqrt{M/(2\pi U)}$ representa el radio del cilindro. La parte imaginaria de f es la función de corriente, que en coordenadas cartesianas se escribe (compárese con (21.35), donde $r_o = a$)

$$\psi(x, y) = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (21.80)$$

que ya ha sido representada en la figura 21.4.

El campo de velocidad sobre el cilindro ($r = a$) viene dado, en coordenadas polares, por [véase (21.37)]

$$v_x(r = a) = 2U \sin^2 \theta, \quad v_y(r = a) = -2U \sin \theta \cos \theta, \quad (21.81)$$

de donde, utilizando la ecuación de Bernoulli, la distribución de presión sobre el cilindro es

$$p(r = a) - p_\infty = \frac{1}{2} \rho [U^2 - v_x^2(r = a) - v_y^2(r = a)] = \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta); \quad (21.82)$$

es decir, el coeficiente de presión local viene dado por

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (21.83)$$

Se observa que la distribución de presión sobre el cilindro tiene simetría respecto a los planos $x = 0$ e $y = 0$:

$$p(\theta) = p(\pi - \theta) = p(-\theta), \quad (21.84)$$

por lo que la fuerza resultante sobre el cilindro es nula, de acuerdo con los resultados generales (21.77) y (21.78).

La solución anterior no es única, en el sentido de que si se le superpone un torbellino centrado en el origen de intensidad arbitraria Γ , la circunferencia $r = a$ sigue siendo una línea de corriente, por lo que el flujo resultante también representa el flujo potencial alrededor de un cilindro circular, pero con circulación no nula. Es decir, el potencial complejo

$$f(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad (21.85)$$

cuya parte imaginaria es

$$\psi(x, y) = Uy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2), \quad (21.86)$$

también tiene por línea de corriente la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ (ahora correspondiente a $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln a$) para cualquier valor de Γ .

La posición de los puntos de remanso se obtiene de $f'(z) = 0$:

$$\left(\frac{z}{a} \right)^2 + i \frac{\Gamma}{2\pi a U} \frac{z}{a} - 1 = 0. \quad (21.87)$$

Si $|\Gamma/(4\pi a U)| \leq 1$, los puntos de remanso están situados en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$:

$$\frac{z}{a} = \pm \cos \beta - i \sin \beta, \quad \sin \beta \equiv \frac{\Gamma}{4\pi a U}. \quad (21.88)$$

Estos dos puntos de remanso convergen en uno sólo, situado en $z = ai$, para $\Gamma/(4\pi a U) = 1$. Si $|\Gamma/(4\pi a U)| > 1$, los puntos de remanso están sobre el eje imaginario y , uno de ellos en el interior del cilindro (que no tiene mucho interés), y el otro en el exterior:

$$\frac{z}{a} = i(\pm \sinh \beta - \cosh \beta), \quad \cosh \beta \equiv \frac{\Gamma}{4\pi a U}. \quad (21.89)$$

Aunque no existe ningún criterio físico (de momento) para fijar Γ , y por tanto la solución deseada, lo que sí está claro es que la introducción de un torbellino rompe la simetría del flujo (ver figura 21.11) e introduce una fuerza de presión en la dirección perpendicular a la corriente U . En efecto, de la ecuación de Bernoulli, la distribución de presión sobre el cilindro $r = a$ viene dada por

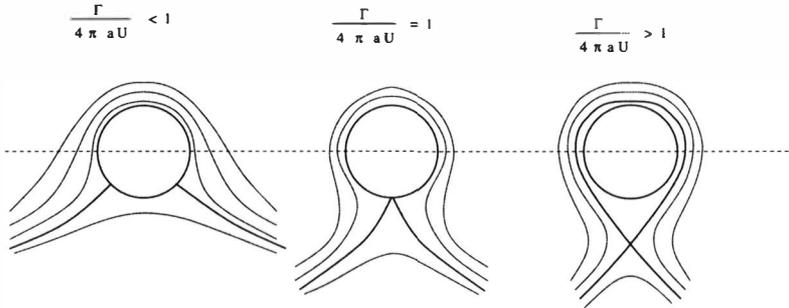


Figura 21.11:

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U} \right)^2 \right]. \quad (21.90)$$

Las componentes de la fuerza de presión según los ejes x e y son:

$$F_x = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) \cos \theta a d\theta = 0, \quad (21.91)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) \sin \theta a d\theta = \rho U \Gamma, \quad (21.92)$$

lo cual corrobora, obviamente, el resultado general (21.77)-(21.78).

21.9.1. Utilidad práctica de la solución potencial del flujo alrededor de un cilindro circular

Los experimentos muestran que la corriente real alrededor de un cilindro circular (y, en general, alrededor de cualquier cuerpo romo) es bastante diferente de la obtenida mediante la solución potencial, incluso si la viscosidad es muy pequeña ($Re \rightarrow \infty$). En la figura 21.12 se muestran los flujos reales alrededor de un cilindro circular para varios números de Reynolds. Para $Re \ll 1$, el flujo es prácticamente simétrico, pero, por supuesto, no es potencial (flujo de Stokes; ver capítulo 17). Para $Re \approx 1$, el flujo pierde la simetría con respecto al plano $y = 0$ debido a la separación de la corriente, y para $5 \leq Re \leq 40$, aproximadamente, se desarrollan torbellinos simétricos estacionarios. Para Re del orden de 100, se forman continuamente torbellinos en una estructura denominada *calles de von Kármán*. Para $Re \approx 2000$ y mayor, el flujo detrás del cilindro se hace turbulento.

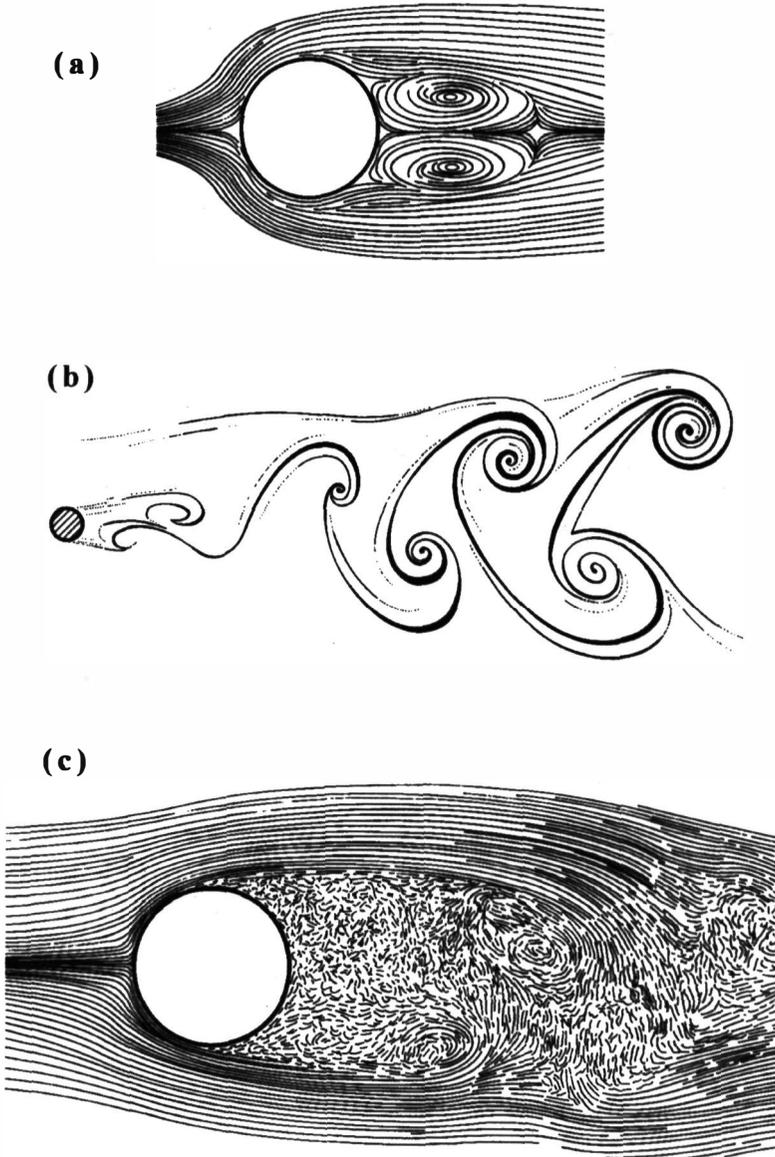


Figura 21.12: Flujo alrededor de un cilindro circular para diferentes números de Reynolds. $Re = 26$ (a), $Re = 200$ (b) y $Re = 2000$ (c). Figura tomada de Ryhming (1991), que a su vez está basada en fotografías recogidas en M. Van Dyke (1982).

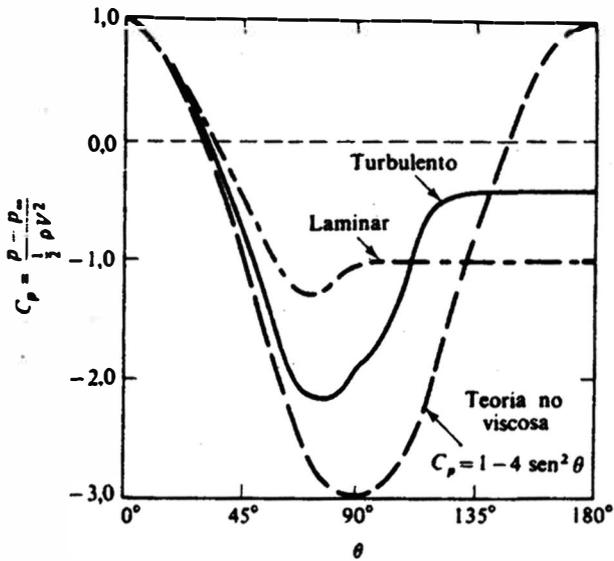


Figura 21.13: Coeficiente de presión del flujo alrededor de un cilindro circular. Figura tomada de White (1983).

La distribución de presión sobre el cilindro se representa, en términos del coeficiente de presión c_p , en la figura 21.13. La presión experimental se aproxima bastante a la obtenida por la teoría potencial [ecuación (21.83)] hasta que se separa la capa límite, lo cual ocurre para ángulos θ bastante menores que 90° si la capa límite permanece laminar hasta la separación, o para $\theta \approx 90^\circ$ si la capa límite se hace turbulenta (esta transición ocurre para $Re \approx 3 \times 10^6$). Debido a esto, la resistencia de presión (y por tanto la total) disminuye cuando la capa límite se hace turbulenta (ver capítulo 27 y siguientes para una explicación física de estos fenómenos).

De todo lo anterior podría parecer que la solución ideal del flujo alrededor de un cilindro circular no tiene ninguna utilidad práctica, ya que la corriente ideal se parece muy poco a la real. Sin embargo, sí tiene utilidad debido a que a partir de ella, mediante la transformación conforme que se verá a continuación, se pueden obtener los flujos potenciales alrededor de perfiles aerodinámicos, que sí tienen gran parecido con los reales debido a que la capa límite se separa muy aguas abajo si el perfil es lo suficientemente esbelto.

21.10. Transformación conforme

Una herramienta muy potente para calcular la sustentación en perfiles aerodinámicos es la transformación conforme, que permite obtener el flujo alrededor de un perfil a partir del flujo alrededor de un cilindro circular mediante una transformación del plano complejo. Este método es alternativo al de superponer fuentes, sumideros y torbellinos.

Considérese la correspondencia entre los planos $z = x + iy$ y $\tau = \xi + i\eta$ a través de la función $z = F(\tau) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta)$. Si $F'(\tau) \neq 0$ en el entorno del punto $\tau = \tau_o$, la transformación en las proximidades de ese punto es, además de biunívoca, conforme, llamada así porque a un pequeño triángulo en el plano τ le corresponde un triángulo semejante en el plano z (es decir, conserva los ángulos). Para demostrarlo no hay más que desarrollar en serie de Taylor alrededor de τ_o :

$$z - z_o = (\tau - \tau_o)F'(\tau_o) + \dots$$

Si $z - z_o \equiv (\Delta r)e^{i\theta}$ y $\tau - \tau_o \equiv (\Delta s)e^{i\alpha}$, aplicando el desarrollo anterior a dos segmentos $\tau_1 - \tau_o = (\Delta s)_1 e^{i\alpha_1}$ y $\tau_2 - \tau_o = (\Delta s)_2 e^{i\alpha_2}$, y dividiendo, se tiene

$$\frac{(\Delta r)_1}{(\Delta r)_2} = \frac{(\Delta s)_1}{(\Delta s)_2}, \quad \theta_1 - \theta_2 = \alpha_1 - \alpha_2,$$

por lo que, en el límite $(\Delta s) \rightarrow 0$, los ángulos se conservan y un triángulo se transforma en otro semejante. Estos resultados se generalizan a dominios finitos sin más que exigir que la función sea regular y con derivada no nula en el dominio.

Dos contornos cerrados se corresponden si vienen representados por curvas diferenciables (al menos a trozos) y si la función F es analítica en el recinto contorneado; además, si se verifica lo anterior, al recorrer una única vez el contorno en un sentido, se recorre una única vez el contorno transformado en el mismo sentido. De acuerdo con esto se puede enunciar el siguiente teorema (debido a Riemann) que no demostraremos (para los detalles matemáticos formales de la transformación conforme, el alumno puede consultar, por ejemplo, L.M. Milne-Thomson, 1996): Dado un recinto simplemente conexo con más de un punto frontera, existe una transformación que lo convierte en el interior de una circunferencia, y para definir la transformación basta dar dos puntos y un par de direcciones homólogas.

Naturalmente, el que exista la transformación no implica que sea fácil encontrarla para cada caso particular. Una primera dificultad aparece en relación

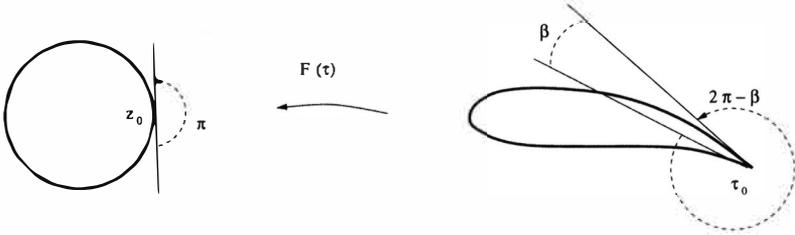


Figura 21.14:

al borde de salida del perfil, que tiene que ser anguloso para que sustente. Como la transformación conforme conserva los ángulos [si $F'(\tau)$ es distinta de cero], para que $z = F(\tau)$ transforme un punto de la circunferencia en el borde de salida de un perfil, este punto, por ejemplo $z_o = F(\tau_o)$, tiene que ser un cero o un polo de $F'(\tau)$. Suponiendo que sea un cero de orden n , en las proximidades de τ_o el desarrollo en serie de Taylor proporciona:

$$z - z_o = C(\tau - \tau_o)^n \quad \bullet \quad (\Delta r)e^{i\theta} = C(\Delta s)^n e^{in\alpha},$$

siendo C una constante compleja [proporcional a $d^n F/d\tau^n(\tau_o)$]. Dos segmentos infinitesimales que tiene τ_o como punto de unión se transforma de acuerdo con

$$\left(\frac{(\Delta s)_1}{(\Delta s)_2}\right)^n = \frac{(\Delta r)_1}{(\Delta r)_2}, \quad \theta_1 - \theta_2 = n(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Para transformar $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ en $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi - \beta$, el cero debe ser de orden

$$n = \frac{\pi}{2\pi - \beta}.$$

Si n fuese negativo (que no es el caso de un perfil; véase figura 21.14), el punto τ_o sería un polo en vez de un cero.

En lo que sigue se llamará z al plano del círculo, τ al del perfil, $z = F(\tau)$ a la transformación, $f(z)$ al potencial complejo en el plano z y $G(\tau) = f[F(\tau)]$ al potencial complejo en el plano τ . Algunas propiedades de la transformación son las siguientes:

- Las líneas equipotenciales se corresponden en la transformación
- Las líneas de corriente también. En particular, las líneas de corriente cerradas se transforman en líneas de corriente cerradas
- Fuentes, sumideros y torbellinos se convierten en fuentes, sumideros y torbellinos de la misma intensidad, si los puntos en los que están centrados son puntos regulares de la transformación.

Los puntos de remanso no tienen porqué convertirse en puntos de remanso. Teniendo en cuenta que

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\tau} = \frac{df}{dz} \frac{dF}{d\tau},$$

los puntos de remanso en el plano z , dados por $df/dz = 0$, se corresponden con los puntos de remanso en el plano τ si $dF/d\tau$ es distinto de cero. Si $dF/d\tau \sim (\tau - \tau_0)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}-1}$ (borde de salida), puede ocurrir que el punto z_0 no sea de remanso, en cuyo caso la velocidad en τ_0 es infinita, o que sí lo sea. En este último caso, $df/dz \sim (z - z_0) \rightarrow 0$, de donde

$$\frac{dG}{d\tau} \sim (z - z_0)(\tau - \tau_0)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}-1} \sim (\tau - \tau_0)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}} (\tau - \tau_0)^{\frac{\pi}{2\pi-\beta}-1} = (\tau - \tau_0)^{\frac{\beta}{2\pi-\beta}};$$

es decir, si el borde de salida es anguloso ($\beta \neq 0$), hay punto de remanso en τ_0 , y si el borde de salida es de retroceso ($\beta = 0$), no hay punto de remanso (velocidad finita). Obsérvese que si se quiere que en τ_0 la velocidad no sea infinita, $G'(\tau_0) \neq \infty$, es necesario que el homólogo de τ_0 sea punto de remanso. Esto fija la circulación: la circulación alrededor del cilindro circular debe ser tal que el homólogo del borde de salida del perfil sea un punto de remanso, pues en caso contrario el borde de salida tendrá velocidad infinita. Esta es la hipótesis de Kutta-Joukowski, ya comentada anteriormente. El borde de salida será de remanso si es anguloso, o de velocidad finita si el borde es de retroceso.

Finalmente, hay que indicar que la transformación debe ser tal que en el infinito se reduzca a una identidad, para que así las velocidades de las corrientes incidentes sobre el cilindro y sobre el perfil sean iguales. Esto quiere decir que el desarrollo de Laurent de la transformación debe ser de la forma

$$z = F(\tau) = \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\tau^n}, \quad \tau = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{z^n}.$$

21.10.1. Placa plana con ángulo de ataque α

La transformación conforme se puede aplicar para simular el flujo alrededor de prácticamente cualquier perfil. El caso más simple es la simulación de la corriente alrededor de una placa plana con un ángulo de ataque α . Este modelo sencillo proporciona una estimación de la sustentación en perfiles aerodinámicos muy esbeltos cuando sobre ellos incide una corriente con un ángulo α .

Para ello se utiliza la **transformación de Joukowski**,

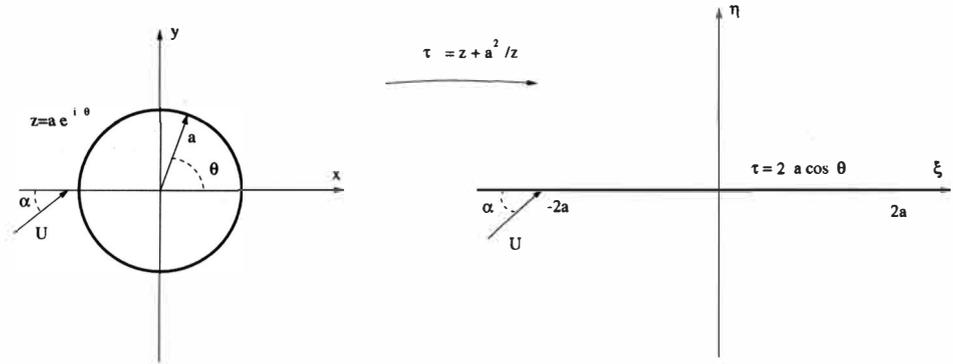


Figura 21.15:

$$\tau = z + \frac{a^2}{z}, \tag{21.93}$$

que convierte la circunferencia de centro en el origen y radio a del plano z , en la placa situada entre $(-2a, 0)$ y $(2a, 0)$ del plano τ (ver figura 21.15).

Como lejos de la circunferencia la transformación es una identidad, $\tau = z$, la corriente no perturbada tiene que incidir sobre el cilindro formando el mismo ángulo α con la horizontal que el que queremos que forme con la placa. El potencial complejo en el plano z será, por tanto,

$$f(z) = U \left(ze^{-i\alpha} + \frac{a^2}{ze^{-i\alpha}} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(ze^{-i\alpha} \right). \tag{21.94}$$

La circulación Γ se elige de forma que el homólogo del borde de salida del perfil $\tau = 2a$, dado por $z = a$, sea punto de remanso [Hipótesis de Kutta-Joukowski; véanse los esquemas de la figura 21.16]. Es decir, $f'(a) = 0$, lo que implica que

$$\Gamma = 4\pi a U \sin \alpha. \tag{21.95}$$

La velocidad conjugada en el plano z será, por tanto,

$$f'(z) = U \left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2} e^{i\alpha} + \frac{a}{z} 2i \sin \alpha \right), \tag{21.96}$$

y la velocidad conjugada en el plano τ ,

$$G'(\tau) = \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\tau} = \frac{f'(z)}{1 - \frac{a^2}{z^2}} = U \left(\cos \alpha - i \sin \alpha \frac{1 - a/z}{1 + a/z} \right). \tag{21.97}$$

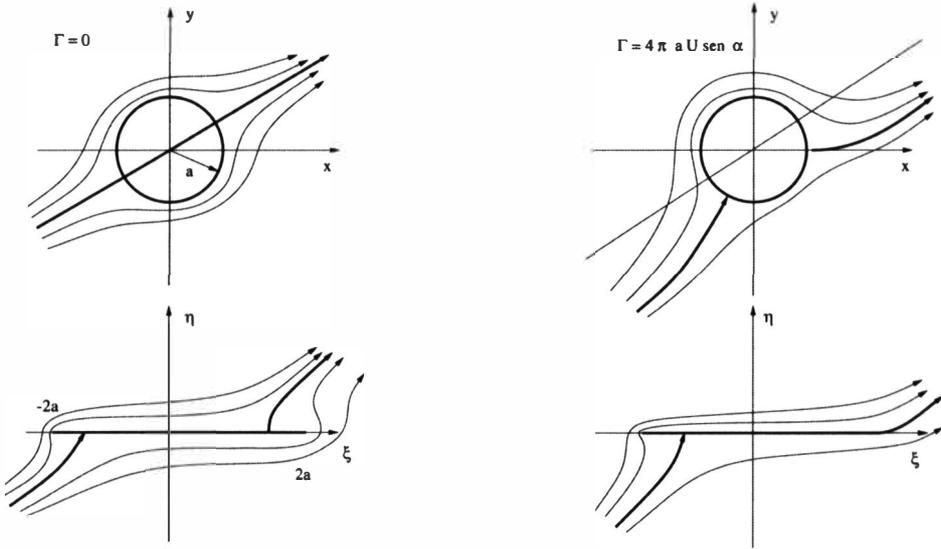


Figura 21.16: Esquemas de las líneas de corrientes en los planos z (flujo alrededor de un cilindro circular) y τ (alrededor de una placa plana) cuando la circulación es nula y cuando es la apropiada para que el borde de salida de la placa sea un punto de remanso.

Para obtener la velocidad sobre la placa, se hace $z = ae^{i\theta}$, para así recorrer la circunferencia cuando θ varía entre 0 y 2π :

$$G'(z)|_{placa} = U \left(\cos \alpha - i \sin \alpha \frac{1 - e^{-i\theta}}{1 + e^{-i\theta}} \right) = U \left(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\theta}{2} \right), \tag{21.98}$$

que, obviamente, es real. En términos de ξ , teniendo en cuenta que $\xi = 2a \cos \theta$, se tiene la velocidad sobre la placa

$$v_\xi = U \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{2a - \xi}{2a + \xi}} \right). \tag{21.99}$$

Se observa que la velocidad es infinita en el borde de ataque ($\xi = -2a, \theta = \pi$), lo cual es debido a que el borde de ataque tiene espesor nulo (ver figura 21.16). Uno se plantea entonces la cuestión de porqué se tolera una velocidad infinita en el borde de ataque y no en el borde de salida. Físicamente la razón estriba en que la capa límite en el borde de ataque acaba de formarse, lleva mucha cantidad de movimiento y es capaz de soportar con éxito los fuertes gradientes adversos de presión que tratan de desprenderla (véase capítulo 27). Por el contrario, en el borde de salida, la capa límite lleva ya muy poca cantidad

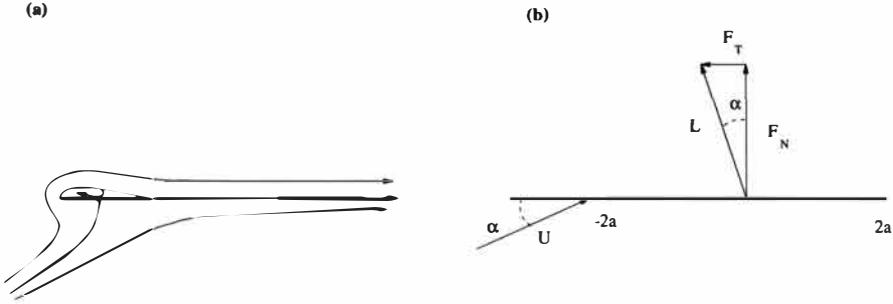


Figura 21.17: (a) Burbuja de recirculación sobre el borde de ataque en el flujo real sobre una placa plana con ángulo de incidencia no nulo. (b) Fuerzas de sustentación y de succión.

de movimiento y se desprende con facilidad. Lo que realmente ocurre es que en el estradós del borde de ataque se forma una burbuja con flujo recirculatorio [ver figura 21.17(a)]. Esta burbuja es pequeña debido a que la corriente se readhiere enseguida.

La singularidad en el borde de ataque produce una succión en la dirección de la placa [fuerza F_T en la figura 21.17(b)] tal que sumada vectorialmente a la resultante de las fuerzas de presión sobre la placa (F_N), la fuerza total satisface la fórmula de Kutta-Joukowski, $L = \rho U \Gamma$. Para ver esto, calculamos la fuerza de presión sobre la placa (normal a ésta):

$$F_N = \int_{-2a}^{2a} (p_- - p_+) d\xi, \tag{21.100}$$

donde p_+ y p_- son la presión en el estradós e intradós, respectivamente. De la ecuación de Bernoulli y de (21.99) se tiene

$$p_- - p_+ = \frac{1}{2} \rho (v_{\xi^-}^2 - v_{\xi^+}^2) = 2\rho U^2 \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\frac{2a - \xi}{2a + \xi}}, \tag{21.101}$$

cuya integración da

$$F_N = 4\pi a \rho U^2 \sin \alpha \cos \alpha = \rho U \Gamma \cos \alpha = L \cos \alpha, \tag{21.102}$$

donde

$$L = 4\pi a \rho U^2 \sin \alpha = \rho U \Gamma \tag{21.103}$$

es la sustentación dada por la fórmula de Kutta-Joukowski. Por tanto, F_N es la proyección de la fuerza de sustentación L (que es normal a la corriente) sobre

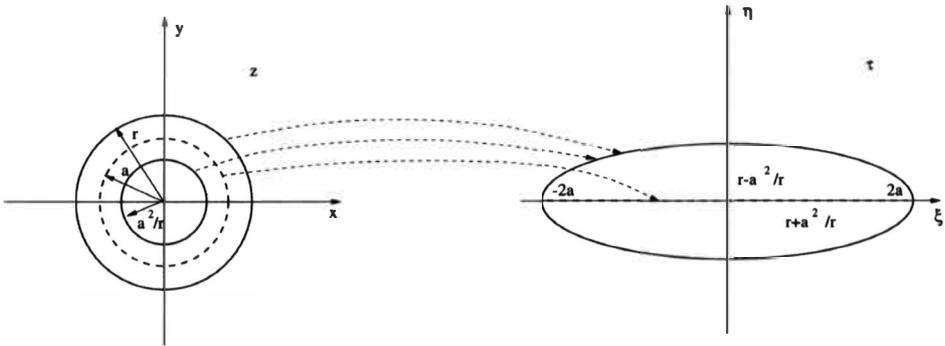


Figura 21.18: Transformación de una circunferencia en una elipse mediante (21.93).

la dirección normal a la placa [ver figura 21.17(b)]. La componente paralela a la placa (succión) es $F_T = L \sin \alpha$.

Los experimentos confirman que la sustentación viene dada por (21.103), cuando $Re \gg 1$ para que el flujo pueda considerarse ideal, y siempre que el ángulo de ataque α sea pequeño. Para ángulos de ataque por encima de un cierto valor, la corriente se separa en el estrados poco después del borde de ataque, cayendo bruscamente la sustentación (ver figura 21.20 más adelante). Cuando esto ocurre, la corriente ya no se parece en nada a la obtenida mediante la teoría ideal, y el valor de L es mucho menor. Como α debe ser pequeño para que la teoría ideal valga, la expresión de Kutta-Joukowski se suele linealizar en α :

$$L \simeq 4\pi a \rho U^2 \alpha, \tag{21.104}$$

de donde el coeficiente de sustentación viene dado por

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 4a} \simeq 2\pi \alpha, \tag{21.105}$$

donde c es la cuerda del perfil ($c = 4a$ en el presente caso).

21.10.2. Perfiles de Joukowski

Al conjunto de perfiles obtenidos mediante la transformación de Joukowski (21.93) aplicada a una circunferencia cualquiera del plano z se denomina perfiles de Joukowski. El caso más simple visto anteriormente es el de una circunferencia centrada en el origen de radio a , que da lugar a una placa plana de cuerda $4a$. Si la circunferencia está centrada en el origen del plano z , pero

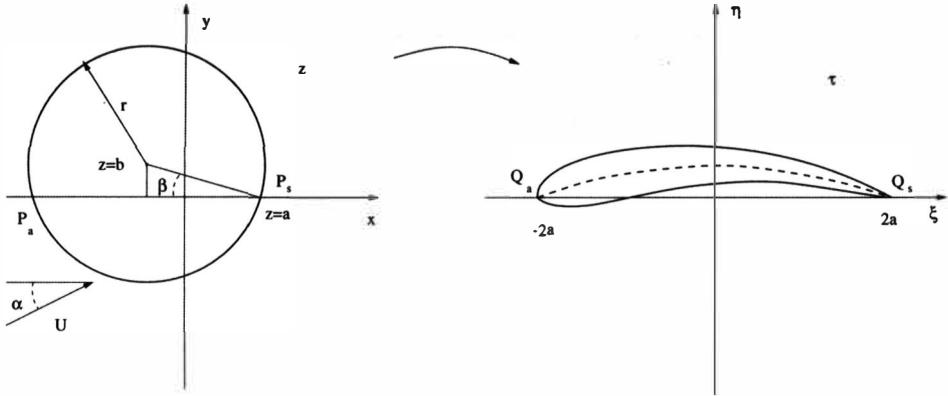


Figura 21.19: Perfiles de Joukowski.

su radio $r \neq a$, se obtiene una elipse, que será más esbelta cuanto menor sea $|r - a|$ (ver figura 21.18).

De forma más general, si la circunferencia está centrada en el punto $z = b = b_r + ib_i$ y tiene radio r , el perfil obtenido mediante la transformación de Joukowski tiene la forma esquematizada en la figura 21.19, que sirve para modelar el flujo alrededor de perfiles más realistas. La cuerda del perfil es $4a$, donde a es la distancia al origen del punto de corte de la circunferencia con el semieje real positivo. Si la parte imaginaria del centro, b_i , es nula, el perfil es simétrico en relación al eje ξ ; es decir, la línea media, marcada con una línea a trazos en la figura 21.19, coincide con el eje ξ . Por tanto, b_i o, más concretamente, el ángulo β , está relacionado con la curvatura del perfil: a mayor β , mayor curvatura. Por otro lado, al igual que ocurre con la elipse de la figura 21.18, el espesor del perfil está relacionado con $|r - a|$, de manera que cuanto mayor sea su valor, mayor será el espesor del perfil.

Para una corriente uniforme con ángulo α , el potencial complejo en el plano z viene dado por [compárese con (21.94)]

$$f(z) = U \left[(z - b)e^{-i\alpha} + \frac{r^2}{(z - b)e^{-i\alpha}} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[(z - b)e^{-i\alpha} \right].$$

Sin entrar en los detalles de los cálculos, para que el borde de salida Q_s , imagen del punto P_s de corte de la circunferencia con el semieje x positivo, sea un punto de remanso, la circulación debe ser

$$\Gamma = 4\pi r U \sin(\alpha + \beta),$$

de forma que la fuerza de sustentación viene dada por

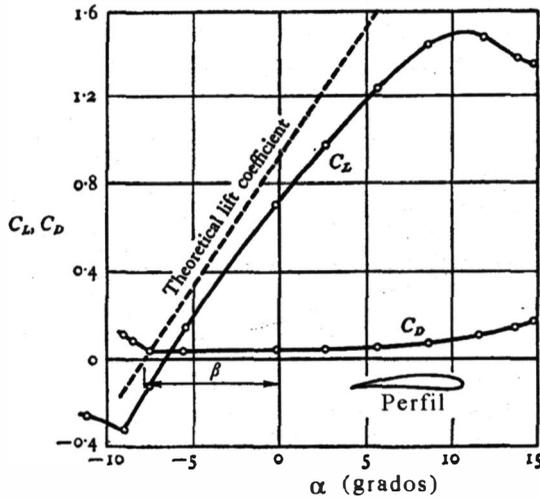


Figura 21.20: Comparación entre los resultados teóricos (recta a trazos) y experimentales para el coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque α en un perfil de Joukowski. Los resultados experimentales fueron obtenidos por Betz (1915). También se incluye el coeficiente de resistencia C_D medido experimentalmente. (Figura tomada de Batchelor, 1967.)

$$L = 4\pi r \rho U^2 \sin(\alpha + \beta). \quad (21.106)$$

Al igual que en el caso de la placa plana, la teoría potencial tiene utilidad sólo si el ángulo $\alpha + \beta$ es pequeño, pues en caso contrario la capa límite y la corriente se separan muy cerca del borde de ataque en el estradós. Por tanto, es costumbre utilizar la forma linealizada de (21.106) para escribir el coeficiente de sustentación:

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 c} = 8\pi \frac{r}{c} \sin(\alpha + \beta) \simeq 2\pi(\alpha + \beta), \quad (21.107)$$

donde la cuerda c ha sido aproximada por $4r$ suponiendo que tanto el espesor como la curvatura son pequeños en relación a la cuerda. Obsérvese que, debido a la curvatura ($\beta \neq 0$), el coeficiente de sustentación es positivo incluso para ángulos de ataque α negativos.

En la figura 21.20 se compara (21.107) con los resultados experimentales para un determinado perfil de Joukowski cuando el número de Reynolds es suficientemente alto. Los valores de C_L medidos siguen la tendencia lineal (21.107) hasta un cierto valor de α , por encima del cual la sustentación cae

bruscamente debido a la separación de la corriente. Esta caída de la sustentación viene acompañada por un aumento notable del coeficiente de resistencia, también mostrado en la figura 21.20, de forma que se suele decir que el perfil ha entrado en pérdida. Por supuesto, el coeficiente de resistencia C_D no puede ser obtenido mediante la teoría potencial, que predice una resistencia nula. Si el perfil es esbelto, casi toda la fuerza de resistencia es debido a la fricción, y suele ser muy pequeña comparada con la sustentación. Su valor se puede obtener teóricamente analizando la capa límite viscosa en la pared (véase lección 27). También se observa en la figura 21.20 que la sustentación real se hace negativa para un valor del ángulo de ataque negativo, pero ligeramente mayor que el valor $-\beta$ que predice la teoría potencial.

Para obtener el flujo potencial alrededor de perfiles aerodinámicos distintos de la familia de Joukowski se suele utilizar el método de superposición comentado anteriormente. Para simplificar el álgebra, se emplea la denominada teoría linealizada de perfiles, que consiste en aproximar linealmente las distintas funciones alrededor de la cuerda del perfil. Para los detalles de este método, que no va a ser discutido aquí, el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Milne-Thomson (1973). Más detalles sobre la teoría de perfiles, incluyendo los efectos de la viscosidad, pueden encontrarse, entre otros textos, en la monografía de B. Thwaites, 1987, *Incompressible aerodynamics* (Dover, Nueva York; reimpresión).

Referencias.

- G.K. BATCHELOR, 1967. Capítulo 6.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1973. Capítulos III, V - VII.
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996. Capítulos V y VI.
- R.L. PANTON, 1996. Capítulo 18.
- L. PRANDTL y O.G. TIETJENS, 1957b. Capítulos V y VI.
- I.L. RYHMING, 1991. Capítulo 5.
- J.H. SPURK, 1997. Capítulo 10.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 8.

Capítulo 22

Discontinuidades en los movimientos de fluidos ideales. Ondas de choque

22.1. Introducción

Ya se comentó en la lección 19 que las soluciones de las ecuaciones de Euler que describen el movimiento de los fluidos ideales a veces presentan discontinuidades. En esta lección se considerarán las discontinuidades que se presentan en el interior del flujo. La estructura de las discontinuidades sobre superficies sólidas, o capas límites, serán estudiadas en la parte VIII.

Un ejemplo típico donde se presenta una discontinuidad de las soluciones de las ecuaciones de Euler es el flujo supersónico alrededor de un obstáculo

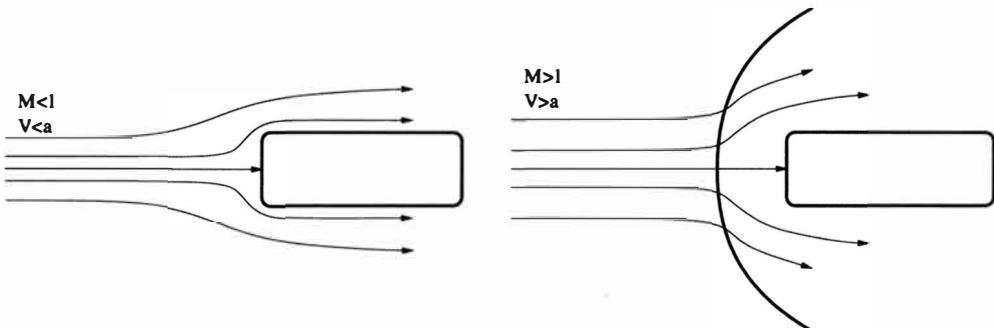


Figura 22.1: Flujo subsónico y supersónico alrededor de un cuerpo roma.

(ver figura 22.1). La presencia del obstáculo se deja sentir en el movimiento del fluido mediante la emisión continua de pequeñas perturbaciones u ondas sonoras (ver capítulo 25) que *informan* al fluido incidente sobre su presencia. Esta información viaja a la velocidad del sonido, de forma que si el flujo es subsónico ($V < a$), las ondas sonoras pueden *avisar* a la corriente incidente sobre la presencia del obstáculo, que así se amolda a su presencia bastante antes de llegar a él. Sin embargo, si la corriente incidente es supersónica ($V > a$), la información sobre el obstáculo no puede llegar a la corriente incidente; las ondas sonoras emitidas por el obstáculo se agolpan a una corta distancia de él y producen una onda de choque. Aguas arriba de la onda de choque la corriente no *percibe* la presencia del obstáculo. A través de la onda de choque el flujo pasa de supersónico a subsónico (como veremos más adelante en este capítulo), de forma que detrás de la onda de choque la corriente se *acomoda* rápidamente a la presencia del obstáculo. Otros ejemplos característicos de una corriente supersónica donde se produce una onda de choque se verán en la lecciones siguientes. Característica general de todos ellos es que el flujo debe ser supersónico en alguna región del mismo, y pasan a subsónico a través de una discontinuidad.

Por supuesto, las presuntas discontinuidades no son tales en la realidad, sino que son regiones delgadas donde los gradientes de las magnitudes fluidas son tan acusados que la hipótesis de idealidad del fluido falla. Como el espesor de estas regiones tienden formalmente a cero cuando $Re \rightarrow \infty$, desde el punto de vista de la teoría de los fluidos ideales se considerarán como discontinuidades, sin importarnos su estructura interna. En lo que sigue se derivarán relaciones cuantitativas generales de los cambios de las magnitudes fluidas a través de estas discontinuidades.

22.2. Ecuaciones de conservación a través de una discontinuidad

Considérese una superficie, de forma arbitraria, a través de la cual las magnitudes fluidas (\vec{v} , p y ρ) experimentan un salto finito (ver figura 22.2). Para derivar las relaciones que ligan las condiciones delante de la discontinuidad (región 1) con las existentes detrás de la misma (región 2), aplicaremos las leyes de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía a un volumen de control en forma de cilindro infinitesimal como el de la figura 22.2. En él, la superficie lateral, de altura δ , cruza la discontinuidad, y las otras dos superficies son planas, paralelas y tangentes a la discontinuidad en el punto considerado, de normal unitaria \vec{n} . El área ds de estas dos superficies verifica:

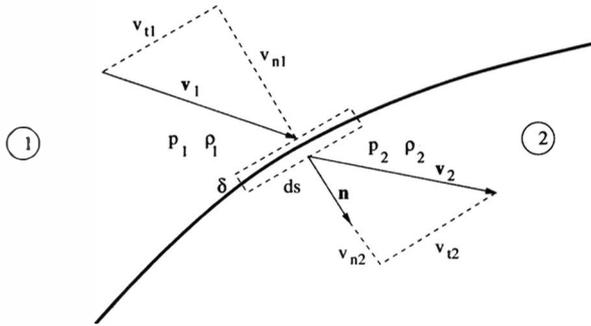


Figura 22.2: Salto de las propiedades fluidas a través de una discontinuidad.

$$(ds)^{1/2} \gg \delta. \tag{22.1}$$

Este requisito es siempre posible ya que se trata de una discontinuidad matemática y, a pesar de que ds es también infinitesimal, δ puede hacerse tan pequeño como se quiera. En la realidad, la discontinuidad tiene espesor finito, pero tiende formalmente a cero en el límite $Re \rightarrow \infty$; la única limitación sobre δ es que debe ser lo suficientemente grande como para que las dos superficies frontales estén *inmersas* en el fluido ideal, es decir, *lejos* de la región de transición donde los efectos disipativos son importantes.

Con la condición (22.1) se verifica que los flujos de las magnitudes fluidas a través de la superficie lateral del volumen de control son muy pequeños comparados con los flujos frontales, y que los términos volumétricos de las ecuaciones de conservación, proporcionales a $\delta ds/t_o$, donde t_o es un tiempo característico, son también despreciables frente a los términos convectivos sobre las superficies frontales, de orden $\vec{v} \cdot \vec{n} ds$. En general, la discontinuidad será móvil y tomaremos unos ejes ligados a la misma.

Con estas condiciones, las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en el volumen de control pueden escribirse en la forma siguiente (ver figura 22.2):

$$\rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} ds = \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} ds \quad , \tag{22.2}$$

$$-\rho_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) \vec{v}_1 ds + \rho_2 (\vec{v}_2 \cdot \vec{n}) \vec{v}_2 ds = (p_1 - p_2) \vec{n} ds \quad , \tag{22.3}$$

$$-\rho_1 (e_1 + v_1^2/2) \vec{v}_1 \cdot \vec{n} ds + \rho_2 (e_2 + v_2^2/2) \vec{v}_2 \cdot \vec{n} ds = p_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{n} ds - p_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{n} ds \quad , \tag{22.4}$$

donde se ha supuesto que no hay absorción ni emisión de calor en la superficie de discontinuidad (por radiación o reacción química). Obsérvese que las relaciones anteriores son locales, válidas para cada punto sobre la superficie

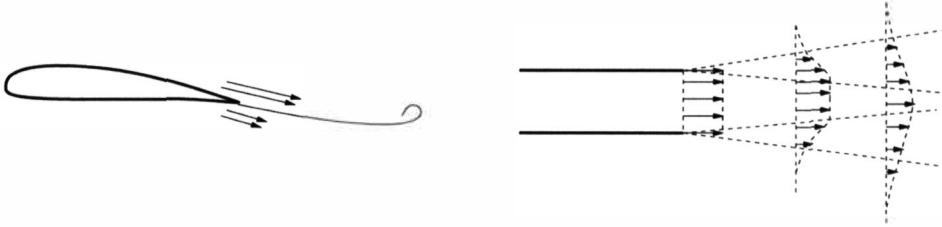


Figura 22.3: Ejemplos de discontinuidades tangenciales.

de discontinuidad. En términos de las componentes normal y tangencial a la discontinuidad de la velocidad, $v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n}$ y $\vec{v}_t \equiv \vec{v} - v_n \vec{n}$, y proyectando la ecuación de cantidad de movimiento en esas dos direcciones, se obtienen las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \quad (22.5)$$

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2, \quad (22.6)$$

$$\rho_1 v_{n1} \vec{v}_{t1} = \rho_2 v_{n2} \vec{v}_{t2}, \quad (22.7)$$

$$\rho_1 v_{n1} (h_1 + v_1^2/2) = \rho_2 v_{n2} (h_2 + v_2^2/2). \quad (22.8)$$

22.2.1. Discontinuidad tangencial

Hay dos tipos básicos de discontinuidades en función de que haya o no flujo másico a través de ella. Una discontinuidad tangencial es aquella en la cual no existe flujo másico que atraviese la discontinuidad: $v_{n1} = v_{n2} = 0$. De acuerdo con esto, las relaciones (22.5), (22.7) y (22.8) se satisfacen idénticamente para cualquier salto en las magnitudes ρ , \vec{v}_t y h . La ecuación (22.6) nos dice que la presión se conserva a través de la discontinuidad, $p_1 = p_2$, lo cual es intuitivo puesto que en caso contrario existiría movimiento en la dirección normal asociado a la diferencia de presión. Así, en una discontinuidad tangencial, son continuas las magnitudes fluidas v_n y p ($v_n = 0$), y discontinuas todas las demás, las cuales pueden tomar valores arbitrarios a un lado y otro de la discontinuidad, puesto que las ecuaciones anteriores no fijan ninguna relación entre ellas.

Un caso típico de discontinuidad tangencial es la que se forma cuando dos flujos paralelos de fluidos ideales a distinta velocidad (y, en general, con

distinta densidad y temperatura) se ponen en contacto, como, por ejemplo, en el borde de salida de un perfil aerodinámico o en la *capa de mezcla* de un chorro que descarga en otro fluido (ver figura 22.3). El problema con estas discontinuidades es que dejan de serlo, por lo general, muy rápidamente, ya que son muy inestables (ver capítulo 30). Debido a esta inestabilidad se forman torbellinos inmediatamente después del inicio de la discontinuidad tangencial, que van *impregnando de vorticidad* ambos lados del flujo ideal, por lo que sólo muy en sus comienzos puede ser considerada como una discontinuidad.

22.2.2. Discontinuidad normal. Relaciones de Rankine-Hugoniot

Discontinuidad normal es aquella en la que hay flujo másico normal, $v_{n1} \neq v_{n2}$, $v_{n1} \neq 0$, $v_{n2} \neq 0$. Las ecuaciones anteriores quedan:

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \quad (22.9)$$

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2, \quad (22.10)$$

$$\vec{v}_{t1} = \vec{v}_{t2}, \quad (22.11)$$

$$h_1 + v_{n1}^2/2 = h_2 + v_{n2}^2/2. \quad (22.12)$$

Se observa que la entalpía de remanso se conserva a través de la discontinuidad, pero no la presión de remanso. Estas relaciones se suelen denominar de Rankine-Hugoniot; formas más útiles de las mismas serán derivadas en las secciones siguientes.

Aparte de las ondas de choque, de las que se han visto algunos ejemplos y se verán algunos más, otros ejemplos de discontinuidad normal son los frentes de combustión: deflagraciones y detonaciones. En ellos se produce una reacción química exotérmica [por tanto, a la ecuación (22.12) hay que añadirle un término de calor de reacción] que separa una zona de gases *quemados* de otra de gases reactantes. El espesor de estos frentes, aunque por supuesto finito, y generalmente bastante mayor que el de una onda de choque, suele ser muy pequeño en relación a las escalas de longitud del flujo ideal circundante, pudiéndose considerar a estos frentes como discontinuidades, en primera aproximación. Aunque no vamos a entrar en detalles (el alumno interesado puede consultar cualquier texto sobre la teoría de la combustión como, por ejemplo, el libro de F.A. Williams, *Combustion theory*, 1985, Addison-Wesley, Redwood City), para su estudio, además de las ecuaciones de conservación anteriores es

necesario considerar las ecuaciones de conservación de las especies químicas presentes, puesto que éstas reaccionan químicamente entre sí en el interior del frente variando su concentración de un lado a otro de la discontinuidad, además de modificar la ecuación de la energía como ya se ha dicho, puesto que las reacciones químicas son exotérmicas. La escala de tiempo de las reacciones químicas suele ser muy pequeña en relación a los tiempos característicos del movimiento fluido y por ello hablamos de un frente (discontinuidad) de combustión. Para que estas reacciones químicas se produzcan, la temperatura tiene que subir por encima de un cierto valor, ya que la cinética química es proporcional (en un gas ideal) a $\exp(-E_o/R_gT)$, donde E_o es una energía de activación. Superada esa temperatura (de ignición), las reacciones químicas se propagan espontáneamente debido a su exotermicidad; de esta forma, un frente de combustión avanza hacia los gases reactantes o frescos y los va transformando en gases quemados. En esencia, esto es lo que se denomina una **deflagración**, donde la energía liberada por la reacción química (la cual se inicia por un calentamiento externo o ignición) calientan por conducción los gases reactantes circundantes, que así reaccionan químicamente y hacen propagar la combustión. La velocidad de propagación de estas ondas de deflagración dependen, pues, de la velocidad de la conducción de calor, y su valor se determina como un *autovalor* de las ecuaciones que gobiernan el proceso interno de la onda, siendo siempre menor que la del sonido (para los detalles se puede consultar, por ejemplo, la referencia antes citada). En una **detonación**, el calentamiento de los gases reactantes se produce mediante una onda de choque, que eleva brutalmente la temperatura de los mismos y los hacen reaccionar químicamente. Así, aunque sea considerada como una discontinuidad en la escala del flujo ideal, su estructura interna consta de dos zonas más o menos delimitadas: una onda de choque que va calentando a los gases frescos, y una segunda región, generalmente de espesor bastante mayor, donde se produce la reacción química, calentándose aún más el gas. Al ser una onda de choque la que hace posible la combustión, las detonaciones se propagan supersónicamente (veremos en las secciones siguientes que toda onda de choque se mueve, relativamente al fluido circundante, a una velocidad mayor que la velocidad local del sonido).

En lo que resta de lección nos ocuparemos sólo de las ondas de choque, olvidándonos de otros tipos de discontinuidades normales y de las tangenciales. En particular, consideraremos las ondas de choque en gases ideales, tanto normales ($\vec{v}_t = 0$) como oblicuas ($\vec{v}_t \neq 0$), que son las únicas que podrán aparecer en algunos de los flujos considerados en las siguientes lecciones.

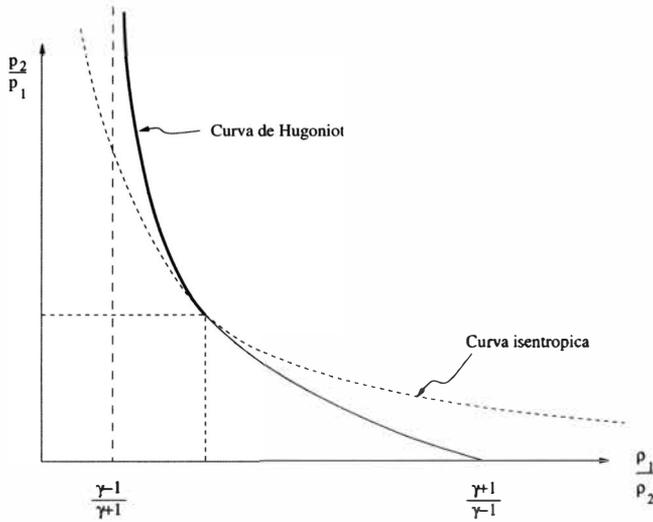


Figura 22.4: Curva de Hugoniot.

22.3. Curva de Hugoniot

De las relaciones (22.9)-(22.12) para un gas ideal, teniendo en cuenta que $h = \frac{\gamma}{\gamma-1}p/\rho$, se puede deducir la siguiente relación entre los saltos de presión y de densidad a través de una onda de choque:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad (22.13)$$

denominada relación de Hugoniot, la cual se representa en la figura 22.4 junto con la relación isentrópica $p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^\gamma$. Se observa que para una onda de *intensidad infinita*, $p_2/p_1 \rightarrow \infty$, la relación de densidades tiene un valor finito, $\rho_2/\rho_1 \rightarrow (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$, contrariamente a una compresión isentrópica que, en teoría, puede dar lugar a una densidad infinita, $\rho_2/\rho_1 \rightarrow \infty$. Por otro lado, una onda de choque *débil*, $p_2/p_1 \simeq 1$, es casi isentrópica, como se puede comprobar fácilmente desarrollando en serie la relación de Hugoniot alrededor de $\rho_2/\rho_1 - 1 \ll 1$:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) + \dots, \quad (22.14)$$

que concuerda con el desarrollo de la relación isentrópica alrededor de $\rho_2/\rho_1 = 1$,

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 + 1\right)^\gamma = 1 + \gamma \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) + \dots \quad (22.15)$$

La curva de Hugoniot representada en la figura 22.4 proviene de las ecuaciones de conservación a través de una onda de choque (22.9)-(22.12) y cualquier punto de la misma es posible en principio. Sin embargo, el Segundo Principio de la Termodinámica, que nos dice que debe haber un incremento de entropía a través de la onda de choque al existir procesos disipativos en el interior de la misma (efectos de la viscosidad y de la conducción de calor no despreciables), excluye parte de la curva como realmente posible. En efecto; teniendo en cuenta que para un gas ideal la entropía es proporcional a $c_v \ln p/\rho^\gamma$, el salto de entropía a través de una onda de choque viene dado por:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \right] = \ln \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma} \geq 0, \quad (22.16)$$

implicando que

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \geq \frac{\rho_2}{\rho_1} \geq 1; \quad (22.17)$$

es decir, una onda de choque sólo puede ser de compresión,

$$1 \leq \frac{p_2}{p_1} < \infty, \quad (22.18)$$

excluyendo así, como físicamente imposible, la parte inferior de la curva de Hugoniot (ver figura 22.4) correspondiente a las ondas de choque de expansión. De estas expresiones y de (22.13) se tienen las siguientes desigualdades para las restantes magnitudes fluidas:

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} < \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \leq 1, \quad (22.19)$$

$$1 \leq \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} < \infty, \quad (22.20)$$

$$0 < \frac{M_{n2}}{M_{n1}} = \frac{v_{n2}}{v_{n1}} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \leq 1, \quad (22.21)$$

donde M_n es el número de Mach relativo a la componente normal de la velocidad. Se tiene pues que, a través de una onda de choque, la presión, la temperatura y la densidad del gas aumentan [las dos primeras magnitudes pueden

hacerlo indefinidamente y la densidad hasta el límite dado por (22.17)], mientras que la velocidad y el número de Mach relativos al movimiento de la onda decrecen (tanto en sus componentes normales como en sus valores absolutos, puesto que la componente tangencial de la velocidad se conserva). En cuanto a las magnitudes de remanso, de las relaciones (19.26)-(19.29), se tiene:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma \geq \left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}\right)^\gamma, \quad (22.22)$$

puesto que $p_2 \rho_1^\gamma / p_1 \rho_2^\gamma \geq 1$ de (22.16). Como la entalpía de remanso se conserva,

$$T_{20} = T_{10}, \quad \frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \quad (22.23)$$

comparando con (22.22) se llega a

$$\left(\frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}\right)^{\gamma-1} \leq 1, \quad (22.24)$$

de donde, al ser $\gamma > 1$, se deduce que tanto la densidad de remanso como la presión de remanso disminuyen a través de una onda de choque, mientras que la temperatura (entalpía) de remanso se conserva:

$$\rho_{20} \leq \rho_{10}, \quad p_{20} \leq p_{10}, \quad T_{20} = T_{10}. \quad (22.25)$$

El hecho de que no se conserven todas las magnitudes de remanso es consecuencia de que el flujo a través de una onda de choque no es isentrópico, con lo que estas magnitudes decrecen al aumentar la entropía. Esto no incluye a la temperatura de remanso ya que la entalpía de remanso sí se conserva por ser la onda de choque un proceso donde no se realiza ningún trabajo ni se intercambia calor y es casi estacionario dado que el espesor es teóricamente nulo (la entalpía de remanso no se conserva en un frente de combustión, donde se libera calor por reacción química, ni en una onda de choque que emitiera o absorbiera energía radiante).

22.4. Ondas de choque normales en gases perfectos

Una onda de choque normal es aquella en donde las corrientes incidente y saliente de la onda son normales a la misma: $\vec{v}_t = 0$, $\vec{v} = v_n \vec{n} \equiv v \vec{n}$. Por supuesto, este tipo de ondas de choque sólo se puede producir en movimientos

unidireccionales como, por ejemplo, el flujo supersónico en un conducto (ver capítulos 23, 26 y 33).

Las relaciones de Rankine-Hugoniot (22.9)-(22.12) se suelen escribir en función del número de Mach de la corriente incidente:

$$M_1^2 = M_{n1}^2 = \frac{v_1^2}{a_1^2} \quad (22.26)$$

Teniendo en cuenta que para un gas perfecto

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (22.27)$$

después de ciertas manipulaciones algébricas se llega a las siguientes expresiones que relacionan los saltos de las magnitudes fluidas a través de una onda de choque normal en función de M_1^2 :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \quad (22.28)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1} \quad (22.29)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma)[2 + (\gamma - 1)M_1^2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (22.30)$$

El número de Mach de la corriente detrás de la onda es

$$M_2^2 = \frac{v_2^2}{a_2^2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (22.31)$$

y la diferencia de entropía

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] = \ln \left[\frac{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right)^\gamma \right] \quad (22.32)$$

Por último, teniendo en cuenta las relaciones (19.28)-(19.29), el salto en las presiones y densidades de remanso es:

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} = \left[\frac{M_1^2 (\gamma + 1)^{(\gamma+1)/\gamma}}{[2 + (\gamma - 1)M_1^2][2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma]^{1/\gamma}} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (22.33)$$

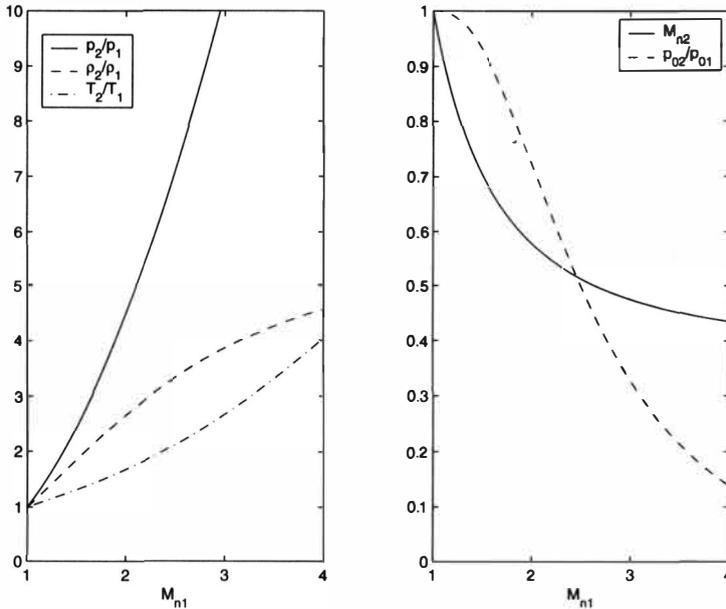


Figura 22.5: Propiedades detrás de una onda de choque en función del número de Mach normal de la corriente incidente para $\gamma = 1,4$.

Las relaciones anteriores permiten obtener las magnitudes fluidas detrás de una onda de choque normal de un gas perfecto conocidas las magnitudes delante de la onda de choque y el número de Mach incidente (y, por supuesto, γ , que depende exclusivamente del gas). Algunas de estas relaciones se representan en la figura 22.5 para $\gamma = 1,4$ (un gas diatómico; por ejemplo, aire). Los valores numéricos están tabulados en el apéndice A al final de la lección.

Una propiedad muy importante de las relaciones anteriores y del Segundo Principio de la Termodinámica es que el número de Mach incidente es siempre mayor o igual que la unidad, mientras que el número de Mach detrás de la onda es siempre menor o igual que la unidad: $M_1^2 \geq 1$, $M_2^2 \leq 1$. En efecto; tomando, por ejemplo, la expresión (22.29), como $p_2/p_1 \geq 1$ debido a que $s_2 - s_1 \geq 0$, se tiene que

$$2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma \geq \gamma + 1 \quad , \quad (22.34)$$

que implica $M_1^2 \geq 1$; por otra parte, de (22.31), para $M_1^2 \rightarrow 1$ (onda de choque muy débil), $M_2^2 \rightarrow 1$, mientras que para $M_1^2 \rightarrow \infty$ (onda de choque muy fuerte), $M_2^2 \rightarrow (\gamma - 1)/2\gamma < 1$; es decir, $(\gamma - 1)/2\gamma < M_2^2 \leq 1$. Esto quiere decir que a través de una onda de choque normal el movimiento del gas,

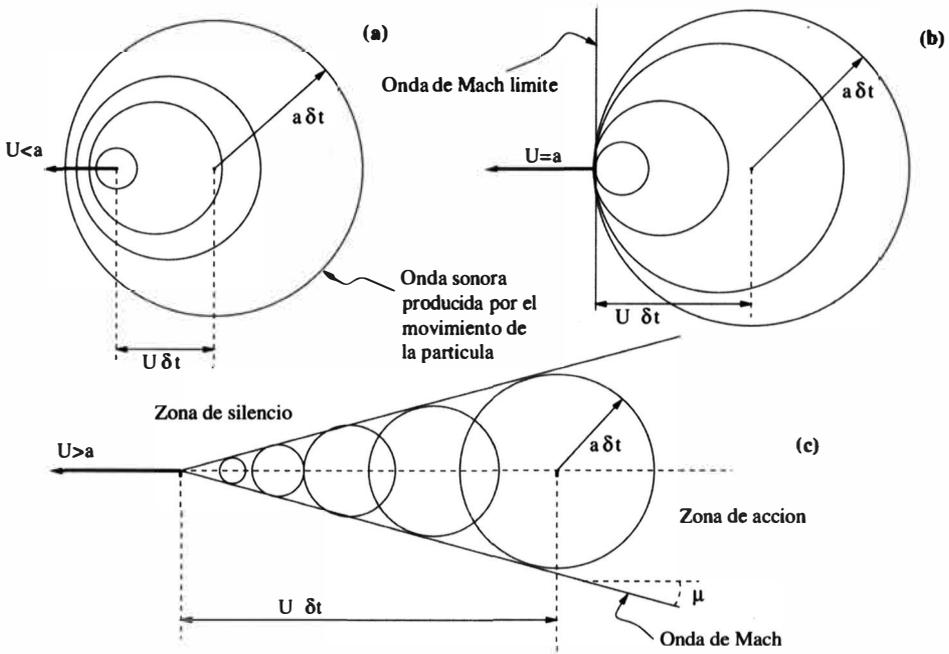


Figura 22.6: Ondas generadas por una partícula que se mueve a velocidad U en un fluido en reposo con velocidad del sonido a para los casos subsónico (a), sónico (b) y supersónico (c).

relativo a la onda de choque (no se olvide que todas las relaciones derivadas hasta aquí son en relación a unos ejes ligados a la onda de choque), pasa de supersónico a subsónico, siendo ello consecuencia del segundo principio de la termodinámica.

22.5. Ondas de Mach y ondas de choque oblicuas en gases perfectos

En flujos bidimensionales y tridimensionales supersónicos las ondas de choque dejan de ser planos perpendiculares al movimiento del fluido y pueden adoptar la forma de una superficie cualquiera (ver figura 22.1). En ellas la componente tangencial de la velocidad ya no es igual a cero, $\vec{v}_t \neq 0$. En esta sección consideraremos ondas de choque en flujos bidimensionales supersónicos; en particular, consideraremos las denominadas ondas de choque oblicuas planas, que se forman, por ejemplo, en el movimiento sobre cuñas y esquinas (ver figura 22.9 más adelante). Sin embargo, las relaciones que se derivarán son *localmente* válidas para cualquier onda de choque.

Pero antes de considerar estas ondas de choque oblicuas, es conveniente introducir la noción de *onda de Mach*. Cuando una partícula infinitesimal se mueve en el seno de un fluido, continuamente choca con las partículas fluidas de los alrededores, enviando hacia afuera ondas sonoras esféricas que emanan de cada punto a lo largo de su recorrido. En la figura 22.6 se muestran algunos de estos frentes de perturbación esféricos. El comportamiento de estos frentes es bastante diferente según sea subsónica o supersónica la velocidad de la partícula. Si la partícula se mueve subsónicamente, $U < a$ ($M < 1$), las perturbaciones esféricas se alejan en todas las direcciones sin alcanzarse unas a otras. Avanzan también por delante de la partícula, porque recorren una distancia $a\delta t$ en el intervalo de tiempo δt , durante el cual la partícula sólo ha recorrido una distancia $U\delta t$. Por tanto, cuando un cuerpo se mueve subsónicamente su presencia se percibe en todo el campo fluido: se puede *oir* o *sentir* el incremento de presión debido a un cuerpo que se acerca antes de que llegue. A la velocidad sónica, $U = a$ [$M = 1$; figura 22.6(b)], las perturbaciones se mueven a la misma velocidad que la partícula y se acumulan a la izquierda de ella formando un cierto tipo de *frente* que lleva el nombre de *onda de Mach*¹. Ninguna perturbación se desplaza aguas arriba de la partícula; si nos situamos a la izquierda de la partícula, no *oiremos* el móvil que se acerca. En movimiento supersónico, $U > a$, la falta previa de aviso del peligro es mucho más pronunciada. Las esferas de la perturbación no pueden seguir el rápido movimiento de la partícula que las originó. Todas ellas son arrastradas detrás de la partícula y son tangentes a una superficie cónica denominada *cono de Mach*. De acuerdo con la figura 22.6(c), el ángulo del cono de Mach (ángulo de Mach) es

$$\mu = \sin^{-1} \frac{a\delta t}{U\delta t} = \sin^{-1} \frac{a}{U} = \sin^{-1} \frac{1}{M} \quad (22.35)$$

Cuanto mayor es el número de Mach de la partícula, tanto más esbelto es el cono de Mach; por ejemplo, $\mu = 30^\circ$ cuando $M = 2$ y es $11,5^\circ$ cuando $M = 5$. En el caso límite de flujo sónico, $M = 1$, $\mu = 90^\circ$, y el cono de Mach se convierte en un frente plano que se mueve con la partícula [figura 22.6(b)]. No podríamos *oir* la perturbación originada por la partícula supersónica de la figura 22.6(c) a menos que estemos en la *zona de acción* en el interior del cono de Mach. No hay peligro de que las perturbaciones alcancen nuestro oído si estamos en la *zona de silencio*, fuera del cono. Por tanto, un observador en el

¹En honor de Ernst Mach, quien por 1887 introdujo este concepto; en particular, la construcción gráfica de la figura 22.6, que aparece en casi todos los libros de texto de Macánica de Fluidos, se debe a él. En su honor también se denomina el número adimensional más importante de los movimientos compresibles.

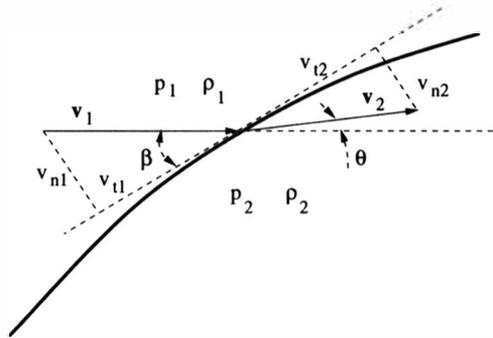


Figura 22.7: Geometría de una onda de choque oblicua.

suelo por debajo de un avión supersónico no oye el estampido o *bang sónico* debido al cono que viaja ligado al avión hasta cierto tiempo después de haber pasado éste.

La onda de Mach no tiene por qué ser cónica. Por ejemplo, ondas de Mach se forman en la superficie de cualquier cuerpo en movimiento supersónico debido a las rugosidades de la misma. A diferencia de las ondas de Mach producidas por el movimiento de una partícula infinitesimal, éstas no tienen necesariamente forma cónica, sino que partiendo de los distintos puntos de la superficie se van *agolpando* sobre una superficie envolvente, que constituye una discontinuidad finita u onda de choque, generalmente no normal a la corriente (ver figura 22.1). En lo que sigue se derivarán relaciones cuantitativas para las propiedades de estas ondas de choque oblicuas.

Como en las relaciones de Rankine-Hugoniot (22.9)-(22.10) y (22.12) sólo interviene la componente normal de la velocidad, las relaciones (22.28)-(22.33) siguen siendo válidas para una onda de choque oblicua si uno reemplaza v y M por sus componentes normales v_n y M_n . De esta forma, sólo es necesario añadir relaciones que nos permitan conocer M_{n1} en función del Mach incidente, M_1 , y M_{n2} en función de M_2 . Llamando β al ángulo que forma la corriente incidente con el plano tangente a la onda, y θ al ángulo que forma la corriente detrás de la onda en relación a la corriente incidente (ver figura 22.7), se tiene

$$v_{n1} = v_1 \sin \beta, \quad (22.36)$$

$$v_{n2} = v_2 \sin(\beta - \theta). \quad (22.37)$$

Como $\vec{v}_{t1} = \vec{v}_{t2} = \vec{v}_t$, se tiene además que

$$v_1 \cos \beta = v_2 \cos(\beta - \theta). \quad (22.38)$$

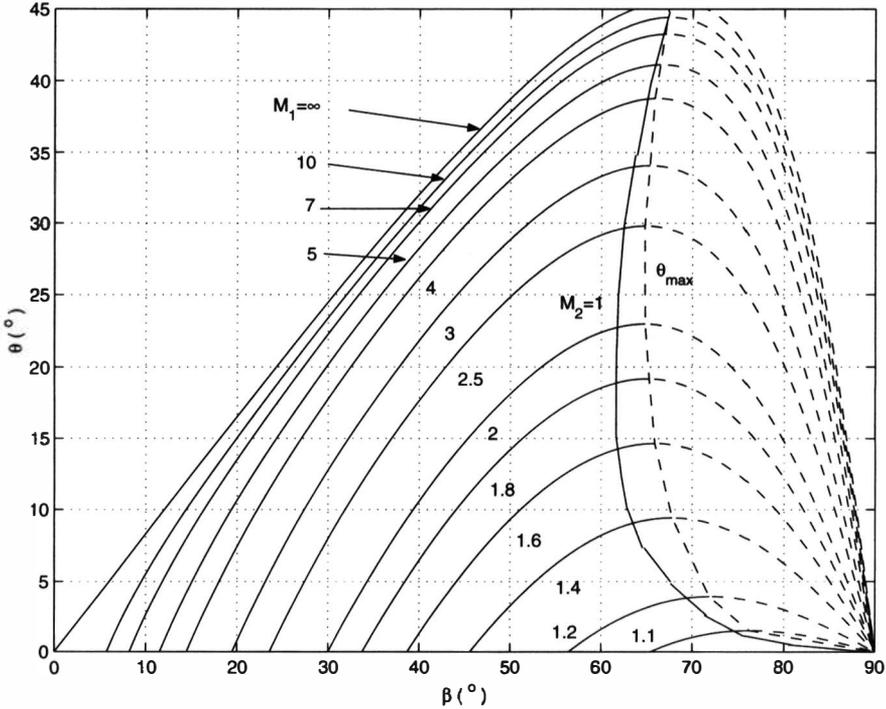


Figura 22.8: Curvas $\theta - \beta - M$ para una onda de choque oblicua [ecuación (22.41)] para un gas con $\gamma = 1.4$.

De estas relaciones y de (22.28) se llega a:

$$\frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \quad (22.39)$$

Teniendo en cuenta que, de (22.36),

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta, \quad (22.40)$$

se obtiene, finalmente, la siguiente relación entre θ , β y M_1^2 :

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right] \quad (22.41)$$

El proceso de resolución sería el siguiente: conocido M_1 y, por ejemplo, la deflexión de la corriente a través de la onda de choque θ (que normalmente viene impuesta por restricciones externas al flujo, ver figura 22.9), de (22.41) se obtiene β , y de (22.40) M_{n1} . Con M_{n1} y el conocimiento, por ejemplo, de

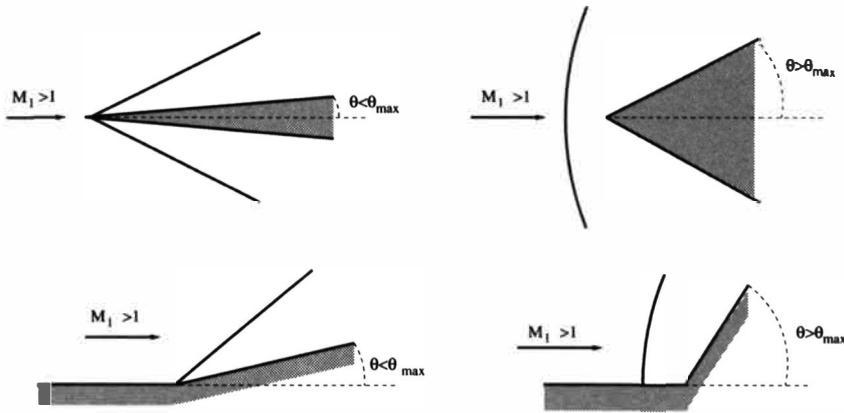


Figura 22.9: Ondas de choque en flujos sobre cuñas y esquinas. Si $\theta > \theta_{max}$ la onda de choque se separa.

la corriente incidente (p_1, ρ_1) , de (22.28)-(22.33) se obtienen las propiedades de la corriente detrás de la onda de choque, p_2, ρ_2 , etc., y el número de Mach normal detrás de la onda, M_{n2} . Finalmente, el número de Mach detrás de la onda viene dado por

$$M_2 = M_{n2} / \sin(\beta - \theta) \quad (22.42)$$

La relación (22.41) entre θ y β se representa en la figura 22.8 para varios valores de M_1 . De esta figura se desprenden las siguientes características de las ondas de choque oblicuas:

1. Para cada valor del Mach incidente existe un ángulo máximo de desviación θ_{max} . Si la geometría física es tal que $\theta > \theta_{max}$, no existe solución para una onda de choque oblicua recta, y en su lugar se forma una onda de choque curva separada del obstáculo (ver figura 22.9).
2. Para un $\theta < \theta_{max}$ hay dos valores posibles de β para cada M_1 , correspondientes a una onda de choque débil y otra fuerte. La onda de choque fuerte da lugar a un ángulo β mayor, puesto que, de (22.40), para un mismo M_1 corresponde a un M_{n1} mayor. La onda de choque más fuerte suele ser inestable y no se presenta en la práctica. Por ello, la solución que se produce físicamente es la correspondiente al ángulo β menor (líneas continuas en la figura 22.8), que corresponde a $M_2 > 1$, es decir, a un flujo supersónico detrás de la onda de choque (por supuesto, $M_{n2} < 1$, según vimos en la sección anterior), excepto en una pequeña franja cerca de θ_{max} (ver figura 22.8). Las ondas de choque fuertes dan lugar a

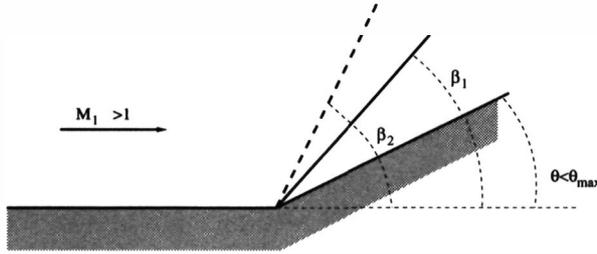


Figura 22.10: Ondas de choque oblicuas fuerte y débil.

$M_2 < 1$ (flujo subsónico) y no suelen producirse en la práctica, salvo que las condiciones detrás de la onda así lo exigiese; por ejemplo, si la presión detrás de la onda de choque de la figura 22.10 fuese incrementada por algún mecanismo independiente a la onda, se podría producir la onda de choque fuerte, que aparece en la figura con línea de trazos.

3. Si $\theta = 0$, $\beta = \pi/2$ (correspondiente a una onda de choque normal) o $\beta = \mu$ (correspondiente a una onda de Mach). Es decir, una onda de choque oblicua infinitesimal (deflexión infinitesimal de la corriente) coincide con una onda de Mach (ver sección 22.7), salvo en el caso de que la onda de choque sea normal ($M_2 < 1$).
4. Para un ángulo de deflexión θ fijo, al decrecer M_1 incrementa el ángulo de la onda β (para ondas débiles), y existe un número de Mach mínimo por debajo del cual no existe solución. Este Mach mínimo corresponde a $\theta = \theta_{max}$, y para números de Mach menores que él la onda de choque se separa, tal y como se ilustra en la figura 22.9.

22.6. Ondas de choque fuertes y débiles

Se obtienen a continuación expresiones simplificadas en los límites de ondas de choque débiles ($p_2/p_2 \rightarrow 1$) y fuertes ($p_2/p_1 \gg 1$).

22.6.1. Ondas débiles

De (22.29) se tiene que

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{2\gamma(M_{n1}^2 - 1)}{\gamma + 1} \ll 1, \quad (22.43)$$

por lo que $M_{n1}^2 - 1 \ll 1$ para una onda de choque débil (lo cual ya sabíamos). Llamando

$$m \equiv M_{n1}^2 - 1 \ll 1 \quad , \quad (22.44)$$

de la expresión anterior y de las relaciones restantes de Rankine-Hugoniot se tiene, desarrollando en potencias de m y reteniendo sólo los términos de mayor orden, las relaciones siguientes:

$$\frac{v_{n1}}{v_{n2}} - 1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \simeq \frac{2}{\gamma + 1} m \quad , \quad (22.45)$$

$$\frac{p_2}{p_1} - 1 \simeq \frac{2\gamma}{\gamma + 1} m \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} - 1 \simeq \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} m \quad ; \quad (22.46)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} \simeq \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)^2} m^3 \quad . \quad (22.47)$$

Se observa que una onda de choque débil es *casi isentrópica*, con errores del orden del cubo del parámetro pequeño m , lo cual ya sabíamos de la sección 22.3 [ecuaciones (22.14) y (22.15)]. Por último, de las relaciones (22.41) y (22.39) se tiene

$$\tan \theta \simeq \frac{2m}{(\gamma + 1)} \frac{\tan \beta}{1 + \tan^2 \beta} \quad , \quad (22.48)$$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{v_{n2}}{v_{n1}} \simeq 1 - \frac{2m}{\gamma + 1} \quad . \quad (22.49)$$

Es decir, una onda de choque muy débil tiene un ángulo de deflexión θ muy pequeño, lo cual corresponde, según lo dicho en la sección anterior, a $\beta \simeq \pi/2$ ó $\beta \simeq \mu$, dependiendo de que $M_2 < 1$ o $M_2 > 1$, respectivamente (para este último caso, ver sección 22.7).

22.6.2. Ondas fuertes

En el límite $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ se tiene, de (22.29), $M_1 \rightarrow \infty$. Por tanto, de las otras relaciones de Rankine-Hugoniot y de (22.41),

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_{n1}}{v_{n2}} \rightarrow \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad , \quad \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty \quad , \quad M_2 \rightarrow \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2} \quad , \quad (22.50)$$

$$\frac{p_{20}}{p_{10}} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}} \rightarrow \theta \quad , \quad (22.51)$$

$$\tan \theta \rightarrow \frac{\sin 2\beta}{\gamma + \cos 2\beta} \quad (22.52)$$

Como p_2 y T_2 tienden a infinito, se suelen expresar en la forma:

$$\frac{p_2}{\rho_1 v_{n1}^2} \rightarrow \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \frac{c_p T_2}{v_{n1}^2} \rightarrow \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)^2}, \quad (22.53)$$

donde se ha hecho uso de las relaciones de Rankine-Hugoniot en su forma original (22.9)-(22.12) y se han despreciado p_1 y h_1 frente a p_2 y h_2 , respectivamente.

22.7. Expansión de Prandtl-Meyer

Hasta aquí sólo se han considerado ondas de choque o de compresión, a través de las cuales el fluido incrementa su presión, temperatura y densidad. Existen también *ondas de expansión*, aunque éstas no satisfacen las relaciones de Rankine-Hugoniot (es decir, no son propiamente discontinuidades fluidas), ya que en tal caso violarían, como se vio en la sección 22.3, el segundo principio de la termodinámica; por el contrario, las ondas de expansión son casi isentrópicas y ocupan una región *finita* del flujo ideal (para más detalles sobre ondas de expansión y de compresión, en general, ver capítulo 26).

En esta sección se va a considerar un tipo especial de onda de expansión que se produce cuando un flujo supersónico *tuerce* una esquina convexa (ver figura 22.11), denominada expansión de Prandtl-Meyer. Este tipo de expansión es bastante frecuente en la práctica (ver, por ejemplo, lección siguiente), y es la antítesis de una onda de choque oblicua sobre una esquina cóncava, aunque, como se verá, no puede ser considerada como una discontinuidad fluida, sino que está constituida por un *abanico* de ondas de Mach entre el flujo incidente y el flujo saliente de la expansión. La región de expansión está así limitada por los ángulos $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$ y $\mu_2 = \arcsin(1/M_2)$, donde M_1 y M_2 son los números de Mach de la corriente incidente y de la corriente aguas abajo, respectivamente. Al estar formada la expansión por una sucesión infinita de ondas de Mach, las líneas de corriente son continuas a lo largo de la misma, contrariamente a lo que ocurre en una onda de choque, siendo además el proceso isentrópico, ya que $ds \simeq 0$ a través de cada onda de Mach. Una onda de expansión se produce siempre que un flujo supersónico es deflectado por una superficie convexa. Aquí se considerarán las ondas de expansión producidas sobre una esquina formada por dos planos que intersectan con un cierto ángulo $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Este tipo de expansión fue originalmente estudiado por Prandtl (1907) y posteriormente por su discípulo Meyer (1908), y de ahí su nombre.

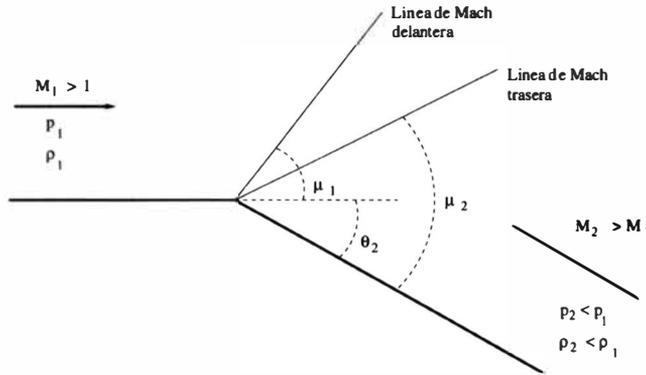


Figura 22.11: Expansión de Prandtl-Meyer.

Lo que se pretende calcular son las condiciones a la salida de la onda, M_2 , p_2 y T_2 , conocidas las magnitudes del flujo supersónico incidente, M_1 , p_1 y T_1 , así como el ángulo de deflexión θ_2 (se supone que $\theta_1 = 0$; ver figura 22.11). Para ello consideraremos el cambio infinitesimal de las magnitudes fluidas a través de una onda muy débil, u onda de Mach, producido por una deflexión infinitesimal $d\theta$ de la corriente.

Como se vió en la sección anterior, cuando $\theta \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \pi/2$ ó $\beta \rightarrow \mu_1 = \sin^{-1}(1/M_1)$, dependiendo de si el número de Mach detrás de la onda es menor o mayor que la unidad. Está claro que ahora tenemos el segundo caso. Suponiendo que la velocidad de la corriente pasa de v a $v + dv$ al atravesar la onda de Mach, de (22.36)-(22.38) se tiene

$$\frac{(v + dv)^2}{v^2} = \frac{(v_n + dv)^2 + v_t^2}{v_n^2 + v_t^2} = \frac{(v_n + dv)^2/v_t^2 + 1}{v_n^2/v_t^2 + 1} = \frac{\tan^2(\beta - d\theta) + 1}{\tan^2 \beta + 1} \quad (22.54)$$

Teniendo en cuenta que

$$\tan \beta \simeq \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (22.55)$$

donde M es el número de Mach de la corriente incidente, y reteniendo sólo los términos lineales en $d\theta$, se llega a

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad ; \quad (22.56)$$

es decir,

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v} \quad , \quad (22.57)$$

que constituye una ecuación diferencial para la deflexión de la corriente en función de su velocidad.

La relación entre las magnitudes fluidas a la entrada y a la salida de la expansión se obtiene de la integración de la ecuación anterior entre los ángulos θ_1 y θ_2 :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{M^2 - 1} \frac{dv}{v} \quad (22.58)$$

Para integrar el segundo miembro es preciso relacionar dv/v con el número de Mach. De la definición de este último se tiene

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a} \quad (22.59)$$

Particularizando para un gas perfecto, al ser el flujo adiabático (se conserva la entalpía de remanso), se verifica

$$\left(\frac{a_o}{a}\right)^2 = \frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad , \quad a = a_o \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2} \quad , \quad (22.60)$$

que diferenciada proporciona

$$\frac{da}{a} = - \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} dM \quad (22.61)$$

Sustituyendo en (22.59),

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad , \quad (22.62)$$

y en (22.58),

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \theta_2 - 0 = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (22.63)$$

Se suele definir la **función de Prandtl-Meyer**

$$\nu(M) \equiv \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \arctan \sqrt{M^2-1}, \quad (22.64)$$

de forma que (22.63) se puede escribir como

$$\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1). \quad (22.65)$$

La constante de integración en (22.64) no es importante puesto que en (22.65) aparece una diferencia de $\nu(M)$; se ha elegido $\nu(M=1) = 0$. La función de Prandtl-Meyer (22.64) se encuentra tabulada en el apéndice B al final de esta lección para $\gamma = 1,4$, donde también se incluyen los valores del ángulo de Mach μ .

El proceso de cálculo sería el siguiente: dado M_1 se calcularía $\nu(M_1)$ de la tabla del apéndice B; conocido el ángulo de deflexión θ_2 , de (22.65) se calcularía $\nu(M_2)$ y, del apéndice B, M_2 ; con M_2 , y teniendo en cuenta que la expansión es isentrópica y adiabática (se conservan las magnitudes de remanso), se calcularían todas las magnitudes fluidas detrás de la expansión; por ejemplo,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}, \quad (22.66)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (22.67)$$

Al ser $\nu(M)$ una función monótona creciente (ver apéndice B), de (22.65) se tiene que $M_2 > M_1 (> 1)$; es decir, el flujo se hace *más supersónico* a través de una expansión de Prandtl-Meyer. Por otro lado, de (22.66)-(22.67), $T_2 < T_1$, $p_2 < p_1$ y $\rho_2 < \rho_1$: temperatura, presión y densidad disminuyen a través de una onda de expansión, contrariamente a lo que ocurría en una onda de choque o de compresión.

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulos 3 y 4.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 4.
- G. MILLÁN BARBANY, 1975. Capítulo II.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 9.

22.8. APÉNDICE A: Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$

M_{n1}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1	M_{n2}
1.00	1.0000+00	1.00000	1.0000+00	1.0000+00	1.89293+00	1.0000+00
1.05	1.11958+00	1.08398	1.03284+00	9.99854-01	2.00825+00	9.53125-01
1.10	1.24499+00	1.16908	1.06493+00	9.98929-01	2.13285+00	9.11770-01
1.15	1.37624+00	1.25504	1.09657+00	9.96691-01	2.26608+00	8.75024-01
1.20	1.51333+00	1.34161	1.12799+00	9.92800-01	2.40750+00	8.42170-01
1.25	1.65624+00	1.42857	1.15937+00	9.87058-01	2.55676+00	8.12636-01
1.30	1.80499+00	1.51569	1.19087+00	9.79375-01	2.71359+00	7.85957-01
1.35	1.95958+00	1.60278	1.22261+00	9.69739-01	2.87781+00	7.61753-01
1.40	2.11999+00	1.68965	1.25469+00	9.58196-01	3.04924+00	7.39709-01
1.45	2.28624+00	1.77613	1.28720+00	9.44839-01	3.22776+00	7.19561-01
1.50	2.45832+00	1.86206	1.32021+00	9.29789-01	3.41328+00	7.01088-01
1.55	2.63624+00	1.94731	1.35378+00	9.13191-01	3.60571+00	6.84101-01
1.60	2.81999+00	2.03174	1.38796+00	8.95203-01	3.80498+00	6.68437-01
1.65	3.00957+00	2.11524	1.42280+00	8.75991-01	4.01104+00	6.53958-01
1.70	3.20499+00	2.19771	1.45833+00	8.55724-01	4.22384+00	6.40543-01
1.75	3.40624+00	2.27906	1.49457+00	8.34568-01	4.44335+00	6.28088-01
1.80	3.61332+00	2.35922	1.53157+00	8.12687-01	4.66953+00	6.16501-01
1.85	3.82624+00	2.43811	1.56934+00	7.90235-01	4.90235+00	6.05700-01
1.90	4.04499+00	2.51567	1.60791+00	7.67359-01	5.14179+00	5.95616-01
1.95	4.26957+00	2.59187	1.64729+00	7.44198-01	5.38784+00	5.86184-01
2.00	4.49999+00	2.66666	1.68750+00	7.20877-01	5.64046+00	5.77350-01
2.05	4.73624+00	2.74001	1.72854+00	6.97511-01	5.89965+00	5.69062-01
2.10	4.97832+00	2.81190	1.77045+00	6.74206-01	6.16540+00	5.61276-01
2.15	5.22624+00	2.88230	1.81321+00	6.51054-01	6.43769+00	5.53953-01
2.20	5.47999+00	2.95121	1.85685+00	6.28139-01	6.71651+00	5.47055-01
2.25	5.73957+00	3.01863	1.90138+00	6.05532-01	7.00185+00	5.40551-01
2.30	6.00499+00	3.08454	1.94680+00	5.83297-01	7.29371+00	5.34411-01
2.35	6.27624+00	3.14896	1.99311+00	5.61487-01	7.59208+00	5.28607-01
2.40	6.55332+00	3.21189	2.04033+00	5.40146-01	7.89695+00	5.23117-01
2.45	6.83623+00	3.27334	2.08845+00	5.19313-01	8.20832+00	5.17918-01
2.50	7.12498+00	3.33333	2.13750+00	4.99017-01	8.52618+00	5.12989-01
2.55	7.41957+00	3.39187	2.18746+00	4.79282-01	8.85053+00	5.08312-01
2.60	7.71998+00	3.44897	2.23834+00	4.60125-01	9.18136+00	5.03871-01
2.65	8.02623+00	3.50467	2.29015+00	4.41559-01	9.51867+00	4.99649-01
2.70	8.33832+00	3.55899	2.34289+00	4.23592-01	9.86245+00	4.95633-01
2.75	8.65623+00	3.61194	2.39656+00	4.06228-01	1.02127+01	4.91810-01
2.80	8.97998+00	3.66355	2.45117+00	3.89466-01	1.05694+01	4.88167-01
2.85	9.30956+00	3.71385	2.50672+00	3.73303-01	1.09326+01	4.84693-01
2.90	9.64498+00	3.76286	2.56320+00	3.57735-01	1.13023+01	4.81379-01
2.95	9.98623+00	3.81061	2.62063+00	3.42752-01	1.16784+01	4.78214-01
3.00	1.03333+01	3.85714	2.67901+00	3.28346-01	1.20610+01	4.75190-01
3.05	1.06862+01	3.90246	2.73833+00	3.14503-01	1.24501+01	4.72299-01

Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$ (continuación).

M_{n1}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1	M_{n2}
3.10	1.10449+01	3.94661	2.79860+00	3.01213-01	1.28456+01	4.69533-01
3.15	1.14095+01	3.98961	2.85982+00	2.88460-01	1.32475+01	4.66885-01
3.20	1.17799+01	4.03149	2.92199+00	2.76230-01	1.36560+01	4.64348-01
3.25	1.21562+01	4.07228	2.98511+00	2.64508-01	1.40709+01	4.61917-01
3.30	1.25383+01	4.11202	3.04919+00	2.53277-01	1.44922+01	4.59585-01
3.35	1.29262+01	4.15071	3.11422+00	2.42522-01	1.49200+01	4.57348-01
3.40	1.33199+01	4.18840	3.18020+00	2.32227-01	1.53542+01	4.55200-01
3.45	1.37195+01	4.22511	3.24715+00	2.22374-01	1.57949+01	4.53136-01
3.50	1.41249+01	4.26086	3.31505+00	2.12949-01	1.62421+01	4.51153-01
3.55	1.45362+01	4.29569	3.38390+00	2.03934-01	1.66957+01	4.49247-01
3.60	1.49533+01	4.32962	3.45372+00	1.95313-01	1.71557+01	4.47412-01
3.65	1.53762+01	4.36266	3.52450+00	1.87072-01	1.76222+01	4.45647-01
3.70	1.58049+01	4.39486	3.59624+00	1.79195-01	1.80952+01	4.43947-01
3.75	1.62395+01	4.42622	3.66894+00	1.71666-01	1.85745+01	4.42310-01
3.80	1.66799+01	4.45679	3.74260+00	1.64471-01	1.90604+01	4.40731-01
3.85	1.71262+01	4.48656	3.81722+00	1.57596-01	1.95527+01	4.39210-01
3.90	1.75783+01	4.51558	3.89281+00	1.51028-01	2.00514+01	4.37742-01
3.95	1.80362+01	4.54386	3.96936+00	1.44752-01	2.05566+01	4.36326-01
4.00	1.84999+01	4.57142	4.04687+00	1.38757-01	2.10682+01	4.34958-01
4.05	1.89695+01	4.59829	4.12535+00	1.33029-01	2.15863+01	4.33638-01
4.10	1.94449+01	4.62448	4.20479+00	1.27557-01	2.21108+01	4.32362-01
4.15	1.99262+01	4.65001	4.28519+00	1.22329-01	2.26417+01	4.31129-01
4.20	2.04133+01	4.67491	4.36657+00	1.17334-01	2.31791+01	4.29937-01
4.25	2.09062+01	4.69918	4.44890+00	1.12562-01	2.37230+01	4.28784-01
4.30	2.14049+01	4.72286	4.53221+00	1.08002-01	2.42733+01	4.27669-01
4.35	2.19095+01	4.74595	4.61647+00	1.03645-01	2.48300+01	4.26589-01
4.40	2.24199+01	4.76847	4.70171+00	9.94814-02	2.53932+01	4.25544-01
4.45	2.29362+01	4.79044	4.78791+00	9.55021-02	2.59628+01	4.24532-01
4.50	2.34582+01	4.81188	4.87508+00	9.16986-02	2.65388+01	4.23551-01
4.55	2.39862+01	4.83279	4.96322+00	8.80629-02	2.71213+01	4.22601-01
4.60	2.45199+01	4.85321	5.05232+00	8.45872-02	2.77103+01	4.21680-01
4.65	2.50595+01	4.87313	5.14239+00	8.12640-02	2.83057+01	4.20786-01
4.70	2.56049+01	4.89258	5.23343+00	7.80862-02	2.89075+01	4.19919-01
4.75	2.61562+01	4.91156	5.32544+00	7.50472-02	2.95158+01	4.19079-01
4.80	2.67132+01	4.93009	5.41841+00	7.21404-02	3.01305+01	4.18262-01
4.85	2.72762+01	4.94819	5.51235+00	6.93597-02	3.07516+01	4.17470-01
4.90	2.78449+01	4.96587	5.60727+00	6.66992-02	3.13792+01	4.16701-01
4.95	2.84195+01	4.98313	5.70315+00	6.41533-02	3.20133+01	4.15953-01
5.00	2.89999+01	5.00000	5.80000+00	6.17168-02	3.26537+01	4.15227-01
5.10	3.01782+01	5.03257	5.99660+00	5.71518-02	3.39540+01	4.13835-01
5.20	3.13799+01	5.06367	6.19708+00	5.29664-02	3.52800+01	4.12519-01
5.30	3.26049+01	5.09338	6.40144+00	4.91264-02	3.66318+01	4.11273-01
5.40	3.38532+01	5.12177	6.60968+00	4.56009-02	3.80094+01	4.10093-01

Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$ (continuación).

M_{n1}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1	M_{n2}
5.50	3.51249+01	5.14893	6.82179+00	4.23618-02	3.94127+01	4.08974-01
5.60	3.64199+01	5.17491	7.03779+00	3.93836-02	4.08418+01	4.07911-01
5.70	3.77382+01	5.19978	7.25766+00	3.66434-02	4.22966+01	4.06902-01
5.80	3.90799+01	5.22360	7.48142+00	3.41203-02	4.37772+01	4.05943-01
5.90	4.04449+01	5.24642	7.70906+00	3.17953-02	4.52835+01	4.05030-01
6.00	4.18332+01	5.26829	7.94058+00	2.96512-02	4.68156+01	4.04161-01
6.10	4.32449+01	5.28926	8.17598+00	2.76725-02	4.83735+01	4.03333-01
6.20	4.46799+01	5.30939	8.41527+00	2.58451-02	4.99571+01	4.02543-01
6.30	4.61382+01	5.32870	8.65844+00	2.41560-02	5.15665+01	4.01789-01
6.40	4.76199+01	5.34725	8.90549+00	2.25938-02	5.32016+01	4.01069-01
6.50	4.91249+01	5.36507	9.15643+00	2.11477-02	5.48625+01	4.00381-01
6.60	5.06532+01	5.38220	9.41125+00	1.98082-02	5.65491+01	3.99723-01
6.70	5.22049+01	5.39867	9.66996+00	1.85665-02	5.82615+01	3.99093-01
6.80	5.37799+01	5.41451	9.93255+00	1.74145-02	5.99997+01	3.98491-01
6.90	5.53782+01	5.42976	1.01990+01	1.63451-02	6.17636+01	3.97913-01
7.00	5.69999+01	5.44444	1.04693+01	1.53516-02	6.35533+01	3.97359-01
7.10	5.86449+01	5.45858	1.07436+01	1.44280-02	6.53687+01	3.96828-01
7.20	6.03132+01	5.47220	1.10217+01	1.35687-02	6.72099+01	3.96318-01
7.30	6.20049+01	5.48533	1.13037+01	1.27687-02	6.90768+01	3.95829-01
7.40	6.37198+01	5.49799	1.15896+01	1.20234-02	7.09695+01	3.95359-01
7.50	6.54582+01	5.51020	1.18794+01	1.13286-02	7.28879+01	3.94907-01
7.60	6.72198+01	5.52198	1.21731+01	1.06805-02	7.48321+01	3.94472-01
7.70	6.90048+01	5.53336	1.24707+01	1.00754-02	7.68020+01	3.94054-01
7.80	7.08132+01	5.54434	1.27721+01	9.51030-03	7.87977+01	3.93651-01
7.90	7.26448+01	5.55496	1.30774+01	8.98203-03	8.08192+01	3.93263-01
8.00	7.44998+01	5.56521	1.33867+01	8.48793-03	8.28664+01	3.92889-01
8.10	7.63782+01	5.57513	1.36998+01	8.02550-03	8.49393+01	3.92529-01
8.20	7.82798+01	5.58471	1.40168+01	7.59245-03	8.70380+01	3.92182-01
8.30	8.02048+01	5.59399	1.43377+01	7.18666-03	8.91625+01	3.91846-01
8.40	8.21532+01	5.60296	1.46624+01	6.80620-03	9.13127+01	3.91523-01
8.50	8.41248+01	5.61165	1.49911+01	6.44925-03	9.34887+01	3.91211-01
8.60	8.61198+01	5.62006	1.53236+01	6.11418-03	9.56904+01	3.90909-01
8.70	8.81381+01	5.62820	1.56601+01	5.79946-03	9.79179+01	3.90617-01
8.80	9.01798+01	5.63609	1.60004+01	5.50370-03	1.00171+02	3.90335-01
8.90	9.22448+01	5.64374	1.63446+01	5.22558-03	1.02450+02	3.90063-01
9.00	9.43331+01	5.65116	1.66927+01	4.96391-03	1.04754+02	3.89799-01
9.10	9.64448+01	5.65835	1.70447+01	4.71760-03	1.07085+02	3.89543-01
9.20	9.85798+01	5.66532	1.74005+01	4.48560-03	1.09441+02	3.89296-01
9.30	1.00738+02	5.67209	1.77603+01	4.26698-03	1.11823+02	3.89057-01
9.40	1.02919+02	5.67866	1.81239+01	4.06085-03	1.14231+02	3.88825-01
9.50	1.05124+02	5.68503	1.84915+01	3.86640-03	1.16664+02	3.88600-01
9.60	1.07353+02	5.69123	1.88629+01	3.68288-03	1.19124+02	3.88383-01
9.70	1.09604+02	5.69724	1.92382+01	3.50959-03	1.21609+02	3.88171-01

Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$ (continuación).

M_{n1}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1	M_{n2}
9.80	1.11879+02	5.70308	1.96174+01	3.34587-03	1.24119+02	3.87967-01
9.90	1.14178+02	5.70876	2.00005+01	3.19112-03	1.26656+02	3.87768-01
10.0	1.16499+02	5.71428	2.03875+01	3.04479-03	1.29218+02	3.87575-01
10.5	1.28458+02	5.73969	2.23806+01	2.42220-03	1.42416+02	3.86690-01
11.0	1.40999+02	5.76190	2.44710+01	1.94508-03	1.56257+02	3.85922-01
11.5	1.54124+02	5.78142	2.66586+01	1.57559-03	1.70742+02	3.85251-01
12.0	1.67833+02	5.79865	2.89434+01	1.28663-03	1.85871+02	3.84661-01
12.5	1.82124+02	5.81395	3.13255+01	1.05860-03	2.01644+02	3.84139-01
13.0	1.96999+02	5.82758	3.38047+01	8.77103-04	2.18061+02	3.83677-01
13.5	2.12457+02	5.83978	3.63811+01	7.31494-04	2.35121+02	3.83264-01
14.0	2.28499+02	5.85074	3.90548+01	6.13804-04	2.52825+02	3.82894-01
14.5	2.45124+02	5.86062	4.18257+01	5.18014-04	2.71173+02	3.82562-01
15.0	2.62332+02	5.86956	4.46938+01	4.39535-04	2.90165+02	3.82262-01
15.5	2.80124+02	5.87767	4.76591+01	3.74840-04	3.09801+02	3.81990-01
16.0	2.98499+02	5.88505	5.07216+01	3.21198-04	3.30080+02	3.81744-01
16.5	3.17457+02	5.89179	5.38814+01	2.76475-04	3.51003+02	3.81519-01
17.0	3.36999+02	5.89795	5.71384+01	2.38994-04	3.72570+02	3.81314-01
17.5	3.57124+02	5.90361	6.04926+01	2.07428-04	3.94781+02	3.81126-01
18.0	3.77832+02	5.90881	6.39440+01	1.80720-04	4.17636+02	3.80953-01
18.5	3.99124+02	5.91360	6.74926+01	1.58022-04	4.41134+02	3.80794-01
19.0	4.20999+02	5.91803	7.11385+01	1.38650-04	4.65276+02	3.80648-01
19.5	4.43457+02	5.92212	7.48815+01	1.22052-04	4.90062+02	3.80512-01
20.0	4.66499+02	5.92592	7.87218+01	1.07776-04	5.15492+02	3.80387-01
20.5	4.90124+02	5.92945	8.26593+01	9.54533-05	5.41565+02	3.80270-01
21.0	5.14332+02	5.93273	8.66941+01	8.47789-05	5.68283+02	3.80162-01
21.5	5.39124+02	5.93579	9.08260+01	7.55021-05	5.95644+02	3.80061-01
22.0	5.64499+02	5.93865	9.50552+01	6.74146-05	6.23649+02	3.79967-01
22.5	5.90457+02	5.94132	9.93816+01	6.03426-05	6.52298+02	3.79879-01
23.0	6.16999+02	5.94382	1.03805+02	5.41407-05	6.81590+02	3.79797-01
23.5	6.44123+02	5.94616	1.08326+02	4.86867-05	7.11526+02	3.79720-01
24.0	6.71832+02	5.94836	1.12944+02	4.38778-05	7.42107+02	3.79648-01
24.5	7.00123+02	5.95043	1.17659+02	3.96267-05	7.73331+02	3.79580-01
25.0	7.28998+02	5.95238	1.22472+02	3.58596-05	8.05198+02	3.79516-01
25.5	7.58457+02	5.95421	1.27381+02	3.25135-05	8.37710+02	3.79456-01
26.0	7.88498+02	5.95594	1.32388+02	2.95346-05	8.70865+02	3.79399-01
26.5	8.19123+02	5.95758	1.37492+02	2.68767-05	9.04664+02	3.79346-01
27.0	8.50331+02	5.95912	1.42694+02	2.45004-05	9.39107+02	3.79295-01
27.5	8.82123+02	5.96059	1.47992+02	2.23714-05	9.74194+02	3.79247-01
28.0	9.14498+02	5.96197	1.53388+02	2.04604-05	1.00992+03	3.79202-01
28.5	9.47456+02	5.96329	1.58881+02	1.87416-05	1.04629+03	3.79159-01
29.0	9.80998+02	5.96453	1.64472+02	1.71931-05	1.08331+03	3.79118-01
29.5	1.01512+03	5.96572	1.70159+02	1.57953-05	1.12097+03	3.79079-01
30.0	1.04983+03	5.96685	1.75944+02	1.45316-05	1.15928+03	3.79043-01

Propiedades de una onda de choque normal para $\gamma = 1,4$ (continuación).

M_{n1}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{02}/p_{01}	p_{02}/p_1	M_{n2}
30.5	1.08512+03	5.96792	1.81826+02	1.33872-05	1.19823+03	3.79007-01
31.0	1.12099+03	5.96894	1.87805+02	1.23490-05	1.23782+03	3.78974-01
31.5	1.15745+03	5.96991	1.93881+02	1.14060-05	1.27806+03	3.78942-01
32.0	1.19449+03	5.97084	2.00055+02	1.05479-05	1.31894+03	3.78912-01
32.5	1.23212+03	5.97173	2.06326+02	9.76612-06	1.36047+03	3.78883-01
33.0	1.27033+03	5.97257	2.12694+02	9.05274-06	1.40263+03	3.78856-01
33.5	1.30912+03	5.97338	2.19159+02	8.40093-06	1.44545+03	3.78829-01
34.0	1.34849+03	5.97416	2.25722+02	7.80458-06	1.48890+03	3.78804-01
34.5	1.38845+03	5.97490	2.32381+02	7.25827-06	1.53300+03	3.78780-01
35.0	1.42899+03	5.97560	2.39138+02	6.75717-06	1.57775+03	3.78757-01
35.5	1.47012+03	5.97628	2.45992+02	6.29699-06	1.62313+03	3.78734-01
36.0	1.51183+03	5.97694	2.52944+02	5.87387-06	1.66916+03	3.78713-01
36.5	1.55412+03	5.97756	2.59992+02	5.48439-06	1.71584+03	3.78693-01
37.0	1.59699+03	5.97816	2.67138+02	5.12547-06	1.76316+03	3.78673-01
37.5	1.64045+03	5.97874	2.74381+02	4.79435-06	1.81112+03	3.78655-01
38.0	1.68449+03	5.97929	2.81722+02	4.48855-06	1.85973+03	3.78637-01
38.5	1.72912+03	5.97982	2.89159+02	4.20584-06	1.90898+03	3.78619-01
39.0	1.77433+03	5.98034	2.96694+02	3.94422-06	1.95887+03	3.78602-01
39.5	1.82012+03	5.98083	3.04326+02	3.70187-06	2.00941+03	3.78586-01
40.0	1.86649+03	5.98130	3.12055+02	3.47716-06	2.06059+03	3.78571-01
40.5	1.91345+03	5.98176	3.19881+02	3.26861-06	2.11242+03	3.78556-01
41.0	1.96099+03	5.98220	3.27805+02	3.07488-06	2.16489+03	3.78542-01
41.5	2.00912+03	5.98263	3.35826+02	2.89477-06	2.21800+03	3.78528-01
42.0	2.05783+03	5.98304	3.43944+02	2.72715-06	2.27176+03	3.78515-01
42.5	2.10712+03	5.98343	3.52159+02	2.57104-06	2.32616+03	3.78502-01
43.0	2.15699+03	5.98381	3.60472+02	2.42553-06	2.38120+03	3.78489-01
43.5	2.20745+03	5.98418	3.68881+02	2.28978-06	2.43689+03	3.78477-01
44.0	2.25849+03	5.98454	3.77388+02	2.16305-06	2.49322+03	3.78466-01
44.5	2.31012+03	5.98488	3.85992+02	2.04463-06	2.55020+03	3.78454-01
45.0	2.36232+03	5.98522	3.94694+02	1.93391-06	2.60782+03	3.78444-01
45.5	2.41512+03	5.98554	4.03492+02	1.83030-06	2.66608+03	3.78433-01
46.0	2.46849+03	5.98585	4.12388+02	1.73327-06	2.72499+03	3.78423-01
46.5	2.52245+03	5.98615	4.21381+02	1.64235-06	2.78454+03	3.78413-01
47.0	2.57699+03	5.98644	4.30472+02	1.55709-06	2.84473+03	3.78404-01
47.5	2.63212+03	5.98673	4.39659+02	1.47709-06	2.90557+03	3.78395-01
48.0	2.68782+03	5.98700	4.48944+02	1.40196-06	2.96705+03	3.78386-01
48.5	2.74412+03	5.98727	4.58326+02	1.33137-06	3.02918+03	3.78377-01
49.0	2.80099+03	5.98753	4.67805+02	1.26500-06	3.09195+03	3.78369-01
49.5	2.85845+03	5.98778	4.77381+02	1.20256-06	3.15536+03	3.78360-01
50.0	2.91649+03	5.98802	4.87055+02	1.14379-06	3.21942+03	3.78353-01

22.9. APÉNDICE B: Función de Prandtl-Meyer y ángulo de Mach para $\gamma = 1,4$.

M	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$	M	$\nu(^{\circ})$	$\mu(^{\circ})$
1.00	0.00000+00	9.00000+01	2.0	2.63797+01	3.00000+01
1.05	0.48741+00	7.22472+01	2.1	2.90970+01	2.84368+01
1.10	1.33620+00	6.53800+01	2.2	3.17324+01	2.70356+01
1.15	2.38104+00	6.04081+01	2.3	3.42827+01	2.57714+01
1.20	3.55823+00	5.64426+01	2.4	3.67465+01	2.46243+01
1.25	4.82988+00	5.31301+01	2.5	3.91235+01	2.35781+01
1.30	6.17028+00	5.02848+01	2.6	4.14147+01	2.26198+01
1.35	7.56072+00	4.77945+01	2.7	4.36214+01	2.17384+01
1.40	8.98702+00	4.55846+01	2.8	4.57458+01	2.09248+01
1.45	1.04381+01	4.36028+01	2.9	4.77903+01	2.01712+01
1.50	1.19052+01	4.18103+01	3.0	4.97573+01	1.94712+01
1.55	1.33812+01	4.01777+01	3.1	5.16497+01	1.88190+01
1.60	1.48603+01	3.86821+01	3.2	5.34703+01	1.82099+01
1.65	1.63378+01	3.73052+01	3.3	5.52219+01	1.76397+01
1.70	1.78099+01	3.60318+01	3.4	5.69075+01	1.71046+01
1.75	1.92731+01	3.48499+01	3.5	5.85297+01	1.66015+01
1.80	2.07250+01	3.37489+01	3.6	6.00914+01	1.61276+01
1.85	2.21633+01	3.27204+01	3.7	6.15952+01	1.56803+01
1.90	2.35861+01	3.17568+01	3.8	6.30437+01	1.52575+01
1.95	2.49920+01	3.08518+01	3.9	6.44395+01	1.48571+01
4.00	6.57848+01	1.44775+01	14.0	1.10179+02	4.09604+00
4.50	7.18317+01	1.28395+01	15.0	1.11509+02	3.82255+00
5.00	7.69202+01	1.15369+01	16.0	1.12675+02	3.58332+00
5.50	8.12447+01	1.04756+01	17.0	1.13708+02	3.37228+00
6.00	8.49554+01	9.59406+00	18.0	1.14627+02	3.18473+00
6.50	8.81681+01	8.84988+00	19.0	1.15452+02	3.01696+00
7.00	9.09727+01	8.21321+00	20.0	1.16195+02	2.86598+00
7.50	9.34396+01	7.66225+00	21.0	1.16868+02	2.72940+00
8.00	9.56246+01	7.18075+00	22.0	1.17481+02	2.60525+00
8.50	9.75722+01	6.75632+00	23.0	1.18041+02	2.49190+00
9.00	9.93180+01	6.37937+00	24.0	1.18555+02	2.38801+00
9.50	1.00891+02	6.04232+00	25.0	1.19028+02	2.29244+00
10.0	1.02316+02	5.73917+00	26.0	1.19465+02	2.20422+00
10.5	1.03612+02	5.46502+00	27.0	1.19870+02	2.12255+00
11.0	1.04795+02	5.21590+00	28.0	1.20246+02	2.04671+00
11.5	1.05880+02	4.98854+00	29.0	1.20596+02	1.97610+00
12.0	1.06878+02	4.78019+00	30.0	1.20924+02	1.91021+00
12.5	1.07799+02	4.58856+00	31.0	1.21230+02	1.84857+00
13.0	1.08652+02	4.41172+00	32.0	1.21517+02	1.79078+00
13.5	1.09443+02	4.24802+00	33.0	1.21787+02	1.73650+00

Capítulo 23

Movimiento de fluidos ideales en conductos

23.1. Ecuaciones para el movimiento casiunidireccional de un fluido ideal

En esta lección consideraremos el movimiento adiabático de fluidos ideales (flujo isentrópico) en conductos de sección lentamente variable. Es decir, consideraremos que se verifican las siguientes hipótesis:

$$D/L \ll 1 \quad , \quad ReD/L \gg 1 \quad , \quad PeD/L \gg 1 \quad (23.1)$$

donde D y L son un diámetro y una longitud característica del conducto, respectivamente. La primera condición y la ecuación de continuidad nos permite suponer que el flujo es casi unidireccional: $V_T \ll V_L$, donde V_T y V_L son velocidades características transversal al eje del conducto y longitudinal al mismo, respectivamente. Además, de la ecuación de cantidad de movimiento se tiene que las variaciones transversales de presión reducida son despreciables frente a las variaciones longitudinales, análogamente a como ocurría en el flujo viscoso en conductos (ver sección 15.2):

$$\frac{\Delta_T P}{\Delta_L P} \sim \frac{\rho V_T^2}{\rho V_L^2} \sim \left(\frac{D}{L}\right)^2 \ll 1 \quad . \quad (23.2)$$

La segunda y tercera condición en (23.1) nos dice que los efectos viscosos y de conducción de calor son despreciables en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, esto es, el fluido es ideal. Suponemos, además, que no hay aportes volumétricos de calor, por lo que el flujo es isentrópico. Por

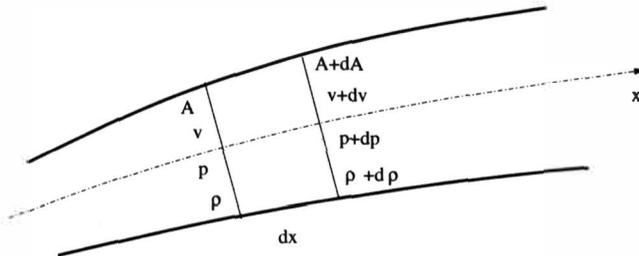


Figura 23.1: Volumen diferencial de control.

supuesto, los efectos disipativos son importantes en una capa delgada cerca de la pared del conducto cuyo espesor tiende a cero cuando ReD/L y PeD/L tienden a infinito (ver lección 27).

Al no existir efectos disipativos, las magnitudes fluidas no dependen, en primera aproximación (es decir, salvo en la capa límite sobre la pared antes citada) de las coordenadas transversales al conducto, siendo así uniformes en cada sección del mismo. Por ello, en las ecuaciones que se escriben a continuación, se supone que las magnitudes fluidas son sólo función de la coordenada longitudinal a lo largo del conducto x , y del tiempo t . Estas ecuaciones no las escribiremos para el caso general, sino para dos casos particulares que son los más comunes en la práctica: el movimiento de líquidos y el movimiento *casi estacionario* de gases.

23.1.1. Movimiento de líquidos

La ecuación de continuidad *unidireccional* se obtiene aplicando la ecuación de conservación de la masa a un volumen de control diferencial como el de la figura 23.1. Como la densidad es constante por ser un líquido y la velocidad es uniforme en cada sección,

$$Av = (A + dA)(v + dv) = \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \quad \text{o} \quad \frac{\partial Av}{\partial x} = 0, \quad (23.3)$$

que proporciona

$$A(x)v(x, t) = Q(t), \quad (23.4)$$

donde Q es el caudal, constante a lo largo del conducto.

Para la ecuación de cantidad de movimiento se supondrá que las fuerzas másicas derivan del potencial U , que unido a las hipótesis anteriores implica que el flujo es irrotacional, puesto que las propiedades son uniformes en cada

sección; se puede así utilizar la ecuación (19.14), sustituyendo l por x , ya que todas las líneas de corriente son idénticas o, directamente, la ecuación (20.28) para flujos irrotacionales:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0. \tag{23.5}$$

Por último, la ecuación de la energía (entropía) dice que la temperatura debe ser constante por ser el flujo isentrópico de un líquido. Pero esta ecuación no va a ser necesaria al estar desacoplada de las anteriores.

Escribiendo la variación temporal de v en (23.5) en función del caudal e integrando respecto a x , se tiene:

$$\frac{1}{A(x)} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0, \tag{23.6}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = -I(x) \frac{dQ}{dt} + C(t), \tag{23.7}$$

donde

$$I(x) \equiv \int_0^x \frac{dx}{A(x)}, \tag{23.8}$$

y $C(t)$ es una constante de integración. Normalmente se conocen p y U en los extremos del conducto ($x = 0$ y $x = L$) y, por supuesto, $A(x)$. Suponiendo que $p + \rho U = P_o(t)$ en $x = 0$ y $p + \rho U = P_L(t)$ en $x = L$, sustituyendo en (23.7),

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2(0)} + \frac{P_o}{\rho} = -I(0) \frac{dQ}{dt} + C, \tag{23.9}$$

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{A^2(L)} + \frac{P_L}{\rho} = -I(L) \frac{dQ}{dt} + C; \tag{23.10}$$

restando ambas expresiones se obtiene la siguiente ecuación diferencial para $Q(t)$:

$$I(L) \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A^2(L)} - \frac{1}{A^2(0)} \right] Q^2(t) = \frac{P_o(t) - P_L(t)}{\rho}, \tag{23.11}$$

que habrá que resolver con la condición inicial $Q(0) = Q_o$. Una vez conocido $Q(t)$, las ecuaciones (23.4) y (23.7) proporcionarán $p(x, t)$ y $v(x, t)$. Otra variante de este problema, que a veces interesa, es calcular $P_L(t)$ [o $P_o(t)$]

conocido $Q(t)$ y $P_o(t)$ [o $P_L(t)$]. La misma ecuación (23.11) proporciona, obviamente, la respuesta.

En el supuesto de que el flujo sea estacionario (o casi estacionario), el primer término de (23.11) desaparece y la ecuación anterior se simplifica notoriamente, puesto que deja de ser diferencial:

$$Q^2 = \frac{2A^2(L)A^2(0) P_o(t) - P_L(t)}{A^2(0) - A^2(L)} \rho, \quad (23.12)$$

donde se ha mantenido el tiempo, pero como un parámetro, para el caso de que sea *casi estacionario*.

23.1.2. Movimiento casi estacionario de gases

La ecuación de conservación de masa en el volumen de control de la figura 23.1, para el flujo casi estacionario ($St \ll 1$) de un gas, proporciona

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v A) = 0 \quad \text{o} \quad \rho v A = G = \text{constante}, \quad (23.13)$$

donde G es el gasto, constante a lo largo del conducto, pero que puede depender paramétricamente del tiempo en el caso de que el flujo no sea estrictamente estacionario. La ecuación de cantidad de movimiento, en el supuesto de que las fuerzas másicas sean poco importantes, como normalmente ocurre en el flujo de gases, se puede escribir como (ecuación de Bernoulli)

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (23.14)$$

Como el movimiento es isentrópico,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad s = s_o = \text{constante}, \quad (23.15)$$

la ecuación (23.14) se puede integrar puesto que el fluido es barótopo. Ya se vió que la función de barotropía es la entalpía, y que (23.14) es equivalente a la conservación de la entalpía de remanso (ver sección 19.5):

$$h + \frac{v^2}{2} = h_o = \text{constante}. \quad (23.16)$$

Así, tenemos tres primeras integrales del movimiento, (23.13), (23.15) y (23.16), donde G , s_o y h_o son constantes a lo largo del conducto. Para un gas ideal (22.15) se escribe

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_o}{\rho_o^\gamma} = \text{constante.} \quad (23.17)$$

Como ya se vió en la sección 19.5, las dos ecuaciones (23.16) y (23.17), junto con la ecuación de estado $p/\rho = R_g T$, permiten expresar las magnitudes p , ρ y T en función de las correspondientes magnitudes de remanso, p_o , ρ_o , T_o (que se conservan a lo largo del flujo) y el número de Mach en cada sección. Esta es la forma habitual de utilizar esas ecuaciones, a las que hay que unir la ecuación de continuidad (23.13). En la sección siguiente se aplicarán al flujo en toberas convergentes-divergentes, de gran interés práctico. Pero antes se derivará una importante relación general entre las variaciones de velocidad y de área.

Escribiendo la ecuación de continuidad (23.13), en su forma diferencial, como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad (23.18)$$

y sustituyendo $dp = a^2 d\rho$ y la ecuación de cantidad de movimiento (23.14) en el primer término, se llega a:

$$-\frac{v}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad (23.19)$$

Esta expresión se puede escribir en función del número de Mach local, $M^2 = v^2/a^2$, como

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = (M^2 - 1) \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (23.20)$$

Consecuentemente, si el flujo es subsónico ($M < 1$), un incremento de la sección ($dA/dx > 0$) implica una disminución de la velocidad y un aumento de la presión [de (23.14)], mientras que una disminución de la sección aumenta la velocidad del gas y disminuye su presión. Cualitativamente esto es lo que ocurre también en los flujos incompresibles.¹ Sin embargo, si el flujo es supersónico ($M > 1$), ocurre todo lo contrario: un aumento de la sección del conducto provoca un aumento de la velocidad y una disminución de la presión (el flujo se hace más supersónico aún), mientras que una disminución del área da lugar a una disminución de la velocidad y a un aumento de la presión. Finalmente, el flujo sólo puede ser sónico ($M = 1$) donde la sección presente o un máximo o un mínimo ($dA/dx = 0$). De estas dos posibilidades la única físicamente

¹En el límite $M^2 \rightarrow 0$, la ecuación anterior es la ecuación de continuidad de un líquido [ecuación (23.3)].

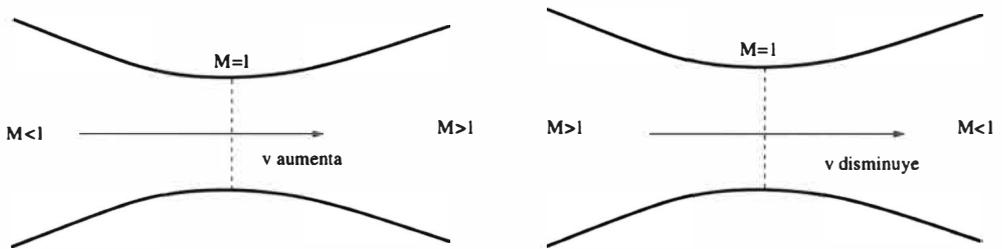


Figura 23.2: Flujo en un conducto convergente-divergente.

posible es la segunda ($M = 1$ donde la sección presente un mínimo), como se verá a continuación.

De lo anterior se desprende que para expandir un gas isentrópicamente desde velocidad subsónica a supersónica el flujo debe transcurrir por un conducto convergente-divergente (ver figura 23.2). La sección de área mínima divide al flujo en dos partes, una subsónica aguas arriba y otra supersónica aguas abajo, siendo sónica la corriente en la sección de área mínima, que usualmente se llama *garganta*. De análoga manera, para comprimir isentrópicamente un gas desde velocidades supersónicas a subsónicas, también debe fluir por un conducto convergente-divergente: el flujo es supersónico en la parte convergente, sónico en la garganta y subsónico en la zona divergente. Claramente se observa que el flujo en una configuración divergente-convergente, es decir, en un conducto con un máximo de la sección en vez de con un mínimo o garganta, nunca puede ser sónico en la sección de área máxima, puesto que si inicialmente $M < 1$, M decrece, y si $M > 1$, M crece.

En la siguiente sección se derivarán expresiones cuantitativas para el flujo en conductos (o toberas) convergentes-divergentes.² Obviamente, el caso más interesante desde un punto de vista práctico de los dos descritos anteriormente es aquel en el que el flujo es subsónico en la sección convergente, puesto que permite obtener flujos supersónicos partiendo de flujos subsónicos (por ejemplo del reposo). Este tipo de conductos se suelen denominar toberas Laval, en honor a Carl G.P. de Laval, un ingeniero sueco que presentó la primera tobera de este tipo en la Exposición Universal de Chicago de 1893. Desde entonces, el uso de estas toberas ha sido muy importante, sobre todo en el desarrollo de la aviación supersónica y de los vuelos espaciales.

²La ecuación (23.20) es general, válida para gases reales, incluso si hay reacción química, siempre que el flujo permanezca isentrópico, ya que sólo se han usado ecuaciones de conservación. En la sección siguiente se aplicará esa y las demás ecuaciones de esta sección al caso de un gas perfecto, haciendo uso de las relaciones de la sección 19.5.

23.2. Flujo isentrópico de un gas perfecto a través de una tobera convergente-divergente

Considérese una tobera convergente-divergente de sección $A(x)$ conocida. Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (23.13) y las relaciones (19.26)-(19.29) [las cuales son equivalentes a las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía (23.16) y (23.17)] se pueden expresar todas las magnitudes fluidas en cada sección en función de las correspondientes magnitudes de remanso, que se conservan a lo largo del flujo y vienen fijadas por las condiciones de contorno (por ejemplo, si el gas descarga a través de la tobera de un depósito, las magnitudes de remanso son las existentes en el interior del depósito al ser nula la velocidad en el mismo) y el número de Mach en la sección, $M(x)$. En efecto, de (23.13),

$$G = \rho v A = \rho_o v_o A \frac{\rho}{\rho_o} \frac{v}{v_o} = \rho_o a_o A M \frac{\rho}{\rho_o} \frac{a}{a_o}; \quad (23.21)$$

de (19.28),

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma - 1)}, \quad (23.22)$$

$$\frac{a}{a_o} = \left(\frac{p}{p_o} \frac{\rho_o}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^{(\gamma - 1)/2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2}, \quad (23.23)$$

que sustituidas en (23.21) proporcionan una relación entre el gasto, el área de la sección, el número de Mach y las magnitudes de remanso:

$$G = \rho_o a_o A M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{(\gamma + 1)/2(1 - \gamma)}. \quad (23.24)$$

Estas relaciones se completan con [ecuaciones (19.26) y (19.29)]:

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad (23.25)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma - 1)}. \quad (23.26)$$

Dado un gasto y las magnitudes de remanso (y, por supuesto, γ , que viene fijado por el tipo de gas), la ecuación (23.24) proporciona el número de Mach en función del área de la sección. Con este número de Mach, las expresiones (23.22)-(23.23) y (23.25)-(23.26) nos permiten conocer todas las magnitudes

fluidas (la velocidad se obtendría de $v = aM$). Normalmente el gasto no es dato del problema, sino que viene fijado por la condición de contorno de la presión a la salida de la tobera, p_s . La ecuación (23.26) permite obtener el número de Mach a la salida, que sustituido en (23.24) fija el gasto y así todas las magnitudes en cada sección, como se acaba de describir. Sin embargo, dada una tobera y una presión de remanso p_o (por ejemplo, la presión del depósito que descarga a través de la tobera en cuestión), la solución anterior no existe para todo valor de p_s , sino sólo en un cierto rango y para un valor concreto.

Para ver esto expresamos las relaciones anteriores, como es costumbre, en función de las denominadas **magnitudes críticas**, que son aquellas correspondientes a $M = 1$. Por lo dicho en la sección anterior, estas magnitudes, en el caso de que realmente se den en la tobera, ocurren en la sección de área mínima o garganta. Esta área mínima, o crítica, para cada gasto y magnitudes de remanso, se obtiene de (23.24) haciendo $M = 1$:

$$A^* = \frac{G}{\rho_o a_o} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (23.27)$$

Las restantes magnitudes críticas se obtienen de las expresiones anteriores sustituyendo $M = 1$ en ellas:

$$T^* = T_o \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \rho^* = \rho_o \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (23.28)$$

$$p^* = p_o \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad v^* = a^* = a_o \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/2}. \quad (23.29)$$

Como se ve, las magnitudes críticas dependen sólo de las de remanso (además de, por supuesto, γ). En el caso particular en el que las magnitudes de remanso y el gasto sean tales que el área de la garganta coincida con el área crítica, $A_m = A^*$, sustituyendo (23.27) en (23.24) se obtiene una única relación entre el área y el número de Mach en cada sección:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}. \quad (23.30)$$

De esta forma, para una tobera dada [$A(x)$ dada], el número de Mach y, por consiguiente, todas las demás magnitudes fluidas, quedan fijadas en cada sección [de (23.22)-(23.23) y (23.25)-(23.26)]. En particular, en la garganta estas magnitudes vienen dadas por (23.28)-(23.29). El gasto (crítico) vendrá dado por (23.27) y es función de las magnitudes de remanso, de γ y del área mínima

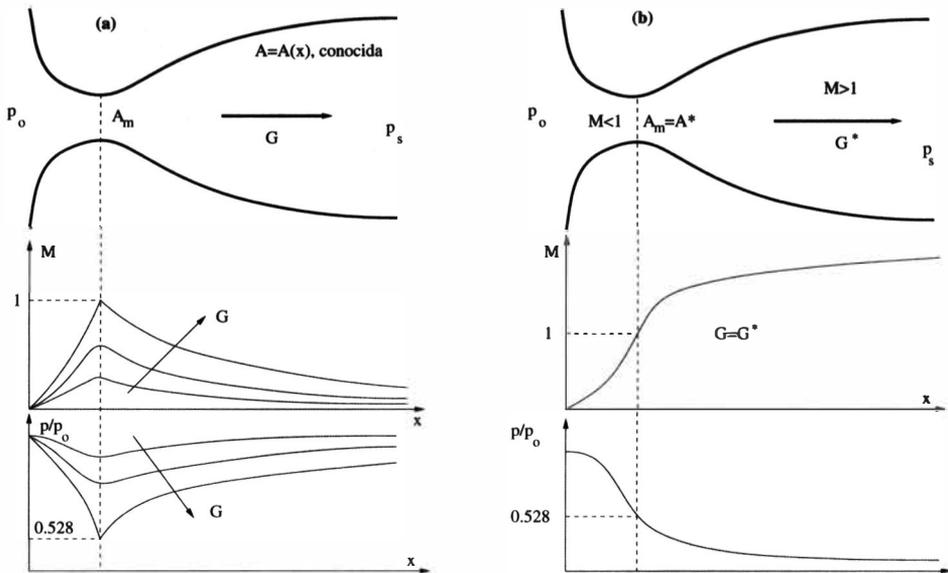


Figura 23.3: Flujo isentrópico subsónico (a) y supersónico (b) en una tobera convergente-divergente para $\gamma = 1,4$.

$A_m = A^*$. Una representación cualitativa de algunas de estas magnitudes para flujos subsónicos y supersónicos se da en la figura 23.3. Las más importantes de ellas están tabuladas (cuantitativamente) en el apéndice al final de esta lección.

Obviamente, fijados p_o y la relación entre las áreas de salida y de la garganta, A_s/A^* , la solución isentrópica anterior con $M = 1$ en la garganta y supersónica a la salida se presenta sólo para una única presión de descarga, que se obtiene de (23.26) después de sustituir el valor de M_s que resulta de (23.30) con A_s/A^* . Esta presión la denominaremos p_{s2} . Para ilustrar qué ocurre cuando la presión de salida no coincide con p_{s2} , consideraremos el proceso de descarga a través de una tobera convergente-divergente, de sección $A(x)$ conocida, desde un depósito que contiene un gas a presión p_o a otro depósito con presión $p_a \leq p_o$ a medida que p_a disminuye (ver figura 23.4).

Si p_a es muy próxima a p_o (puntos a y b de la figura), no se alcanzan condiciones sónicas en la garganta, siendo la solución subsónica a través de toda la tobera. Esta solución se obtiene de la forma descrita tras la ecuación (23.26): dado p_a/p_o , (23.26) proporciona M_s , que sustituido en (23.24) y conocido A_s nos da el gasto G . Con este gasto y (23.24) se puede obtener $M = M(A)$, y así todas las magnitudes fluidas en cada sección.

Si se va disminuyendo la presión p_a , llegará un momento en que se alcan-

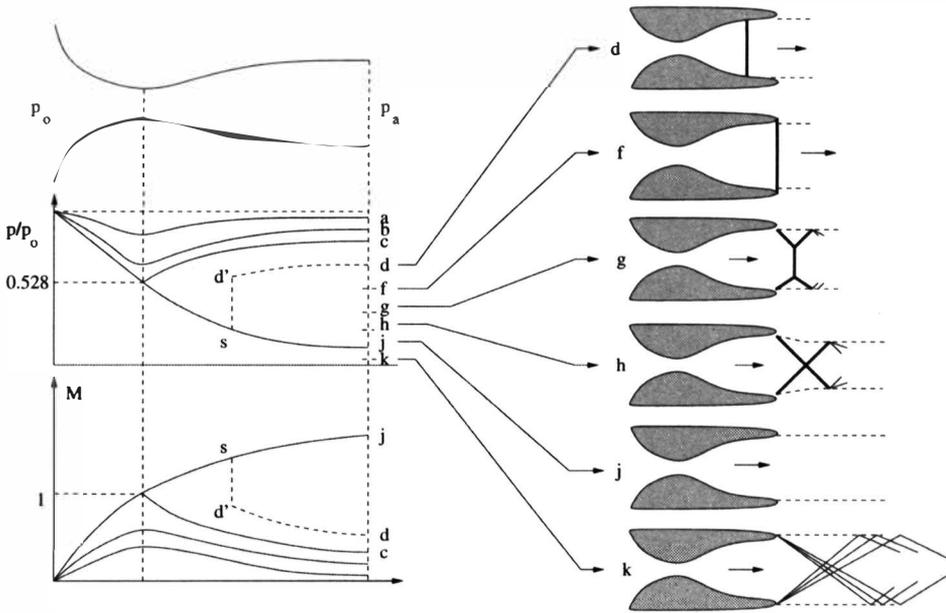


Figura 23.4: Efecto de la presión de descarga en el flujo de una tobera convergente-divergente (adaptada de Liepmann y Roshko, 1957).

zarán condiciones sónicas en la garganta ($M = 1$ en $A = A_m = A^*$). Para esa presión de descarga (punto c de la figura), el gasto es el crítico (23.27):

$$G^* = \rho_o a_o A^* \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)}, \tag{23.31}$$

que es el gasto máximo al que se puede descargar el depósito con la tobera dada de área mínima $A_m (= A^*)$. Si seguimos disminuyendo p_a , lo único que se modificará es el flujo en la región divergente de la tobera (según veremos a continuación), pero no el flujo subsónico en la parte convergente, puesto que no se puede superar la velocidad sónica en la garganta. Se suele decir que la tobera se ha *bloqueado*, ya que cualquier variación de las magnitudes fluidas aguas abajo de la garganta no afecta al flujo aguas arriba de la misma al ser sónica la velocidad en ella. Para la presión p_a dada por el punto c de la figura ($p_a = p_{s1}$), el flujo es subsónico e isentrópico en toda la tobera (excepto en la garganta que es sónica) y viene dado por (23.30), (23.22) y (23.25)-(23.26) con $M \leq 1$, tabulado en el apéndice para $\gamma = 1,4$. En la garganta se tienen las propiedades críticas dadas por (23.28)-(23.29). Para $\gamma = 1,4$ (aire, por ejemplo), $p^*/p_o = 0,528$, caso representado en la figura. Esta solución es la rama subsónica de la expresión (23.30). Si $M > 1$ en la

zona divergente de la tobera, dicha relación fija la presión de salida p_{s2} , como se indicó anteriormente, y la solución sólo será isentrópica en toda la tobera si $p_a = p_{s2}$ (punto j en la figura).

Para presiones de descarga intermedias entre p_{s1} y p_{s2} (puntos d , f , g y h de la figura), la solución no puede satisfacer las relaciones isentrópicas anteriores y se produce una discontinuidad u onda de choque en la solución, dejando de ser, por tanto, isentrópica en toda la tobera. Lo que ocurre es cualitativamente similar al proceso que se describió en la sección 22.1 en relación al flujo supersónico sobre un obstáculo: si $p_{s1} < p_a < p_{s2}$, la corriente después de la garganta no puede adaptarse a las condiciones de descarga, puesto que es supersónica; antes de la salida esta corriente supersónica pasa bruscamente a subsónica a través de una onda de choque, y así se adapta a la presión de salida. La posición de la onda de choque se obtiene de resolver conjuntamente las relaciones isentrópicas anteriores y las expresiones para una onda de choque obtenidas en la lección anterior. Por ejemplo, si p_a viene dado por el punto d de la figura, se tiene una solución isentrópica, que es sónica en la garganta y supersónica desde la garganta hasta un cierto punto s ; en este flujo isentrópico la presión de remanso viene dada por la presión de remanso del depósito, p_o . En s se forma una onda de choque normal donde aumenta la presión (punto d') y disminuye la presión de remanso (ver lección anterior), de forma que la región isentrópica $d'd$ detrás de la onda de choque tiene una presión de remanso menor que p_o . La posición de la onda de choque es tal que, para el número de Mach en el punto s [dado por (23.30)], el salto de las propiedades a través de la onda de choque verifica que la solución isentrópica subsónica que parte del punto d' satisface la condición de contorno $p = p_a$ a la salida. Para obtener la posición de la onda de choque se suele proceder de forma iterativa: conocidos p_a y p_o , A^* y el área de salida A_s , se supone una posición, es decir, un área A_1 donde se encuentra la onda de choque; de las relaciones isentrópicas anteriores se obtiene el número de Mach M_1 y demás propiedades delante de la onda de choque, en particular p_1/p_o ; con las ecuaciones (22.28)-(22.33) de una onda de choque normal se determinan el número de Mach detrás de la onda, M_2 , y demás propiedades detrás de la onda, por ejemplo p_2/p_1 , p'_o/p_o , donde p'_o es la nueva presión de remanso; con M_2 y A_1 se obtiene, de (23.30), el área crítica correspondiente a la nueva rama isentrópica subsónica, $A^{*'}$, que junto con el área de salida, A_s , proporciona el número de Mach a la salida, M_s ; con este número de Mach se determina p_s/p'_o de (23.26), que finalmente proporciona p_s , puesto que se ha calculado la presión de remanso detrás de la onda; si $p_s \neq p_a$, se vuelve a suponer un nuevo valor de A_1 y se repite el proceso.

Si p_a viene dado por el punto f de la figura 23.4, la onda de choque normal se produce justo a la salida de la tobera. Para p_a menores (puntos g , h) se produce ondas de choque oblicuas, ya que la intensidad del salto de las propiedades es menos que en una onda de choque normal, para un número de Mach dado. Para $p_a = p_{s2}$ (punto j), el flujo es isentrópico en toda la tobera, como queda dicho, y se dice que la tobera *está adaptada* (las toberas convergente-divergente se diseñan para que ocurra este tipo de flujo). A la salida de la tobera se produce una discontinuidad tangencial que, como se dijo en la lección anterior, suele ser inestable. Para p_a inferior a p_{s2} (punto k de la figura), la tobera no es capaz de expandir isentrópicamente al gas como para que descargue a esa presión, por lo que sigue expandiéndose detrás de la salida de la tobera mediante una expansión del tipo Prandtl-Meyer (sección 22.7). El ángulo de deflexión de la corriente se calcula a partir de las condiciones a la salida de la tobera ($p = p_{s2}$) y la presión detrás de la expansión, p_a .

Para terminar esta sección es conveniente recordar que una vez que p_a es inferior a $p_{s1} \equiv p^*$, el flujo en la región convergente de la tobera no se modifica, por más que se disminuya la presión de descarga, siendo sónicas (o críticas) las condiciones en la garganta. Así, para una tobera convergente, el flujo es siempre subsónico e isentrópico. Para $p_a = p_{s1}$ ($p_{s1}/p_o = 0,528$ para aire), el flujo es sónico en la garganta y la descarga se produce con el gasto crítico, G^* . Para $p_a < p_{s1}$, se produce una expansión de Prandtl-Meyer a la salida de la tobera, y el gasto permanece igual a G^* . Este tipo de toberas constituyen, por tanto, un medio eficaz de fijar el gasto. Es lo que se suele denominar un **orificio crítico**, que intercalado en un conducto fija el gasto a través del mismo.

23.3. Forma semiintegral de las ecuaciones de Euler

Como complemento a los flujos de fluidos ideales en conductos, se concluye esta lección con la derivación de relaciones semiintegrales para el movimiento de un fluido ideal a través de compresores (o turbinas, o bombas) y para la carga (o descarga) de depósitos. Estas relaciones serán indispensables para resolver problemas prácticos de flujos en conductos, ya que éstos aparecen invariablemente asociados a alguno, o varios, de aquellos elementos. Para ello se utilizarán formas *semiintegrales* de las ecuaciones de Euler. De hecho, las ecuaciones anteriores para el flujo en conductos también se podrían denominar semiintegrales, puesto que, aunque son diferenciales en la dirección x , se han integrado en cada sección del conducto (ver figura 23.1).

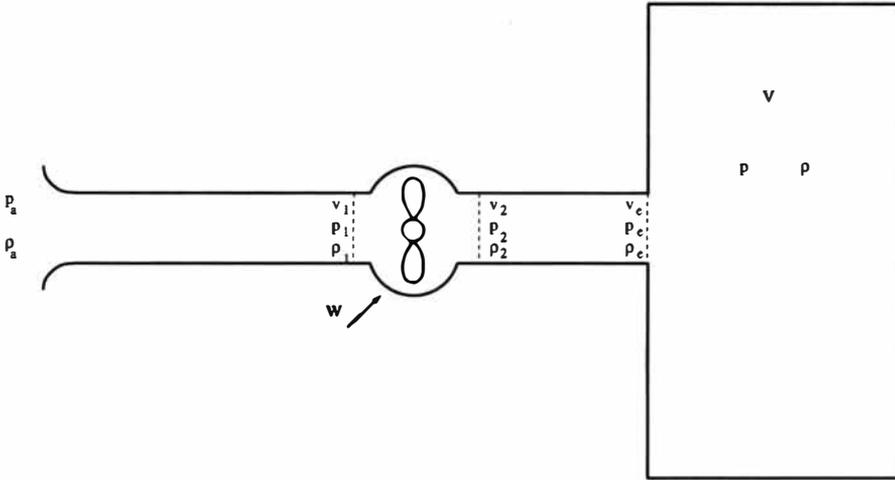


Figura 23.5: Movimiento a través de un compresor y carga de un depósito.

23.3.1. Movimiento a través de un compresor

Consideraremos al compresor (o a la turbina, o a la bomba) como una *caja negra* intercalada en un conducto por donde circula un gasto G . Antes del compresor las magnitudes fluidas son v_1 , ρ_1 y p_1 y a la salida v_2 , ρ_2 y p_2 (ver figura 23.5). Lo que se pretende es relacionar esas magnitudes con la potencia W suministrada por el compresor al fluido. Supondremos que no hay aportes volumétricos de calor, ni conducción de calor a través de las paredes, por lo que la entropía se conserva a través del compresor. Como ésta también se conserva a lo largo del conducto, en el ejemplo de la figura 22.5 la entropía sería igual a la atmosférica:

$$s = s_a = \text{constante}; \quad \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \text{constante} = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}. \quad (23.32)$$

Normalmente el flujo no es completamente adiabático en el compresor y además existen pérdidas por fricción, por lo que la relación anterior no es válida. Sin embargo, en la práctica se suele suponer que la *forma* de la ecuación (23.32) sí que es válida, y sólo se cambia la relación de calores específicos γ por un coeficiente experimental n .

En cuanto a la entalpía de remanso, ésta no se conserva ya que el movimiento del fluido en el compresor es esencialmente no estacionario. De hecho, es a través de este movimiento de las partes móviles del compresor como se le comunica energía al fluido mediante el trabajo de las fuerzas de presión, aumentando su entalpía de remanso. De una forma más precisa, si aplicamos

la ecuación de la energía en su forma integral al volumen de control delimitado por las superficies de entrada y de salida del compresor, por las paredes del conducto y compresor y por las partes móviles de este último, se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} ds = - \int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} ds - \int_{V_c} \rho \nabla U \cdot \vec{v} dV, \quad (23.33)$$

donde se han eliminado los términos de trabajo de las fuerzas de fricción y de flujo de calor, por tratarse de un fluido ideal, y se ha supuesto que las fuerzas másicas derivan del potencial U . El primer término de (23.33) es normalmente nulo puesto que el movimiento de las *palas* del compresor suele ser con velocidad constante y la energía total contenida en el volumen de control permanece constante en el tiempo. El segundo término es distinto de cero sólo en las secciones de entrada y salida, donde las magnitudes fluidas son uniformes por la hipótesis de idealidad. El trabajo de las fuerzas de presión en las secciones de entrada y salida puede incluirse en el término anterior, transformando la energía interna en entalpía. El trabajo de las fuerzas másicas generalmente se pueden despreciar en el flujo de gases. (En el caso de un líquido, es decir, en el caso de una bomba, el término de las fuerzas másicas también se suele incluir en el convectivo tras aplicar el teorema de Gauss y tener en cuenta que $\partial\rho/\partial t = 0$.) Por último, el trabajo de las fuerzas de presión sobre las paredes móviles del compresor es igual a la potencia W que el compresor le comunica al fluido (estrictamente, W es igual al trabajo de las fuerzas de presión y al de las fuerzas másicas menos el trabajo que se pierde en forma de calor por fricción en las paredes móviles que, aunque despreciable en las otras superficies del volumen de control, no suele serlo aquí). Si G es el gasto que circula por el conducto, la ecuación anterior queda

$$G(h_{02} + U_2 - h_{01} - U_1) = W, \quad (23.34)$$

donde h_0 es la entalpía de remanso y se ha retenido el término $U_2 - U_1$ para que así esté incluido el caso de un líquido. Si la energía cinética es despreciable, lo cual ocurre cuando $M^2 \ll 1$ [recuérdese que $v^2/h = (\gamma - 1)\rho v^2/\gamma p = (\gamma - 1)v^2/a^2 = (\gamma - 1)M^2$], y $U_2 \simeq U_1$, se tiene, simplemente,

$$G(h_2 - h_1) = W \quad . \quad (23.35)$$

Frecuentemente se utilizan estas expresiones en función de la presión. Para un gas, quitando las fuerzas másicas en (23.34), utilizando la relación isentrópica (23.32) y teniendo en cuenta que la entalpía de remanso se conserva a lo largo del conducto, $h_{01} = h_{0a} = h_a$, se llega a:

$$\begin{aligned}
 W &= G \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_a}{\rho_a} \right) \\
 &= Gh_a \left[\left(\frac{p_2}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) - 1 \right], \quad (23.36)
 \end{aligned}$$

donde M_2^2 es el número de Mach a la salida del compresor. Las relaciones anteriores valdrían para el caso de una turbina sin más que cambiarle el signo a W .

Para un líquido ($\rho = \text{constante}$), es decir, para una bomba, la relación isentrópica nos dice que $T_2 = T_1 = T_a$, y (23.34) queda

$$W = Q(p_{02} - p_{01}) = Q(p_{02} - p_a) \quad , \quad (23.37)$$

donde la presión de remanso es ahora $p_0 = p + \rho v^2/2$, $Q = G/\rho$ es el caudal que circula por la bomba y se ha despreciado la diferencia de potencial de fuerzas másicas. En el caso de una turbina hidráulica habría que cambiarle el signo a W en la expresión anterior y, en ocasiones, no se puede despreciar la diferencia de potencial de fuerzas másicas debido a la considerable diferencia de altura entre la entrada y la salida.

23.3.2. Carga de un depósito

Las ecuaciones de conservación de masa y de energía aplicadas a un volumen de control que incluye al depósito y a la sección de entrada (ver figura 23.5) son:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad , \quad (23.38)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} ds = - \int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} ds \quad , \quad (23.39)$$

donde se supone que en S_c los efectos disipativos son despreciables. Suponiendo además que en el depósito, de volumen V constante, las propiedades fluidas son espacialmente uniformes y que la velocidad es nula en su interior, las ecuaciones anteriores se escriben:

$$V \frac{d\rho}{dt} = G \quad , \quad (23.40)$$

$$\frac{V}{\gamma - 1} \frac{dp}{dt} = Gh_{0e}, \quad (23.41)$$

donde ρ y p son la densidad y presión en el depósito, h_{0e} es la entalpía de remanso en la sección de entrada (donde se ha supuesto que las magnitudes fluidas son uniformes), y se ha hecho uso de $\rho e = p/(\gamma - 1)$, válida para un gas ideal.

Si al depósito le añadiésemos o eliminásemos un cierto calor por unidad de tiempo Q , las ecuaciones anteriores serían válidas sin más que añadir $\pm Q$ al segundo miembro de (23.41). Por otra parte, si el volumen del depósito no fuese constante, éste aparecería dentro de las derivadas temporales, además de aparecer un término adicional en (23.41) correspondiente al trabajo de expansión (o compresión) realizado por las paredes del depósito: $-\int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} ds = -p \int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = -p dV/dt$. Con estos dos efectos adicionales, las ecuaciones quedarían:

$$\frac{d\rho V}{dt} = G, \quad (23.42)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dpV}{dt} = Gh_{0e} + Q - p \frac{dV}{dt}. \quad (23.43)$$

El proceso de carga de un depósito no es isentrópico, incluso si $Q = 0$, ya que el chorro de entrada se frena en el interior del depósito, transformando su energía cinética en calor (energía interna del gas en el depósito). Obviamente, si la energía cinética de la corriente de entrada es muy pequeña en relación a su entalpía, este efecto se puede despreciar y el proceso de carga es prácticamente isentrópico (suponiendo que $Q = 0$). Esto ocurre cuando el número de Mach a la entrada del depósito es muy pequeño: $h_{0e} = h_e + v_e^2/2 = h_e[1 + (\gamma - 1)M_e^2/2] \simeq h_e$ si $M_e^2 \ll 1$. De hecho, haciendo $h_{0e} = h_e = [\gamma/(\gamma - 1)]p_e/\rho_e$ y $Q = 0$ en las ecuaciones anteriores, eliminando dV/dt se llega a

$$V\rho^\gamma \frac{d(p/\rho^\gamma)}{dt} = \gamma G \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p}{\rho} \right); \quad (23.44)$$

pero como la corriente de entrada es subsónica, $p_e = p$, y al ser $M_e^2 \ll 1$, las variaciones de densidad del fluido son muy pequeñas, verificándose que $\rho_e \simeq \rho$ con errores del orden de M_e^2 . Así, el segundo miembro es nulo y se satisface la relación isentrópica

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{constante} \quad (23.45)$$

en primera aproximación (con errores del orden de M_e^2). Por tanto, las ecuaciones que gobiernan la carga de un depósito adiabático ($Q = 0$) con $M_e^2 \ll 1$ se reducen a (23.42) y la relación isentrópica (23.45).

Las ecuaciones (23.42)-(23.43) también son válidas para describir la descarga de un depósito sin más que cambiar G por $-G$ y h_{0e} por la entalpía de remanso de la corriente que sale del depósito, h_{0s} . El proceso de descarga es mucho más simple que el de carga puesto que es isentrópico si $Q = 0$. De hecho, la entalpía de remanso se conserva a la salida, ya que estamos suponiendo que el fluido es ideal (no hay fricción): $h_{0s} = h = [\gamma/(\gamma - 1)]p/\rho$. Utilizando el mismo razonamiento que acabamos de ver, esto implica que $p/\rho^\gamma = \text{constante}$ (si $Q = 0$).

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulo 5.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 5.

23.4. APÉNDICE: Flujo isentrópico en una tobera para $\gamma = 1,4$

M	$\frac{p_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
2.00-02	1.00028+00	1.00020+00	1.00008+00	2.89417+01
4.00-02	1.00112+00	1.00080+00	1.00032+00	1.44813+01
6.00-02	1.00252+00	1.00180+00	1.00072+00	9.66579+00
8.00-02	1.00448+00	1.00320+00	1.00128+00	7.26152+00
1.00-01	1.00701+00	1.00500+00	1.00200+00	5.82175+00
1.20-01	1.01011+00	1.00721+00	1.00288+00	4.86425+00
1.40-01	1.01378+00	1.00982+00	1.00392+00	4.18234+00
1.60-01	1.01803+00	1.01284+00	1.00512+00	3.67269+00
1.80-01	1.02286+00	1.01627+00	1.00648+00	3.27788+00
2.00-01	1.02828+00	1.02012+00	1.00800+00	2.96348+00
2.20-01	1.03429+00	1.02437+00	1.00968+00	2.70756+00
2.40-01	1.04090+00	1.02904+00	1.01152+00	2.49553+00
2.60-01	1.04812+00	1.03414+00	1.01352+00	2.31725+00
2.80-01	1.05596+00	1.03966+00	1.01568+00	2.16552+00
3.00-01	1.06443+00	1.04560+00	1.01800+00	2.03504+00
3.20-01	1.07353+00	1.05198+00	1.02048+00	1.92182+00
3.40-01	1.08328+00	1.05880+00	1.02312+00	1.82285+00
3.60-01	1.09369+00	1.06606+00	1.02592+00	1.73575+00
3.80-01	1.10478+00	1.07377+00	1.02888+00	1.65867+00
4.00-01	1.11655+00	1.08193+00	1.03200+00	1.59012+00
4.20-01	1.12902+00	1.09054+00	1.03528+00	1.52888+00
4.40-01	1.14220+00	1.09962+00	1.03872+00	1.47398+00
4.60-01	1.15612+00	1.10918+00	1.04232+00	1.42461+00
4.80-01	1.17078+00	1.11921+00	1.04608+00	1.38008+00
5.00-01	1.18621+00	1.12972+00	1.05000+00	1.33982+00
5.20-01	1.20242+00	1.14073+00	1.05408+00	1.30337+00
5.40-01	1.21943+00	1.15223+00	1.05832+00	1.27030+00
5.60-01	1.23727+00	1.16425+00	1.06272+00	1.24027+00
5.80-01	1.25595+00	1.17678+00	1.06728+00	1.21299+00
6.00-01	1.27550+00	1.18983+00	1.07200+00	1.18818+00
6.20-01	1.29594+00	1.20342+00	1.07688+00	1.16563+00
6.40-01	1.31729+00	1.21755+00	1.08192+00	1.14513+00
6.60-01	1.33958+00	1.23223+00	1.08712+00	1.12652+00
6.80-01	1.36284+00	1.24748+00	1.09248+00	1.10964+00
7.00-01	1.38710+00	1.26329+00	1.09800+00	1.09435+00
7.20-01	1.41237+00	1.27969+00	1.10368+00	1.08055+00
7.40-01	1.43870+00	1.29669+00	1.10952+00	1.06813+00
7.60-01	1.46612+00	1.31429+00	1.11552+00	1.05698+00
7.80-01	1.49465+00	1.33251+00	1.12168+00	1.04704+00
8.00-01	1.52434+00	1.35136+00	1.12800+00	1.03821+00
8.20-01	1.55520+00	1.37085+00	1.13448+00	1.03045+00
8.40-01	1.58730+00	1.39100+00	1.14112+00	1.02368+00

M	$\frac{P_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
8.60-01	1.62065+00	1.41181+00	1.14792+00	1.01785+00
8.80-01	1.65530+00	1.43331+00	1.15488+00	1.01292+00
9.00-01	1.69130+00	1.45551+00	1.16200+00	1.00885+00
9.20-01	1.72868+00	1.47841+00	1.16928+00	1.00558+00
9.40-01	1.76748+00	1.50204+00	1.17672+00	1.00309+00
9.60-01	1.80776+00	1.52641+00	1.18432+00	1.00135+00
9.80-01	1.84956+00	1.55154+00	1.19208+00	1.00032+00
1.00+00	1.89292+00	1.57744+00	1.20000+00	1.00000+00
1.02+00	1.93791+00	1.60412+00	1.20808+00	1.00031+00
1.04+00	1.98457+00	1.63162+00	1.21632+00	1.00129+00
1.06+00	2.03296+00	1.65993+00	1.22472+00	1.00289+00
1.08+00	2.08312+00	1.68909+00	1.23328+00	1.00510+00
1.10+00	2.13513+00	1.71911+00	1.24200+00	1.00791+00
1.12+00	2.18904+00	1.75000+00	1.25088+00	1.01129+00
1.14+00	2.24491+00	1.78179+00	1.25992+00	1.01525+00
1.16+00	2.30281+00	1.81449+00	1.26912+00	1.01976+00
1.18+00	2.36280+00	1.84813+00	1.27848+00	1.02482+00
1.20+00	2.42496+00	1.88273+00	1.28800+00	1.03042+00
1.22+00	2.48935+00	1.91831+00	1.29768+00	1.03655+00
1.24+00	2.55604+00	1.95488+00	1.30752+00	1.04321+00
1.26+00	2.62512+00	1.99247+00	1.31752+00	1.05039+00
1.28+00	2.69666+00	2.03111+00	1.32768+00	1.05808+00
1.30+00	2.77074+00	2.07081+00	1.33800+00	1.06629+00
1.32+00	2.84744+00	2.11159+00	1.34848+00	1.07500+00
1.34+00	2.92686+00	2.15349+00	1.35912+00	1.08422+00
1.36+00	3.00907+00	2.19653+00	1.36992+00	1.09395+00
1.38+00	3.09418+00	2.24073+00	1.38088+00	1.10417+00
1.40+00	3.18227+00	2.28611+00	1.39200+00	1.11491+00
1.42+00	3.27344+00	2.33271+00	1.40328+00	1.12614+00
1.44+00	3.36780+00	2.38054+00	1.41472+00	1.13788+00
1.46+00	3.46544+00	2.42964+00	1.42632+00	1.15013+00
1.48+00	3.56648+00	2.48003+00	1.43808+00	1.16288+00
1.50+00	3.67103+00	2.53174+00	1.45000+00	1.17615+00
1.52+00	3.77919+00	2.58480+00	1.46208+00	1.18992+00
1.54+00	3.89108+00	2.63924+00	1.47432+00	1.20421+00
1.56+00	4.00684+00	2.69508+00	1.48672+00	1.21902+00
1.58+00	4.12657+00	2.75237+00	1.49928+00	1.23436+00
1.60+00	4.25041+00	2.81112+00	1.51200+00	1.25022+00
1.62+00	4.37849+00	2.87137+00	1.52488+00	1.26661+00
1.64+00	4.51095+00	2.93315+00	1.53792+00	1.28353+00
1.66+00	4.64792+00	2.99649+00	1.55112+00	1.30100+00
1.68+00	4.78955+00	3.06143+00	1.56448+00	1.31902+00
1.70+00	4.93599+00	3.12800+00	1.57800+00	1.33759+00
1.72+00	5.08739+00	3.19624+00	1.59168+00	1.35671+00
1.74+00	5.24390+00	3.26617+00	1.60552+00	1.37641+00
1.76+00	5.40570+00	3.33784+00	1.61952+00	1.39668+00
1.78+00	5.57294+00	3.41128+00	1.63368+00	1.41752+00
1.80+00	5.74579+00	3.48652+00	1.64800+00	1.43896+00

M	$\frac{\rho_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
1.82+00	5.92444+00	3.56361+00	1.66248+00	1.46099+00
1.84+00	6.10906+00	3.64259+00	1.67712+00	1.48363+00
1.86+00	6.29983+00	3.72348+00	1.69192+00	1.50687+00
1.88+00	6.49696+00	3.80633+00	1.70688+00	1.53074+00
1.90+00	6.70063+00	3.89119+00	1.72200+00	1.55523+00
1.92+00	6.91105+00	3.97808+00	1.73728+00	1.58037+00
1.94+00	7.12843+00	4.06706+00	1.75272+00	1.60615+00
1.96+00	7.35297+00	4.15816+00	1.76832+00	1.63259+00
1.98+00	7.58490+00	4.25143+00	1.78408+00	1.65969+00
2.00+00	7.82444+00	4.34691+00	1.80000+00	1.68747+00
2.05+00	8.45814+00	4.59557+00	1.84050+00	1.75996+00
2.10+00	9.14468+00	4.85902+00	1.88200+00	1.83692+00
2.15+00	9.88809+00	5.13800+00	1.92450+00	1.91852+00
2.20+00	1.06927+01	5.43328+00	1.96800+00	2.00495+00
2.25+00	1.15631+01	5.74565+00	2.01250+00	2.09640+00
2.30+00	1.25042+01	6.07593+00	2.05800+00	2.19310+00
2.35+00	1.35213+01	6.42498+00	2.10450+00	2.29524+00
2.40+00	1.46200+01	6.79368+00	2.15200+00	2.40307+00
2.45+00	1.58061+01	7.18295+00	2.20050+00	2.51680+00
2.50+00	1.70859+01	7.59375+00	2.25000+00	2.63668+00
2.55+00	1.84662+01	8.02704+00	2.30050+00	2.76297+00
2.60+00	1.99540+01	8.48385+00	2.35200+00	2.89594+00
2.65+00	2.15569+01	8.96524+00	2.40450+00	3.03584+00
2.70+00	2.32828+01	9.47228+00	2.45800+00	3.18297+00
2.75+00	2.51403+01	1.00061+01	2.51250+00	3.33761+00
2.80+00	2.71382+01	1.05678+01	2.56800+00	3.50008+00
2.85+00	2.92862+01	1.11587+01	2.62450+00	3.67067+00
2.90+00	3.15940+01	1.17800+01	2.68200+00	3.84972+00
2.95+00	3.40725+01	1.24329+01	2.74050+00	4.03755+00
3.00+00	3.67327+01	1.31188+01	2.80000+00	4.23451+00
3.05+00	3.95864+01	1.38390+01	2.86050+00	4.44096+00
3.10+00	4.26462+01	1.45948+01	2.92200+00	4.65725+00
3.15+00	4.59251+01	1.53878+01	2.98450+00	4.88377+00
3.20+00	4.94370+01	1.62194+01	3.04800+00	5.12089+00
3.25+00	5.31964+01	1.70912+01	3.11250+00	5.36902+00
3.30+00	5.72187+01	1.80046+01	3.17800+00	5.62857+00
3.35+00	6.15201+01	1.89613+01	3.24450+00	5.89996+00
3.40+00	6.61174+01	1.99630+01	3.31200+00	6.18362+00
3.45+00	7.10286+01	2.10112+01	3.38050+00	6.47999+00
3.50+00	7.62722+01	2.21079+01	3.45000+00	6.78953+00
3.55+00	8.18681+01	2.32547+01	3.52050+00	7.11272+00
3.60+00	8.78369+01	2.44534+01	3.59200+00	7.45002+00
3.65+00	9.42001+01	2.57061+01	3.66450+00	7.80193+00
3.70+00	1.00980+02	2.70145+01	3.73800+00	8.16896+00
3.75+00	1.08201+02	2.83808+01	3.81250+00	8.55163+00
3.80+00	1.15888+02	2.98068+01	3.88800+00	8.95047+00
3.85+00	1.24067+02	3.12947+01	3.96450+00	9.36603+00
3.90+00	1.32766+02	3.28466+01	4.04200+00	9.79885+00

M	$\frac{P_0}{P}$	$\frac{P_0}{\rho}$	$\frac{V_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
3.95+00	1.42011+02	3.44647+01	4.12050+00	1.02495+01
4.00+00	1.51835+02	3.61512+01	4.20000+00	1.07186+01
4.05+00	1.62267+02	3.79084+01	4.28050+00	1.12067+01
4.10+00	1.73340+02	3.97387+01	4.36200+00	1.17145+01
4.15+00	1.85088+02	4.16444+01	4.44450+00	1.22425+01
4.20+00	1.97547+02	4.36280+01	4.52800+00	1.27914+01
4.25+00	2.10754+02	4.56920+01	4.61250+00	1.33619+01
4.30+00	2.24747+02	4.78390+01	4.69800+00	1.39547+01
4.35+00	2.39567+02	5.00715+01	4.78450+00	1.45704+01
4.40+00	2.55255+02	5.23923+01	4.87200+00	1.52096+01
4.45+00	2.71856+02	5.48041+01	4.96050+00	1.58733+01
4.50+00	2.89414+02	5.73097+01	5.05000+00	1.65619+01
4.55+00	3.07977+02	5.99119+01	5.14050+00	1.72764+01
4.60+00	3.27594+02	6.26136+01	5.23200+00	1.80175+01
4.65+00	3.48317+02	6.54179+01	5.32450+00	1.87860+01
4.70+00	3.70200+02	6.83278+01	5.41800+00	1.95825+01
4.75+00	3.93296+02	7.13463+01	5.51250+00	2.04081+01
4.80+00	4.17664+02	7.44766+01	5.60800+00	2.12634+01
4.85+00	4.43365+02	7.77219+01	5.70450+00	2.21494+01
4.90+00	4.70459+02	8.10857+01	5.80200+00	2.30668+01
4.95+00	4.99011+02	8.45711+01	5.90050+00	2.40166+01
5.00+00	5.29089+02	8.81816+01	6.00000+00	2.49997+01
5.10+00	5.94102+02	9.57920+01	6.20200+00	2.70692+01
5.20+00	6.66083+02	1.03945+02	6.40800+00	2.92829+01
5.30+00	7.45664+02	1.12672+02	6.61800+00	3.16486+01
5.40+00	8.33522+02	1.22002+02	6.83200+00	3.41743+01
5.50+00	9.30383+02	1.31969+02	7.05000+00	3.68685+01
5.60+00	1.03702+03	1.42604+02	7.27200+00	3.97397+01
5.70+00	1.15427+03	1.53944+02	7.49800+00	4.27969+01
5.80+00	1.28302+03	1.66022+02	7.72800+00	4.60494+01
5.90+00	1.42422+03	1.78877+02	7.96200+00	4.95068+01
6.00+00	1.57887+03	1.92546+02	8.20000+00	5.31791+01
6.10+00	1.74806+03	2.07068+02	8.44200+00	5.70764+01
6.20+00	1.93294+03	2.22484+02	8.68800+00	6.12094+01
6.30+00	2.13472+03	2.38836+02	8.93800+00	6.55890+01
6.40+00	2.35469+03	2.56168+02	9.19200+00	7.02265+01
6.50+00	2.59424+03	2.74523+02	9.45000+00	7.51334+01
6.60+00	2.85483+03	2.93948+02	9.71200+00	8.03217+01
6.70+00	3.13799+03	3.14491+02	9.97800+00	8.58038+01
6.80+00	3.44537+03	3.36200+02	1.02480+01	9.15924+01
6.90+00	3.77871+03	3.59125+02	1.05220+01	9.77005+01
7.00+00	4.13983+03	3.83318+02	1.08000+01	1.04141+02
7.10+00	4.53068+03	4.08832+02	1.10820+01	1.10929+02
7.20+00	4.95329+03	4.35722+02	1.13680+01	1.18078+02
7.30+00	5.40983+03	4.64045+02	1.16580+01	1.25603+02
7.40+00	5.90258+03	4.93857+02	1.19520+01	1.33518+02
7.50+00	6.43392+03	5.25218+02	1.22500+01	1.41839+02

M	$\frac{p_0}{p}$	$\frac{\rho_0}{\rho}$	$\frac{T_0}{T}$	$\frac{A}{A^*}$
7.60+00	7.00640+03	5.58190+02	1.25520+01	1.50583+02
7.70+00	7.62266+03	5.92834+02	1.28580+01	1.59764+02
7.80+00	8.28551+03	6.29215+02	1.31680+01	1.69400+02
7.90+00	8.99787+03	6.67399+02	1.34820+01	1.79509+02
8.00+00	9.76285+03	7.07453+02	1.38000+01	1.90107+02
8.10+00	1.05836+04	7.49446+02	1.41220+01	2.01212+02
8.20+00	1.14637+04	7.93449+02	1.44480+01	2.12843+02
8.30+00	1.24066+04	8.39535+02	1.47780+01	2.25019+02
8.40+00	1.34161+04	8.87778+02	1.51120+01	2.37759+02
8.50+00	1.44960+04	9.38255+02	1.54500+01	2.51083+02
8.60+00	1.56505+04	9.91043+02	1.57920+01	2.65011+02
8.70+00	1.68839+04	1.04622+03	1.61380+01	2.79563+02
8.80+00	1.82006+04	1.10387+03	1.64880+01	2.94762+02
8.90+00	1.96054+04	1.16408+03	1.68420+01	3.10629+02
9.00+00	2.11032+04	1.22693+03	1.72000+01	3.27185+02
9.10+00	2.26991+04	1.29251+03	1.75620+01	3.44454+02
9.20+00	2.43984+04	1.36091+03	1.79280+01	3.62458+02
9.30+00	2.62067+04	1.43221+03	1.82980+01	3.81222+02
9.40+00	2.81298+04	1.50652+03	1.86720+01	4.00770+02
9.50+00	3.01739+04	1.58393+03	1.90500+01	4.21126+02
9.60+00	3.23453+04	1.66453+03	1.94320+01	4.42315+02
9.70+00	3.46504+04	1.74843+03	1.98180+01	4.64364+02
9.80+00	3.70963+04	1.83572+03	2.02080+01	4.87298+02
9.90+00	3.96901+04	1.92651+03	2.06020+01	5.11144+02
1.00+01	4.24392+04	2.02091+03	2.10000+01	5.35931+02

Parte VII

**FLUJOS IDEALES II.
ONDAS**

Capítulo 24

Flujos ideales de líquidos con superficie libre

En este capítulo se tratarán brevemente algunos flujos ideales de líquidos que presentan una superficie libre con un gas. En particular, se introducirán dos tipos de flujos muy relevantes en Mecánica de Fluidos: las ondas gravitacionales y capilares en la interfaz líquido-gas y el flujo ideal en canales abiertos. El primero servirá para introducir el importante tema de las ondas en fluidos, que se complementará en los capítulos siguientes con las ondas en flujos compresibles. El segundo, que como se verá es matemáticamente análogo al flujo unidireccional de un gas ideal en un conducto (capítulo anterior), es la base del flujo turbulento de líquidos en canales abiertos, tema de gran importancia práctica, pero que no se considerará aquí.¹

24.1. Ondas de superficie

Considérese una capa de espesor h_0 de un líquido que reposa en una superficie sólida horizontal e infinita. Encima del líquido existe un gas a una presión uniforme p_a con una densidad y viscosidad que supondremos despreciables en relación a la densidad ρ y la viscosidad μ del líquido. La tensión superficial en la interfaz se supone constante y de valor σ .

En esta sección se considerará el movimiento de pequeñas perturbaciones en la superficie libre. Es decir, se supondrá que, debido a alguna perturbación, la superficie, inicialmente en reposo, se pone en movimiento y el espesor de la capa de líquido deja de ser constante (ver figura 24.1):

¹El alumno interesado puede consultar, por ejemplo, la monografía de Chaudhry, 1993.

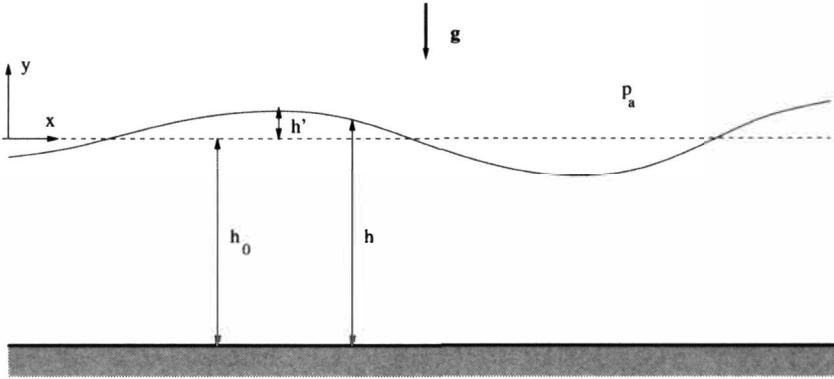


Figura 24.1: Geometría de las ondas de superficie.

$$h(\vec{x}, t) = h_0 + h'(\vec{x}, t), \quad |h'| \ll h_0. \quad (24.1)$$

Como consecuencia, el líquido adquiere un movimiento con velocidad \vec{v} y presión p que satisfacen las ecuaciones del flujo incompresible

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (24.2)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}. \quad (24.3)$$

Debido a que las perturbaciones de la superficie se suponen pequeñas, la velocidad también será pequeña y, en primera aproximación, se puede despreciar el término no lineal $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ en (24.3). También es razonable que en este movimiento la influencia de la viscosidad sea despreciable (estas dos hipótesis se justificarán cuantitativamente más adelante), por lo que (24.3) se puede escribir

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho \vec{g} - \nabla p. \quad (24.4)$$

Debido a que el flujo es no viscoso e inicialmente parte del reposo (además de ser barótopo y de que las fuerzas másicas derivan de un potencial), se cumplen los requisitos del teorema de Kelvin y el flujo es irrotacional:

$$\nabla \wedge \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \nabla \phi, \quad (24.5)$$

donde $\phi(\vec{x}, t)$ es la función potencial de velocidad. Sustituyendo en (24.2), se tiene que ϕ debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{24.6}$$

Una vez que esta ecuación se resuelve con las correspondientes condiciones de contorno (de las que se hablará más adelante), la presión se obtiene de sustituir (24.5) en (24.4):

$$\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nabla(\vec{g} \cdot \vec{x}), \tag{24.7}$$

que integrada proporciona

$$p = -\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho\vec{g} \cdot \vec{x}, \tag{24.8}$$

donde la *constante* de integración se ha absorbido en ϕ dado que esto no afecta a \vec{v} .

24.1.1. Ondas bidimensionales

Por simplicidad se va a considerar el caso en el que ϕ sólo depende de dos coordenadas espaciales, $\phi = \phi(x, y, t)$. Es decir, la superficie perturbada es sólo función de x y de t , $h' = h'(x, t)$, donde el origen de y se toma en la superficie no perturbada (ver figura 24.1). La ecuación a resolver es, por tanto,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{24.9}$$

Las condiciones de contorno para ϕ hay que imponerlas en el fondo de la capa líquida, $y = -h_0$ y en la superficie libre, $y = h'$. En esta última se tiene que la componente y de la velocidad viene dada por

$$v_y = \frac{Dh'}{Dt} = \frac{\partial h'}{\partial t} + v_x \frac{\partial h'}{\partial x} \simeq \frac{\partial h'}{\partial t}, \tag{24.10}$$

donde se ha despreciado, en primera aproximación, el término no lineal $v_x \partial h' / \partial x$ dado que es el producto de dos perturbaciones pequeñas. Sustituyendo (24.5), se tiene

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial h'}{\partial t}. \tag{24.11}$$

Por otro lado, en la superficie libre, la presión satisface la ecuación de Young-Laplace (ver sección 13.3):

$$p_a - p = -\sigma \nabla \cdot \vec{n} = \sigma \frac{\partial^2 h' / \partial x^2}{[1 + (\partial h' / \partial x)^2]^{3/2}} \simeq \sigma \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}, \quad (24.12)$$

donde se ha tenido en cuenta que uno de los radios de curvatura es infinito al no depender h' de z , y se ha despreciado $(\partial h' / \partial x)^2$ frente a la unidad al ser $|h'|$ pequeña frente a cualquier otra longitud característica. Sustituyendo p de (24.8) y teniendo en cuenta que $\vec{g} \cdot \vec{x} = -gh'$, se tiene

$$p_a + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g h' = \sigma \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}. \quad (24.13)$$

Derivando respecto a t y sustituyendo (24.11), se llega a la siguiente condición de contorno para ϕ :

$$-\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \rho g \frac{\partial \phi}{\partial y} + \sigma \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad \text{en } y = h'(x, t). \quad (24.14)$$

Como h' es mucho menor que h_0 , la condición de contorno anterior se puede imponer en $y = 0$ en vez de en $y = h'$, en primera aproximación. Como condición de contorno en la base del líquido se impone que no hay flujo a través de esa superficie, $v_y = 0$ en $y = -h_0$. Es decir,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = -h_0. \quad (24.15)$$

Dado que la ecuación (24.9) no contiene derivadas temporales y que no hay ninguna restricción en la dirección x , la solución se puede escribir como una superposición de ondas bidimensionales de la forma

$$\phi = f(y) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (24.16)$$

donde ω es la frecuencia y k el número de onda, que está relacionado con la longitud de onda λ mediante

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (24.17)$$

Por simplicidad se supondrá que las ondas son senoidales,

$$\phi = f(y) \sin(kx - \omega t). \quad (24.18)$$

Sustituyendo en (24.9), se llega a la ecuación

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 f = 0, \quad (24.19)$$

cuya solución es de la forma

$$f = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky} \quad (24.20)$$

o

$$f = (C_1 + C_2) \cosh(ky) + (C_1 - C_2) \sinh(ky), \quad (24.21)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, que se obtienen de las condiciones de contorno (24.14) en $y = 0$ y (24.15) en $y = -h_0$:

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \tanh(kh_0), \quad (24.22)$$

$$\omega^2 = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \left(gk + \frac{k^3 \sigma}{\rho} \right). \quad (24.23)$$

Por tanto, $f(y)$ se puede escribir como

$$f(y) = B[\cosh(ky) + \tanh(kh_0) \sinh(ky)], \quad (24.24)$$

donde la constante $B \equiv C_1 + C_2$ queda sin determinar, pero existe la siguiente relación entre la frecuencia y el número de onda [o la longitud de onda a través de (24.17)]:

$$\omega^2 = \tanh(kh_0) \left(gk + \frac{k^3 \sigma}{\rho} \right), \quad (24.25)$$

que es la **relación de dispersión** de la onda. Haciendo uso de (24.11) en $y \simeq 0$, se tiene que, salvo una constante aditiva,

$$h' = A \cos(kx - \omega t), \quad (24.26)$$

donde $A \equiv Bk \tanh(kh_0)/\omega$ es la amplitud de la onda de superficie. Los valores de la constante libre $A(k)$ y del número de onda k se determinan expresando la condición inicial de h' (no considerada aquí) como una serie de Fourier en términos de (24.26).

Antes de pasar a describir los distintos tipos de ondas que la relación de dispersión (24.25) recoge, es interesante expresar las condiciones de validez de la solución obtenida. Como $|h'| \sim A \ll h_0$, se tiene que $v_y = \partial\phi/\partial y = \partial h'/\partial t \sim A\omega$ y $v_x \sim \lambda v_y/h_0$. Por tanto, el despreciar los términos convectivo y viscoso frente al de variación local en la ecuación de cantidad de movimiento (24.3) es equivalente a

$$\frac{L_c}{A} \gg 1, \quad \frac{\rho \omega L_c^2}{\mu} \gg 1, \quad (24.27)$$

donde la longitud característica L_c es la menor entre h_0 y la longitud de onda λ . La primera de estas condiciones es la hipótesis de pequeñas perturbaciones de la superficie, y la segunda nos dice que el número de Reynolds basado en L_c y la velocidad característica $V_c = \omega L_c$ debe ser grande. En (24.10) se despreció $v_x \partial h' / \partial x$ frente a $\partial h' / \partial t$, lo cual es válido si $A/h_0 \ll 1$. Por último, en (24.12) se despreció $(\partial h' / \partial x)^2$ frente a la unidad, que es lo mismo que suponer que $(A/\lambda)^2 \ll 1$.

24.1.2. Ondas cortas y largas. Ondas gravitacionales y ondas capilares

Si la profundidad de la capa de líquido es mucho menor que la longitud de onda, $h_0 \ll \lambda = 2\pi/k$, se tiene que $\tanh(kh_0) \simeq kh_0$, con lo que la relación de dispersión (24.25) se puede aproximar por

$$\omega \simeq \left(gk^2 h_0 + \frac{k^4 \sigma h_0}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (24.28)$$

Este límite se suele denominar aproximación de *onda larga* (o de *agua poco profunda*). El límite opuesto de *onda corta* (o de *agua profunda*), teniendo en cuenta que para $h_0 \gg \lambda = 2\pi/k$, $\tanh(kh_0) \simeq 1$, tiene por relación de dispersión

$$\omega \simeq \left(gk + \frac{k^3 \sigma}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (24.29)$$

La **velocidad de fase**, o velocidad de propagación, de las ondas se define

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi}. \quad (24.30)$$

Así, para ondas largas se tiene

$$c \simeq \left(gh_0 + \frac{k^2 \sigma h_0}{\rho} \right)^{1/2} = \left(gh_0 + \frac{4\pi^2 \sigma h_0}{\rho \lambda^2} \right)^{1/2}, \quad (24.31)$$

mientras que para ondas cortas

$$c \simeq \left(\frac{g}{k} + \frac{k\sigma}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right)^{1/2}. \quad (24.32)$$

La importancia relativa entre las fuerzas gravitatorias y las de tensión superficial en la propagación de las ondas viene dada por un número de Bond basado en la longitud de onda:

$$\frac{\rho g}{\sigma k^2} \sim \frac{\rho g \lambda^2}{\sigma} \equiv B. \quad (24.33)$$

Si $B \ll 1$, es decir, si la longitud de la onda es mucho menor que la longitud capilar, las fuerzas de tensión superficial son dominantes y la onda se suele denominar *onda capilar* o *rizo*. La velocidad de fase de una onda capilar larga es

$$c \simeq \left(\frac{4\pi^2 \sigma h_0}{\rho \lambda^2} \right)^{1/2}, \quad (24.34)$$

mientras que la velocidad de fase de una onda capilar corta se escribe

$$c \simeq \left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} \right)^{1/2}. \quad (24.35)$$

Finalmente, si $B \gg 1$ (longitud capilar mucho menor que la longitud de onda), las fuerzas gravitatorias dominan frente a las de tensión superficial y la onda se suele denominar *onda gravitatoria*. La velocidad de fase de una onda gravitatoria corta es

$$c \simeq \left(\frac{g\lambda}{2\pi} \right)^{1/2}, \quad (24.36)$$

mientras que para una onda gravitatoria larga se tiene

$$c \simeq \sqrt{gh_0}. \quad (24.37)$$

En la figura 24.2 se representan todos estos límites asintóticos en función de la longitud de onda.

24.1.3. Velocidad de grupo

Con la excepción de las ondas gravitatorias largas, todas las ondas anteriores son **ondas dispersivas**, es decir, ondas cuya velocidad de fase depende de la longitud de onda, de forma que ondas con diferentes longitudes de onda (distintas frecuencias) se propagan con velocidades diferentes. En este tipo de ondas juega un papel muy importante la denominada velocidad de grupo, definida como

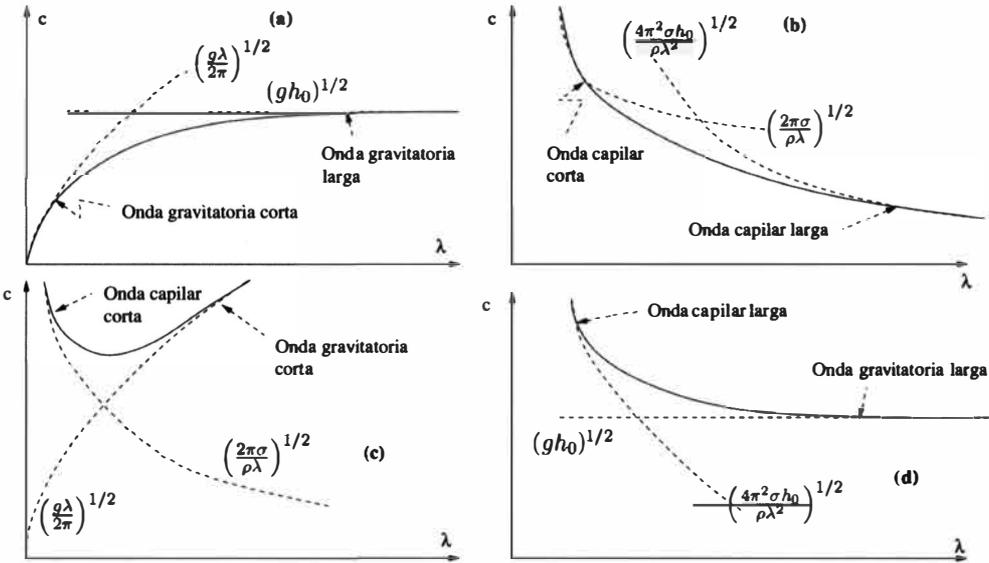


Figura 24.2: Esquemas de la velocidad de fase en función de la longitud de onda para (a) ondas gravitatorias, (b) ondas capilares, (c) ondas cortas y (d) ondas largas.

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{24.38}$$

En una onda no dispersiva, $c_g = c$, mientras que si la onda es dispersiva, c_g no tiene por qué coincidir con la velocidad de fase. En el presente caso, de (24.25) se tiene

$$\frac{c_g}{c} = \frac{k}{\omega} \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + (3\sigma k^2/\rho g)}{1 + (\sigma k^2/\rho g)} + \frac{2kh_0}{\sinh(2kh_0)} \right], \tag{24.39}$$

de forma que c_g/c es igual a la unidad para una onda gravitatoria larga (no dispersiva), y vale 1/2 para una onda gravitatoria corta, 2 para una onda capilar larga y 3/2 para una onda capilar corta.

La importancia de la velocidad de grupo reside en que es a esa velocidad, y no a la de fase, a la que se propaga la energía de los paquetes de onda con la misma longitud de onda (misma frecuencia), siendo, además, la velocidad a la que se tendría que mover un observador para ver ondas con la misma longitud de onda. Para ilustrar esto último, considérese una onda arbitraria de la forma [compárese con (24.26)]

$$h'(x, t) = A(x, t)e^{i\theta(x, t)}, \tag{24.40}$$

donde la función $\theta(x, t)$ es la fase de la onda. El número de onda local y la frecuencia local de la onda se definen

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (24.41)$$

Por tanto, de la igualdad de las derivadas cruzadas, se tiene

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (24.42)$$

que usando la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$, se escribe

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (24.43)$$

Es decir,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (24.44)$$

mostrando que el número de onda $k(x, t)$ permanece constante para un observador que se mueve con la velocidad de grupo. Dicho de otra manera, la solución general de (24.44) se puede escribir como $k = f[x - c_g(k)t]$, donde f es una función arbitraria, que se determina a través de la condición inicial. Por tanto, aunque las *crestas* y los *valles* de una onda general como (24.40) se propagan a la velocidad de fase local c , la longitud de onda asociada a estas crestas y estos valles va cambiando, en general, a lo largo de la propagación debido a que distintas longitudes de onda se propagan a velocidades de fase diferentes. Si uno quiere seguir una determinada longitud de onda se tiene que mover a la velocidad de grupo correspondiente a esa longitud de onda. Parece, por tanto, razonable que la energía asociada a un determinado número de onda k se propague a la velocidad de grupo $c_g(k)$. La demostración de esto es, sin embargo, algo compleja y no se va a dar aquí [el lector puede consultar, por ejemplo, Lighthill (1978)].

24.2. Flujo ideal en un canal bidimensional

Considérese un canal bidimensional por el que circula un líquido de densidad ρ . Para describir el flujo se usarán las coordenadas cartesianas (x, y) de la figura 24.3. La base del canal viene dada por $S(x)$, que tiene una inclinación $\alpha(x)$ ($\tan \alpha = -dS/dx$) respecto a la horizontal, y la altura vertical del líquido es $h(x, t)$. Las ecuaciones que gobiernan el flujo ideal del líquido son:

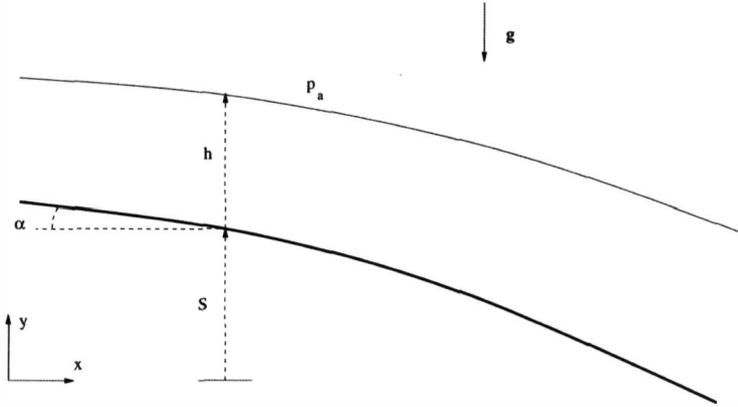


Figura 24.3: Canal bidimensional de pendiente lentamente variable.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (24.45)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (24.46)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g. \quad (24.47)$$

Se supondrá que $|Dv_y/Dt| \ll g$, lo cual es razonable siempre que tanto S como h varíen suavemente (esta hipótesis habrá que comprobarla *a posteriori* para cada solución), con lo que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y se simplifica a:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g, \quad (24.48)$$

que integrada proporciona la presión en función de h ,

$$p = p_a + \rho g(S + h - y). \quad (24.49)$$

Por otro lado, integrando la ecuación de continuidad entre $y = S$ e $y = S + h$,

$$\int_S^{S+h} \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = v_y|_{y=S+h} - v_y|_{y=S} = -\int_S^{S+h} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy. \quad (24.50)$$

En la base del canal, la velocidad normal es cero, es decir, $v_y|_{y=S} = -v_x|_{y=S} \tan \alpha$, mientras que en la superficie libre $v_y|_{y=S+h} = D(S + h)/Dt$. Por tanto,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial(S+h)}{\partial x} + v_x|_{y=S} \tan \alpha = - \int_S^{S+h} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy. \tag{24.51}$$

Derivando (24.49) respecto a x ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \tan \alpha \right), \tag{24.52}$$

y sustituyendo en (24.46), se tiene

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g \left(\tan \alpha - \frac{\partial h}{\partial x} \right). \tag{24.53}$$

Como el segundo miembro es independiente de y , también lo es Dv_x/Dt . Luego si inicialmente, o aguas arriba, el flujo parte del reposo, o proviene de una región donde v_x no depende de y , v_x permanecerá independiente de y . Supondremos que éste es el caso, con lo que las ecuaciones (24.53) y (24.51), haciendo $u \equiv v_x$ y teniendo en cuenta que $\partial S/\partial x = -\tan \alpha$, se escriben

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g \tan \alpha, \tag{24.54}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{24.55}$$

que constituyen un par de ecuaciones diferenciales para la altura y la componente horizontal de la velocidad.

24.2.1. Flujo estacionario

En el flujo estacionario e ideal en un canal bidimensional, la ecuación (24.55) se puede escribir como

$$\frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0. \tag{24.56}$$

Es decir,

$$uh = \text{constante} = q, \tag{24.57}$$

donde q es el caudal por unidad de longitud transversal. Sustituyendo en (24.54) y dividiendo por g , se llega a

$$\frac{\partial h}{\partial x} (1 - Fr) = \tan \alpha = -\frac{dS}{dx}, \tag{24.58}$$

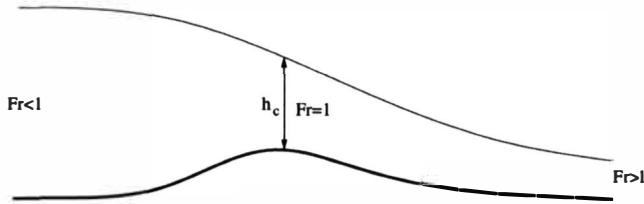


Figura 24.4: Transición de un flujo subcrítico a otro supercrítico en un máximo de $S(x)$.

donde Fr es el número de Froude local,

$$Fr = \frac{u^2}{gh} = \frac{u^2}{c^2} \quad c = \sqrt{gh}, \quad (24.59)$$

siendo c la velocidad de propagación de las ondas gravitatorias largas o en aguas poco profundas.

La ecuación anterior es muy similar a la ecuación (23.20) que describe el flujo unidireccional e ideal de un gas en un conducto de sección variable, jugando aquí el número de Froude el mismo papel que allí jugaba el número de Mach (más concretamente M^2). El flujo se denomina **subcrítico** si $Fr < 1$, es decir, si u es menor que la velocidad de propagación de las ondas de superficie, mientras que se denomina **supercrítico** si $Fr > 1$. Si $\alpha > 0$ (base del canal inclinada hacia abajo en la dirección de la corriente), h crece (u y Fr decrecen) si $Fr < 1$ y h decrece (u y Fr crecen) si el flujo es supercrítico. Lo contrario ocurre si $\alpha < 0$. El flujo sólo puede ser crítico si $\alpha = 0$, es decir en un máximo o en un mínimo local de la base del canal $S(x)$. De acuerdo con lo anterior, esta situación ocurre sólo si $S(x)$ tiene un máximo local, pues en el caso de un mínimo, si el flujo que se aproxima al mínimo ($\alpha > 0$) es subcrítico, Fr disminuye, y si es supercrítico, Fr crece a medida que se aproxima al mínimo. En la figura 24.4 se esquematiza la transición de un flujo subcrítico a otro supercrítico a través de un máximo de $S(x)$. Como ocurría en el flujo ideal de gases en toberas, $dS/dx = 0$ es condición necesaria, pero no suficiente, para que el flujo sea crítico. Una vez que el flujo se hace supercrítico, las condiciones aguas abajo no tienen influencia alguna sobre el flujo aguas arriba.

Dado que la fricción en la base y en las paredes del canal no se puede despreciar cuando se considera el flujo sobre distancias grandes en un canal, las ecuaciones estacionarias anteriores se utilizan, sobre todo, para analizar cualitativamente las **transiciones en un canal** producidas por cambios más o menos bruscos de $S(x)$ en distancias x relativamente pequeñas. Para ello se integra (24.54) teniendo en cuenta (24.56):

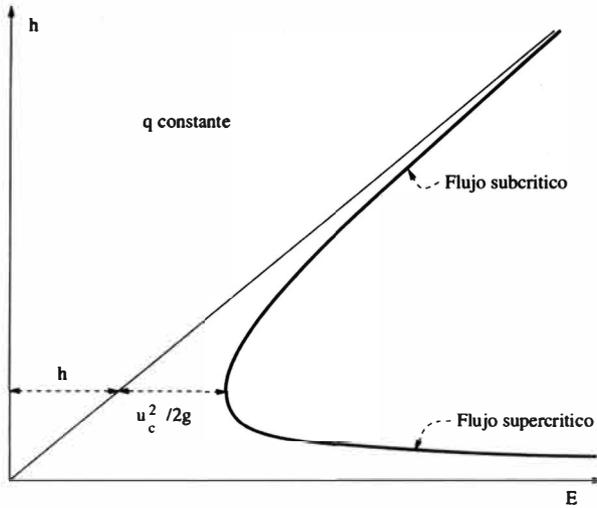


Figura 24.5: Relación entre energía específica y profundidad para caudal constante.

$$\frac{u^2}{2g} + h + S = \text{constante}. \tag{24.60}$$

La cantidad

$$E \equiv \frac{u^2}{2g} + h = \frac{q^2}{2gh^2} + h, \tag{24.61}$$

que se suele denominar **energía específica**, se representa en la figura 24.5 en función de la profundidad h para un valor del caudal q . El mínimo de E corresponde a las condiciones críticas:

$$E_{min} = \frac{3}{2}h_c, \quad h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}, \quad u_c = \sqrt{gh_c} \quad (Fr = 1). \tag{24.62}$$

Para valores de $E > E_{min}$ existen dos soluciones, una subcrítica con profundidad $h > h_c$ y otra supercrítica con $h < h_c$. Un caso típico donde se presentan estas dos profundidades para un mismo valor de E (caudal constante con $S(x)$ también constante) es en el flujo bajo una compuerta (ver figura 24.6): el flujo es subcrítico delante de la compuerta y supercrítico detrás. Delante de la compuerta la profundidad es mayor y casi toda la energía está en la forma de energía potencial, mientras que detrás, la altura es menor y la mayor parte de la energía está en forma de energía cinética.

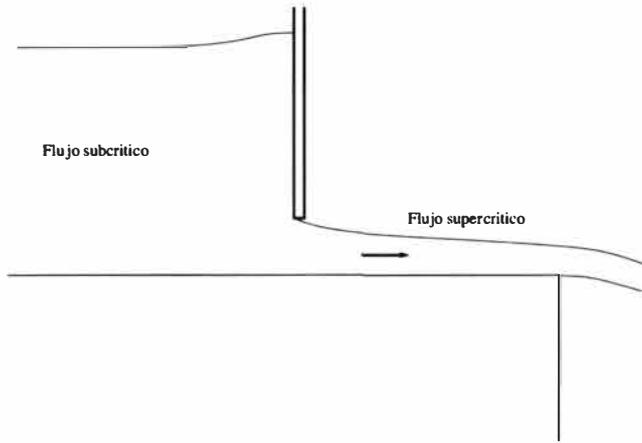


Figura 24.6: Flujo bajo una compuerta.

Considérese ahora una transición en un canal bidimensional (anchura constante) como la de la figura 24.7, donde una base horizontal ($S = 0$, por ejemplo) se incrementa en una cierta altura ΔS . De acuerdo con (24.60), $E_1 = E_2 + \Delta S$, donde E_1 y E_2 son las energías específicas aguas arriba y aguas abajo de la transición, respectivamente. Si el flujo en la sección 1 (aguas arriba) es subcrítico, de la figura 24.5 se tiene que la altura en la sección 2 (aguas abajo) tiene que ser menor, $h_2 < h_1$, mientras que si el flujo en la sección 1 es supercrítico, la profundidad crece, $h_2 > h_1$ (ver figura 24.7, donde se ha superpuesto el diagrama $E - h$ de la figura 24.5 en ambas secciones). Lo contrario ocurriría si $\Delta S < 0$. En ningún caso el flujo podría pasar de subcrítico a supercrítico, o de supercrítico a subcrítico, pues para ello tiene que pasar por condiciones críticas $Fr = 1$ y, de acuerdo con (24.58), es necesario que $dS/dx = 0$ en algún punto intermedio. Este tipo de transiciones ocurriría si la transición desde $S = 0$ a $S = \Delta S$ no fuera monótona, sino que pasara por un valor máximo de S , como se ilustra en la figura 24.4.

24.2.2. Solución de semejanza para la rotura de una presa

Como ejemplo de solución no estacionaria de (24.54)-(24.55), se considerará a continuación el problema de la rotura de una presa que, para tiempos grandes, tiene una solución analítica de semejanza. Esta solución fue originalmente obtenida por Ritter en 1892.

Considérese una presa como la esquematizada en la figura 24.8. En $t = 0$ la presa *desaparece*, y se desea hallar la evolución de $h(x, t)$. Es preferible, sin

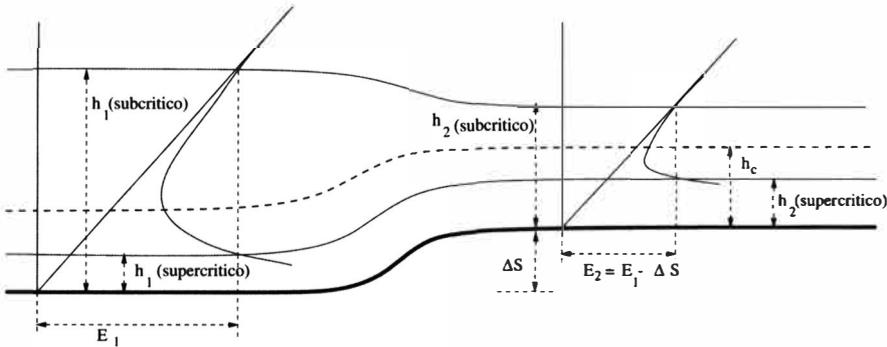


Figura 24.7: Cambio de profundidad en la transición de un canal bidimensional.

embargo, utilizar

$$c = \sqrt{gh} \tag{24.63}$$

como variable dependiente en vez de h , de forma que las ecuaciones (24.54)-(24.55) se escriben (teniendo en cuenta que $\alpha = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 2c \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \tag{24.64}$$

$$2 \frac{\partial c}{\partial t} + 2u \frac{\partial c}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{24.65}$$

Estas ecuaciones hay que resolverlas con la condición inicial

$$c = \begin{cases} c_0 = \sqrt{gh_0} & \text{en } t = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 0 & \text{en } t = 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}; \quad u = 0 \text{ en } t = 0. \tag{24.66}$$

Se usarán las variables adimensionales

$$\alpha = \frac{u}{c_0}, \quad \beta = \frac{c}{c_0}. \tag{24.67}$$

Como no existen ni longitud característica en la dirección x para adimensionalizar x , ni tiempo característico para adimensionalizar t , la única manera de hacer adimensionales las variables independientes es mediante una combinación de ellas, por lo que el problema debe tener solución de semejanza. Para buscarla, se ensaya la variable

$$\eta = at^b x, \tag{24.68}$$

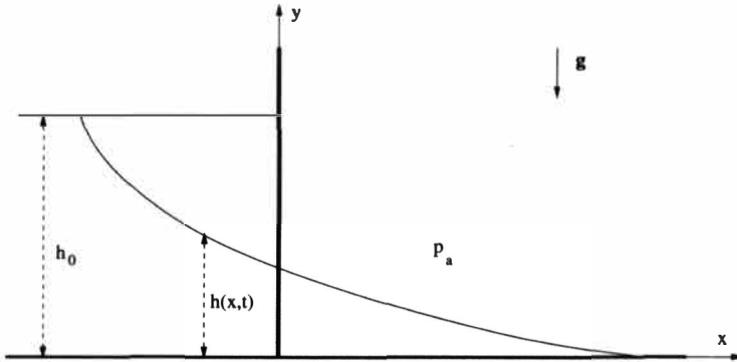


Figura 24.8: Rotura de una presa.

donde a y b son constantes desconocidas a determinar de forma que α y β sean funciones de η exclusivamente. Sustituyendo (24.67)-(24.68) en (24.64)-(24.65), se llega a

$$\frac{1}{c_0} \frac{d\alpha}{d\eta} b \frac{x}{t} + \alpha \frac{d\alpha}{d\eta} + 2\beta \frac{d\beta}{d\eta} = 0, \quad (24.69)$$

$$\frac{2}{c_0} \frac{d\beta}{d\eta} b \frac{x}{t} + 2\alpha \frac{d\beta}{d\eta} + \beta \frac{d\alpha}{d\eta} = 0. \quad (24.70)$$

Para que α y β dependan sólo de η , y no de x y de t por separado, b tiene que ser o bien cero, lo cual correspondería a una solución estacionaria trivial, o bien $b = -1$. Tomando $b = -1$, se tiene

$$\frac{1}{c_0} b \frac{x}{t} = -\frac{1}{c_0 a} \eta.$$

Finalmente, la constante a se elige igual a $1/c_0$ para que η sea adimensional:

$$\eta = \frac{x}{c_0 t}. \quad (24.71)$$

De esta manera, las ecuaciones en derivadas parciales (24.64)-(24.65) se convierten en las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(\alpha - \eta) \frac{d\alpha}{d\eta} + 2\beta \frac{d\beta}{d\eta} = 0, \quad (24.72)$$

$$2(\alpha - \eta) \frac{d\beta}{d\eta} + \beta \frac{d\alpha}{d\eta} = 0. \quad (24.73)$$

Multiplicando (24.72) por $2d\beta/d\eta$ y (24.73) por $d\alpha/d\eta$ y restando, se llega a

$$\beta \left[4 \left(\frac{d\beta}{d\eta} \right)^2 - \left(\frac{d\alpha}{d\eta} \right)^2 \right] = 0. \tag{24.74}$$

Como $\beta \neq 0$ (excepto en el frente móvil del líquido), se tiene que

$$\frac{d\beta}{d\eta} = \pm \frac{1}{2} \frac{d\alpha}{d\eta}. \tag{24.75}$$

De los dos signos posibles se elige el negativo dado uno espera que $\partial u/\partial x > 0$ y $\partial c/\partial x < 0$. Sustituyendo en (24.72), se obtiene

$$\frac{d\alpha}{d\eta}(\alpha - \eta - \beta) = 0. \tag{24.76}$$

Dado que $d\alpha/d\eta \neq 0$, se tiene

$$\alpha - \eta - \beta = 0 \tag{24.77}$$

y, derivando,

$$\frac{d\alpha}{d\eta} - 1 - \frac{d\beta}{d\eta} = 0, \tag{24.78}$$

que, junto con (24.75) (con signo el signo negativo), se llega a las dos ecuaciones

$$\frac{d\alpha}{d\eta} = \frac{2}{3}, \quad \frac{d\beta}{d\eta} = -\frac{1}{3}. \tag{24.79}$$

La integración de estas dos ecuaciones, junto con (24.77), proporciona

$$\alpha = C_1 + \frac{2}{3}\eta \quad \beta = C_1 - \frac{1}{3}\eta, \tag{24.80}$$

que en las variables físicas se escribe

$$u = C_1 c_0 + \frac{2x}{3t}, \quad c = C_1 c_0 - \frac{x}{3t}, \tag{24.81}$$

donde C_1 es una constante de integración a determinar.

Sumando y restando las ecuaciones (24.64) y (24.65), esas dos ecuaciones se pueden escribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \pm 2c) + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}(u \pm 2c) = 0. \tag{24.82}$$

Esto quiere decir que las magnitudes $u + 2c$ y $u - 2c$ permanecen constantes para observadores que se mueven con las velocidades (horizontales) $u + c$ y $u - c$, respectivamente. Las cantidades $u \pm 2c$ se suelen denominar *invariantes de Riemann*, que se conservan a lo largo de las trayectorias dadas por $dx/dt = u \pm c$, que se denominan **características** del sistema de ecuaciones (24.64)-(24.65).² Por tanto, de (24.81), el invariante de Riemann $3C_1c_0$ permanece constante a lo largo de la característica

$$\frac{dx_+}{dt} = 2C_1c_0 + \frac{x_+}{3t}, \quad (24.83)$$

donde el subíndice + hace referencia a que (24.83) es la característica con signo positivo (que designaremos por C_+), correspondiente a un observador que se mueve hacia las x crecientes. (Por supuesto, $3C_1c_0$ es constante siempre, no sólo a lo largo de la característica C_+ , lo cual es una particularidad de este problema, que tiene uno de los invariantes particularmente simple.) Por otra parte, el otro invariante de Riemann, $(4x/3t) - C_1c_0$, es constante a lo largo de la característica C_- , dada por

$$\frac{dx_-}{dt} = \frac{x_-}{t}. \quad (24.84)$$

De las condiciones iniciales (24.66), se tiene que $c = c_0$ y $u = 0$ en $t = 0$ para $x = 0$, de forma que sobre la característica C_+ que pasa por $(x = 0, t = 0)$, $u + 2c = 3C_1c_0 = 2c_0$. Es decir,

$$C_1 = \frac{2}{3} \quad (24.85)$$

y la solución de semejanza (24.81) se escribe

$$u = \frac{2}{3} \left(c_0 + \frac{x}{t} \right), \quad c = \frac{1}{3} \left(2c_0 - \frac{x}{t} \right). \quad (24.86)$$

Se observa que para $x = 0$, y para todo valor de t , $u = 2c_0/3$ y $c = 2c_0/3$, lo cual implica que la altura h en la posición donde estaba la presa ($x = 0$) es siempre $\frac{4}{3}h_0$ para $t > 0$.

Sustituyendo el valor de C_1 en (24.83),

$$\frac{dx_+}{dt} = \frac{4}{3}c_0 + \frac{x_+}{3t}, \quad (24.87)$$

²Ver capítulo 26, donde se introduce formalmente el método de las características para resolver el sistema hiperbólico de ecuaciones que describe el movimiento ideal y unidireccional de un gas.

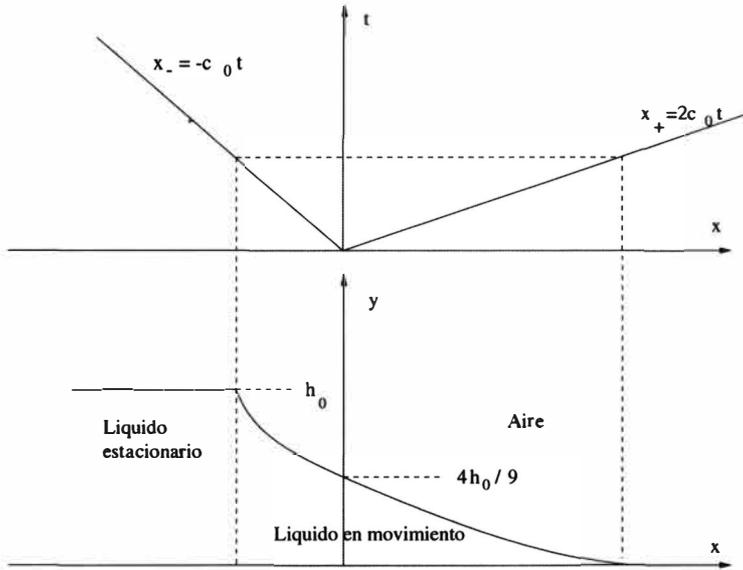


Figura 24.9: Características C_+ y C_- por $(x = 0, t = 0)$ y su relación con los límites del flujo tras la rotura de la presa.

e integrando, se llega a

$$x_+ = C_2 t^{1/3} + 2c_0 t, \tag{24.88}$$

donde C_2 es una constante de integración, que se puede determinar sustituyendo esta expresión en (24.86): sobre cualquier característica C_+ ,

$$u = 2c_0 + \frac{2}{3} C_2 t^{-2/3}, \quad c = -\frac{1}{3} C_2 t^{-2/3}, \tag{24.89}$$

lo cual implica que $C_2 = 0$ para que esta solución no se haga infinita en $t = 0$ (característica C_+ que parte de $t = 0$). Por tanto, (24.88) y (24.89) se escriben

$$x_+ = 2c_0 t; \quad u(x = x_+) = 2c_0, \quad c(x = x_+) = 0. \tag{24.90}$$

Como $h = 0$ y, por tanto, $c = 0$ en el frente de avance del líquido, se tiene que la característica C_+ que pasa por $(x = 0, t = 0)$ es la trayectoria del frente de avance del líquido que, además, se mueve a una velocidad constante $2c_0$ (ver figura 24.9).

La integración de la ecuación (24.84) para las características C_- proporciona

$$x_- = C_3 t, \tag{24.91}$$

donde C_3 es una constante arbitraria. La característica C_- que pasa por $(x = 0, t = 0)$ tiene como invariante de Riemann $u - 2c = -2c_0$. Sustituyendo (24.91) en (24.86), se tiene que sobre esta característica $C_3 = -c_0$, con lo que, sobre la característica

$$x_- = -c_0 t \quad (24.92)$$

se verifica

$$u(x = x_-) = 0, \quad c(x = x_-) = c_0. \quad (24.93)$$

Dado que $h = h_0$ y, por consiguiente, $c = c_0$ tanto inicialmente ($t \leq 0$), como para $t > 0$ en la parte del líquido que todavía no ha empezado a moverse, la característica C_- (24.92) que pasa por $(x = 0, t = 0)$ proporciona la trayectoria de la posición del límite entre la región estacionaria del líquido y la región donde hay movimiento del líquido, que se mueve a una velocidad $-c_0$. Así, para cada tiempo $t > 0$, la región de líquido en movimiento está delimitada entre las características C_+ (24.90) y C_- (24.92), teniendo una longitud $\Delta x = 3c_0 t$ (ver figura 24.9). La velocidad y altura del líquido en cualquier instante t , para valores de x en el intervalo $-c_0 t \leq x \leq 2c_0 t$, se obtienen de (24.86). (También se pueden obtener por el método de las características, trazando características C_+ y C_- entre las dos características límites dibujadas en la figura 24.9, con valores de C_2 y C_3 distintos de 0 y $-c_0$. Pero como este método no es de utilidad en este problema al disponerse de una solución de semejanza, no va a ser tratado aquí. Ver lecciones siguientes para un ejemplo del uso del método de las características.)

Para terminar esta sección, es conveniente escribir los criterios de validez de la solución obtenida. En primer lugar, la suposición de despreciar la velocidad vertical, $|Dv_y/Dt| \ll g$, no es válida en los instantes iniciales tras la rotura de la presa, ya que el movimiento inicial cerca de $x = 0$ es principalmente hacia abajo con aceleración g . Por otro lado, se han despreciado los efectos de la viscosidad ($Re \gg 1$) y de la tensión superficial ($B \gg 1$). De acuerdo con la solución anterior, la velocidad del líquido es del orden de $c_0 = \sqrt{gh_0}$. Tomando como longitud característica h_0 (también habría que tomar $c_0 t$, que es la longitud característica en la dirección horizontal, pero esta longitud se hace mayor que h_0 tras un periodo inicial de duración $t = h_0/c_0 = \sqrt{h_0/g}$, durante el cual es dudosa la validez de la solución de semejanza), la solución es válida si

$$Re = \frac{\rho g^{1/2} h_0^{3/2}}{\mu} \gg 1 \quad \text{y} \quad B = \frac{\rho g h_0^2}{\sigma} \gg 1 \quad (t > \sqrt{h_0/g}). \quad (24.94)$$

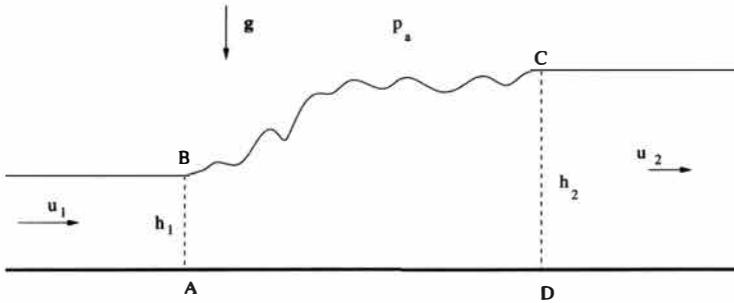


Figura 24.10: Resalto hidráulico.

Por último, el número de Froude es de orden unidad, $Fr \sim c_0^2/(gh_0) = 1$, como corresponde a un movimiento donde existe un balance entre la inercia y las fuerzas gravitatorias. Más concretamente, el número de Froude local, $Fr = u^2/c^2$, es exactamente igual a la unidad en $x = 0$, siendo el flujo subcrítico para $x < 0$ y supercrítico para $x > 0$ [ver solución (24.86)].

24.3. Resalto hidráulico

Ya se ha visto la equivalencia entre el flujo estacionario en un canal bidimensional y el flujo compresible, unidireccional y estacionario en un conducto de sección variable, donde el número de Froude en el primer caso juega el mismo papel que el número de Mach al cuadrado en el segundo. En este contexto, el equivalente de una onda de choque en el flujo compresible es el denominado resalto hidráulico, que permite que el flujo en un canal pase de supercrítico ($Fr > 1$) a subcrítico ($Fr < 1$) a través de una *discontinuidad* donde se disipa energía y, por tanto, el flujo no es ideal en su interior. En esta sección se derivarán las relaciones entre el flujo aguas arriba y aguas abajo del resalto hidráulico para el caso de un canal bidimensional de fondo plano (equivalente a las relaciones de Rankine-Hugoniot para una onda de choque normal) y se verán algunos ejemplos. No se considerarán resaltos hidráulicos *oblicuos*.

En ciertas circunstancias, algunas de las cuales se discutirán más adelante, el flujo en un canal bidimensional pasa bruscamente de unas condiciones de velocidad u_1 y altura h_1 a otras dadas por u_2 y h_2 (ver figura 24.10). El salto ocurre, por supuesto, en una distancia finita, pero al ser mucho más pequeña que la longitud característica de variación del flujo ideal circundante, se suele tratar, en primera aproximación, como una discontinuidad. Aunque el flujo en el interior del resalto hidráulico es turbulento y, por tanto, disipativo y complejo de describir, como ocurre en los flujos compresibles a través de una

onda de choque, en la inmensa mayoría de las situaciones sólo interesa conocer la relación entre las propiedades del flujo a ambos lados de la discontinuidad, para así poder enlazar el flujo ideal de un lado con el del otro. Para hallar estas relaciones se toman unos ejes estacionarios con el resalto hidráulico y se escriben las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía en un volumen de control que contenga al resalto ($ABCD$ en la figura 24.10). La ecuación de conservación de la masa (por unidad de longitud transversal) nos dice que

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 = q, \quad (24.95)$$

donde q es el caudal por unidad de longitud. Teniendo en cuenta que el flujo es estacionario, que en la superficie libre superior la presión es la atmosférica, que no hay disipación en las secciones A_1 y A_2 al ser el flujo ideal fuera del resalto, y despreciando la fricción del líquido tanto con el suelo como con el aire al ser la longitud del resalto muy pequeña (una discontinuidad en primera aproximación), la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección del movimiento aplicada al volumen de control, por unidad de longitud transversal, se escribe

$$-\rho h_1 u_1^2 + \rho h_2 u_2^2 = \int_0^{h_1} (p_1 - p_a) dy - \int_0^{h_2} (p_2 - p_a) dy. \quad (24.96)$$

Teniendo en cuenta que la distribución de presión en A_1 y A_2 es hidrostática, esta ecuación se escribe

$$\frac{1}{2} g h_1^2 + h_1 u_1^2 = \frac{1}{2} g h_2^2 + h_2 u_2^2. \quad (24.97)$$

Las ecuaciones (24.95) y (24.97) permiten obtener las condiciones detrás del resalto hidráulico, u_2 y h_2 , en función de las condiciones delante, u_1 y h_1 , y viceversa. Es conveniente introducir el número de Froude, $Fr = u^2/(gh)$. De las ecuaciones (24.95) y (24.97) se llega a

$$Fr_1 = \frac{u_1^2}{gh_1} = \frac{(h_1 + h_2)h_2}{2h_1^2}, \quad Fr_2 = \frac{u_2^2}{gh_2} = \frac{(h_1 + h_2)h_1}{2h_2^2}. \quad (24.98)$$

De la primera de estas ecuaciones se tiene que

$$\frac{h_2^2}{h_1^2} + \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1 = 0, \quad (24.99)$$

de donde, tomando el signo positivo de la raíz cuadrada, dado que las alturas no pueden ser negativas,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1} \right). \quad (24.100)$$

De forma similar, de la segunda de las ecuaciones (24.98),

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_2} \right). \quad (24.101)$$

Queda por aplicar la ecuación de la energía al volumen de control. Suponiendo que T_1 es prácticamente igual a T_2 y designando por W la potencia disipada (por unidad de longitud) por el movimiento turbulento en la superficie libre y en el suelo, esta ecuación se escribe

$$-\rho h_1 \frac{u_1^3}{2} + \rho h_2 \frac{u_2^3}{2} = \frac{1}{2} \rho g (h_1^2 u_1 - h_2^2 u_2) - W, \quad (24.102)$$

que, junto con (24.95) y (24.97), permite calcular W conocidas las propiedades del flujo en A_1 o en A_2 . Después de sustituir (24.95) y (24.97), esta ecuación se puede escribir

$$\frac{\rho g u_1}{4h_2} (h_2 - h_1)^3 = W. \quad (24.103)$$

Como $W > 0$, de esta ecuación se deduce que

$$h_2 > h_1, \quad (24.104)$$

y, de (24.98),

$$Fr_1 > 1, \quad Fr_2 < 1. \quad (24.105)$$

Es decir, debido a la disipación, en un resalto hidráulico el flujo siempre pasa de supercrítico a subcrítico, aumentando la altura y disminuyendo la velocidad del líquido en el canal. Se observa, por tanto, una completa analogía con lo que ocurre en una onda de choque. La ecuación (24.102) también se suele escribir en términos de la energía específica E , definida en (24.61):

$$E_1 - E_2 + \frac{h_1 - h_2}{2} = \frac{W}{\rho g}. \quad (24.106)$$

Ejemplos típicos de resaltos hidráulicos son los que se forman detrás de un vertedero o detrás de una compuerta (figura 24.11). En ambos casos el flujo pasa primero de subcrítico a supercrítico debido al cambio brusco en la sección y, posteriormente, el flujo pasa de nuevo a subcrítico a través de un resalto hidráulico para *amoldarse* a las condiciones que existan aguas abajo.

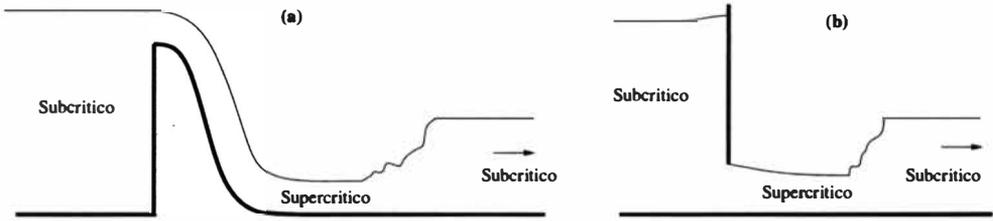


Figura 24.11: Resaltos hidráulicos detrás de (a) un vertedero y (b) una compuerta.

Dadas las condiciones aguas abajo, la posición del resalto hidráulico se obtiene de las ecuaciones anteriores de forma que el flujo subcrítico inmediatamente aguas arriba del mismo está *conectado* con el flujo existente aguas arriba de la compuerta o del vertedero a través de las ecuaciones dadas en la sección 24.2.1.

Un ejemplo de resalto hidráulico no estacionario es el que se formaría en el problema de la rotura de una presa considerado en la sección anterior en el supuesto de que existiera una pared vertical a una cierta distancia x_p de la presa inicial (ver figura 24.12). Se supone que la pared es lo suficientemente alta como para que el flujo no pueda pasar por encima. Como el frente del líquido se mueve con velocidad $2c_0$, la pared no tiene efecto sobre el flujo para $t < x_p/(2c_0)$. Para $t \geq x_p/(2c_0)$, el líquido se empieza a acumular en la pared, elevándose el nivel y formándose un resalto hidráulico que viaja hacia la izquierda con una velocidad $U = -dx_r/dt$, donde x_r es la posición del resalto hidráulico considerado como una discontinuidad. Recuérdese que, de acuerdo con (24.86), la solución de semejanza dada en la sección 24.2.2 es supercrítica ($u > c$) para $x > 0$ y subcrítica para $x < 0$, permaneciendo el flujo crítico en $x = 0$ para todo instante. Las ecuaciones (24.95) y (24.97) aplicadas a un sistema de referencia que se mueve con la discontinuidad se escriben (ver figura 24.12)

$$(u_1 + U)h_1 = (u_2 + U)h_2, \quad (24.107)$$

$$(u_1 + U)^2 h_1 - (u_2 + U)^2 h_2 = \frac{1}{2}g(h_1^2 - h_2^2), \quad (24.108)$$

de donde

$$U = \sqrt{\frac{1}{2}gh_2 \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)} - u_1, \quad (24.109)$$

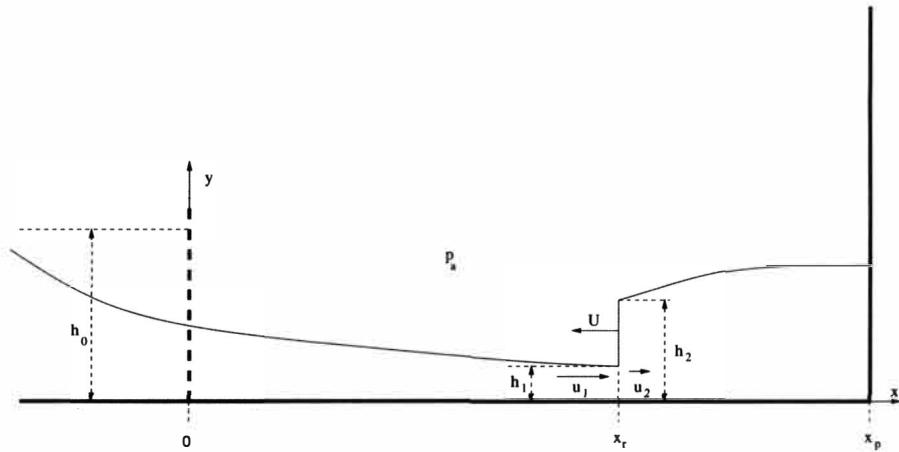


Figura 24.12: Resalto hidráulico tras la rotura de una presa al encontrarse el flujo con una pared.

$$u_2 = u_1 - \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \sqrt{\frac{1}{2}gh_2 \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)}. \quad (24.110)$$

Teniendo en cuenta que u_1 y h_1 se conocen de la solución de semejanza (24.86) en función de x_r en todo instante, U y la posición del resalto hidráulico se pueden calcular en función del tiempo resolviendo las ecuaciones anteriores, junto con (24.54)-(24.55) para $x > x_r$ y la condición de contorno $u(x = x_p) = 0$.

Referencias.

- D. J. ACHESON, 1990. Capítulo 3.
- M. H. CHAUDHRY, 1993. Capítulos 2 y 3.
- J. LIGHTHILL, 1978. Capítulo 3.
- S. M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 9.
- J. A. ROBERSON y C. T. CROWE, 1997. Capítulo 15.

Capítulo 25

Ondas sonoras. Acústica

25.1. Ecuaciones para la propagación de pequeñas perturbaciones en un fluido ideal uniforme

En esta lección se considerará la propagación de pequeñas perturbaciones de las magnitudes fluidas (por ejemplo, ondas sonoras) en el seno de un fluido ideal. Para ello se parte de las ecuaciones de Euler (19.4)-(19.6) que gobiernan el movimiento de un fluido ideal. En ausencia de fuerzas másicas¹ y de aportes volumétricos de calor, estas ecuaciones pueden escribirse como

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (25.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \nabla p = 0, \quad (25.2)$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0. \quad (25.3)$$

Se pretende analizar la evolución de pequeñas perturbaciones de las magnitudes fluidas cuando éstas se producen en un medio que se encuentra en reposo, ($\vec{v}_o = 0$), con presión y densidad uniformes, $p = p_o$ y $\rho = \rho_o$.² Es decir, se supondrá que

$$p(\vec{x}, t) = p_o + p'(\vec{x}, t), \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_o + \rho'(\vec{x}, t), \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{0} + \vec{v}'(\vec{x}, t), \quad (25.4)$$

¹La influencia de las fuerzas másicas se considerará en la sección 25.7.

²La propagación de pequeñas perturbaciones en un fluido no uniforme se considerará también en la sección 25.7.

donde las magnitudes con prima son pequeñas:

$$|p'/p_o| \ll 1, \quad |\rho'/\rho_o| \ll 1 \quad (25.5)$$

(ya se verá más adelante en relación a qué $|\vec{v}'|$ es pequeña). Esta situación se produce, por ejemplo, al hablar o al golpear un tambor, donde las ligeras perturbaciones locales de la presión, densidad y velocidad se propagan en el aire a una cierta velocidad (la velocidad del sonido) que, según veremos, viene dada por (10.16).

De acuerdo con la ecuación (25.3), la entropía se conserva en cada partícula fluida. Como el fluido parte de un estado uniforme inicial, esta entropía es la misma en todas las partículas fluidas e igual a su valor inicial s_o . Así, la ecuación de estado $s(p, \rho) = s_o$ implica que el flujo es barótrofo, $p = p(\rho)$ (como ya se vió en la sección 18.4). Esto permite escribir las variaciones de la presión en función de las variaciones de la densidad y eliminar así la presión en las ecuaciones (25.1)-(25.2). En efecto, expandiendo la función de estado $p(\rho, s)$ en serie de Taylor en el entorno de (ρ_o, s) , teniendo en cuenta que $s \equiv s_o$, se tiene

$$p(\rho, s) = p(\rho_o, s_o) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=s_o} (\rho - \rho_o) + \dots \quad (25.6)$$

Utilizando (25.4), en primera aproximación (es decir, despreciando términos cuadráticos en las perturbaciones) se puede escribir

$$p' = a_o^2 \rho', \quad (25.7)$$

donde

$$a_o^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=s_o} \quad (25.8)$$

es una propiedad termodinámica del medio no perturbado. Para un gas perfecto, $a_o^2 = \gamma p_o / \rho_o = \gamma R_g T_o$. La ecuación (25.7) sustituye, en primera aproximación, a la ecuación de la entropía (25.3).

Análogamente, sustituyendo (25.4) y (25.7) en (25.1)-(25.2) y despreciando los términos cuadráticos en las pequeñas perturbaciones, se llega al siguiente par de ecuaciones lineales para ρ' y \vec{v}' :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \nabla \cdot \vec{v}' = 0, \quad (25.9)$$

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + a_o^2 \nabla \rho' = 0, \quad (25.10)$$

donde, por simplicidad en la notación, se ha quitado la prima en la velocidad. Eliminando \vec{v} entre (25.9) y (25.10) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_o^2 \nabla^2 \rho' = 0. \quad (25.11)$$

De igual manera, eliminando ρ' ,

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - a_o^2 \nabla^2 \vec{v} = 0. \quad (25.12)$$

Una ecuación similar para p' se obtiene de (25.7) y (25.11). Estas ecuaciones son del tipo denominado **ecuación de ondas** y, como se verá más adelante, sus soluciones representan *ondas* que se propagan a la velocidad a_o , que es así la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones. Por ejemplo, se verá en la sección 25.3 que la propagación de las ondas sonoras satisfacen las hipótesis anteriores, y es por ello que a_o se denomina velocidad del sonido.

En lugar de utilizar las ecuaciones anteriores para \vec{v} , ρ' y p' , es más útil trabajar con el potencial de velocidad ϕ . Como el flujo es isentrópico y no hay fuerzas másicas, partiendo además del reposo, se sigue que el movimiento es irrotacional (ver lección 20), existiendo potencial de velocidad:

$$\vec{v} = \nabla \phi. \quad (25.13)$$

[Más directamente, tomando el rotacional de (25.10) se tiene que $\partial(\nabla \wedge \vec{v})/\partial t = 0$; como $\nabla \wedge \vec{v} = 0$ inicialmente, lo sigue siendo en todo instante posterior.] Sustituyendo (25.13) en (25.10),

$$\rho_o \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} + a_o^2 \nabla \rho' = 0, \quad (25.14)$$

de donde

$$\rho' = -\frac{\rho_o}{a_o^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (25.15)$$

y

$$p' = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (25.16)$$

Finalmente, sustituyendo (25.13) y (25.15) en (25.9) se obtiene una ecuación de ondas para ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_o^2 \nabla^2 \phi = 0. \quad (25.17)$$

De la resolución de esta única ecuación se obtiene inmediatamente \vec{v} , ρ' y p' de (25.13) y (25.15)-(25.16).

25.2. Ondas planas

Por simplicidad se considerará primero el caso en el que las perturbaciones se propagan exclusivamente en la dirección x , es decir, $\phi = \phi(x, t)$, $\vec{v} = u\vec{e}_x = (\partial\phi/\partial x)\vec{e}_x$. La ecuación anterior se escribe

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_o^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (25.18)$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente escribiéndola en su forma *canónica* mediante el cambio de variables

$$\xi = x - a_o t, \quad \eta = x + a_o t, \quad (25.19)$$

que transforma (25.18) en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \quad (25.20)$$

Integrando dos veces, la solución general de esta ecuación se puede escribir como

$$\phi = f(\xi) + g(\eta) = f(x - a_o t) + g(x + a_o t), \quad (25.21)$$

donde f y g son funciones arbitrarias de sus argumentos. Utilizando $u = \partial\phi/\partial x$ y (25.15)-(25.16), la solución general del problema en las variables físicas se escribe

$$u = F(x - a_o t) - G(x + a_o t), \quad (25.22)$$

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} = F(x - a_o t) + G(x + a_o t) = \frac{a_o \rho'}{\rho_o}, \quad (25.23)$$

donde $F \equiv df/d\xi$ y $G \equiv -dg/d\eta$ son funciones también arbitrarias de sus argumentos. Obsérvese que $F(x - a_o t)$ permanece constante para un observador que se mueve con velocidad $dx/dt = a_o$ ($x - a_o t = \text{constante}$), mientras que $G(x + a_o t)$ permanece constante para un observador que se mueve con

velocidad $dx/dt = -a_o$ ($x + a_o t = \text{constante}$).³ Por tanto, esta solución representa dos *ondas* planas o unidimensionales superpuestas que se propagan hacia la izquierda y hacia la derecha con velocidad a_o , que es así la velocidad de propagación de las pequeñas perturbaciones (por ejemplo, ondas sonoras, siendo a_o la velocidad del sonido). La *forma* de estas ondas, es decir, los valores concretos de las funciones F y G , que en principio son arbitrarias, dependen de las condiciones iniciales o de contorno (ver los ejemplos que se describen a continuación).

De acuerdo con las expresiones (20.29)-(20.30), para una onda que se propaga hacia la derecha (función F), se tiene que

$$\frac{u}{a_o} = \frac{\rho'}{\rho_o} = \frac{p'}{\rho_o a_o^2} \quad \left(= \frac{p'}{\gamma p_o} \right), \tag{25.24}$$

y para una onda que se propaga hacia la izquierda (función G), se verifica

$$\frac{u}{a_o} = -\frac{\rho'}{\rho_o} = -\frac{p'}{\rho_o a_o^2}. \tag{25.25}$$

De estas relaciones se deduce, además, la condición que debe cumplir la perturbación de la velocidad para que la solución anterior sea válida: u debe ser mucho menor que la velocidad de propagación de las perturbaciones (velocidad del sonido) a_o , puesto que, por hipótesis, $\rho'/\rho_o \ll 1$.

25.2.1. Propagación de una pequeña perturbación inicial

Supongamos que perturbamos a un fluido inicialmente en reposo ($u = 0$) mediante un ligero incremento local de la presión dado por $p'/\rho_o a_o = f(x)$, siendo $f(x)$ una función conocida (ver figura 25.1). De acuerdo con (25.23), inicialmente $\rho' a_o/\rho_o = f(x)$. Para que en $t = 0$ se satisfagan las ecuaciones (25.22) y (25.23), las funciones F y G deben verificar

$$0 = F(x) - G(x). \tag{25.26}$$

$$f(x) = F(x) + G(x), \tag{25.27}$$

Es decir,

$$F(x) = G(x) = \frac{f(x)}{2}, \tag{25.28}$$

³ $\xi = x - a_o t = \text{constante}$ y $\eta = x + a_o t = \text{constante}$ son las características de la ecuación de ondas (25.18); ver lección 26.

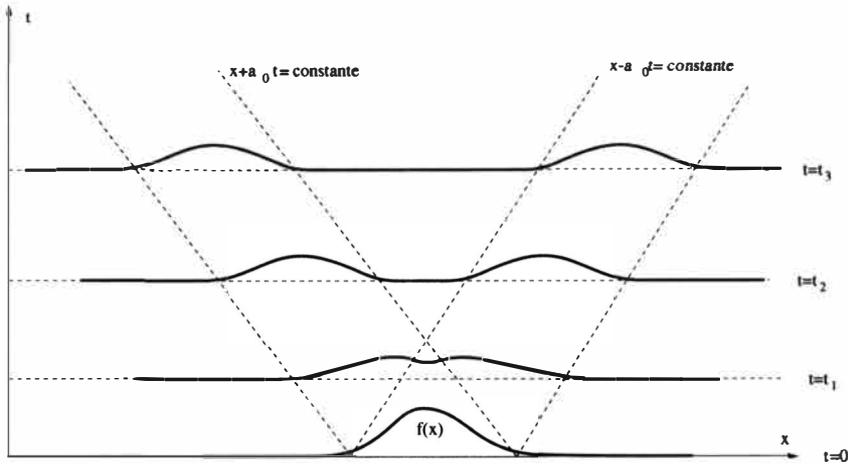


Figura 25.1: Propagación de una pequeña perturbación inicial.

de forma que la solución es

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \frac{1}{2} f(x - a_0 t) + \frac{1}{2} f(x + a_0 t) \quad , \quad (25.29)$$

$$u = \frac{1}{2} f(x - a_0 t) - \frac{1}{2} f(x + a_0 t) \quad . \quad (25.30)$$

Tenemos pues que la perturbación de la presión inicial se divide en dos ondas iguales cuyas intensidades son la mitad de la perturbación inicial, una que se propaga hacia la derecha y otra hacia la izquierda, ambas con velocidad a_0 (ver figura 25.1).

25.2.2. Pequeñas perturbaciones producidas por el movimiento de un pistón

Considérese ahora el movimiento originado en un gas en el interior de un cilindro infinito, cuyo eje tiene la dirección del eje x , por el movimiento oscilatorio de un pistón en torno a $x = 0$ de acuerdo con la ley $x = f(t)$ conocida (ver figura 25.2). El fluido en contacto con el pistón adquirirá una velocidad $u = df/dt \equiv f'(t)$. Este movimiento se propagará al resto del gas en forma de una onda que, si el diámetro D del cilindro es mucho mayor que $|f(t)|$, puede considerarse plana (excepto en las proximidades de la pared del cilindro) y, si $|f'(t)|/a_0 \ll 1$, viene dada por (25.22). En particular, para $x > 0$ sólo existirá una onda propagándose hacia la derecha dada por

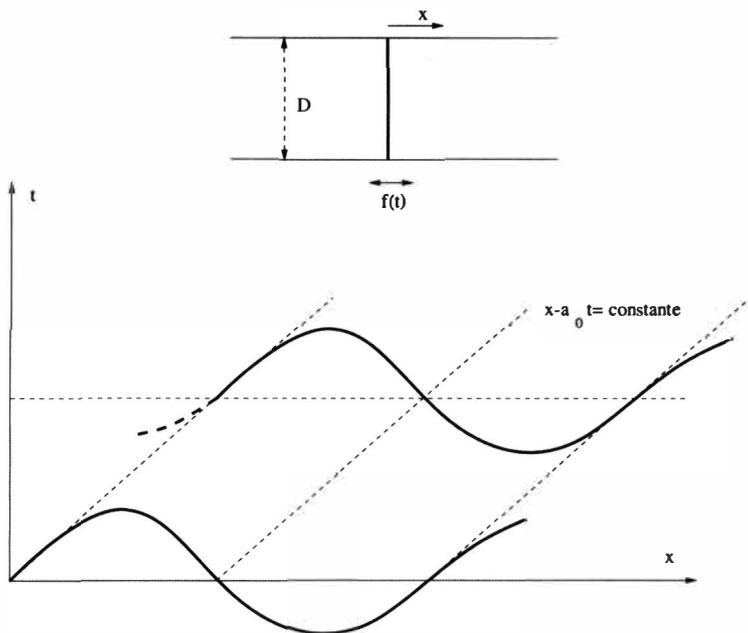


Figura 25.2: Problema del pistón.

$$u = F(x - a_0 t) = \frac{p'}{\rho_0 a_0} = \frac{\rho' a_0}{\rho_0} \quad , \quad (25.31)$$

y, para $x < 0$,

$$u = -G(x + a_0 t) = -\frac{p'}{\rho_0 a_0} = -\frac{\rho' a_0}{\rho_0} \quad . \quad (25.32)$$

La condición de contorno $u = f'(t)$ en $x = f(t)$ fija las funciones F y G : para $x > 0$ se tiene

$$F[f(t) - a_0 t] = f'(t) \quad . \quad (25.33)$$

Como $|f(t)| \ll a_0 t$ por hipótesis, haciendo $\tau = -a_0 t$,

$$F(\tau) \simeq f'(-\tau/a_0) \quad , \quad (25.34)$$

de donde se obtiene la solución

$$u = \frac{p'}{\rho_0 a_0} = \frac{\rho' a_0}{\rho_0} = f'(t - x/a_0) \quad , \quad (25.35)$$

que constituye una onda que se propaga hacia $x > 0$. Análogamente, para $x < 0$ se obtiene

$$u = -\frac{p'}{\rho_o a_o} = -\frac{\rho' a_o}{\rho_o} = f'(t + x/a_o) \quad . \quad (25.36)$$

En el caso particular en que el pistón oscile armónicamente con frecuencia ω , $f(t) = A \sin \omega t$, $A \ll D$, se tiene $f'(t) = A\omega \cos \omega t = v_o \cos \omega t$, $v_o \equiv A\omega \ll a_o$, y la onda que se propaga hacia la derecha, por ejemplo, vendría dada por (ver figura 25.2)

$$u = \frac{p'}{\rho_o a_o} = \frac{\rho' a_o}{\rho_o} = v_o \cos[\omega(t - x/a_o)] \quad . \quad (25.37)$$

25.2.3. Ondas monocromáticas

Una onda del tipo (25.37), es decir, una onda armónica definida por una única **frecuencia** ω , se suele denominar onda *monocromática*, por analogía con las ondas electromagnéticas. A veces, se suele expresar en variable compleja debido a que simplifica el álgebra:

$$u = \text{Real} \left[A e^{i\omega(t-x/a_o)} \right] \quad , \quad (25.38)$$

donde, en general, la amplitud A puede ser también compleja, $A = a e^{i\alpha}$, de forma que α es el *desfase* de la onda:

$$u = a \cos(\omega t - \omega x/a_o + \alpha) \quad . \quad (25.39)$$

La cantidad a_o/ω , que tiene dimensiones de longitud, multiplicada por 2π , representa la longitud de un ciclo completo y se suele denominar **longitud de onda**:

$$\lambda \equiv 2\pi \frac{a_o}{\omega} \quad . \quad (25.40)$$

En general, las ondas planas pueden definirse en relación a cualquier dirección de propagación \vec{n} , o dirección unitaria normal a los frentes de onda. En este caso, en vez de (25.38) se tendría:

$$u = \text{Real} \left[A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right] \quad , \quad (25.41)$$

donde

$$\vec{k} \equiv \frac{\omega}{a_o} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad , \quad (25.42)$$

es el denominado **vector de onda**. La importancia de las ondas monocromáticas reside en el hecho de que cualquier onda (plana en este caso) puede ser representada como una superposición de ondas monocromáticas con distintas frecuencias y vectores de onda mediante un desarrollo de Fourier. La superposición es posible debido a que las ecuaciones que describen el movimiento de estas ondas son lineales. Así, una onda cualquiera se puede representar mediante una cierta distribución de frecuencias. Las diferentes amplitudes A_ω correspondientes a cada frecuencia ω se obtendrían del desarrollo de Fourier de la condición inicial o de contorno que origina la perturbación. Las ondas sonoras audibles por el oído humano, por ejemplo, están caracterizadas por diferentes distribuciones de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20000 Hz, aproximadamente. Componentes de una onda sonora con frecuencias mayores o menores no son detectables por el oído humano.

25.3. Velocidad del sonido. Justificación de las hipótesis

Se acaba de ver que las pequeñas perturbaciones en un fluido ideal se propagan a una velocidad a_o dada por la ecuación (25.8), correspondiente a las variaciones de presión con la densidad a entropía constante. En esta sección vamos a comprobar que, realmente, esta velocidad es a la que se propaga el sonido; es decir, vamos a corroborar que, efectivamente, las pequeñas perturbaciones perceptibles por el oído humano se propagan *isentrópicamente*.⁴ También se verá bajo qué condiciones la hipótesis de despreciar las fuerzas gravitatorias es razonable.

Para que el fluido pueda ser considerado como ideal, las fuerzas de viscosidad en la ecuación de cantidad de movimiento, así como la disipación viscosa y la conducción de calor en la ecuación de la energía, tienen que ser despreciables frente a los términos de variación local (los términos convectivos son cuadráticamente pequeños):

⁴Newton postuló que el sonido se propaga *isotérmicamente*, es decir, a una velocidad cuyo cuadrado es $a_N^2 = (\partial p / \partial \rho)_T$, que para un gas ideal es $a_N^2 = p_o / \rho_o$. En aire atmosférico a 20°C esto daría una velocidad de propagación igual a 290 m/s, un valor significativamente menor que el experimental $a_o = 340$ m/s. Fue Laplace, un siglo más tarde, quien se dió cuenta de que la temperatura no permanece constante, puesto que al comprimirse el fluido se produce un trabajo que añade energía interna a las partículas fluidas, variando así su temperatura. Laplace correctamente postuló que las ondas sonoras se propagan isentrópicamente, siendo el cuadrado de su velocidad $a_o^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$, igual a $\gamma p_o / \rho_o$ para un gas ideal, que concuerda muy bien con el valor experimental.

$$|\rho \partial \vec{v} / \partial t| \gg |\nabla \cdot \vec{\tau}|, \quad |\rho \partial e / \partial t| \gg \Phi, \quad |\rho \partial e / \partial t| \gg |\nabla \cdot K \nabla T|. \quad (25.43)$$

La disipación viscosa es siempre muy pequeña al ser cuadrática en la perturbación de la velocidad. Las otras dos condiciones proporcionan:

$$\frac{\nu}{\omega \lambda^2} \ll 1, \quad \frac{\nu}{\omega \lambda^2} \frac{1}{Pr} \ll 1, \quad (25.44)$$

donde ω y λ son una frecuencia y una longitud (de onda) características de las perturbaciones.

Para los gases $Pr = O(1)$ y ambas condiciones son equivalentes. Teniendo en cuenta que $\lambda \sim a_o / \omega$, se tiene que verificar que

$$\frac{\nu \omega}{a_o^2} \ll 1. \quad (25.45)$$

Para el aire atmosférico a $20^\circ C$, $\nu \simeq 1,5 \times 10^{-5} m^2/s$, $a_o \simeq 340 m/s$; tomando el caso más desfavorable de $\omega = 20000 Hz$, se tiene $\nu \omega / a_o^2 \simeq 2,6 \times 10^{-6}$, que justifica plenamente el considerar isentrópica la propagación del sonido en el aire y, por extensión, en cualquier gas en condiciones normales.

En el caso de un líquido, aunque siempre se haya considerado $\rho \simeq constante$, ésto no es cierto para la propagación de las ondas sonoras, puesto que una de las condiciones de solenoidalidad que se vió en la sección 10.2 [concretamente, la condición (10.21)] no se satisface: $\omega \lambda / a_o \sim 1$. Esto es obvio puesto que la propagación del sonido requiere la compresión local del fluido. Lo que no cabe duda es que la velocidad del sonido en un líquido es siempre mucho mayor que en un gas, siendo infinita en el límite formal de un líquido ideal (densidad constante).⁵ Como, además, ν suele ser menor en los líquidos que en los gases debido a la mayor densidad de aquellos ($\nu \simeq 10^{-6} m^2/s$ para el agua a $20^\circ C$), la condición (25.45) se verifica con mayor contundencia en los líquidos que en los gases, y la hipótesis de isentropía en la propagación del sonido es aun más válida.

En la sección 25.1 también se hizo la hipótesis de que los efectos gravitatorios son despreciables. La gravedad puede en principio afectar en dos niveles: en el orden menor, a la distribución de presión del fluido no perturbado,

⁵Para el agua a temperatura ambiente $a_o \simeq 1400 m/s$, siendo, en orden de magnitud, similar para la mayoría de los líquidos. Conviene decir aquí que de consideraciones puramente termodinámicas se obtiene $a_o^2 \equiv (\partial p / \partial \rho)_s = \gamma (\partial p / \partial \rho)_T \equiv \gamma a_N^2$. La relación de calores específicos γ es siempre mayor que la unidad, siendo apreciablemente mayor para los gases ($\gamma = 5/3$ para gases monoatómicos y $\gamma = 7/5$ para los diatómicos), pero aproximadamente igual a la unidad para los líquidos. Por tanto, aunque la velocidad del sonido en gases difiere apreciablemente de la isotérmica postulada por Newton, no ocurre así para los líquidos.

$$0 = -\nabla p_o + \rho_o \vec{g}, \quad (25.46)$$

que ya no sería uniforme, sino que dependería de la coordenada vertical z (ver sección 25.7). Por supuesto, este efecto es mucho más importante en líquidos que en gases. Por otro lado, en el orden lineal de las pequeñas perturbaciones, la ecuación de cantidad de movimiento (25.10) quedaría modificada de la siguiente forma:

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + a_o^2 \nabla \rho' = \rho' \vec{g}. \quad (25.47)$$

Así, la influencia de la gravedad en la propagación de las pequeñas perturbaciones sería efectivamente despreciable si

$$\frac{g\lambda}{a_o^2} \sim \frac{g}{\omega a_o} \ll 1. \quad (25.48)$$

Para el aire, tomando el caso más desfavorable de $\omega = 20Hz$, $g/\omega a_o \simeq 2 \times 10^{-4} \ll 1$. Para el agua, $g/\omega a_o \simeq 5 \times 10^{-5} \ll 1$. Curiosamente, el efecto de la gravedad es aún menos importante en los líquidos que en los gases al ser la velocidad de propagación mucho mayor, aunque, en el fluido no perturbado, la gravedad influye mucho más en los líquidos que en los gases, afectando con ello a la velocidad de propagación a_o , que dependería de z .

En definitiva, para el caso de ondas sonoras, las soluciones de onda encontradas anteriormente apenas se ven afectadas por la presencia de la gravedad, aunque sí su velocidad de propagación, que dependerá de la coordenada z , pero en longitudes del orden de a_o^2/g , mucho mayores que la longitud de onda λ si se cumple (25.48). Esta dependencia de a_o modifica, en distancias del orden de a_o^2/g , la forma de las ondas (ver sección 25.7).

25.4. Energía e intensidad acústica

Las ondas tienen la interesante propiedad de que pueden transportar energía sin la necesidad de un transporte neto de material. En esta sección se definirá y analizará algunas de las propiedades generales de la energía acústica, que es la parte de la energía total del fluido asociada con la presencia de ondas sonoras, y de la intensidad acústica, que es la velocidad de transporte de la energía acústica.

Aunque en las ecuaciones de las secciones anteriores se han linealizado las ecuaciones de las perturbaciones, despreciando términos cuadráticos que involucran el producto de dos perturbaciones cualesquiera, debido a que la energía

cinética es cuadrática en la velocidad, para poder tenerla en cuenta apropiadamente en la definición de la energía acústica se retienen términos cuadráticos en las perturbaciones, despreciando términos que involucran productos de tres o más perturbaciones. Así, la densidad de energía cinética asociada a las pequeñas perturbaciones sobre un fluido en reposo y uniforme se escribe

$$\frac{1}{2}\rho_0 v^2, \quad (25.49)$$

donde ρ_0 es la densidad del medio no perturbado y v el módulo de la velocidad de las perturbaciones. La densidad total de energía acústica será la suma de la densidad de energía cinética (25.49) más la densidad de energía interna asociada a la onda. Como la entropía se conserva, el incremento de energía interna asociado a la onda es igual al trabajo de compresión del fluido producido por el *exceso* de presión $p' = p - p_0$ (el trabajo de las fuerzas de presión asociado a la presión no perturbada p_0 se considerará más adelante), que comprime al fluido desde la densidad ρ_0 hasta ρ :

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \rho p' d\left(\frac{1}{\rho}\right) \simeq \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p'}{\rho_0} d\rho, \quad (25.50)$$

donde, como en (25.49), se han despreciado términos cúbicos en las perturbaciones. Haciendo uso de (25.7) y teniendo en cuenta que $d\rho = d\rho'$, la expresión anterior se escribe

$$\int_0^{\rho'} a_0^2 \frac{\rho'}{\rho_0} d\rho' = \frac{1}{2} a_0^2 \frac{\rho'^2}{\rho_0} = \frac{1}{2} \frac{p'^2}{a_0^2 \rho_0}. \quad (25.51)$$

La densidad de energía acústica es la suma de (25.49) y (25.51):

$$W \equiv \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{a_0^2 \rho_0} = \frac{1}{2}\rho_0 [(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{a_0^2}(\partial\phi/\partial t)^2], \quad (25.52)$$

donde se ha hecho uso de (25.13) y (25.16) para escribirla en términos de la función potencial.

Para obtener la intensidad acústica es conveniente comenzar por el caso de una onda plana que se propaga en la dirección x . La velocidad de transporte de energía asociada a una onda que, viniendo desde la izquierda, atraviesa cualquier plano $x = \text{constante}$ es igual al trabajo de las fuerzas de presión asociado al *exceso* de presión $p' = p - p_0$. Por tanto, la intensidad acústica, o velocidad de transporte de energía acústica por unidad de área, se define como

$$I \equiv p' u, \quad (25.53)$$

donde $\vec{v} = u\vec{e}_x$. Téngase en cuenta que, de acuerdo con (25.24), I tiene el mismo signo que u :

$$I = \rho_o a_o u^2, \quad (25.54)$$

Por otro lado, para el caso de una onda plana que se propaga hacia la derecha, la densidad de energía (25.52) se puede escribir como

$$W = \rho_o u^2, \quad (25.55)$$

de donde se deduce que una onda sonora en un medio uniforme transporta la energía a la velocidad a_o , puesto que la velocidad de transporte de energía por unidad de área, I , es a_o veces la energía por unidad de volumen W .

En el caso tridimensional, la intensidad acústica es un vector \vec{I} tal que $\vec{I} \cdot \vec{n}$ representa la velocidad a la que es transportada la energía a través de un elemento de superficie orientado según \vec{n} en el entorno del punto \vec{x} , por unidad de área. Esta velocidad de transferencia es el producto del exceso de presión p' por la componente $\vec{v} \cdot \vec{n}$ de la perturbación de la velocidad, de forma que la intensidad acústica en un punto genérico viene dada por

$$\vec{I} = p'\vec{v} = -\rho_o(\partial\phi/\partial t)\nabla\phi. \quad (25.56)$$

De (25.52) y (25.56) se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{I}, \quad (25.57)$$

que es la ecuación de conservación de la energía acústica: su velocidad de cambio es igual al flujo de energía acústica por unidad de volumen (téngase cuenta que el término $\vec{v} \cdot \nabla W$ no aparece en el lado izquierdo por ser de tercer orden en las perturbaciones). A la vista de esta ecuación es ahora posible justificar porqué no se ha tenido en cuenta la presión no perturbada (ambiente) en la energía e intensidad acústica. Definiendo

$$W_o \equiv \int_{\rho_o}^{\rho} p_o \frac{d\rho}{\rho} = p_o \ln \frac{\rho}{\rho_o}, \quad \vec{I}_o \equiv p_o \vec{v}, \quad (25.58)$$

como la energía y la intensidad asociadas a p_o , respectivamente, de la ecuación de continuidad linealizada se tiene

$$\frac{\partial W_o}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla W_o = -\nabla \cdot \vec{I}_o, \quad (25.59)$$

que es lineal en las perturbaciones, en vez de cuadrática como (25.57) (por ello incluye el término convectivo $\vec{v} \cdot \nabla W_o$). Por tanto, (25.57) representa la

conservación de la energía total a la que se le ha sustraído un múltiplo de la ecuación de continuidad. Así, el hecho de tener en cuenta el trabajo asociado a la presión no perturbada p_o no añade nada significativo a la ecuación de la energía acústica (25.57).

Cuando se trata de sonido, en vez de la intensidad acústica (que se mide en W/m^2), se utiliza su logaritmo, debido a que, para una frecuencia dada, el oído percibe diferencias iguales de *volumen* de sonido para diferencias iguales del logaritmo de la intensidad acústica, en vez de la intensidad misma. Por ello se utiliza el *decibelio* (dB) como medida del nivel de intensidad acústica, que se define como

$$120 + 10 \log_{10}[I(Wm^{-2})], \quad (25.60)$$

donde I es el módulo de \vec{I} (medido en Wm^{-2}). Por ejemplo, para una frecuencia relativamente alta (de 500 a 8000 Hz), la mínima intensidad audible es 0 dB, aproximadamente, que equivale a $I = 10^{-12}Wm^{-2}$. Para frecuencias más bajas o más altas, el umbral auditivo del hombre es mayor: por ejemplo, para 200 Hz y 15000 Hz es, aproximadamente, 20 dB ($I = 10^{-10}Wm^{-2}$), mientras que es 40 dB ($I = 10^{-8}Wm^{-2}$), aproximadamente, para 100 Hz y 18000Hz. (Recuérdese que la audición no es posible por debajo de 20 Hz y por encima de 20000 Hz, aproximadamente.) Para la mayoría de las frecuencias audibles, el sonido causa *dolor* en el oído por encima de 120 dB ($W = 1Wm^{-2}$).

25.5. Efecto de la viscosidad

Se ha visto que en la propagación del sonido la influencia de la viscosidad y de la conductividad térmica son muy pequeñas; es decir, el fluido puede considerarse como ideal. Pero aunque pequeños, estos efectos disipativos van atenuando la intensidad de la onda hasta amortiguarla completamente si actúan sobre distancias suficientemente grandes. (En un fluido *exactamente* ideal, las ondas sonoras permanecerían viajando siempre con velocidad a_o , lo cual, evidentemente, no ocurre en la realidad.) En esta sección vamos a considerar éste y otros efectos de la viscosidad.

Por simplicidad, no consideraremos el efecto de la conductividad térmica, para que así el flujo pueda seguir suponiéndose isentrópico en primera aproximación (la disipación viscosa no cuenta por ser un término cuadráticamente pequeño). De acuerdo con (25.44), esta aproximación sólo valdría para fluidos con números de Prandtl grandes, pero que aquí utilizamos por motivos meramente ilustrativos. Las ecuaciones (25.9)-(25.10), en el caso unidimensional, se modificarían a

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad (25.61)$$

$$\rho_o \frac{\partial u}{\partial t} + a_o^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = \left(\frac{4}{3} \mu_o + \mu_{vo} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (25.62)$$

donde μ_o y μ_{vo} son los coeficientes de viscosidad del medio no perturbado. Eliminando la densidad entre estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_o^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad , \quad (25.63)$$

donde, en relación a (25.12), aparece un nuevo término, siendo $\eta \equiv (4\mu_o/3 + \mu_{vo})/\rho_o$ una especie de viscosidad cinemática media. Buscamos las soluciones armónicas de esta ecuación. Para ello definimos la onda monocromática

$$u = \text{Real} \left[u_o(x) e^{i\omega t} \right] \quad . \quad (25.64)$$

Si el término viscoso no apareciese, de acuerdo con (25.38) se tendría que $u_o(x) = A \exp(-i\omega x/a_o)$. En el presente caso, u_o satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 u_o}{dx^2} + \frac{\omega^2/a_o^2}{1 + i\omega\eta/a_o^2} u_o = 0 \quad , \quad (25.65)$$

cuya solución general es

$$u_o(x) = c_1 \exp \left[i \frac{\omega x/a_o}{\sqrt{1 + i\omega\eta/a_o^2}} \right] + c_2 \exp \left[-i \frac{\omega x/a_o}{\sqrt{1 + i\omega\eta/a_o^2}} \right] \quad . \quad (25.66)$$

Obsérvese que $\omega\eta/a_o^2$ es el parámetro pequeño (25.45). Desarrollando en serie alrededor de ese parámetro igual a cero obtendríamos, en el orden más bajo, la solución no viscosa (25.38). Los siguientes términos del desarrollo se obtendrían de

$$\frac{1}{\sqrt{1 + i\omega\eta/a_o^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} i \frac{\omega\eta}{a_o^2} - \frac{3}{8} \left(\frac{\omega\eta}{a_o^2} \right)^2 + \dots \quad . \quad (25.67)$$

Para fijar la solución (es decir, las constantes de integración c_1 y c_2), suponemos que la onda está producida por el movimiento de un pistón en torno al origen $x = 0$ de acuerdo con la ley armónica $x_p(t) = A \sin \omega t$. Este movimiento produce un tren de ondas que, por la acción de la viscosidad, se amortiguan en

$x \rightarrow \pm\infty$. Considerando la onda hacia la derecha ($x > 0$), se tiene que $c_1 = 0$ y $c_2 = A\omega$:

$$u_o(x) = A\omega \exp \left[-i \frac{\omega x}{a_o} \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\omega \eta}{a_o^2} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega \eta \omega x}{a_o^2 a_o} \right]. \quad (25.68)$$

La solución es, por tanto,

$$u(x, t) = A\omega \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\omega \eta \omega x}{a_o^2 a_o} \right] \cos \omega \left[t - \frac{x}{a_o} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\omega \eta}{a_o^2} \right)^2 \right) \right]. \quad (25.69)$$

Vemos que la viscosidad se deja sentir, en relación a la solución no viscosa (25.37), en dos aspectos: en una amortiguación, que tiene lugar en distancias del orden de $(a_o/\omega)(a_o^2/\omega\eta) \sim \lambda(a_o^2/\omega\eta) \gg \lambda$, y en una variación de la velocidad de propagación de las ondas, que ahora depende de la frecuencia ω (aunque suavemente, puesto que $\omega\eta/a_o^2 \ll 1$). Escribiendo la fase de la onda (25.69) como $\omega t - kx$, la nueva velocidad de propagación es, en primera aproximación,

$$a_{o\omega} \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{a_o}{1 - (\omega\eta/a_o^2)^2/8} \simeq a_o \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\omega\eta}{a_o^2} \right)^2 \right]. \quad (25.70)$$

Como ya se comentó en la lección anterior, cuando la velocidad de propagación de una onda depende de su frecuencia, como ocurre en este caso, se dice que el medio es *dispersivo*, ya que al superponer ondas con diferentes frecuencias la velocidad de fase de cada componente es distinta y la onda se distorsiona. Afortunadamente, este efecto dispersivo de la viscosidad es muy débil en las ondas sonoras, al ser de segundo orden en el parámetro pequeño $\omega\eta/a_o^2$; si no fuese así, sería imposible que nos entendiésemos al hablar, ya que ondas con distintas frecuencias originadas en un mismo punto llegarían al oído en distintos tiempos. Como se vió también en la lección anterior, una onda con una determinada frecuencia ω , y la energía acústica asociada a ella, no se propaga a la velocidad de fase, sino a la velocidad de grupo, que en este caso vale

$$c_g \equiv \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{a_o}{1 - 3(\omega\eta/a_o^2)^2/8} \simeq a_o \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega\eta}{a_o^2} \right)^2 \right]. \quad (25.71)$$

La distorsión debida a la dispersión viscosa es, en cualquier caso, muy poco significativa pues la amortiguación de las ondas debida a la viscosidad es

mucho más *efectiva* al ser de primer orden en $\omega\eta/a_o^2$. Además, existe una amortiguación todavía mucho más efectiva que la viscosa debida a la divergencia esférica de las ondas sonoras, como se verá a continuación.

25.6. Ondas esféricas

Las soluciones de la ecuación de ondas dadas en los ejemplos anteriores corresponden a ondas sonoras unidimensionales (planas). Evidentemente, pocos son los casos de interés donde esta aproximación es válida. Por ello se considerará a continuación un caso más realista como es el de las ondas sonoras con simetría esférica. Aunque no deja de ser también una idealización, toda onda producida por una fuente más o menos puntual llega a tener simetría más o menos esférica a distancias de la fuente mucho mayores que el tamaño de ésta.

En un problema con simetría esférica, la ecuación de ondas (25.17) se escribe

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{a_o^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (25.72)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 r\phi}{\partial t^2} - a_o^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi) = 0. \quad (25.73)$$

Por analogía con la ecuación unidimensional de ondas (25.18), esta ecuación tiene por solución general

$$r\phi = F(r - a_o t) + G(r + a_o t), \quad (25.74)$$

donde F y G son funciones arbitrarias de sus argumentos. En lo que sigue se considerará sólo ondas que viajan en la dirección de r creciente, por lo que se hará $G = 0$. Las perturbaciones de la velocidad, presión y densidad vienen dadas por las ondas

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{F'(r - a_o t)}{r} - \frac{F'(r - a_o t)}{r^2}, \quad (25.75)$$

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} = \frac{\rho' a_o}{\rho_o} = -\frac{1}{a_o} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{F'(r - a_o t)}{r}. \quad (25.76)$$

Obsérvese que, a diferencia de una onda plana, $v_r \neq p'/\rho_o a_o$, excepto muy lejos del origen, $r \rightarrow \infty$, en donde la onda esférica es *casi plana*. Por otra

parte, la intensidad de las ondas esféricas decae con r y tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$, incluso en el supuesto presente de fluido ideal (divergencia esférica).

25.6.1. Fuente puntual

Como ejemplo simple significativo se considerará primero una onda originada por una fuente puntual de masa, de caudal conocido $Q(t)$, en el origen de coordenadas (esto podría simular, por ejemplo, un silbido). Por conservación de la masa en $r \rightarrow 0$, $v_r \rightarrow Q(t)/4\pi r^2$; es decir, $\phi \rightarrow -Q(t)/4\pi r$ para $r \rightarrow 0$. Sustituyendo esta condición de contorno en (25.74) se obtiene, teniendo en cuenta que $G = 0$, $F(\tau) = -Q(-\tau/a_0)/4\pi$. Es decir,

$$\phi = -Q(t - r/a_0)/4\pi r, \quad (25.77)$$

$$v_r = \frac{Q(t - r/a_0)}{4\pi r^2} + \frac{Q'(t - r/a_0)}{4\pi a_0 r}, \quad (25.78)$$

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \frac{\rho' a_0}{\rho_0} = \frac{Q'(t - r/a_0)}{4\pi a_0 r}. \quad (25.79)$$

El caudal que atraviesa la esfera de radio r es:

$$q(r, t) = 4\pi r^2 v_r = Q(t - r/a_0) + \frac{r}{a_0} Q'(t - r/a_0), \quad (25.80)$$

que, obviamente, coincide con $Q(t)$ para $r \rightarrow 0$.

Comparando esta solución con la correspondiente a un flujo *incompresible* para este problema (solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \phi = 0$, en vez de la ecuación de ondas; ver capítulo 21),

$$\phi = -Q(t)/4\pi r \quad , \quad v_r = Q(t)/4\pi r^2 \quad , \quad q(r, t) = Q(t) \quad , \quad (25.81)$$

se observa que el efecto de las ondas sonoras es introducir un *retraso* en la transmisión de la información del caudal en el origen $Q(t)$ en un lapso de tiempo r/a_0 , que es el tiempo que tarda una onda sonora en llegar a la distancia r y transmitir la información del origen. Como el retraso depende de r , se origina un término adicional en la expresión del caudal y de la velocidad. Independientemente de la intensidad del caudal Q , la solución anterior es válida para distancias r que satisfacen

$$\frac{v_r}{a_0} \sim \frac{Q_{max}}{r^2 a_0} \ll 1 \quad , \quad r \gg \left(\frac{Q_{max}}{a_0} \right)^{1/2}. \quad (25.82)$$

Para una fuente armónica, por ejemplo,

$$Q(t) = Q_o \cos(\omega t), \tag{25.83}$$

las expresiones (25.78) y (25.79) se escriben

$$v_r = \frac{Q_o}{4\pi r} \left[\frac{\cos[\omega(t - r/a_o)]}{r} - \frac{\omega}{a_o} \sin[\omega(t - r/a_o)] \right], \tag{25.84}$$

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} = -\frac{Q_o \omega}{4\pi r a_o} \sin[\omega(t - r/a_o)]. \tag{25.85}$$

Se observa que la onda se comporta como si fuese plana, es decir, $p'/\rho_o a_o \simeq v_r$, cuando el primer término de (25.84) es pequeño comparado con el segundo, lo cual ocurre para distancias grandes comparadas con la longitud de onda:

$$r \gg \frac{a_o}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{25.86}$$

La intensidad del sonido emitido por una fuente puntual, de acuerdo con (25.56), tiene dirección radial. Para distancias grandes de la fuente (comparada con la longitud de onda del sonido emitido), su magnitud vale

$$I = p'v_r \simeq \frac{\rho_o}{16\pi^2 r^2 a_o} Q'^2(t - r/a_o) = \rho_o a_o \left(\frac{Q_o \omega}{4\pi r a_o} \right)^2 \sin^2[\omega(t - r/a_o)], \tag{25.87}$$

donde se ha incluido el caso de una fuente dada por (25.83).

25.6.2. Dipolo acústico

Otra solución sencilla de la ecuación de ondas con simetría esférica que tiene interés para comprender el comportamiento del sonido producido por fuentes más complejas es el denominado dipolo acústico, consistente en una fuente puntual de caudal $Q(t)$ y un sumidero de caudal $-Q(t)$ separados por una distancia L . En las coordenadas esféricas de la figura 25.3, de acuerdo con (25.79), las fluctuaciones de la presión vienen dadas por

$$\frac{p'(r, \theta, t)}{\rho_o a_o} = \frac{1}{4\pi a_o} \left[\frac{Q'(t - r/a_o)}{r} - \frac{Q'(t - r'/a_o)}{r'} \right], \tag{25.88}$$

donde

$$r' = (r^2 + L^2 - 2rL \cos \theta)^{1/2}. \tag{25.89}$$

El sonido emitido por un dispositivo como el anterior tiene interés para distancias grandes comparadas con L . Para $r \gg L$, $r' \simeq r - L \cos \theta$ y, en primera

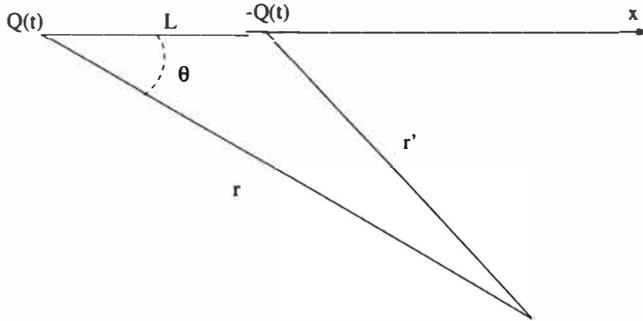


Figura 25.3: Dipolo acústico.

aproximación, (25.88) se escribe (desarrollando en serie de Taylor y despreciando términos cuadráticos en L/r)

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} \simeq -\frac{L \cos \theta}{4\pi a_o} \left[\frac{Q'(t - r/a_o)}{r^2} + \frac{Q''(t - r/a_o)}{a_o r} \right] = \frac{L \cos \theta}{4\pi a_o} \frac{\partial}{\partial r} \frac{Q'(t - r/a_o)}{r}. \quad (25.90)$$

Para poder comparar mejor el sonido emitido por una fuente puntual de masa (o monopolo acústico) con el emitido por un dipolo acústico, supóngase que la fuente es armónica con frecuencia ω [ecuación (25.83)]. La expresión anterior se escribe

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} = \frac{L Q_o \omega \cos \theta}{4\pi a_o r} \left[\frac{\sin[\omega(t - r/a_o)]}{r} - \frac{\omega}{a_o} \cos[\omega(t - r/a_o)] \right]. \quad (25.91)$$

Para distancias grandes comparadas con la longitud de onda, $r \gg \frac{a_o}{\omega} = \frac{\lambda}{2\pi}$, el primer término de (25.91) es despreciable frente al segundo, teniéndose

$$\frac{p'}{\rho_o a_o} \simeq -\frac{L Q_o \omega^2 \cos \theta}{4\pi a_o^2 r} \cos[\omega(t - r/a_o)]. \quad (25.92)$$

Como en este límite $v_r \simeq p'/\rho_o a_o$, el módulo de la intensidad acústica viene dada por

$$I \simeq \rho_o a_o \cos^2 \theta \left(\frac{Q_o \omega}{4\pi r a_o} \right)^2 \left(\frac{\omega L}{a_o} \right)^2 \cos^2[\omega(t - r/a_o)]. \quad (25.93)$$

Comparando con (25.87) se tiene, en primer lugar, que a diferencia del monopolo, el dipolo emite el sonido *direccionalmente*, siendo la intensidad máxima en la dirección de x ($\cos \theta = 1$), y nula para $\theta = \pm\pi/2$. Por otra parte, si

$L\omega/a_o \ll 1$ (es decir, si L es mucho menor que la longitud de onda λ), la intensidad del sonido emitido por el dipolo es mucho menor que la intensidad sonora proporcionada por la fuente puntual (a distancias grandes comparadas con la longitud de onda). Una fuente de sonido se dice que es *acústicamente compacta* si su tamaño es mucho menor que la longitud de onda del sonido emitido. Por tanto, el sonido emitido por un dipolo acústicamente compacto tiene mucha menos intensidad que el emitido por un monopolo con la misma intensidad de la fuente (al menos a distancias grandes de la fuente).

25.7. Propagación del sonido en un medio no uniforme. Acústica geométrica

En las secciones anteriores se ha considerado la propagación de pequeñas perturbaciones en un medio ideal y uniforme. Cuando el fluido no perturbado no es uniforme, es decir, cuando $\rho_o = \rho_o(\vec{x})$ y $p_o = p_o(\vec{x})$ [por ejemplo, debido a las fuerzas gravitatorias, en cuyo caso p_o y ρ_o están relacionados mediante (25.46) si el fluido no perturbado está en reposo], el problema es bastante más complejo de resolver. Sin embargo, es bastante habitual que la longitud característica de variación de las magnitudes no perturbadas sea mucho mayor que la longitud de onda de las perturbaciones u ondas sonoras, pudiéndose así simplificar algo el problema, pues en primera aproximación se puede considerar el medio no perturbado como uniforme, tratándose la no uniformidad como una corrección que va desviando gradualmente los frentes de onda. Este límite, que se suele denominar acústica geométrica, es el que se va a tratar en esta sección.

Se considerará el caso en el que el medio no perturbado está en reposo y es estacionario (si ρ_o dependiese del tiempo, por la ecuación de continuidad el medio no perturbado tendría velocidad no nula). Para el medio no perturbado, la ecuación de cantidad de movimiento se escribe

$$\nabla p_o + \rho_o \nabla U = 0, \quad (25.94)$$

donde U es el potencial de fuerzas másicas. Como se va a considerar el movimiento de pequeñas perturbaciones, la descomposición (25.4)-(25.5) sigue siendo válida. Sustituyendo en las ecuaciones de continuidad (25.1) y de cantidad de movimiento (25.2), teniendo en cuenta (25.94) y despreciando términos cuadráticos en las perturbaciones, se tiene

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_o \vec{v} = 0, \quad (25.95)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} \nabla p' = 0, \quad (25.96)$$

donde el término de (25.96) asociado a las fuerzas másicas, $-\rho' \nabla U$, se ha despreciado de acuerdo con lo discutido en la sección 25.3 [condición (25.48)]. La ecuación de la entropía (25.3) se puede escribir como

$$\frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt}, \quad a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (25.97)$$

Despreciando términos cuadráticos en las perturbaciones, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p_o = a_o^2 \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho_o \right) = -a_o^2 \rho_o \nabla \cdot \vec{v}, \quad (25.98)$$

donde $a_o^2 = (\partial p / \partial \rho)_{s=s_o(\vec{x})}$, y donde se ha sustituido (25.95) en el segundo miembro.

Análogamente a como se hizo en la sección 25.1, se puede obtener una ecuación que sólo involucra a p' restando la derivada de (25.98) respecto al tiempo de la divergencia de (25.96) y eliminando la derivada cruzada de \vec{v} :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a_o^2 \nabla^2 p' = \vec{B} \cdot \nabla p', \quad (25.99)$$

donde

$$\vec{B}(\vec{x}) \equiv \frac{\nabla p_o - a_o^2 \nabla \rho_o}{\rho_o} = -\nabla U - a_o^2 \frac{\nabla \rho_o}{\rho_o}. \quad (25.100)$$

El primer sumando de \vec{B} se puede despreciar en (25.99) de acuerdo con (25.48). Por otro lado, en el caso de un líquido, la densidad del medio no perturbado se puede suponer constante (aunque, por supuesto, existirán perturbaciones de la densidad), con lo que (25.99) se reduce a la ecuación de ondas típica de un medio uniforme, *pero* con velocidad de propagación que depende de la posición, $a_o(\vec{x})$. En general, para obtener \vec{B} hay que conocer $\rho_o(\vec{x})$. Para ello, además de (25.94) y la ecuación de estado del fluido, hay que conocer alguna relación más del medio no perturbado, como por ejemplo la distribución de temperatura (ver lección 12).

Sabemos que en el caso de un medio uniforme (25.99) tiene soluciones que pueden escribirse como una superposición de ondas planas (véase §25.2.3) en la forma

$$p' = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \tag{25.101}$$

donde \vec{k} es el vector de onda y ω la frecuencia. Sustituyendo en la ecuación con a_o constante, se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 - k^2 a_o^2 = 0, \tag{25.102}$$

que relaciona la longitud de onda $\lambda \equiv 2\pi/k$ con la velocidad de propagación y la frecuencia, siendo $k^2 = \vec{k} \cdot \vec{k}$. Cuando a_o depende de \vec{x} , la solución (25.101) no es válida. Sin embargo, se puede construir una solución que en primera aproximación tiene esa forma en el límite de la acústica geométrica. Es decir, cuando las variaciones de a_o (y, por tanto, de ρ_o y p_o) con \vec{x} ocurren en una longitud característica l que es mucho mayor que la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll l \sim |\nabla \ln a_o|^{-1}. \tag{25.103}$$

Para ello escribimos la solución de (25.99) en la forma

$$p' = A(\vec{x})e^{i\Psi(\vec{x},t)}, \tag{25.104}$$

donde, por identificación con la solución básica (25.101), se define

$$\vec{k} \equiv \nabla\Psi, \quad \omega \equiv -\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{25.105}$$

En general, A , \vec{k} y ω son funciones de \vec{x} y t . Sin embargo, en el presente caso en el que el medio no perturbado no depende del tiempo, dado que la ecuación (25.99) tiene soluciones con variables separadas, A sólo puede depender de \vec{x} y Ψ tiene que ser suma de una función de \vec{x} y otra de t . Además, como se corroborará más adelante, la función de t tiene que ser tal que su derivada (ω) tiene que ser constante. Es decir, en el presente caso se tiene

$$\Psi(\vec{x}, t) = S(\vec{x}) - \omega t, \quad \vec{k}(\vec{x}) \equiv \nabla S(\vec{x}), \tag{25.106}$$

donde ω es una constante. Las ecuaciones para las funciones A y \vec{k} (o S) se obtienen de sustituir (25.104), con (25.106), en (25.99):

$$(a_o^2 k^2 - \omega^2)A - a_o^2 \nabla^2 A - \vec{B} \cdot \nabla A = i \left[2a_o^2 \vec{k} \cdot \nabla A + a_o^2 A \nabla \cdot \vec{k} + A \vec{k} \cdot \vec{B} \right], \tag{25.107}$$

$$1, \quad 1, \quad \frac{\lambda^2}{l^2}, \quad \frac{\lambda^2}{l^2}, \quad \frac{\lambda}{l}, \quad \frac{\lambda}{l}, \quad \frac{\lambda}{l},$$

donde se han escrito debajo de la ecuación los órdenes de magnitud relativos de los distintos términos, suponiendo que $a_0^2 k^2 \sim \omega^2$. Por consiguiente, en orden más bajo (orden relativo unidad) se tiene, formalmente, la misma ecuación que la relación de dispersión (25.102) de una onda plana:

$$\omega^2 = k^2 a_0^2, \quad (25.108)$$

aunque esta relación es ahora una ecuación diferencial para la función $S(\vec{x})$,

$$(\nabla S)^2 = \frac{\omega^2}{a_0^2}. \quad (25.109)$$

De esta ecuación se desprende que, en primera aproximación en λ/l , ω no puede depender del tiempo, como se ha supuesto. En el siguiente orden (λ/l), se tiene

$$2a_0^2 \vec{k} \cdot \nabla A + a_0^2 A \nabla \cdot \vec{k} + A \vec{k} \cdot \vec{B} = 0. \quad (25.110)$$

Por último, en orden λ^2/l^2 , se tiene

$$a_0^2 \nabla^2 A + \vec{B} \cdot \nabla A = 0. \quad (25.111)$$

Antes de pasar a resolver formalmente estas ecuaciones, conviene decir unas palabras sobre la naturaleza física de la solución que se está buscando y el por qué se denomina este límite *acústica geométrica*. Si el medio fuese uniforme, $S(\vec{x}) = \vec{k} \cdot \vec{x}$, donde \vec{k} , que sería constante, representa la dirección en la que se propagan los frentes de las ondas planas con frecuencia ω , cuya fase es $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$, y cuya amplitud permanece constante. Cuando el medio no es uniforme, pero la longitud característica de variación del medio es mucho mayor que la longitud de onda de las ondas en las que uno está interesado, la solución es formalmente muy parecida, pero el vector de onda \vec{k} y la amplitud varían suavemente a medida que la onda se propaga en el medio. La función $S(\vec{x})$, denominada *eikonal*, representa, en cada instante, los frentes de onda, de forma que \vec{k} es el gradiente de S . Se verá que las ecuaciones (25.109)-(25.110) se pueden reducir, por el método de las características, a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre un conjunto de curvas $\vec{x}(t)$ (llamadas características), para el vector de onda \vec{k} , para los frentes de onda S y para la amplitud A . De esta forma, uno va construyendo la solución a lo largo de esas características $\vec{x}(t)$, que son tangentes en todo momento a los vectores de onda y representan, por tanto, la dirección de propagación de las ondas, la cual va variando suavemente (en una escala mucho mayor que la longitud

de onda) a medida que las ondas se propagan. En el caso de ondas electromagnéticas, este límite se denomina óptica geométrica, pues las características representan los *rayos* de luz que, con ecuaciones análogas a las que se verán a continuación, se pueden ir trazando a través del medio ligeramente no uniforme. Es por ello que este límite se denomina acústica geométrica. Mediante el procedimiento que se verá a continuación, uno puede obtener fácilmente la dirección de propagación de los frentes de ondas (que dejan de ser planos y de moverse paralelamente a sí mismos) a medida que se va curvando por el medio no uniforme, además de todos los demás detalles de la onda, como por ejemplo la variación de su amplitud.

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden como (25.109), que se escribirá en la forma

$$F(S, \vec{k}, \vec{x}) \equiv \vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{a_0^2(\vec{x})} = 0, \quad \vec{k} \equiv \nabla S, \quad (25.112)$$

es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre ciertas curvas del espacio (características) que, en coordenadas cartesianas, vienen dadas por las ecuaciones⁶

$$\frac{dx_1}{\partial F/\partial k_1} = \frac{dx_2}{\partial F/\partial k_2} = \frac{dx_3}{\partial F/\partial k_3}. \quad (25.113)$$

Teniendo en cuenta que en el presente caso, de acuerdo con (25.112), $\partial F/\partial k_i = 2k_i$, $i = 1, 2, 3$, usando la variable auxiliar t para recorrer las curvas (25.113), las características vienen dadas por el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = 2\vec{k}. \quad (25.114)$$

Se observa que, como se anunció anteriormente, las características son tangentes a los vectores de onda, proporcionando así la *dirección* de propagación de las ondas (perpendicular a los frentes de ondas). La variable auxiliar t , que es un parámetro usado para recorrer las características, hace las veces de un tiempo. Para poder resolver la ecuación (25.114) hace falta conocer \vec{k} sobre las características. Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\vec{k}}{dt} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla \vec{k} = 2\vec{k} \cdot \nabla \vec{k} = \nabla k^2, \quad (25.115)$$

⁶Ver, por ejemplo, R. Courant and D. Hilbert, 1989, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley, Nueva York; reimpresión), vol. II, capítulo I.

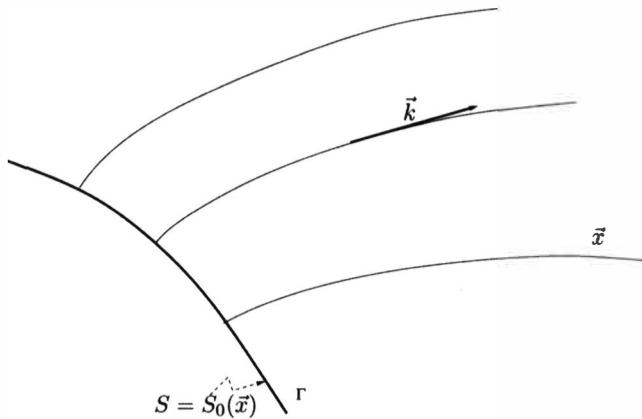


Figura 25.4: Características que parten de un frente inicial Γ .

de (25.112) se tiene

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \omega^2 \nabla \left(\frac{1}{a_0^2(\vec{x})} \right). \quad (25.116)$$

Aunque no hace falta para calcular \vec{k} sobre las características, uno puede obtener también una ecuación para la eikonal S sobre las características:

$$\frac{dS}{dt} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla S = 2\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\omega^2}{a_0^2}. \quad (25.117)$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (25.114), (25.116) y (25.117) son las denominadas ecuaciones características de la ecuación en derivadas parciales de primer orden, no lineal, (25.112). Conocido $S = S_0(\vec{x})$ sobre una cierta superficie $\Gamma(\vec{x}) = 0$, estas ecuaciones permiten conocer $S(\vec{x})$ en todo el espacio integrando las ecuaciones anteriores sobre las características $\vec{x}(t)$ que parten de Γ (ver figura 25.4). Si la superficie Γ representa, como es habitual, el frente de onda inicial (que como se ve no tiene por qué ser plano) en donde $S = S_0$ es constante, los sucesivos frente de onda en el tiempo se propagan perpendicularmente a las características. Una ecuación que se puede resolver por este método de las características, cuyas soluciones se *propagan* a partir de una condición inicial, se dice que es *hiperbólica*, y a sus soluciones se le llaman ondas.⁷

Paralelamente se puede obtener la amplitud de las ondas $A(\vec{x})$ integrando también a lo largo de las características:

⁷Se volverá sobre este tema en el capítulo siguiente.

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla A = 2\vec{k} \cdot \nabla A = -A \left(\nabla \cdot \vec{k} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{k}}{a_o^2} \right), \quad (25.118)$$

donde se ha hecho uso de (25.110). Para poder resolver esta ecuación hace falta una ecuación para $\nabla \cdot \vec{k}$ a lo largo de las características. Sin embargo, es más fácil obtener una ecuación para $\nabla \vec{k}$ y después hallar su traza:

$$\frac{d}{dt} \nabla \vec{k} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla \nabla \vec{k} = 2\vec{k} \cdot \nabla \nabla \vec{k};$$

$$\nabla \nabla k^2 = \nabla(2\vec{k} \cdot \nabla \vec{k}) = 2\nabla \vec{k} \cdot \nabla \vec{k} + 2\vec{k} \cdot \nabla \nabla \vec{k};$$

$$\frac{d}{dt} \nabla \vec{k} = \nabla \nabla k^2 - 2\nabla \vec{k} \cdot \nabla \vec{k} = \omega^2 \nabla \nabla \left(\frac{1}{a_o^2} \right) - 2\nabla \vec{k} \cdot \nabla \vec{k}. \quad (25.119)$$

Así, conocido $a_o(\vec{x})$ y $B(\vec{x})$, (25.114), (25.116), (25.117), (25.118) y (25.119) permiten obtener \vec{x}, \vec{k}, S, A y $\nabla \vec{k}$ (17 magnitudes escalares en total) a lo largo de las características partiendo de los valores de S y A sobre Γ . Téngase en cuenta, además, que todo lo anterior es para una onda monocromática con frecuencia ω . Si la onda inicial sobre Γ tiene una cierta distribución de frecuencias, se puede aplicar el principio de superposición y aplicar el proceso anterior para cada frecuencia.

La integración de este sistema de ecuaciones a veces da lugar a superficies donde \vec{k} se anula, a partir de las cuales ya no es posible continuar de acuerdo con (25.114). Lo que ocurre en realidad es que la aproximación de la acústica geométrica deja de valer antes de llegar a estas superficies (denominados cáusticos), debido a que la hipótesis $2\pi/k \ll l$ deja de ser válida. Existen métodos aproximados (asintóticos) para resolver la ecuación de ondas original en las proximidades de estos cáusticos y así poder seguir con la acústica geométrica una vez *saltado el escollo* (ver, por ejemplo, Lighthill, 1978; formalmente es algo parecido a lo que se hace con una onda de choque en la dinámica de gases). Los cáusticos pueden incluso corresponder a superficies del medio no homogéneo que el sonido emitido desde una determinada fuente no puede atravesar, delimitando así una zona de *silencio*. Esto puede ser de importancia, por ejemplo, para que un submarino no pueda ser detectado por un sonar.

Referencias.

- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo VIII.
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957. Capítulo 3.
- J. Lighthill, 1978. Capítulos 1 y 4.

Capítulo 26

Ondas no lineales en gases

En el capítulo anterior se analizó el movimiento de pequeñas perturbaciones en un fluido ideal, cuyo ejemplo más típico son las ondas sonoras. Cuando las amplitudes de las perturbaciones no son pequeñas, es decir, cuando son del mismo orden que las magnitudes no perturbadas, las ecuaciones lineales utilizadas allí dejan de ser válidas. Sin embargo, bajo la hipótesis de flujo isentrópico, las soluciones son *formalmente* parecidas a las obtenidas en el problema lineal, aunque el comportamiento físico del fluido es totalmente distinto. Más concretamente, en el caso unidireccional que se va a considerar a continuación, se verá que las ecuaciones son hiperbólicas, cuyas soluciones son, bajo ciertas condiciones, *ondas* que se *propagan* a una velocidad que es igual a la velocidad del fluido más (o menos) la velocidad local del sonido. Sin embargo, como esta velocidad varía de un punto a otro, las ondas se van deformando en su propagación, siendo así el comportamiento físico del fluido muy diferente al que se tiene en una onda lineal.

26.1. Flujo unidimensional e isentrópico de un gas ideal

Como el problema es bastante complejo en general, se abordará sólo el caso unidimensional. Las ecuaciones que describen la evolución de la velocidad $\vec{v} = u(x, t)\vec{e}_x$, la densidad $\rho(x, t)$ y la presión $p(x, t)$ en un flujo isentrópico de un gas ideal son [ecuaciones (19.4), (19.5) y (19.20)]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (26.1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (26.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{p}{\rho^\gamma} = 0, \quad (26.3)$$

donde γ es la relación de calores específicos. Si el fluido parte de un estado inicial homogéneo, la entropía de todas las partículas fluidas es la misma, con lo que uno puede eliminar la presión del problema utilizando

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (26.4)$$

siendo a la velocidad local del sonido. De esta forma, las ecuaciones (26.1) y (26.2) se pueden escribir en una forma vectorial compacta como

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{u}_t + \overline{\overline{B}} \cdot \vec{u}_x = 0, \quad (26.5)$$

siendo

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad (26.6)$$

$$\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \overline{\overline{B}} = \begin{pmatrix} u & \rho \\ a^2 & \rho u \end{pmatrix}, \quad (26.7)$$

y donde los subíndices t y x representan derivación parcial en relación a esas variables.

26.1.1. Método de las características. Invariantes de Riemann

Se va a resolver la ecuación (26.5) por el método de las características, que consiste en transformar dicha ecuación en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias sobre ciertas trayectorias del plano (t, x) , denominadas características. Para encontrarlas, tomamos un incremento arbitrario (dt, dx) en el entorno de un punto (t, x) cualquiera. La correspondiente variación de \vec{u} viene dada por

$$d\vec{u} = \vec{u}_x dx + \vec{u}_t dt. \quad (26.8)$$

Despejando \vec{u}_t y sustituyendo en (26.5), se tiene

$$\left(\overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A}} \frac{dx}{dt} \right) \cdot \vec{u}_x + \overline{\overline{A}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \quad (26.9)$$

Si se multiplica esta ecuación escalarmente por la izquierda por el vector arbitrario $\vec{\lambda}^T \equiv [\lambda_1, \lambda_2]$, el problema se reduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias si

$$\vec{\lambda}^T \cdot \left(\overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A}} \frac{dx}{dt} \right) = 0. \tag{26.10}$$

Este sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas para las componentes de $\vec{\lambda}$ tiene solución si el determinante de la matriz entre paréntesis es igual a cero, proporcionando así dos (en este caso) direcciones dx/dt en el plano (t, x) que son las características del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden (26.5). Por tanto, las características vienen dadas por

$$\det \left(\overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A}} \frac{dx}{dt} \right) = 0. \tag{26.11}$$

Si todas las características son reales y distintas, el sistema se dice que es hiperbólico y el método de las características se puede utilizar para hallar soluciones reales del problema. En el presente caso, las dos características son siempre reales y distintas (el sistema es siempre hiperbólico), y vienen dadas por:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a. \tag{26.12}$$

De acuerdo con (26.9), a lo largo de estas características \vec{u} satisface la ecuación

$$\vec{\lambda}^T \cdot \overline{\overline{A}} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \tag{26.13}$$

donde la dirección del autovector $\vec{\lambda}^T$ se obtiene de (26.10). Para las dos características (26.12), el cociente λ_1/λ_2 viene dado, respectivamente, por

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \pm a, \tag{26.14}$$

de forma que las dos ecuaciones características (26.13) son:

$$a \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{sobre} \quad \frac{dx}{dt} = u + a \quad (C_+) \quad , \tag{26.15}$$

$$-a \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{sobre} \quad \frac{dx}{dt} = u - a \quad (C_-) \quad . \tag{26.16}$$

Estas dos ecuaciones diferenciales ordinarias sobre sus respectivas características (que se han denominado C_+ y C_- por simplicidad) se pueden resolver

utilizando cualquier técnica analítica o numérica partiendo de una condición de contorno o inicial. En general, conocido el valor de \vec{u} sobre una curva $\Gamma(t, x) = 0$ del plano (t, x) , la solución se *propaga* a lo largo de las características C_+ y C_- . Por ello, las soluciones de un sistema hiperbólico que parte de una determinada condición de contorno se suele denominar *onda*. Por ejemplo, en el caso de pequeñas perturbaciones considerado en el capítulo anterior, estas ecuaciones se escriben, teniendo en cuenta (25.4)-(25.5) y considerando sólo los términos lineales en las pequeñas perturbaciones,

$$a_o \frac{d\rho'}{dt} + \rho_o \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{sobre} \quad \frac{dx}{dt} = a_o \quad (C_+) \quad , \quad (26.17)$$

$$-a_o \frac{d\rho'}{dt} + \rho_o \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{sobre} \quad \frac{dx}{dt} = -a_o \quad (C_-) \quad . \quad (26.18)$$

Por tanto, las características son ahora *rectas* en el plano (t, x) con pendientes $\pm a_o$, y representan ondas *lineales* (es decir, que se propagan sin deformación) que viajan hacia la derecha y hacia la izquierda con la velocidad del sonido no perturbado a_o . De hecho, (26.17) implica que $a_o\rho' + \rho_o u$ es constante sobre $dx/dt = a_o$, y (26.18) que $-a_o\rho' + \rho_o u$ lo es sobre $dx/dt = -a_o$. Obviamente, ésta es la solución dada en la sección 25.2 para una onda plana.

De manera análoga al caso lineal, las ecuaciones características (26.15)-(26.16), se pueden escribir de una forma mucho más simple haciendo uso de los denominados **invariantes de Riemann**, que son funciones que se conservan a lo largo de las características C_+ y C_- . Para encontrarlos, se sustituyen las coordenadas (x, t) por coordenadas (α, β) a lo largo de las características. Es decir, se definen las nuevas coordenadas

$$\alpha = \alpha(x, t) \quad , \quad (26.19)$$

$$\beta = \beta(x, t) \quad , \quad (26.20)$$

de tal forma que cuando $\alpha = \text{constante}$ nos movemos por C_- ($dx/dt = u - a$), mientras que las funciones $\beta = \text{constante}$ constituyen las características C_+ ($dx/dt = u + a$). Así, por definición de α y β ,

$$\frac{dx}{dt} = u + a = -\frac{\beta_t}{\beta_x} = \frac{x_\alpha}{t_\alpha} \quad , \quad (26.21)$$

$$\frac{dx}{dt} = u - a = -\frac{\alpha_t}{\alpha_x} = \frac{x_\beta}{t_\beta} \quad , \quad (26.22)$$

donde las últimas igualdades de las dos expresiones anteriores se obtienen de $dx/dt = x_\alpha/t_\alpha$ cuando $\beta = \text{constante}$, y análogamente cuando $\alpha = \text{constante}$.

Las ecuaciones (26.15) y (26.16) junto con (26.21)-(26.22) se pueden escribir como

$$a\rho_\alpha + \rho u_\alpha = 0 \quad , \quad (26.23)$$

$$-a\rho_\beta + \rho u_\beta = 0 \quad , \quad (26.24)$$

$$x_\alpha = (u + a)t_\alpha \quad , \quad (26.25)$$

$$x_\beta = (u - a)t_\beta \quad , \quad (26.26)$$

donde se ha tenido en cuenta que, sobre $\beta = \text{constante}$ (característica C_+), las variaciones de ρ y u son variaciones con respecto a α , y análogamente en C_- .

Buscamos funciones $r(u, \rho)$ y $s(u, \rho)$ (invariantes de Riemann) que sean constantes en C_+ y C_- , respectivamente. Claramente, de (26.23), $r = u + g$, donde

$$g_\alpha = \frac{a\rho_\alpha}{\rho} \quad , \quad (26.27)$$

ya que en ese caso, $r_\alpha = 0$, es decir, $r = \text{constante}$ sobre la característica C_+ ($\beta = \text{constante}$). Por otro lado, de (26.24), $s = -u + g$. Es costumbre definir estas funciones como sigue:

$$2r \equiv u + g = u + \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{constante sobre } \beta = \text{constante } (C_+) \quad , \quad (26.28)$$

$$2s \equiv -u + g = -u + \int_{\rho_o}^{\rho} \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \text{constante sobre } \alpha = \text{constante } (C_-) \quad , \quad (26.29)$$

que es la forma habitual de definir los invariantes de Riemann $r = r(\alpha)$ y $s = s(\beta)$, donde el subíndice o se refiere a valores de referencia. En el caso de un gas ideal, la función $a(\rho)$ es

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma A \rho^{\gamma-1}} \quad , \quad (26.30)$$

donde $A = p/\rho^\gamma$ es una constante. Sustituyendo en (26.28)-(26.29) se tiene

$$r = \frac{u}{2} + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1} \left(\rho^{(\gamma-1)/2} - \rho_o^{(\gamma-1)/2} \right) = \frac{u}{2} + \frac{a - a_o}{\gamma-1} \quad , \quad (26.31)$$

$$s = -\frac{u}{2} + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1} \left(\rho^{(\gamma-1)/2} - \rho_o^{(\gamma-1)/2} \right) = -\frac{u}{2} + \frac{a - a_o}{\gamma-1} \quad . \quad (26.32)$$

Es decir, $g = \frac{2}{\gamma-1}(a - a_0)$. De estas expresiones está claro que si se utiliza (a, u) como variables dependientes en vez de (ρ, u) , el problema se reduce a

$$\frac{u}{2} + \frac{a}{\gamma-1} = \text{constante sobre } \frac{dx}{dt} = u + a \quad (C_+) \quad , \quad (26.33)$$

$$\frac{u}{2} - \frac{a}{\gamma-1} = \text{constante sobre } \frac{dx}{dt} = u - a \quad (C_-) \quad . \quad (26.34)$$

Obsérvese que en el caso de pequeñas perturbaciones en torno a las condiciones de referencia, los invariantes de Riemann son $r = (u + a_0\rho'/\rho_0)/2 = [u + p'/(\rho_0 a_0)]/2$ y $s = (-u + a_0\rho'/\rho_0)/2 = [-u + p'/(\rho_0 a_0)]/2$, constantes sobre las características $dx/dt = a_0$ y $dx/dt = -a_0$ (que ahora son rectas), respectivamente, lo cual obviamente coincide con la solución dada en el capítulo anterior para una onda plana.

26.1.2. Ondas simples

Para tener una idea cualitativa de las propiedades de la solución anterior, se considerará un problema típico de condiciones iniciales. Supóngase que se tiene un medio (por supuesto unidimensional) que está inicialmente en reposo y es uniforme ($u = 0, \rho = \rho_0$) en todas partes excepto en una región entre $x = -L$ y $x = L$. Conocida la perturbación inicial en $-L \leq x \leq L$, se quiere saber cómo evoluciona (se propaga) la perturbación. Para ello se dibuja en el plano (x, t) las características C_+ ($dt/dt = u + a$) y C_- ($dx/dt = u - a$) que parten de la recta $t = 0$, donde se conoce u y ρ (ver figura 26.1). Por supuesto, no se pueden dibujar estas curvas sin conocer previamente la solución, pero es posible deducir algunas de sus propiedades cualitativas.

Por ejemplo, a lo largo de curvas C_- , $2s = -u + g$ es constante, con un valor distinto, en general, en cada una de ellas. Sin embargo, como todas las características C_- que se originan en $x \geq L$ parten de una región inicialmente en reposo y uniforme ($u = 0, \rho = \rho_0, g = 0$), la constante de todas las características a la derecha de la que pasa por $x = L$, C_-^L , es nula; es decir

$$u = g = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a(\rho')}{\rho'} d\rho' \quad \text{a la derecha de } C_-^L \quad . \quad (26.35)$$

Por motivos análogos,

$$u = g \quad \text{a la izquierda de } C_-^{-L} \quad , \quad (26.36)$$

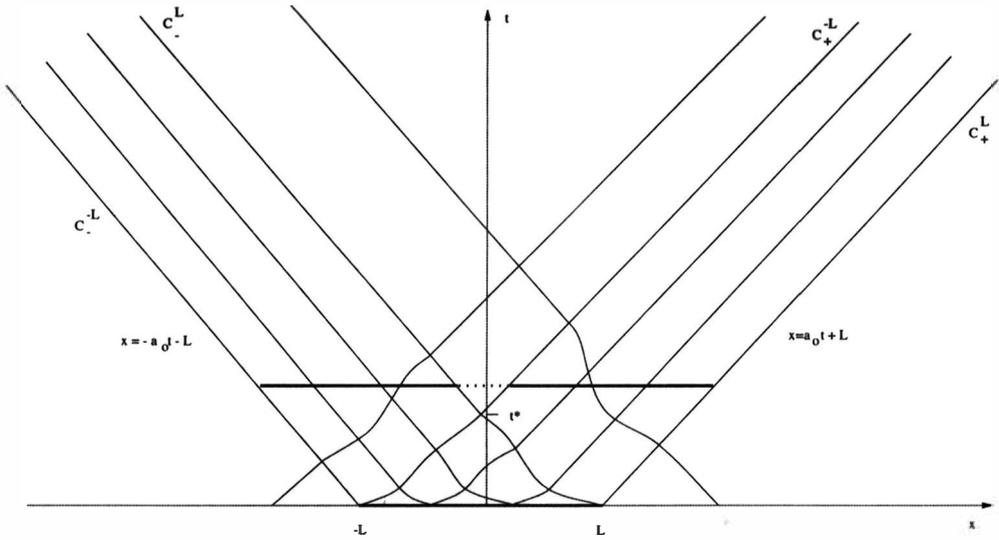


Figura 26.1: Típico problema de valor inicial.

$$u = -g \quad \text{a la izquierda de } C_+^{-L}, \tag{26.37}$$

$$u = -g \quad \text{a la derecha de } C_+^L. \tag{26.38}$$

La conjunción de (26.35) y (26.38) nos dice que $u = g = 0$ a la derecha de C_+^L , mientras que (26.36) y (26.37) implican que $u = g = 0$ a la izquierda de C_-^{-L} , constituyendo estas características los límites del medio no perturbado a lo largo del tiempo (medio que no ha sido alcanzado por onda alguna). Por otra parte, a partir de un cierto t^* , correspondiente al instante en que C_-^L y C_+^{-L} intersectan, la región que queda entre C_-^L y C_+^L también cumple que $u = g = 0$; es decir, se queda sin perturbar una vez que ha pasado la onda. En otras palabras, en el período $0 \leq t < t^*$, las perturbaciones están mezcladas; cuando $t > t^*$, las perturbaciones se separan y se propagan como dos ondas simples, una hacia la derecha y otra hacia la izquierda, dejando una región sin perturbar entre ellas (ver figura 26.1).

Una onda simple se define como una solución en la que alguno de los invariantes de Riemann, r ó s , es constante. Por ejemplo, en la onda que viaja hacia la derecha entre C_+^{-L} y C_+^L , a la derecha de C_-^L , se tiene, de (26.35), que $u = g$. Por tanto, en las características C_+ de esta onda $2r = u + g = 2u = 2g =$ constante. Como g es constante, también lo es a , y las características C_+ de esta onda son rectas ya que $dx/dt = u + c =$ constante (figura 26.1). Algo análogo ocurre con las características C_- de la onda simple que viaja hacia la izquierda.

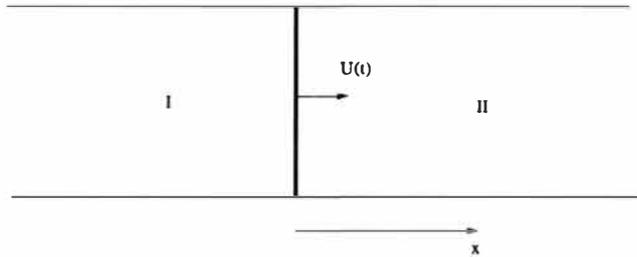


Figura 26.2: Problema del pistón.

26.2. Ondas simples generadas por el movimiento de un pistón. Ondas de choque

Ondas simples se producen, como se acaba de ver, en problemas de valor inicial cuando parte del fluido está inicialmente en reposo y con densidad uniforme. Se caracterizan porque uno de los invariantes de Riemann, bien r o bien s , es constante en todo el dominio (x, t) considerado, dando lugar a características rectilíneas. Las ondas simples están siempre, por consiguiente, en contacto con alguna zona en reposo del gas, y están delimitadas por un par de características. Un ejemplo típico donde se producen ondas simples es en el movimiento de un gas en un conducto provocado por el desplazamiento de un pistón, si inicialmente el gas se encuentra en reposo y es uniforme. Se utilizará este ejemplo para analizar los dos tipos básicos de ondas simples: ondas de expansión y ondas de compresión.

Supóngase que en el interior de un cilindro, que inicialmente contiene un gas en reposo con densidad uniforme ρ_0 , existe un pistón en $x = 0$ que se pone en movimiento en $t = 0$ hacia $x > 0$ con velocidad $U(t)$. No todas las partes del gas se ven afectadas por el movimiento del pistón instantáneamente, sino que sendas ondas avanzan desde el pistón hacia ambos lados de él, y sólo las partículas que han sido alcanzadas por el frente de estas ondas se ven perturbadas de su estado de reposo inicial. En la región del gas de la cual se aleja el pistón (región I en la figura 26.2) se produce una onda de expansión, cuyo frente de onda se propaga a la velocidad del sonido $a_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ correspondiente al gas en reposo. En la región hacia la cual avanza el pistón (región II) se produce una onda de compresión que, como se verá, generalmente degenera en una onda de choque.

26.2.1. Onda de expansión

Supóngase que la velocidad del pistón, que originalmente estaba en reposo, aumenta hacia un máximo $U_F < a_o$ en un cierto tiempo T . En un diagrama (x, t) , la trayectoria del pistón sería como la que se indica en la figura 26.3: la pendiente dx/dt del pistón iría creciendo desde cero en el origen hasta alcanzar un máximo en el punto F , a partir del cual la trayectoria es rectilínea.

Como todas las características C_+ que parten de $x < 0$ son rectas con pendiente a_o , con el mismo invariante de Riemann $r = 0$, en todo el gas a la izquierda del pistón se tiene $g = -u$. En la región (A) (ver figura 26.3) a la izquierda de la característica C_o^- que pasa por el origen se tiene, además, que $g = u$ al ser $s = 0$ para todas las características C_- que pasan por el eje $t = 0$ para $x < 0$. Por tanto, en la región (A) el gas está todavía sin perturbar: $u = g = 0, \rho = \rho_o$. En la región (B) entre C_o^- y la característica C_F^- que pasa por el punto F , se tiene que, sobre las características C_- , $-u + g = 2g = -2u =$ constante; es decir, $u = U, g = \frac{2}{\gamma-1}(a - a_o) = -U$. Estas características son rectas de pendiente

$$\frac{dx}{dt} = u - a = U - a_o + \frac{\gamma - 1}{2}U = \frac{\gamma + 1}{2}U - a_o \quad (C_-). \quad (26.39)$$

Debe observarse que estas rectas nunca se cortan si U va creciendo ($\dot{U} \geq 0$). Así, la solución en esta región se puede expresar en términos del parámetro τ (tiempo asociado al movimiento del pistón) de la siguiente forma:

$$x - x_p(\tau) = \left(\frac{\gamma + 1}{2}U(\tau) - a_o \right) (t - \tau), \quad x_p(\tau) \equiv \int_o^\tau U(t)dt, \quad (26.40)$$

$$u = U(\tau), \quad (26.41)$$

$$a = a_o - \frac{\gamma - 1}{2}U(\tau), \quad (26.42)$$

$$\rho = \left[\rho_o^{(\gamma-1)/2} - \frac{(\gamma - 1)U(\tau)}{2\sqrt{\gamma p_o/\rho_o^\gamma}} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad (26.43)$$

$$p = p_o(\rho/\rho_o)^\gamma. \quad (26.44)$$

Es decir, para cada valor de τ , que corresponde a una determinada posición del pistón $x_p(\tau)$, en el punto x correspondiente a cada instante $t > \tau$ dado por (26.40), la velocidad, densidad y presión vienen dadas por (26.41), (26.43) y (26.44), respectivamente.

Esta región (B) constituye una onda simple de expansión que se propaga hacia $x < 0$ con velocidad $(\gamma + 1)U/2 - a_o$, *informando* así al fluido del movimiento del pistón. Como cada nueva posición del pistón se propaga a una velocidad menor que la anterior (si U va aumentando), la información no se *cruza*. Para cada instante $t > T$, la extensión espacial de esta onda es $x_F(t) - x_I(t)$ (ver figuras 26.3 y 26.4), donde $x_F(t)$ se obtiene de (26.40) haciendo $U = U_F$, $\tau = T$, y $x_I(t) = -a_o t$ es el valor de x para $U = 0$, $\tau = 0$. Detrás de esta onda [región (C) en la figura 26.3], las expresiones (26.40)-(26.44) siguen siendo válidas, pero en ellas $U = U_F = \text{constante}$ (las características C_- son todas paralelas a C_-^F). Por tanto, después de pasar la onda el gas queda con una velocidad U_F constante y con una densidad y una presión uniformes dadas por (26.43)-(26.44) con $U = U_F$. En la figura 26.4 se esquematiza la forma de los perfiles de $u(x)$ y $\rho(x)$ para un instante $t > T$. Estos perfiles se obtienen haciendo $t = \text{constante}$ ($> T$ en este caso) en (26.40), despejando τ y sustituyendo en (26.41)-(26.44) [ver ejemplo en la sección 26.2.4].

26.2.2. Onda de compresión. Onda de choque

Consideremos ahora la onda de compresión que se produce a la derecha del pistón. En esta zona de compresión $s = 0$, es decir, $g = \frac{2}{\gamma-1}(a - a_o) = u$. Existen tres regiones, (A), (B) y (C), similares a las anteriores (ver figura 12.5). En la región (A), las características C_+ son rectas de pendiente a_o , y en ellas el gas está sin perturbar. En la región (B) se tiene que, sobre las características C_+ , $u + g = 2u = \text{constante}$. Es decir, $u = U$, $a = a_o + \frac{\gamma-1}{2}U$. La pendiente de estas características es

$$\frac{dx}{dt} = u + a = a_o + \frac{\gamma+1}{2}U \quad (C_+) \quad . \quad (26.45)$$

Por tanto, opuestamente a lo que ocurre en una onda de expansión, las pendientes crecen desde a_o hasta $a_o + \frac{\gamma+1}{2}U_F$ y llegan a cortarse. En otras palabras, a medida que la velocidad del pistón crece, la *información* viaja más deprisa y se *agolpa* con la que han salido antes del pistón. Como el cruce de dos características implica que en un mismo punto el fluido tiene, por ejemplo, dos velocidades distintas (le ha llegado al mismo tiempo informaciones que salieron en tiempos distintos del movimiento del pistón), la situación es físicamente imposible.

Lo que ocurre en realidad es que entre las dos envolventes de las características que se cruzan se forma una **onda de choque** o discontinuidad que separa mediante un salto finito de entropía dos regiones de flujo isentrópico. El proceso se puede ver más claramente si observamos la evolución del perfil

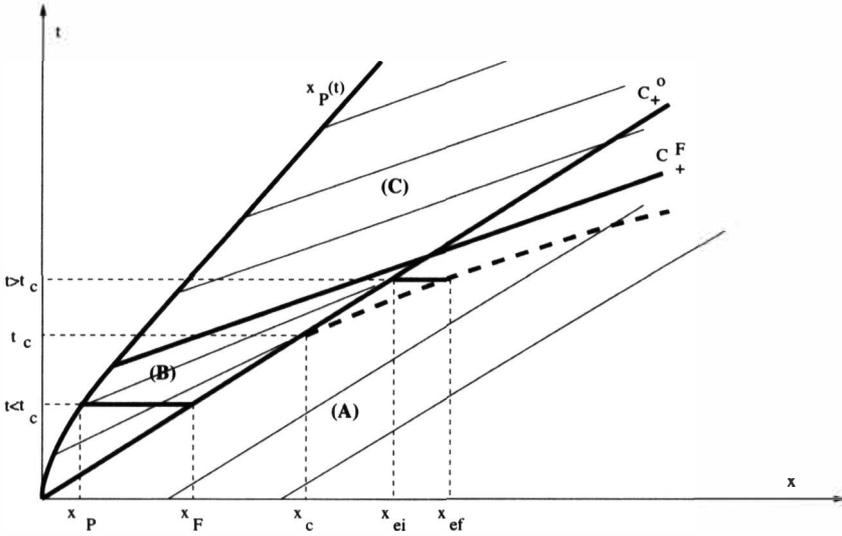


Figura 26.5: Onda de compresión. Con línea gruesa a trazos se muestra la trayectoria de la onda de choque.

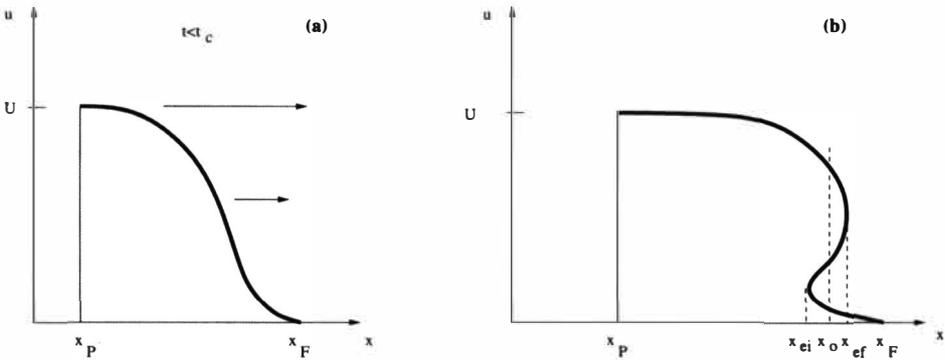


Figura 26.6: Perfiles de velocidad isentrópicos para $t < t_c$ (a) y $t > t_c$ (b).

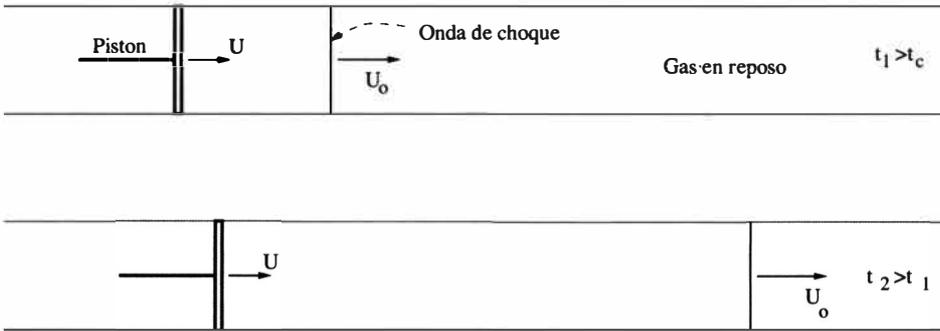


Figura 26.7: Onda de choque producida por el movimiento de un pistón.

de velocidad. Antes de que se corten las dos primeras características [lo cual ocurre en el punto (t_c, x_c) de la figura 26.5] el perfil de velocidad tiene una forma tal como se muestra en la figura 26.6(a), que vale U en $x = x_p$ y se anula en $x = x_f$. Como u permanece constante para un observador que se mueve con velocidad $u + a = a_o + (\gamma + 1)u/2$, que es la velocidad de propagación sobre las características, los puntos con mayor velocidad se propagan más rápidamente, de modo que existirá un instante $t = t_c$ en el que la pendiente $\partial u/\partial x$ se hace infinita en algún punto $x = x_c$. A partir de ese instante, existe una región (intervalo entre x_{ei} y x_{ef} para cada $t > t_c$ en la figura 26.5) donde la función $u(x)$ es multievaluada [ver figura 26.6(b), que corresponde a la región de la figura 26.5 donde se cortan las características], lo cual no es físicamente posible. Así, a diferencia de una onda simple de expansión, cuyos gradientes espaciales se van haciendo cada vez más suaves a medida que se propaga (ver figura 26.4), la deformación de una onda simple de compresión es tal que los gradientes son cada vez más acusados, hasta que se alcanza una pendiente infinita en algún punto. Antes de que esto ocurra, los procesos disipativos comienzan a ser importantes en la región donde se producen los máximos gradientes, y el proceso ya no puede ser descrito por las ecuaciones isentrópicas (26.1)-(26.3) de partida. Desde un punto de vista isentrópico, el problema se simplifica considerando ese cambio brusco como una discontinuidad (onda de choque) que se sitúa en una posición x_o entre x_{ei} y x_{ef} que cumple las relaciones de Rankine-Hugoniot (para una onda de choque débil se puede demostrar que la onda de choque se sitúa en una posición tal que el área a cada lado de la curva $u(x)$ en la región multievaluada es la misma; véase más adelante).

En definitiva, un proceso de compresión isentrópica siempre degenera en un problema no isentrópico donde la producción de entropía está restringida a una *discontinuidad* u onda de choque normal. Desde el punto de vista del flujo

isentrópico, el problema se reduce a estudiar la evolución de la onda de choque que, a partir del instante t_c , avanza en el medio en reposo no perturbado (ver figura 26.7). Las propiedades del fluido justo detrás de la onda de choque están relacionadas con las magnitudes del fluido en reposo a través de las relaciones de Rankine-Hugoniot (ver capítulo 22). Desde el pistón hasta la onda de choque el fluido (comprimido) evoluciona según las características.

Se considerará primero, por simplicidad, el caso de un pistón que se mueve con velocidad $U = \text{constante}$ (figura 26.8). Las características son dos conjuntos de rectas con pendientes a_o y $a_o + U$, respectivamente. La región donde se cruzan estas dos familias de características y, por tanto, donde se encuentra la trayectoria de la onda de choque, viene delimitada por las dos envolventes $x = a_o t$ y $x = (a_o + U)t$, que parten ambas del origen. En este caso, la onda de choque describe una trayectoria recta que es fácil de calcular a partir de las relaciones de Rankine-Hugoniot, ya que las magnitudes fluidas detrás de la onda son uniformes (en particular, la velocidad del fluido es la del pistón). Si U_o es la velocidad de la onda de choque, en un sistema de referencia estacionario con ella, la ecuación (22.28) nos dice que

$$\frac{U_o - U}{U_o} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_o^2}{(\gamma + 1)M_o^2}, \quad (26.46)$$

donde

$$M_o = \frac{U_o}{a_o} \quad (26.47)$$

es el número de Mach del flujo incidente a la onda de choque por la derecha (uniforme y en reposo para un observador del laboratorio). Conocida la velocidad del pistón U y las magnitudes del flujo en reposo delante de la onda, (26.46) proporciona U_o :

$$M_o = \frac{\gamma + 1}{4} M_p + \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_p^2 + 1}, \quad M_p = \frac{U}{a_o}. \quad (26.48)$$

Las magnitudes fluidas (uniformes) detrás de la onda se obtiene de las otras relaciones de Rankine-Hugoniot una vez que M_o es conocido. Por ejemplo, la presión p_1 y la densidad ρ_1 se obtienen de (22.29) y (22.28):

$$\frac{\rho_1}{\rho_o} = \frac{(\gamma + 1)M_o^2}{2 + (\gamma - 1)M_o^2}, \quad \frac{p_1}{p_o} = \frac{2\gamma M_o^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1}. \quad (26.49)$$

Este dispositivo de un pistón que se mueve a velocidad constante en el interior de un conducto se suele llamar tubo de choque y, debido a que todas las

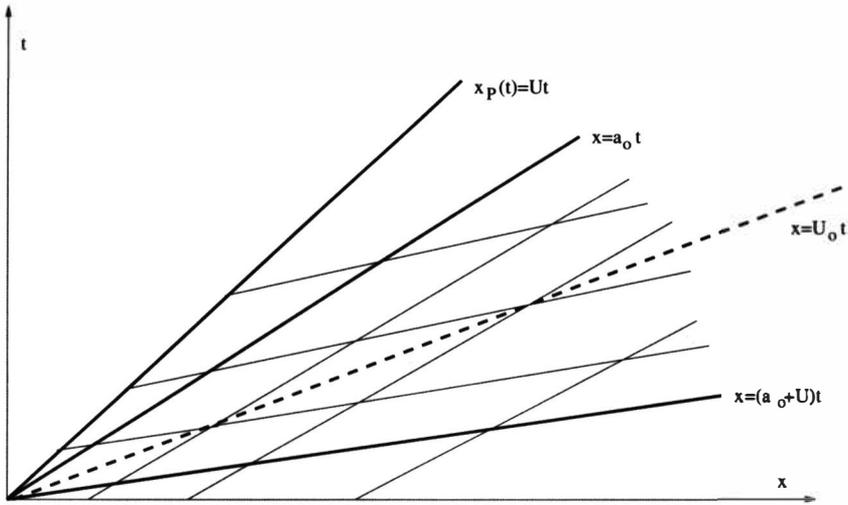


Figura 26.8: Onda de compresión para un pistón que se mueve con velocidad constante U .

propiedades del gas delante y detrás de la onda de choque son uniformes y fácilmente calculables, es el que se utiliza normalmente en el laboratorio para producir y analizar ondas de choque.

En el caso general en el que la velocidad del pistón U no es constante, las relaciones de Rankine-Hugoniot se aplican localmente en la discontinuidad. Delante de la onda de choque, cuya trayectoria $x_o(t)$ buscamos, el gas está en reposo. Detrás de ella se tienen las características dadas por (26.45),

$$x = x_p(\tau) + \left[a_o + \frac{\gamma + 1}{2} U(\tau) \right] (t - \tau), \quad x_p(\tau) = \int_0^\tau U(t) dt, \quad (26.50)$$

con velocidad

$$u(\tau) = U(\tau). \quad (26.51)$$

Ahora bien, de las ecuaciones de conservación a través de la onda de choque (relaciones de Rankine-Hugoniot), teniendo en cuenta que la velocidad del fluido justo detrás de la onda de choque es $U(\tau)$, se deduce que

$$U_o^2 - \frac{\gamma + 1}{2} U U_o - a_o^2 = 0, \quad (26.52)$$

[esta es la misma relación que (26.46)] de forma que la trayectoria de la onda de choque viene dada por

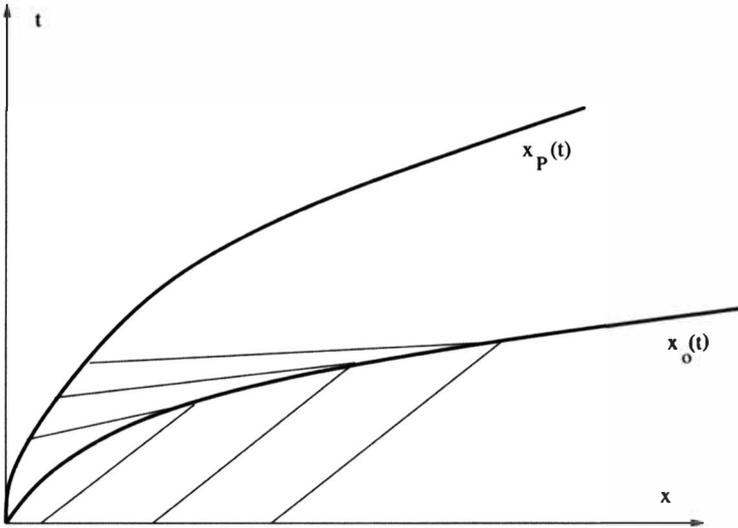


Figura 26.9: Esquema de la trayectoria de la onda de choque.

$$\frac{dx_o}{dt} \equiv U_o = \frac{\gamma + 1}{4} U(\tau) + a_o \sqrt{1 + \left[\frac{(\gamma + 1)U(\tau)}{4a_o} \right]^2}. \quad (26.53)$$

Dado $U(\tau)$, esta ecuación, junto con (26.50) aplicada a la posición de la onda de choque $x_o(t)$, proporciona ésta en función del tiempo. De hecho se obtendría paramétricamente en función del parámetro τ : para cada $t = t_o$, el par de ecuaciones anteriores permite obtener $x_o(\tau)$ y $t_o(\tau)$, que proporciona la trayectoria de la onda de choque $x_o(t_o)$ (ver figura 26.9). Las propiedades del fluido entre el pistón y la onda de choque se obtienen de acuerdo con las características mediante (26.50)-(26.51), junto con $a = a_o + \frac{\gamma-1}{2}U(\tau)$, $\rho = \rho_o + [(\gamma - 1)U(\tau)/(2\sqrt{\gamma p_o/\rho_o^2})]^{2/(\gamma-1)}$ y $p = p_o(\rho/\rho_o)^\gamma$.

26.2.3. Onda de choque débil

Cuando la velocidad del pistón es pequeña en relación a la velocidad del sonido a_o , la onda de choque que se forma es débil. En este caso se puede obtener una solución analítica si se tiene en cuenta que $U(\tau) \ll a_o$ implica $x_p(\tau) \ll a_o\tau$, por lo que (26.50) aplicada a la posición de la onda de choque x_o se simplifica:

$$x_o(t) \simeq \left[a_o + \frac{\gamma + 1}{2} U(\tau) \right] t - a_o\tau \quad (26.54)$$

[obsérvese que se ha retenido $U(\tau)$ en primer orden]. Derivando,

$$\frac{dx_o}{dt} = a_o + \frac{\gamma + 1}{2}U(\tau) + \left[\frac{\gamma + 1}{2}\dot{U}(\tau)t - a_o \right] \frac{d\tau}{dt}, \quad (26.55)$$

y comparando con (26.53), se obtiene

$$\frac{\gamma + 1}{4}U(\tau) + \left[\frac{\gamma + 1}{2}\dot{U}(\tau)t - a_o \right] \frac{d\tau}{dt} = 0 \quad . \quad (26.56)$$

Multiplicando por $U(\tau)$, esta ecuación se puede integrar:

$$\frac{\gamma + 1}{4}U^2(\tau)\frac{dt}{d\tau} + \frac{\gamma + 1}{2}U(\tau)\frac{dU}{d\tau}t = a_oU(\tau) \quad , \quad (26.57)$$

$$\frac{\gamma + 1}{4} \frac{d}{d\tau} [tU^2(\tau)] = a_oU(\tau) \quad , \quad (26.58)$$

$$t_o = \frac{4a_o}{\gamma + 1} \frac{1}{U^2(\tau)} \int_o^\tau U(\tau')d\tau' \quad . \quad (26.59)$$

Una vez calculado t_o , de (26.54) se obtiene x_o . Si $U(0) > 0$, la onda de choque empieza en $t = 0$, es decir, se forma en el instante en que se empieza a mover el pistón, estando en los instantes iniciales descrita por

$$t \sim \frac{4a_o\tau}{(\gamma + 1)U(0)} \quad , \quad (26.60)$$

y

$$x_o(t) \sim \left[a_o + \frac{\gamma + 1}{4}U(0) \right] \quad . \quad (26.61)$$

La velocidad inicial de la onda es

$$\frac{dx_o}{dt} = a_o + \frac{\gamma + 1}{4}U(0) \quad . \quad (26.62)$$

Sólo si $U(0) = 0$ la onda de choque puede no producirse en el instante inicial (véase ejemplo siguiente).

26.2.4. Ejemplo: pistón con aceleración constante

Para ilustrar las ondas simples de compresión y de expansión analizadas anteriormente, se considerará a continuación el caso en el que la velocidad del pistón es lineal en el tiempo, $U = bt$. Suponiendo que el pistón parte de $x = 0$, la trayectoria del pistón viene dada por

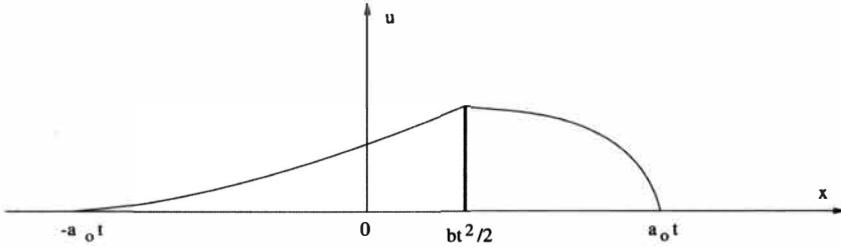


Figura 26.10: Esquema de los perfiles de velocidad a la derecha y a la izquierda de un pistón que se mueve con aceleración constante b antes de la formación de una onda de choque en la zona de compresión.

$$x_p(t) = \frac{bt^2}{2}. \quad (26.63)$$

En la zona de expansión, $x < x_p(t)$, sustituyendo $U(\tau)$ y $x_p(\tau)$ en (26.40)-(26.41), se tiene

$$x = \frac{b\tau^2}{2} + \left(\frac{\gamma+1}{2}b\tau - a_0 \right) (t - \tau), \quad u = b\tau. \quad (26.64)$$

Eliminando el parámetro τ , se obtiene $u(t, x)$:

$$u = \frac{1}{\gamma} \left[a_0 + \frac{\gamma+1}{2}bt - \sqrt{\left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2}bt \right)^2 - 2b\gamma(x + a_0t)} \right], \quad x < \frac{bt^2}{2}. \quad (26.65)$$

La velocidad del gas disminuye monótonamente desde $u = U = bt$ en $x = x_p(t) = bt^2/2$, hasta cero en $x = -a_0t$ (ver figura 26.10). Para $x < -a_0t$, el gas permanece sin perturbar, ya que $x = -a_0t$ es la primera característica que sale del pistón que va *informando* al gas de su movimiento (ver figura 26.3). Las demás magnitudes fluidas se obtienen de (26.42)-(26.44).

A la derecha del pistón, $x > x_p(t) = bt^2/2$, antes de que se forme la onda de choque, la velocidad del gas se obtiene de forma análoga sustituyendo $U(\tau) = b\tau$ y $x_p(\tau) = b\tau^2/2$ en (26.50)-(26.51):

$$u = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\gamma+1}{2}bt - a_0 - \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2}bt - a_0 \right)^2 + 2b\gamma(a_0t - x)} \right], \quad x > \frac{bt^2}{2}. \quad (26.66)$$

El gas pasa ahora de la velocidad del pistón en $x = x_p(t)$, a la velocidad nula en $x = a_o t$ que, como antes, es la primera característica que sale del pistón en la zona de compresión, que va informando al gas del movimiento del mismo. Sin embargo, esto deja de ser cierto en cuanto se forma una onda de choque, que siempre viaja a una velocidad supersónica en relación al gas no perturbado, $dx_o/dt > a_o$. En el presente ejemplo, el instante de formación de la onda de choque se puede estimar fácilmente hallando $\partial u/\partial x$ y obteniendo el punto (t_c, x_c) que primero hace infinita esa derivada. Se encuentra que esto ocurre en la parte frontal de la onda de compresión, donde $u = 0$, para

$$x_c = a_o t_c \quad \text{con} \quad t_c = \frac{2a_o}{b(\gamma + 1)}. \quad (26.67)$$

Por tanto, la solución obtenida a la derecha del pistón vale para $t < t_c$. A partir de este instante, se forma una onda de choque cuya trayectoria $x_o(t)$ se obtiene eliminando τ entre (26.50), aplicada a $x = x_o$, y (26.53), usando la velocidad y la trayectoria del pistón del presente ejemplo. El perfil de velocidad en la zona del gas comprimido entre el pistón y la onda de choque se obtiene igual que antes de (26.50)-(26.51). El hecho de haber usado la relación de Rankine-Hugoniot (26.52) asegura que la velocidad del gas justo detrás de la onda de choque, en $x = x_o(t)$, es la apropiada para que el gas pase a tener velocidad nula delante de la onda de choque.

26.3. Onda esférica tras una explosión intensa

Se ha visto que el movimiento unidireccional e isentrópico de un gas viene gobernado por ecuaciones hiperbólicas que se pueden integrar en general de forma analítica usando el método de las características. Particular atención se ha prestado a las soluciones denominadas ondas simples. En cuanto el flujo deja de ser unidireccional, las ecuaciones isentrópicas dejan de ser hiperbólicas, salvo que el flujo sea supersónico, en cuyo caso también se puede aplicar el método de las características para obtener soluciones *casi* analíticas del problema (ver, por ejemplo, Anderson, 1990, capítulo 11). Otro movimiento de interés que permite obtener soluciones analíticas (en este caso de semejanza) es el movimiento puramente radial con simetría esférica. Como ejemplo significativo se considerará en esta sección el problema idealizado del movimiento del gas tras una explosión instantánea y puntual en la que una cantidad finita de energía E se libera en el centro de la explosión.

Inicialmente, el gas se supone en reposo, con presión p_o y densidad ρ_o , excepto en el centro de la explosión. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento

puramente radial, $\vec{v} = u(r, t)\vec{e}_r$, son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + 2\frac{\rho u}{r} = 0, \quad (26.68)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (26.69)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{p}{\rho^\gamma} = 0. \quad (26.70)$$

Dada la naturaleza ideal del problema, en el que una energía finita se libera instantáneamente (en $t = 0$) en un punto ($r = 0$), la solución no puede ser regular en $t = 0$. Por otro lado, el flujo no puede ser isentrópico para todo r debido a que las ondas no lineales de compresión generadas por la explosión producen casi instantáneamente una onda de choque que avanza supersónicamente sobre el medio no perturbado (en cualquier caso, la onda de choque se forma en los instantes iniciales en los que la solución ideal que se va buscando no vale). Por tanto, para cada instante $t > 0$, las ecuaciones anteriores se aplicarán a la región $0 < r < R(t)$ limitada por una onda de choque esférica de radio $R(t)$ que avanza como una discontinuidad con velocidad $U = dR/dt > a_0$ sobre el gas en reposo no perturbado. Designando con el subíndice 1 a las propiedades del flujo justo detrás de la onda de choque esférica [en $r = R(t)^-$], las relaciones de Rankine-Hugoniot, suponiendo que la onda de choque producida por la explosión es muy intensa, proporciona (ver sección 22.6.2):

$$\rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0, \quad u_1 = \frac{2}{\gamma + 1} U, \quad p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 U^2, \quad U \equiv \frac{dR}{dt}. \quad (26.71)$$

La condición adicional para obtener $R(t)$ es que la energía total del fluido en todo instante se conserva y es igual a la energía E liberada en la explosión. Como la energía total por unidad de volumen vale $\rho(u^2/2 + c_v T) = \rho[u^2/2 + p/(\gamma - 1)\rho]$, esta condición se escribe

$$4\pi \int_0^{R(t)} \rho \left[\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right] r^2 dr = \text{constante} = E. \quad (26.72)$$

Las condiciones iniciales son:

$$\rho(r, 0) = \rho_0, \quad p(r, 0) = 0, \quad u(r, 0) = 0 \quad (r \neq 0), \quad (26.73)$$

donde, dada la linealidad en la presión de las ecuaciones, se ha sustituido p por $p - p_0$. Por último, como no puede existir flujo en el punto central después de la explosión,

$$v(0, t) = 0 \quad (t > 0). \quad (26.74)$$

El análisis dimensional del problema anterior muestra que las distintas magnitudes fluidas, p , ρ y u , dependen de t , r , E , ρ_o y γ . El radio R de la onda de choque depende de esos mismos parámetros, excepto de r . Por tanto, el teorema II permite reducir el número de variables independientes de 5 a sólo 2 variables adimensionales, que son γ y

$$\xi = r(Et^2/\rho_o)^{-1/5}. \quad (26.75)$$

Es decir, las magnitudes del problema no dependen de r y de t por separado, sino de una combinación de ambas dada por ξ , que es la variable de semejanza del problema. Como variables dependientes adimensionales se eligen P , D y V , definidas mediante

$$p = \rho_o \frac{r^2}{t^2} P(\xi, \gamma), \quad \rho = \rho_o D(\xi, \gamma), \quad u = \frac{r}{t} V(\xi, \gamma), \quad (26.76)$$

mientras que el radio de la onda de choque y su velocidad adimensionales son

$$R = (Et^2/\rho_o)^{1/5} \xi_1(\gamma), \quad U = \frac{2}{5} (Et^{-3}/\rho_o)^{1/5} \xi_1. \quad (26.77)$$

Por tanto, un simple análisis dimensional proporciona la posición en función del tiempo y la velocidad de la onda de choque salvo por una constante ξ_1 que depende de γ . Además, las magnitudes del gas comprimido dentro de la onda de choque satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales *ordinarias*, que se obtienen de sustituir (26.75)-(26.76) en (26.68)-(26.70):

$$\frac{dV}{d \ln \xi} + \left(V - \frac{2}{5} \right) \frac{\ln D}{\ln \xi} + 3V = 0, \quad (26.78)$$

$$\left(V - \frac{2}{5} \right) D \frac{dV}{d \ln \xi} + \frac{dP}{d \ln \xi} + DV(V - 1) + P = 0, \quad (26.79)$$

$$\frac{d}{d \ln \xi} \left(\ln \frac{P}{D\gamma} \right) - \frac{2(1 - V)}{V - 2/5} = 0. \quad (26.80)$$

Las condiciones de contorno adimensionales justo detrás de la onda de choque (26.71) se escriben:

$$P(\xi_1^-) = \frac{8}{25(\gamma + 1)}, \quad V(\xi_1^-) = \frac{4}{5(\gamma + 1)}, \quad D(\xi_1^-) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (26.81)$$

Por otro lado, la condición (26.72) se escribe

$$\int_0^{\xi_1} D(\xi) \left[\frac{V^2(\xi)}{2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{P(\xi)}{D(\xi)} \right] \xi^4 d\xi = \frac{1}{4\pi}, \quad (26.82)$$

mientras que la condición (26.74) se satisface idénticamente siempre que $V(\xi = 0)$ sea finita (obsérvese que la solución de semejanza no vale para $t \rightarrow 0$, por lo que no se pueden imponer las condiciones iniciales).

Este problema tiene una solución analítica que se puede expresar como sigue:¹

$$\left(\frac{\xi}{\xi_1} \right)^{-5} = C_1 V^2 \left(1 - \frac{3\gamma-1}{2} V \right)^a \left(\frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^b, \quad (26.83)$$

$$D = C_2 \left(\frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^c \left(1 - \frac{3\gamma-1}{2} V \right)^d \left(1 - \frac{5}{2} V \right)^e, \quad (26.84)$$

$$P = C_3 D V^2 \left(1 - \frac{5}{2} V \right) \left(\frac{5}{2} \gamma V - 1 \right)^{-1}, \quad (26.85)$$

donde

$$a = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \quad b = \frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}, \quad c = \frac{3}{2\gamma+1},$$

$$d = -\frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \quad e = -\frac{1}{2-\gamma},$$

$$C_1 = \left[\frac{5}{4}(\gamma+1) \right]^2 \left[\frac{5(\gamma+1)}{7-\gamma} \right]^a \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^b,$$

$$C_2 = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{c+e+1} \left[\frac{5(\gamma+1)}{7-\gamma} \right]^d, \quad C_3 = \frac{\gamma-1}{2}.$$

El valor de ξ_1 en función de γ se obtiene de sustituir esta solución en la condición integral (26.82). Por ejemplo, para $\gamma = 1,4$ se tiene que $\xi_1 \simeq 1,033$.

¹Esta solución de semejanza fue obtenida, independiente y simultáneamente, por Taylor y por von Neumann en 1941. Taylor resolvió numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que la solución analítica que se da a continuación se debe a von Neumann.

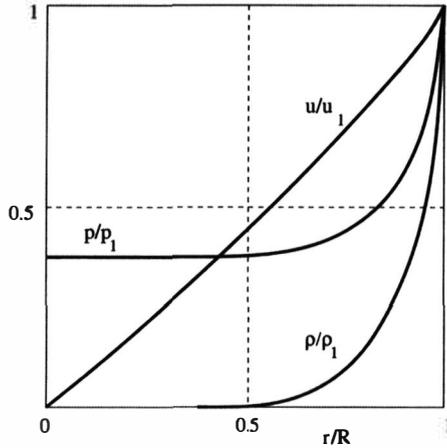


Figura 26.11: Esquema de la solución de semejanza (26.83)-(26.85).

La solución anterior se esquematiza en la figura 26.11, donde se representa $p(r, t)/p_1(t) = (\xi/\xi_1)^2 P(\xi)/P(\xi_1)$, $\rho(r, t)/\rho_1(t) = D(\xi)/D(\xi_1)$ y $u(r, t)/u_1(t) = (\xi/\xi_1)V(\xi)/V(\xi_1)$ en función de $r/R(t) = \xi/\xi_1$.

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulos 7 y 11.
- G.I. BARENBLATT, 1996. Capítulo 2.
- A.J. CHORIN y J.E. MARSDEN, 1993. Capítulo 3.
- R. COURANT y K.O. FRIEDRICHS, 1976. Capítulos II y III.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo X.
- J. LIGHTHILL, 1978. Capítulo 2.
- G.B. WHITHAM, 1974. Capítulos 2 y 6.

Parte VIII

**TEORÍA DE LA CAPA
LÍMITE**

Capítulo 27

Capa límite laminar incompresible

27.1. Introducción

Hasta principios del siglo XX las teorías que describen los flujos viscosos y los flujos ideales se habían desarrollado prácticamente por separado. En relación a esta última, las ecuaciones fueron establecidas por Euler hacia 1755, y otros avances capitales fueron hechos por Helmholtz (1858) sobre la vorticidad y por Kelvin (1869), con su teorema de la circulación. La teoría de los fluidos ideales tuvo un gran éxito en relación a la descripción de las ondas sonoras y de los diversos tipos de ondas en líquidos, así como en otros muchos tipos flujos, como se puede apreciar, por ejemplo, en el libro *Hydrodynamics* de H. Lamb, cuya primera edición data de 1879 y en cuya quinta edición (1924) Lamb añadió un extenso capítulo sobre los flujos viscosos. En cambio, la teoría ideal predice que la resistencia que un fluido ejerce sobre un cuerpo sólido en movimiento en su seno es nula, lo cual es aproximadamente cierto para flujos de fluidos con viscosidad pequeña (más concretamente, para flujos con números de Reynolds alto) sobre cuerpos *fuselados*, pero es estrepitosamente falso para flujos sobre cuerpos *romos*, donde, además, la forma del flujo detrás del cuerpo no tiene nada que ver con las predicciones de la teoría ideal, por muy pequeña que sea la viscosidad del fluido (véase el capítulo 21 y el final de éste).

En cuanto a la teoría de los flujos viscosos, aunque ya Newton postuló una relación entre los esfuerzos y la velocidad de deformación a finales del siglo XVII, las ecuaciones del movimiento no fueron establecidas hasta los trabajos de Navier (1822), Poisson (1829), Saint-Venant (1843) y fundamentalmente Stokes (1845); este último obtuvo además muchas soluciones exactas elemen-

tales para diversos tipos de flujos viscosos. Stokes (1851) también estableció la teoría de lo que ahora se llama flujo a número de Reynolds pequeño. Otros avances importantes fueron hechos por Hele-Shaw (1898), quien realizó notables experimentos con líneas de corriente que se asemejan a las de los flujos irrotacionales, y por Reynolds (1883), con sus magníficos experimentos sobre la transición turbulenta.

Detrás de toda esta disyuntiva entre los flujos viscosos y los flujos ideales subyacía el problema de la condición de contorno de no deslizamiento de un fluido sobre superficies sólidas. Stokes había postulado esta condición de contorno y, tras los experimentos de Hagen (1839) y Poiseuille (1840) y los trabajos teóricos del propio Stokes y de Hagenbach y Neumann (1859), no cabía duda de que esta hipótesis era cierta, al menos para flujos lentos o reptantes. Sin embargo, para los flujos de fluidos con pequeña viscosidad alrededor de cuerpos, todavía a principios del siglo XX existía incertidumbre sobre la validez de esta hipótesis y no era ni mucho menos aceptada, a pesar de que los flujos predichos (y sobre todo la resistencia) por la teoría ideal no tenían nada que ver con los resultados experimentales en la mayoría de las ocasiones. A esta incertidumbre contribuyeron dos factores principales. Por un lado, las ecuaciones de los fluidos ideales (ecuaciones de Euler), a diferencia de las de Navier-Stokes, no permitían imponer la condición de contorno de no deslizamiento del fluido sobre superficies sólidas (si la superficie era impermeable, sobre ellas se suponía simplemente que la componente de la velocidad normal a la misma era cero), ya que en las ecuaciones de Euler no aparecen los términos viscosos con derivadas de segundo orden en la velocidad; dado el éxito de las ecuaciones de Euler en describir algunos flujos reales, no parecía que esta condición fuese necesaria. Por otra parte, era conocido que cuando la teoría ideal predecía una presión absoluta negativa en algún punto de un líquido, como ocurre, por ejemplo, en el flujo detrás de una esquina pronunciada de una superficie sólida,¹ en realidad se formaban burbujas de vapor, el líquido cavitaba; de esta forma se explicaba porqué el flujo de un líquido después de un cambio brusco en la superficie de un sólido se parecía tan poco al predicho por la teoría ideal: la cavitación era la responsable de la separación del flujo. Así, en el caso más evidente en que la teoría ideal fallaba, había una explicación sencilla del motivo. Esta explicación (que, por cierto, no podía ser válida para gases) oscurecía el panorama y retrasó la explicación *viscosa* de la separación del flujo.

No fue hasta que Prandtl, en un cortísimo artículo de menos de ocho pági-

¹Detrás de estas esquinas la teoría ideal predice una velocidad infinita y, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, la presión es infinitamente negativa (ver capítulo 21).

nas que presentó en un congreso celebrado en Heidelberg en 1904, introdujo el concepto de capa límite, que estas paradojas no se resolvieron. Prandtl estableció que cerca de las paredes sólidas los efectos viscosos son siempre importantes, por muy pequeña que sea la viscosidad del fluido, y son los responsables de que se cumpla la condición de no deslizamiento del fluido sobre la superficie sólida. Así, los flujos de fluidos con viscosidad pequeña (flujos a número de Reynolds grande diríamos ahora) constan de dos regiones diferenciadas: una *externa* donde el fluido se puede considerar como ideal, y una *capa límite* delgada, alrededor de las superficies sólidas, donde los efectos viscosos son importantes, no porque la viscosidad sea mayor allí, sino porque el gradiente de la velocidad normal a la superficie es muy acusado al ser una capa muy delgada. De esta forma, Prandtl esclareció el panorama, unificando las hasta entonces dos inconexas ciencias de los fluidos ideales y de los fluidos viscosos, y por ello se le considera el padre de la moderna Mecánica de Fluidos. En su cortísimo pero intenso artículo, Prandtl no sólo introdujo el concepto de capa límite, sino que predijo su espesor (proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad y que, por tanto, tiende a cero cuando $\mu \rightarrow 0$; de hecho Prandtl predijo cuantitativamente el espesor de la capa límite sobre una placa plana; ver secciones siguientes), introdujo la variable de semejanza para la capa límite sobre una placa plana e integró numéricamente la ecuación diferencial ordinaria resultante (solución de Blasius que se verá más adelante), obteniendo una expresión para la resistencia, etc. También explicó (cualitativamente) el fenómeno de la separación de la capa límite, comentando como el flujo de un fluido de viscosidad prácticamente nula podría ser totalmente distinto al predicho por la teoría ideal debido a este fenómeno de la separación de la corriente (ver sección 27.5). A pesar de lo fundamental del artículo, sus ideas no fueron conocidas hasta bastantes años más tarde fuera de su grupo, debido, sobre todo, a lo condensado y escondido de la publicación. A medida que estas ideas se fueron entendiendo y difundiendo, la Mecánica de Fluidos avanzó de forma considerable, no sólo desde el punto de vista teórico, sino, sobre todo, en sus aspectos más prácticos y tecnológicos.

La idea de la capa límite está ahora muy extendida y se aplica en muchos problemas en casi todas las ramas de la ciencia, ya que desde un punto de vista matemático surge como consecuencia de cualquier simplificación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un determinado proceso que elimina los términos con derivadas de mayor orden; lejos del contorno las ecuaciones simplificadas son válidas, pero cerca del contorno (al menos en parte de él) hay que retener los términos despreciados para poder imponer todas las condiciones de contorno. A pesar de ello, el problema es mucho más simple que el

original puesto que las ecuaciones *completas* (con el término que es pequeño fuera del contorno) sólo son necesarias en una capa límite muy delgada en las proximidades del contorno, que además se simplifican debido a la *delgadez* del dominio (en las secciones 14.1.4 y 14.1.5 se vieron dos ejemplos sencillos de capa límite). En esta lección se considerará sólo la capa límite *laminar* (la *turbulenta* será considerada más adelante) y estacionaria de un fluido incompresible. Se verán algunas de las soluciones más simples y se discutirá brevemente el fenómeno de la separación de la capa límite y su influencia en la resistencia. En la lección siguiente se tratará, de forma muy concisa, la capa límite térmica,² también para un fluido incompresible, más que nada para introducir la importante analogía de Reynolds. El lector interesado en otros aspectos de la teoría de la capa límite puede consultar, por ejemplo, las monografías de Rosenhead (1988) y de Schlichting y Gersten (2000).

27.2. Ecuaciones y condiciones de contorno

Las ecuaciones en el interior de la capa límite se simplifican, principalmente, por el hecho de que el espesor de la misma (cuyo orden de magnitud se designará por δ) es mucho menor que cualquier otra escala de longitud del problema, como, por ejemplo, la longitud característica que define el movimiento a lo largo de la superficie, L , o el radio de la curvatura característico de la superficie, R . Suponiendo que el movimiento es bidimensional, esta última condición ($\delta \ll R$) nos permite utilizar coordenadas cartesianas (x, y) , donde x es la coordenada (no necesariamente rectilínea) a lo largo de la superficie y y es la coordenada normal a la misma (ver figura 27.1).³

Considerando sólo el problema de la capa límite viscosa o de velocidad, es decir, considerando sólo las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, que se suponen desacopladas de la ecuación de la energía (flujo con propiedades constantes), las ecuaciones de partida son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad (27.1)$$

²El fenómeno es análogo al de la capa límite viscosa: cuando $Pe \gg 1$, al eliminar el término de conducción de calor de la ecuación de la energía, no se puede imponer la condición de contorno de la temperatura sobre una superficie sólida, por lo que existe una capa límite térmica donde el efecto de la conducción es importante, permitiendo satisfacer la condición de contorno. Esta capa límite permite calcular el flujo de calor intercambiado entre el fluido y la pared sólida, que de acuerdo con la teoría ideal sería nulo.

³A este resultado se puede llegar rigurosamente tomando coordenadas *curvilíneas* a lo largo de la superficie sólida y aplicando la simplificación de capa límite; pero es bastante evidente y no merece la pena tomarse la molestia.

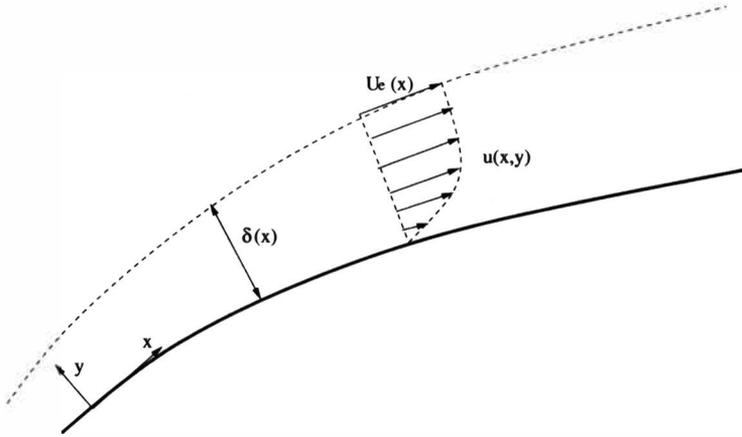


Figura 27.1: Capa límite bidimensional sobre una superficie.

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad , \quad (27.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad , \quad (27.3)$$

donde $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$. Si, como se ha dicho, δ y L son las longitudes características en las direcciones y y x , respectivamente, y V_o y U_o las velocidades características en esas mismas direcciones, de la ecuación de continuidad se tiene

$$V_o \sim \frac{\delta}{L} U_o \ll U_o \quad , \quad (27.4)$$

por lo que el movimiento en la capa límite es *casi unidireccional*. Por otro lado, las derivadas con respecto a x en los términos viscosos de las ecuaciones son claramente despreciables frente a las otras derivadas con respecto a y , con errores de orden $(\delta/L)^2 \ll 1$. Por último, la variación transversal de la presión en la capa límite es también despreciable frente a la variación longitudinal de la misma:

$$\frac{\Delta_{Tp}}{\Delta_{Lp}} \sim \frac{\rho V_o^2}{\rho U_o^2} \sim \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \ll 1. \quad (27.5)$$

De esta forma, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y es prácticamente irrelevante y puede sustituirse por $\partial p / \partial y = 0$; es decir, p es sólo función de x y viene dada por el movimiento (ideal) externo a la capa

límite. Suponiendo que $u = U_e(x)$ lejos de la superficie (en la escala δ de la capa límite), la ecuación de Bernoulli proporciona

$$\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{dp}{dx} = -\rho U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (27.6)$$

Con todas estas simplificaciones, las ecuaciones que gobiernan el movimiento en el interior de una capa límite bidimensional, incompresible y estacionaria son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (27.7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (27.8)$$

que son las ecuaciones que escribió Prandtl en su artículo antes mencionado (por supuesto, sin deducirlas allí, pues el reducido espacio del mismo no daba para tanto). Como condiciones de contorno hay que imponer la condición de no deslizamiento en la pared,

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad (27.9)$$

la condición de acople con la solución ideal exterior,

$$u(x, y) \rightarrow U_e(x) \quad , \quad y/\delta \rightarrow \infty, \quad (27.10)$$

y una condición *inicial* para u ,

$$u(x_0, y) = u_0(y). \quad (27.11)$$

De la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se puede deducir el orden de magnitud del espesor de la capa límite sin más que comparar los términos convectivos y de fuerzas viscosas, que deben ser del mismo orden por la propia definición de capa límite:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U_o^2}{L} \sim \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{\nu U_o}{\delta^2}, \quad (27.12)$$

$$\frac{\delta}{L} \sim \left(\frac{\nu}{U_o L} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{Re^{1/2}}. \quad (27.13)$$

Así, $\delta/L \rightarrow 0$ cuando $Re \rightarrow \infty$, como ya sabíamos. De esta forma, a pesar de que ν es muy pequeño, la rápida variación de u en una distancia δ tan pequeña (proporcional a $\nu^{1/2}$) es suficiente para que el término viscoso no sea

despreciable. Debe observarse también que el acoplamiento con la solución exterior [condición (27.10)] no es para $y \rightarrow \infty$, sino $y/\nu^{1/2} \rightarrow \infty$; es decir, para y muy grande en relación a la escala de la capa límite, pero pequeño en relación a la escala exterior L .

El proceso de resolución de un problema en la aproximación de capa límite sería el siguiente (para el caso presente de un flujo estacionario, bidimensional e incompresible alrededor de un cuerpo): dado el contorno del cuerpo y las condiciones aguas arriba (p_∞, \vec{v}_∞), las ecuaciones de Euler proporcionarían los campos de velocidad y de presión (y de temperatura dada T_∞ , pero de momento nos olvidamos de ella) ideales o solución *externa*. En particular, esta solución nos daría la presión $p(x)$ y la velocidad $U_e(x)$ a lo largo de la superficie del cuerpo, donde U_e no cumple la condición de no deslizamiento, en general. Conocido $U_e(x)$, las ecuaciones y condiciones de contorno de la capa límite (27.7)-(27.11) proporcionarían el campo de velocidad en las proximidades de la superficie, con lo que quedaría resuelto el problema completo. Esta solución nos permite calcular, por ejemplo, la fuerza de fricción que el fluido ejerce sobre el cuerpo, que, por unidad de área, sería $\tau_f = \mu \partial u / \partial y|_{y=0}$. La fuerza de presión viene directamente dada por la solución ideal $p(x)$, puesto que la presión permanece prácticamente constante a través de la capa límite (esto último no sería cierto si la capa límite se separase, ver secciones 27.5 y 27.6). Se observa que este proceso de solución aproximado es mucho más simple que el de resolver las ecuaciones completas de Navier-Stokes, pues tanto las ecuaciones para flujos ideales de Euler, como las de capa límite de Prandtl, son bastante más simples; los errores cometidos serían del orden del espesor de la capa límite, $\delta/L \sim Re^{-1/2} \ll 1$ (en el supuesto de que no se separe la capa límite). En general, para una forma arbitraria de la superficie [es decir, para una forma arbitraria de $U_e(x)$], las ecuaciones de la capa límite se tienen que resolver numéricamente. Sin embargo, existen varios casos sencillos, que tienen también bastante importancia práctica, en los que se puede reducir el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (27.7)-(27.8) a una única ecuación diferencial ordinaria, por lo que la velocidad en la capa límite se obtiene de forma *casi analítica*. A estos casos particulares se dedicarán las dos secciones siguientes, cuyos resultados tienen, como se verá, una trascendencia más allá de esos meros problemas particulares. También existen métodos aproximados (integrales) de solución de las ecuaciones de capa límite para una función $U_e(x)$ arbitraria que son muy precisos y fáciles de implementar, pero que no serán tratados aquí (ver referencias).

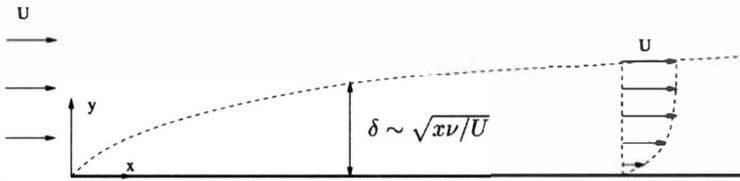


Figura 27.2: Capa límite sobre una placa plana con ángulo de incidencia nulo.

27.3. Capa límite sobre una placa plana. Solución de Blasius

Considérese el problema de una corriente sobre una placa plana semiinfinita con ángulo de incidencia nulo, de forma que la velocidad del fluido ideal no se ve afectado por ella: $U_e = \text{constante} \equiv U$. Las ecuaciones para la capa límite (27.7)-(27.8) se reducen a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (27.14)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (27.15)$$

De (27.9)-(27.11), las condiciones de contorno son:

$$u = v = 0, \quad y = 0; \quad u \rightarrow U, \quad y/\delta \rightarrow \infty; \quad u = U, \quad x = 0. \quad (27.16)$$

Este problema tiene solución de semejanza: u/U no es una función de x y de y por separado, sino de una cierta combinación de ambas variables independientes. Físicamente, la semejanza de la solución está basada en el hecho de que no hay ninguna longitud característica *definida* en el problema, por lo que u/U debe ser una función de $y/\delta(x)$, donde, de acuerdo con la discusión de la sección anterior, $\delta(x)/x \sim \sqrt{\nu/Ux}$, es decir, $\delta(x) \sim \sqrt{\nu x/U}$. Desde un punto de vista matemático, la solución de semejanza está basada en la invariancia del problema frente a algún tipo de transformación de las variables. Para encontrarla, lo primero que se debe hacer es escribir el problema en forma adimensional, definiendo las variables (las cuales provienen de un simple análisis dimensional):

$$\frac{u}{U} \equiv \phi_1(\xi, \zeta), \quad \frac{v}{U} \equiv \phi_2(\xi, \zeta), \quad (27.17)$$

$$\xi \equiv \frac{Ux}{\nu}, \quad \zeta \equiv \frac{Uy}{\nu}. \quad (27.18)$$

Sustituyendo en (27.14)-(27.16), se tiene

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} = 0, \quad (27.19)$$

$$\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2}, \quad (27.20)$$

$$\phi_1(0, \zeta) = \phi_1(\xi, \infty) = 1 \quad \phi_1(\xi, 0) = \phi_2(\xi, 0) = 0. \quad (27.21)$$

Se puede comprobar que si $[\phi_1(\xi, \zeta), \phi_2(\xi, \zeta)]$ es una solución del problema, $[\phi_1(\alpha^2 \xi, \alpha \zeta), \alpha^{-1} \phi_2(\alpha^2 \xi, \alpha \zeta)]$ también lo es, para cualquier valor del número real α . Es decir, el problema es invariante frente al grupo de transformaciones $\xi^* = \alpha^2 \xi, \zeta^* = \alpha \zeta, \phi_1^* = \phi_1, \phi_2^* = \alpha^{-1} \phi_2$, que contiene un único parámetro α . Esta invariancia sugiere el uso de las siguientes variables de semejanza (eliminando α en las transformaciones anteriores):

$$\eta \equiv \frac{\zeta}{\sqrt{\xi}} = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U}}, \quad (27.22)$$

$$g_1(\eta) \equiv \phi_1, \quad g_2(\eta) \equiv \sqrt{\xi} \phi_2. \quad (27.23)$$

Con estas variables, (27.19)-(27.21) se convierte en un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$g_2' - \frac{1}{2} \eta g_1' = 0, \quad (27.24)$$

$$g_1'' + \frac{1}{2} \eta g_1 g_1' - g_2 g_1' = 0, \quad (27.25)$$

$$g_1(\infty) = 1, \quad g_1(0) = g_2(0) = 0, \quad (27.26)$$

donde las primas significan derivadas con respecto a η .

Antes de seguir, es conveniente utilizar la función de corriente ψ ,

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x, \quad (27.27)$$

en términos de la cual la ecuación de continuidad (27.14) se satisface idénticamente. También es conveniente, para simplificar la ecuación que resultará al final, redefinir la variable de semejanza η dividiendo (27.22) por $\sqrt{2}$:

$$\eta \equiv \frac{y}{\sqrt{2\nu x/U}}. \quad (27.28)$$

De (27.27)-(27.28), junto con (27.17) y (27.23), se tiene

$$\psi = \int_0^y u dy = \int_0^\eta U g_1(\eta) \sqrt{2\nu x/U} d\eta, \quad (27.29)$$

por lo que es conveniente definir

$$f(\eta) \equiv \frac{\psi}{\sqrt{2\nu U x}} = \int_0^\eta g_1(\eta) d\eta. \quad (27.30)$$

En términos de f , las componentes de la velocidad son:

$$\frac{u}{U} = f'(\eta), \quad (27.31)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [\sqrt{2\nu U x} f(\eta)] = \sqrt{\frac{\nu U}{2x}} [-f + \eta f']. \quad (27.32)$$

Es decir,

$$g_1 = f' \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-f + \eta f']. \quad (27.33)$$

Sustituyendo en (27.24)-(27.26), teniendo en cuenta la redefinición de η , se llega a

$$f''' + f'' f = 0, \quad (27.34)$$

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad , \quad f'(\infty) = 1. \quad (27.35)$$

Esta es la llamada ecuación de Blasius, un discípulo de Prandtl que la derivó y resolvió en 1908. Obsérvese que las dos últimas condiciones de contorno (27.16) se reducen a la última (27.35). La solución numérica de este problema para $f'(\eta) = u/U$ se muestra en la figura 27.3. En ella se aprecia que u/U tiende a la unidad para η de orden unidad, lo cual corrobora que el espesor de la capa límite es del orden de $\sqrt{\nu x/U}$. De hecho, la integración numérica nos dice que $u/U = 0,97$ para $\eta = 3$, e igual a 0,999936 para $\eta = 5$. Normalmente se define el **espesor** $\delta(x)$ de la capa límite como el valor de y para el cual $u/U = 0,99$, que corresponde a $\eta \simeq 3,5$; es decir,

$$\delta(x) \simeq 4,95 \sqrt{\nu x/U}. \quad (27.36)$$

Conviene decir aquí algunas palabras sobre la integración numérica de la ecuación de Blasius. Ésta se puede hacer por el método del *disparo*: se parte del origen $\eta = 0$ con $f(0) = f'(0) = 0$, y con un determinado valor

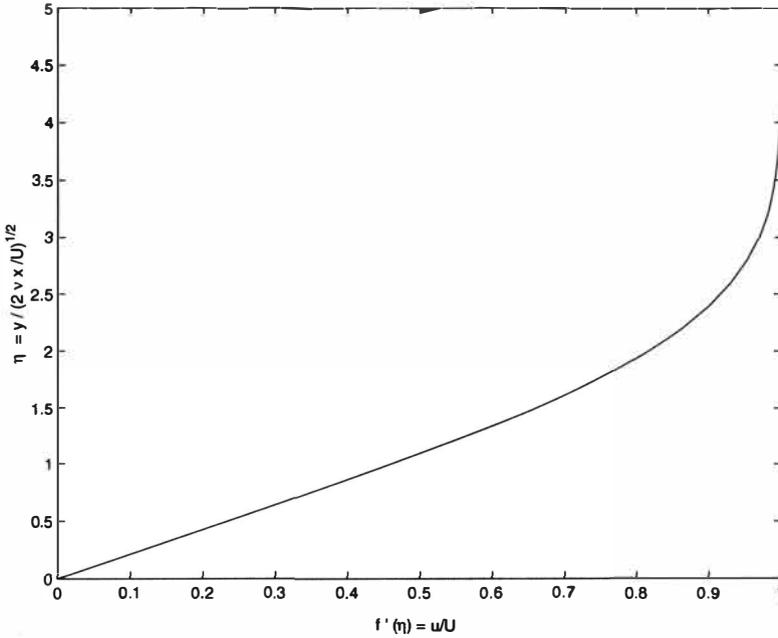


Figura 27.3: Perfil de la velocidad en la capa límite sobre una placa plana.

de $f''(0) = a$; utilizando cualquier algoritmo numérico, se integra la ecuación hasta $\eta \rightarrow \infty$; el valor de a se va variando hasta que se cumple la otra condición de contorno $f'(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. Sin embargo, la integración se puede hacer de una manera más elegante aprovechando dos invariancias más del problema que reducen (27.34) a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. La primera invariancia es frente a cualquier traslación de η , pues en (27.34) no aparece explícitamente la variable independiente η . Esto permite reducir el orden de la ecuación definiendo

$$w \equiv \frac{df}{d\eta}, \tag{27.37}$$

que transforma (27.34)-(27.35) en

$$w \frac{d^2w}{df^2} + \left(\frac{dw}{df}\right)^2 + f \frac{dw}{df} = 0, \tag{27.38}$$

$$w(0) = 0, \quad w(\infty) = 1. \tag{27.39}$$

Un segundo grupo de transformaciones que dejan invariante (27.38)-(27.39) es $w^* = \beta^2 w$, $f^* = \beta f$, para cualquier β . Eliminando β , se obtienen las nuevas

variables

$$t = \frac{1}{f} \frac{dw}{df}, \quad s = \frac{w}{f^2}, \quad (27.40)$$

que transforman (27.38) en

$$\frac{dt}{ds} = \frac{t(s+t+1)}{s(2s-t)}. \quad (27.41)$$

La solución que interesa es la que viniendo del infinito ($s \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$), que corresponde a la superficie de la placa $\eta = 0$, llega al origen ($s = 0, t = 0$), que corresponde a $\eta \rightarrow \infty$. Obsérvese que ambos son puntos singulares de (27.41), que hay que analizar previamente para poder salir numéricamente de ellos.

A veces en lugar del espesor (27.36) se utiliza el denominado **espesor de desplazamiento** de la capa límite, $\delta_1(x)$, definido como el espesor que hay que desplazar de la superficie la corriente exterior uniforme para que proporcione el mismo caudal:

$$\int_0^\infty u dy = \int_{\delta_1}^\infty U dy; \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U}} \int_0^\infty [1 - f'(\eta)] d\eta. \quad (27.42)$$

De los resultados numéricos se obtiene

$$\delta_1 \simeq 1,72 \sqrt{\nu x / U}.^4 \quad (27.43)$$

El esfuerzo de fricción sobre la placa es

$$\tau_f = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} \simeq \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{U}{2\nu x}} f''(0). \quad (27.44)$$

De la integración numérica se obtiene $f''(0) = 0,4696$, quedando

$$\tau_f \simeq 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}. \quad (27.45)$$

Este resultado se puede usar para calcular de forma aproximada la resistencia que ofrece un fluido de densidad ρ y viscosidad μ al movimiento con velocidad

⁴Se suelen definir otros espesores de capa límite muy útiles para la resolución aproximada por métodos integrales, que no vamos a dar aquí (ver, por ejemplo, Schlichting y Gersten, 2000).

U de una placa plana de longitud L con ángulo de ataque nulo, siempre que L sea muy grande en relación a $\delta(L) \sim \sqrt{\nu L/U}$ (o, lo que es lo mismo, $Re^{1/2} \gg 1$, donde Re está basado en L). Por unidad de longitud transversal al movimiento, y teniendo en cuenta las dos caras de la placa, se tiene la fuerza de resistencia:

$$F = 2 \int_0^L \tau_f dx \simeq 1,328 \sqrt{\rho \mu LU^3}. \quad (27.46)$$

Se suele definir el coeficiente de fricción

$$C_f \equiv \frac{F}{\rho U^2 L/2} \simeq 2,656 Re^{-1/2}, \quad Re \equiv \frac{LU}{\nu}. \quad (27.47)$$

Este resultado se puede incluso utilizar para estimar la resistencia de cuerpos fuselados, siempre que la capa límite no se separe (ver sección 27.5). Es interesante notar que la fuerza de resistencia es proporcional a $U^{3/2}$, ley potencial intermedia entre la lineal para flujos muy viscosos (ley de Stokes) y la cuadrática para flujos turbulentos desarrollados (ver más adelante).

27.4. Otras soluciones de semejanza. Solución de Falkner-Skan

Se ha visto que las ecuaciones de capa límite (27.7)-(27.8) se reducen a una sola ecuación diferencial ordinaria cuando $U_e(x) = \text{constante}$, correspondiente a la capa límite sobre una placa plana con ángulo de incidencia nulo. Esta simplificación se produce también para ciertos tipos de funciones $U_e(x)$, correspondientes a diversos flujos externos. De hecho, la *búsqueda* de formas de $U_e(x)$ que permiten una solución en términos de una única variable $\eta = y/g(x)$, donde, obviamente, $g(x)$ depende de $U_e(x)$, se puede hacer de una forma sistemática y rigurosa. Aquí se resume sólo un grupo de ellas, correspondientes a un flujo externo dado por

$$U_e(x) = U_o(x/L)^m, \quad (27.48)$$

que modelan el flujo ideal sobre una *cuña* bidimensional de ángulo $\pi\beta$, donde β vale

$$\beta = 2m/(m+1), \quad (27.49)$$

siendo U_o la velocidad aguas arriba de la cuña (figura 27.4; ver sección 21.6.5). Por un procedimiento análogo al de la sección anterior (cuyo desarrollo se deja

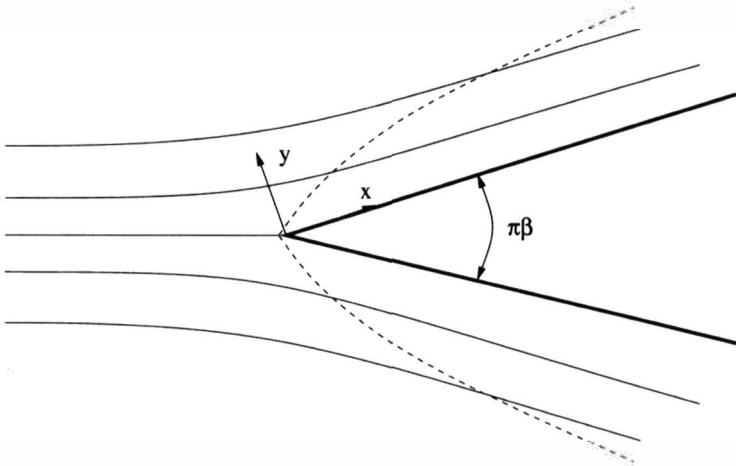


Figura 27.4: Esquema de la capa límite sobre una *cuña* bidimensional.

como ejercicio al alumno), se llega a las siguientes variables de semejanza y ecuaciones:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{u_o}{\nu} x^{(m-1)/2}, \quad (27.50)$$

$$\psi = \sqrt{\frac{2\nu u_o}{m+1}} x^{(m+1)/2} f(\eta), \quad (27.51)$$

$$u = U_e(x) f'(\eta), \quad (27.52)$$

$$f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad (27.53)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (27.54)$$

donde $u_o \equiv U_o/L^m$. Esta solución de semejanza de capa límite fue encontrada por Falkner y Skan en 1930. Obsérvese que para $m = 0$ ($\beta = 0$) equivale a la capa límite sobre una placa plana de la sección anterior. Otro límite interesante es $m = 1$, correspondiente a la capa límite sobre una placa plana normal al movimiento (ángulo de la cuña igual a π). En la figura 27.5 se representan algunas soluciones.

27.5. Separación de la capa límite

En la capa límite sobre la superficie de un cuerpo con forma arbitraria la presión no es constante, como ocurre en la placa plana, sino que, al existir una

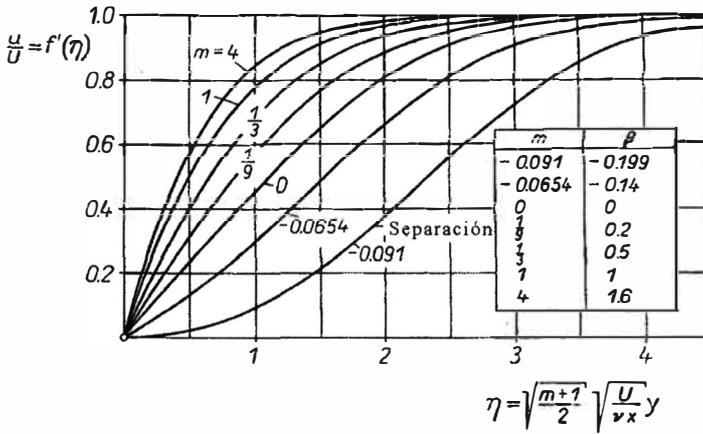


Figura 27.5: Algunos perfiles de velocidad en la capa límite sobre una cuña bidimensional (figura tomada de Schlichting y Gersten, 2000).

velocidad externa a la capa límite que depende de x , $U_e(x)$, existen gradientes de presión a lo largo de la capa límite. La resolución de las ecuaciones (27.7)-(27.8) con un término $dp/dx = -\rho U_e dU_e/dx$ arbitrario se suele hacer por métodos integrales aproximados, que no se van a tratar aquí, o por integración numérica directa de las ecuaciones. Lo que sí se verá a continuación es, de forma cualitativa, el fenómeno del desprendimiento o separación de la capa límite y su relación con los gradientes *adversos* de presión.

Considérese, por ejemplo, el flujo alrededor de un cuerpo a $Re \gg 1$ (figura 27.6). Si no existiese separación de la corriente, habría dos puntos de remanso en el flujo, uno en el borde de ataque (R_1 en figura 27.6) y otro en el lado opuesto (R_2). En estos puntos la velocidad es cero y la presión, de acuerdo con el teorema de Bernoulli, $p + \rho v^2/2 = \text{constante}$, sería máxima. En los puntos de anchura máxima del cuerpo en relación a la corriente incidente (puntos marcados con A en la figura), la velocidad es máxima y la presión es mínima. Por tanto, la presión $p(x)$ en la capa límite decrece desde R_1 hasta A y vuelve a crecer desde A hasta R_2 .⁵ Sin embargo, en la zona donde la presión crece, la capa límite no siempre permanece adherida al cuerpo y se puede producir el fenómeno de separación de la capa límite; en otras palabras, cuando existe un gradiente *adverso* de presión, puede ocurrir que la suma de las fuerzas de fricción en la pared y de presión adversa contrarresten la cantidad

⁵Si la teoría ideal fuese correcta esto daría lugar a una resistencia de presión igual a cero, lo que constituye la llamada paradoja de D'Alambert (ver capítulo 21).

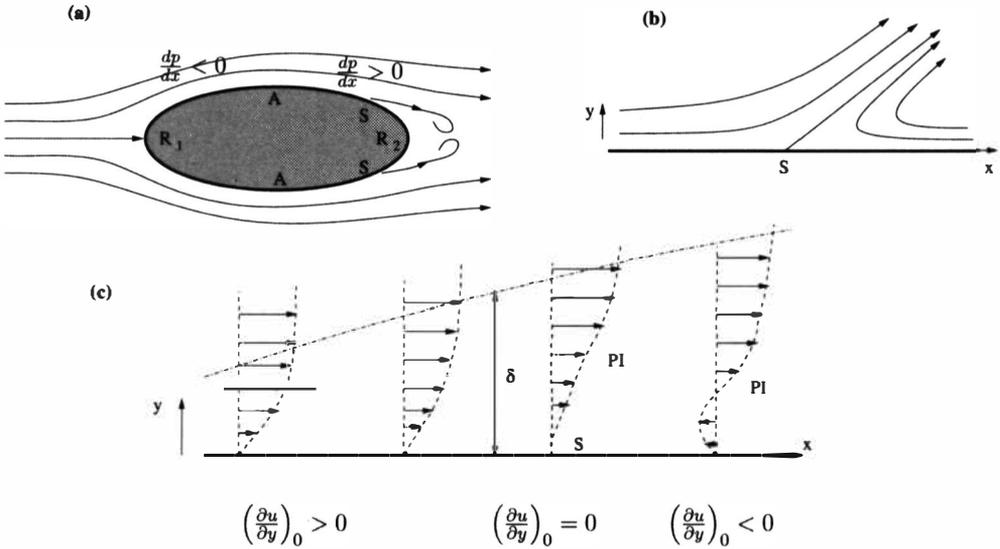


Figura 27.6: Separación de la capa límite. (a) Flujo alrededor de un cuerpo con separación. (b) Forma de las líneas de corriente cerca del punto de separación. (c) Perfiles de velocidad cerca del punto de separación (PI = punto de inflexión).

de movimiento del fluido, llegando a provocar una corriente invertida cerca de la pared, separando la capa límite de la misma. Para analizar este fenómeno se escribe la ecuación de cantidad de movimiento de la capa límite (27.8) justo en la pared ($y = 0$), donde $u = v = 0$:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0. \tag{27.55}$$

Si se produce la separación de la capa límite (inversión del movimiento cerca de la pared), su inicio o punto de separación viene definido por $(\partial u / \partial y)_{y=0} = 0$ (ver figura 27.6); es decir, el esfuerzo de fricción debe ser nulo en ese punto. Cuando el gradiente de presión es favorable ($dp/dx < 0$), de la ecuación anterior se tiene que $(\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} < 0$, implicando que $\partial^2 u / \partial y^2 < 0$ en toda la capa límite, y no se puede producir un punto de separación (ver figura 27.7). Sin embargo, si el gradiente de presión es adverso ($dp/dx > 0$), como $\partial^2 u / \partial y^2$ debe ser negativo lejos de la pared, existe un punto de inflexión ($\partial^2 u / \partial y^2 = 0$) en el perfil de velocidad en la capa límite (figura 27.7); este punto de inflexión no implica que se produzca el punto de separación de la capa límite, pero sí es una condición necesaria para ello. La existencia de un gradiente adverso de presión es, por tanto, condición necesaria, pero no suficiente, para la separación de la capa límite. Generalmente, si $dp/dx > 0$ la separación ocurre. El

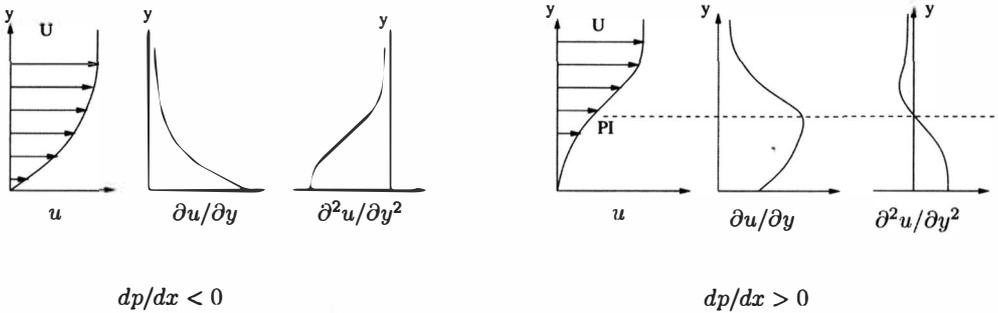


Figura 27.7: Perfil de velocidad en la capa límite con $dp/dx < 0$ y $dp/dx > 0$.

que lo haga mucho antes del punto R_2 o muy cerca de él depende de cómo de intenso sea el gradiente adverso de presión, es decir, de la *forma* del cuerpo. Por tanto, la fuerza de resistencia de un cuerpo depende mucho de su forma (lo cual es bastante intuitivo; ver sección siguiente).

Como se aprecia en el esquema de la figura 27.8, la separación de la capa límite no sólo se produce en flujos *externos* alrededor de cuerpos, sino también en flujos *internos* en conductos, siempre que exista un gradiente adverso de presión, es decir, una zona *divergente* del conducto.

27.6. Resistencias de fricción y de presión

Como se apuntó en la sección 17.1 la fuerza de resistencia que un determinado fluido ejerce sobre un cuerpo que se mueve en su seno se suele descomponer en dos sumandos, uno correspondiente a las fuerzas viscosas y otro a las fuerzas de presión sobre la superficie del cuerpo:

$$\vec{F}_r = \int_S \vec{\tau}' \cdot \vec{n} ds - \int_S p_d \vec{n} ds \equiv \vec{F}_{rf} + \vec{F}_{rp} \quad (27.56)$$

Ya se vió (lección 17) que para $Re \ll 1$, estas fuerzas son proporcionales a la velocidad relativa del cuerpo. Para el caso de una esfera la fuerza total viene dada por la ley de Stokes [ecuación (17.45)], donde 2/3 de la resistencia es debida a la viscosidad y el tercio restante es resistencia de presión.

Para fluidos ideales ($Re \rightarrow \infty$), no existe resistencia de fricción y la resistencia de presión se demuestra que es nula (ver capítulo 21), por lo que la fuerza de resistencia de un cuerpo que se mueve (estacionariamente) en un fluido ideal es cero. Evidentemente, esto no es cierto para flujos reales, por muy grande que sea el número de Reynolds. Por un lado siempre existe una resistencia de fricción asociada a la condición de no deslizamiento entre el fluido y

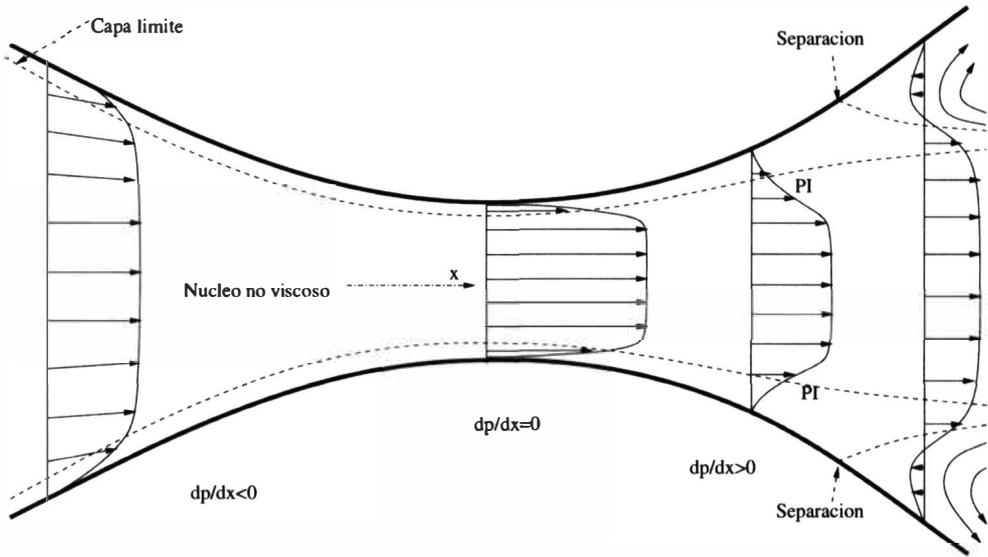


Figura 27.8: Separación de la capa límite en una tobera convergente-divergente.

la pared sólida. Esta resistencia se calcula resolviendo la capa límite viscosa adyacente a la superficie del cuerpo, de la que ya hemos visto el caso de una placa plana con ángulo de incidencia nulo, cuya resistencia viscosa [ecuación (27.46)] se puede utilizar aproximadamente para cuerpos *fuselados*, donde los gradientes de presión son pequeños. Por otra parte, aunque la presión en la capa límite coincide prácticamente (cuando $Re \gg 1$) con la presión exterior dada por la teoría ideal, la resistencia de presión no es nula, como predice dicha teoría, puesto que la capa límite se desprende en el movimiento alrededor de un cuerpo cerrado. Por consiguiente, en la parte posterior del cuerpo la corriente se separa y los efectos viscosos dejan de estar confinados en una capa delgada, para afectar a una fracción importante del fluido, formándose lo que se denomina una *estela* (ver, por ejemplo, la figura 21.12). Cuando el cuerpo es **fuselado** (ver, por ejemplo, la figura 21.8), los gradientes de presión son muy suaves y la corriente se separa casi al final del cuerpo, siendo así muy pequeña la resistencia de presión en relación a la de fricción. En estos casos la corriente exterior predicha por la teoría ideal se aproxima bastante a la real, y la única *corrección* necesaria a esa teoría es la resistencia de fricción calculada por la teoría de capa límite. Por el contrario, cuando el cuerpo es *romo*, los gradientes de presión son tan acusados que la capa límite se separa en cuanto éstos comienzan a ser adversos (puntos de máxima velocidad A de la figura 27.6) o incluso antes, como ocurre en el caso de un cilindro circular (ver figura

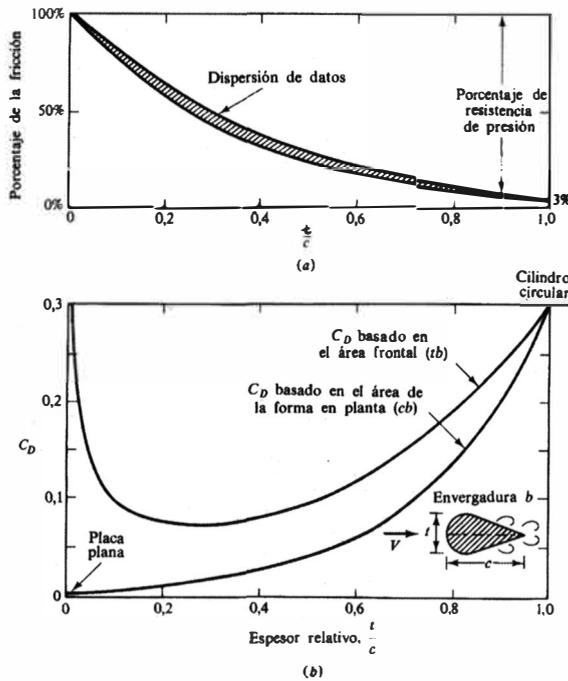


Figura 27.9: Resistencia de un cuerpo bidimensional fuselado a $Re = 10^6$. (a) Efecto del espesor relativo en el porcentaje de la resistencia de fricción. (b) Coeficiente de resistencia total basado en dos áreas diferentes, frontal y de planta (tomada de White, 1983).

21.13). Detrás del punto de separación el flujo no es irrotacional, sino que la viscosidad afecta a todo el fluido, y se forma una estela que suele ser turbulenta. En ella la presión es prácticamente constante y aproximadamente igual a la presión del punto de separación, que, por otra parte, coincide prácticamente con la presión mínima que se alcanza en los puntos A. Por consiguiente, la diferencia entre las presiones en las partes frontal y trasera del cuerpo es bastante grande, dando lugar a una fuerza de presión que suele ser mucho mayor que la resistencia de fricción. A la **resistencia** de presión también se le suele llamar **de forma** puesto que, como se acaba ver, depende casi exclusivamente de la forma del cuerpo.

Resumiendo, en un cuerpo fuselado la resistencia suele ser pequeña y es una resistencia de fricción casi exclusivamente. En un cuerpo como la resistencia suele ser grande debido a que la resistencia de presión es mucho mayor que la de fricción. Esto se aprecia muy bien en la figura 27.9, donde se representa el coeficiente de fricción C_D , definido por

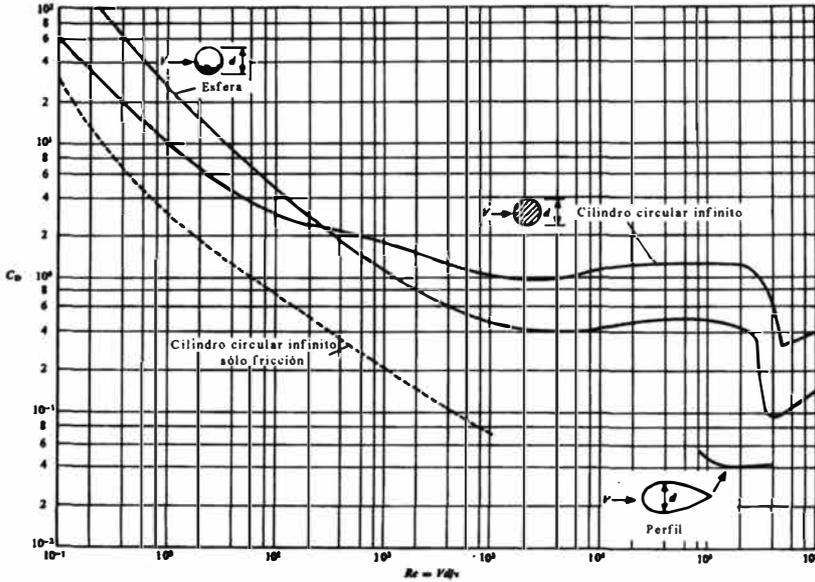


Figura 27.10: Coeficiente de resistencia para un cilindro circular y una esfera en función del número de Reynolds. La línea de trazos representa el coeficiente C_{Df} debido sólo a la resistencia de fricción para un cilindro circular. (Figura tomada de Roy, 1988).

$$C_D = \frac{F_r}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} = C_{Df} + C_{Dp} \quad , \quad (27.57)$$

donde A es un área característica, para el flujo alrededor de un perfil bidimensional con diferentes relaciones entre el espesor t y la cuerda c . Mediante análisis dimensional se puede demostrar fácilmente que C_D es función exclusivamente del número de Reynolds para un fluido incompresible (los datos de la figura están tomados para $Re = 10^6$). Se observa que el porcentaje de la resistencia de presión crece desde el cero por ciento para $t/c \rightarrow 0$ (placa plana) hasta el 97 por ciento para $t/c = 1$ (cilindro circular). Se observa también que C_D (basado en el área longitudinal, definida por el producto de la cuerda y la envergadura) es mucho menor para la placa plana que para el cilindro circular.

En la figura 27.10 se representa el coeficiente C_D para un cilindro circular y una esfera en función del número de Reynolds. Para Re pequeño, C_D viene dado por las expresiones (17.47) y (17.79), para esfera y cilindro, respectivamente. A medida que Re aumenta, la importancia de la resistencia de forma va creciendo, como se aprecia comparando con la curva de trazos, que representa exclusivamente la resistencia de fricción para el cilindro circular. Para

Re alto ($Re > 10^3$, aproximadamente), C_D permanece prácticamente constante e igual a 0,4 para la esfera y entre 1 y 1.2 para el cilindro.⁶ Sin embargo, para $Re \simeq 2 \times 10^5$, la resistencia cae bruscamente. Este paradójico efecto es debido a que se produce la transición de la capa límite laminar [gobernada por las ecuaciones (27.7)-(27.8)] a la turbulenta (que se considerará en lecciones posteriores). Aunque, como se verá, la resistencia de fricción de la capa límite turbulenta es mucho mayor que la de la capa límite laminar, la cantidad de movimiento en la capa límite turbulenta es mayor cerca de la pared, con lo que se retrasa la separación de la capa límite para un mismo gradiente adverso de presión (una misma forma del cuerpo; en la figura 21.13 se aprecia muy bien este efecto). En otras palabras, en una capa límite turbulenta es necesario un gradiente adverso de presión más acusado para que se separe la corriente, en relación a la capa límite laminar, ya que la cantidad de movimiento que tiene que vencer es mayor. Como la resistencia es mayormente de forma, el efecto global de la transición de capa límite laminar a turbulenta es una disminución de la resistencia total.⁷

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 8.
- G.I. BARENBLAT, 1996. Capítulo 6.
- S. GOLDSTEIN, 1969.
- R.A. GRANGER, 1995. Capítulo 14.
- L. ROSENHEAD, 1988. Capítulos I y V.
- D.N. ROY, 1988. Capítulo II.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulos II, VII y IX.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 7.

⁶Esta constancia era previsible dimensionalmente, puesto que $C_D = C_D(Re)$ deja de depender de la viscosidad para $Re \gg 1$.

⁷Esta es la razón por la cual las pelotas de golf no tienen la superficie lisa: las rugosidades (*hoyuelos*) facilitan la transición a la turbulencia, reduciendo la resistencia a la cuarta parte, aproximadamente.

Capítulo 28

Capa límite térmica incompresible

28.1. Introducción

En esta breve lección se tratará la capa límite térmica en el límite en que los efectos de compresibilidad y de disipación viscosa son muy pequeños. El objetivo principal es introducir la importante analogía de Reynolds. También se verá la solución de semejanza de la capa límite térmica correspondiente a la capa límite viscosa considerada en la sección 27.4, que incluye la capa límite sobre una placa plana como caso particular. Por último, se discutirá cualitativamente la generalización de la analogía de Reynolds en flujos compresibles.

Como ya se vio en la lección 19, los efectos de conducción de calor son despreciables en la ecuación de la energía cuando el número de Peclet, $Pe \equiv RePr = UL/\alpha$, es mucho mayor que la unidad. Sin embargo, cerca de las superficies sólidas la conducción de calor debe ser importante en orden a que se pueda imponer la condición de contorno de igualdad de temperatura entre la pared y el fluido inmediatamente adyacente. Por ello existe una capa límite térmica, de espesor δ_T pequeño comparado con la longitud característica L , donde la conducción de calor es tan importante como la convección de energía. Esta condición nos da el orden de magnitud del espesor de la capa límite térmica:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla e \sim \nabla \cdot (K \nabla T), \quad \rho U c_p \frac{\Delta T}{L} \sim \frac{K \Delta T}{\delta_T^2}, \quad (28.1)$$

donde ΔT es una diferencia de temperatura característica entre la pared y la corriente exterior. Se tiene así que

$$\frac{\delta_T}{L} \sim \sqrt{\frac{K}{\rho L c_p U}} = \frac{1}{Pe^{1/2}} \ll 1 \quad (Pe \gg 1) \quad . \quad (28.2)$$

Comparando este espesor con el de la capa límite viscosa, $\delta_v/L \sim Re^{-1/2}$, se obtiene

$$\frac{\delta_T}{\delta_v} \sim \frac{1}{Pr^{1/2}} \quad . \quad (28.3)$$

Así, para la mayoría de los fluidos (los gases, el agua y otros líquidos comunes) en los que $Pr = O(1)$, $\delta_T \sim \delta_v$. Para líquidos muy viscosos (aceites, glicerina, etc.) cuyo número de Prandtl es muy alto, la capa límite térmica es mucho más delgada que la viscosa. Por el contrario, para los metales líquidos ($Pr \ll 1$), el espesor de la capa límite térmica es mucho mayor que el de la viscosa.

La importancia del estudio de la capa límite térmica reside en el hecho de que es esencial para calcular el intercambio de calor entre un sólido y un fluido que circula por su superficie (cuando $Pe \gg 1$). Como se verá, en algunas ocasiones las ecuaciones de la capa límite térmica son semejantes a las de la capa límite mecánica o de velocidad tratada en la lección anterior y las soluciones para la velocidad (fricción) se pueden extrapolar para la temperatura (conducción de calor).

28.2. Ecuaciones y condiciones de contorno

Suponiendo que la capa límite es bidimensional y estacionaria, y utilizando la misma notación y las mismas aproximaciones que se consideraron en la lección anterior, las ecuaciones que gobiernan el flujo de un fluido compresible en la capa límite son:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (28.4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (28.5)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (28.6)$$

Estas ecuaciones están sujetas a las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_p(x); \quad (28.7)$$

$$y/\delta \rightarrow \infty, \quad u = U_e(x), \quad T = T_e(x); \quad (28.8)$$

$$x = 0, \quad u = u_o(y), \quad T = T_o(y); \quad (28.9)$$

donde $T_p(x)$ es la temperatura de la pared y T_e y U_e son la temperatura y velocidad en el borde exterior de la capa límite. Estas últimas magnitudes están relacionadas con la presión exterior $p(x)$ (que como se sabe coincide con la presión en la capa límite al ser despreciable su variación transversal en el interior de la misma) mediante las ecuaciones de Euler:

$$\rho U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{dp}{dx}, \quad (28.10)$$

$$\rho U_e \frac{dh_e}{dx} = U_e \frac{dp}{dx}, \quad h_e = c_p T_e. \quad (28.11)$$

En el caso de un fluido incompresible con viscosidad constante, la ecuación de la energía (28.6) está desacoplada de las ecuaciones mecánicas y se puede resolver una vez que se tiene la solución de la capa límite de velocidad. En las secciones siguientes se considerará este límite en el caso en que, además, los términos de trabajo de presión y de disipación viscosa son despreciables.

28.3. Capa límite térmica incompresible. Analogía de Reynolds

Los términos udp/dx y $\mu(\partial u/\partial y)^2$ son despreciables frente a $\rho u \partial h/\partial x$ en la ecuación (28.6) si

$$\frac{U_e^2}{c_p |T_p - T_e|} \ll 1, \quad (28.12)$$

donde se ha hecho uso de $\delta_v/L \sim Re^{-1/2}$. Para los líquidos, dado que la capacidad calorífica suele ser muy alta, la condición anterior se satisface prácticamente siempre. Para los gases ideales se puede escribir en la forma

$$M^2 \ll \frac{|T_p - T_e|}{(\gamma - 1)T_e}, \quad (28.13)$$

donde $M^2 \equiv U_e^2/\gamma R_g T_e$ es el número de Mach de la corriente exterior. Si se verifica además que

$$|T_p - T_e|/T_e = O(1), \quad (28.14)$$

o menor, se tiene que $M^2 \ll 1$ y el gas se puede considerar incompresible. Con estas condiciones, las ecuaciones (28.4)-(28.6) se simplifican a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (28.15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (28.16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (28.17)$$

donde se ha supuesto, además, que μ , K y c_p son constantes.

Se observa que la ecuación de la energía es igual que la ecuación de cantidad de movimiento (intercambiando u por T) si $Pr = 1$ y si $U_e = \text{constante} \equiv U$ (placa plana). Para que esta analogía sea completa deben ser también iguales las condiciones de contorno. Esto se puede conseguir utilizando las variables adimensionales

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U} Re^{1/2}, \quad \bar{T} = \frac{T_p - T}{T_p - T_e}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L} Re^{1/2}, \quad (28.18)$$

suponiendo que T_p y T_e , al igual que U , son constantes, donde $Re = UL/\nu$. En efecto, en términos de esas variables y con las hipótesis anteriores, las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía y sus respectivas condiciones de contorno quedan

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \quad (28.19)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \eta^2}, \quad (28.20)$$

$$\eta = 0, \quad \bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \bar{T} = 0, \quad (28.21)$$

$$\eta \rightarrow \infty, \quad \bar{u} = 1, \quad \bar{T} = 1, \quad (28.22)$$

$$\xi = 0, \quad \bar{u} = 1, \quad \bar{T} = 1, \quad (28.23)$$

donde se ha supuesto, además, que en $x = 0$ $u = U$ y $T = T_e$. Así, conocida la solución de la capa límite viscosa (que en este caso viene dada por la solución de semejanza de Blasius) automáticamente se tiene la solución de la capa límite térmica sin más que igualar $\bar{u} = \bar{T}$. Esta es la denominada analogía de Reynolds, que como se ve es estrictamente válida para un fluido con $Pr = 1$ en una capa límite estacionaria sobre una placa plana con T_p y T_e constantes y que verifican (28.12)-(28.14). En estos supuestos, se puede deducir el flujo de

calor en función del esfuerzo de fricción en la pared. Para ello se suele definir el denominado **número de Stanton** ,

$$Sta = \frac{q_p}{\rho U_e c_p (T_e - T_p)}, \quad (28.24)$$

que relaciona el flujo de calor conducido desde la pared al fluido,

$$q_p = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (28.25)$$

con el convectado por la corriente. Teniendo en cuenta que $\bar{u} \equiv \bar{T}$, se tiene

$$\begin{aligned} q_p &= -K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{K Re^{1/2} (T_p - T_e)}{L} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \\ &= -\frac{K Re^{1/2} (T_p - T_e)}{L} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = -\frac{K (T_p - T_e)}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{K (T_e - T_p)}{\mu U} \tau_f, \end{aligned} \quad (28.26)$$

donde $\tau_f = \mu (\partial u / \partial y)_{y=0}$ es el esfuerzo de fricción. Definiendo el coeficiente de fricción local

$$C_f = \frac{\tau_f}{\frac{1}{2} \rho U_e^2}, \quad (28.27)$$

y teniendo en cuenta que $Pr = 1$, se llega a la expresión habitual más simple de la analogía de Reynolds

$$Sta = C_f / 2. \quad (28.28)$$

Esta expresión es local, es decir, tanto Sta como C_f dependen de x . Si uno usa el resultado (27.45),

$$C_f \simeq 0,664 Re_x^{-1/2}, \quad Re_x \equiv \frac{\rho U_e x}{\mu}, \quad (28.29)$$

la analogía de Reynolds (28.28) se escribe

$$Sta \simeq 0,332 Re_x^{-1/2}. \quad (28.30)$$

También, de forma aproximada se puede usar para hallar el flujo de calor total intercambiado por el fluido con una placa plana de longitud L . Definiendo

$$Sta_L = \frac{2}{L} \int_0^L Sta dx = \frac{Q}{\rho U_e c_p (T_e - T_p)}, \quad Q \equiv \frac{2}{L} \int_0^L q_p dx, \quad (28.31)$$

donde Q es el calor intercambiado (por ambas caras de la placa) por unidad de longitud, y usando (27.47), se llega a

$$Sta_L \simeq 1,328Re^{-1/2}, \quad Re = \frac{\rho U_e L}{\mu}. \quad (28.32)$$

A veces, en lugar del número de Stanton, se utiliza el **número de Nusselt** como parámetro adimensional relacionado con el flujo de calor, que para una placa de longitud L se define como

$$Nu = \frac{Q}{\frac{K(T_e - T_p)}{L}} = Pr Re Sta_L. \quad (28.33)$$

Para el caso $Pr = 1$ que se está considerando aquí, la analogía de Reynolds se escribiría

$$Nu = \frac{1}{2} Re C_f \simeq 1,328 \sqrt{Re}. \quad (28.34)$$

Obviamente, esta analogía no sería muy útil si sólo sirviese para fluidos con $Pr = 1$. Por ello, en la siguiente sección, se generalizará para cualquier valor de Pr . Para que el resultado sea algo más general, se usará el ejemplo considerado en la sección 27.4, que incluye la capa límite de Blasius sobre una placa plana como caso particular y tiene solución de semejanza.

28.4. Analogía de Reynolds para cualquier Pr

Considérese el flujo potencial sobre una cuña bidimensional (27.48) (ver figura 27.4):

$$U_e(x) = U_o \left(\frac{x}{L} \right)^m \equiv u_o x^m. \quad (28.35)$$

Si la temperatura T_p de la pared y la temperatura exterior T_e son constantes¹ y se cumple la condición (28.12) de capa límite térmica incompresible, usando las definiciones (27.50)-(27.51) junto con

$$\theta(\eta) = \frac{T_p - T}{T_p - T_e}, \quad (28.36)$$

¹Los resultados que se dan a continuación se generalizan sin mucha dificultad al caso en el que T_e y T_p son, como U_e , funciones potenciales de x , con potencias en general distintas a m , pues el problema también admite solución de semejanza. Ver, por ejemplo, Schlichting y Gersten (2000).

las ecuaciones (28.15)-(28.17) y sus correspondientes condiciones de contorno tienen solución de semejanza gobernada por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias y condiciones de contorno:

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0, \quad \beta \equiv \frac{2m}{m+1}, \quad (28.37)$$

$$\theta'' + Pr f \theta' = 0, \quad (28.38)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (28.39)$$

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 1. \quad (28.40)$$

La ecuación (28.37) está desacoplada de (28.38) y su solución está representada en la figura 27.5 para algunos valores de m . Una vez que $f(\eta)$ es conocida, la ecuación (28.38) se puede integrar formalmente:

$$\theta' = \theta'(0) \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right), \quad (28.41)$$

$$\theta = \theta'(0) \int_0^\eta \exp\left(-Pr \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta. \quad (28.42)$$

Como aquí sólo nos interesa la analogía de Reynolds entre el flujo de calor y el esfuerzo de fricción, de la solución anterior sólo se necesita $\theta'(0)$, junto con $f''(0)$. En efecto, de las expresiones para τ_f y q_p se tiene:

$$\tau_f = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho U_e^2 \sqrt{\frac{(m+1)\nu}{2U_e x}} f''(0), \quad (28.43)$$

$$q_p = -K \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = K(T_e - T_p) \sqrt{\frac{(m+1)\nu}{2U_e x}} \theta'(0). \quad (28.44)$$

Sustituyendo en las definiciones de C_f y Sta (28.27) y (28.24), se obtiene una generalización de la analogía de Reynolds para el presente caso:

$$Sta = \frac{C_f}{2} Pr^{-1} \frac{\theta'(0)}{f''(0)}. \quad (28.45)$$

El valor de $\theta'(0)$ se obtiene de (28.42) sustituyendo la condición de contorno $\theta(\infty) = 1$:

$$[\theta'(0)]^{-1} = \int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta} f d\eta\right) d\eta. \quad (28.46)$$

El cociente $\theta'(0)/f''(0)$ es una función del número de Prandtl y de β que se puede obtener numéricamente. Sin embargo, es posible obtener una relación explícita aproximada suponiendo que la contribución principal de la integral (28.46) proviene de las proximidades de $\eta = 0$, con lo que se puede utilizar el primer término del desarrollo de Taylor de $f(\eta)$,

$$f(\eta) = \frac{1}{2}f''(0)\eta^2 + \dots \quad (28.47)$$

Esta aproximación es razonable debido a que la exponencial en (28.46) decae muy rápidamente a medida que η crece. En todo caso, es tanto más exacta cuanto mayor sea el número de Prandtl [recuérdese que si $Pr \gg 1$, de acuerdo con (28.3), la capa límite térmica es mucho más delgada que la capa límite viscosa, por lo que sólo valores pequeños de η son necesarios para hallar $\theta(\eta)$, lo cual es evidente en (28.42)]. Sustituyendo (28.47) en (28.46) se llega a

$$[\theta'(0)]^{-1} \simeq \int_0^{\infty} e^{-Pr f''(0)\eta^3/6} d\eta = \frac{\Gamma(1/3)}{3} \left[\frac{6}{Pr f''(0)} \right]^{1/3}, \quad (28.48)$$

donde Γ es la función Gamma. Por tanto,

$$Sta \simeq \frac{C_f}{2} \frac{3}{\Gamma(1/3)6^{1/3}} [f''(0)]^{-2/3} Pr^{-2/3} \simeq \left[\frac{f''(0)}{0,48} \right]^{-2/3} C_f Pr^{-2/3}, \quad (28.49)$$

donde $f''(0)$ sólo depende de β . En el caso de una placa plana (es decir, $\beta = 0$), se vió que $f''(0) \simeq 0,47$, por lo que se recupera, aproximadamente, la analogía de Reynolds (28.28), pero incluyendo la dependencia explícita con Pr . No coincide exactamente porque se ha supuesto que $Pr \gg 1$. Sin embargo, se observa que aproximadamente vale incluso para $Pr = 1$. Por ello, es costumbre escribir la analogía de Reynolds como

$$Sta \simeq \left[\frac{f''(0)}{0,47} \right]^{-2/3} C_f Pr^{-2/3}, \quad (28.50)$$

que es aproximadamente válida para cualquier valor de Pr . Para una placa plana, si uno usa (28.29), se tiene

$$Sta \simeq 0,332 Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3}. \quad (28.51)$$

Por último, (28.34) se convierte en

$$Nu \simeq 1,328Re^{1/2}Pr^{1/3}. \quad (28.52)$$

Aunque las expresiones anteriores sólo valen cuando T_e y T_p son constantes, se suelen usar aproximadamente cuando $U_e(x)$, $T_p(x)$ y $T_e(x)$ son funciones *suaves* de x . Por otra parte, la analogía de Reynolds se puede generalizar, sin complicarla demasiado (por supuesto, de forma aproximada), a capas límites no incompresibles [cuando no se verifican las hipótesis (28.12)-(28.14)]. Sin entrar en detalles (el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Schlichting y Gersten, 2000, capítulo XIII), las expresiones anteriores para la analogía de Reynolds son aproximadamente válidas si se redefine el número de Stanton como

$$Sta = \frac{q_p}{\rho U_e c_p (T_{po} - T_p)} \quad (28.53)$$

donde T_{po} es una *especie* de temperatura de remanso,

$$T_{po} \equiv T_e + r \frac{U_e^2}{2c_p}, \quad (28.54)$$

siendo r el denominado *factor de recuperación*, que es igual a $Pr^{1/2}$ para una capa límite laminar e igual a $Pr^{1/3}$ para una capa límite turbulenta (de las que se hablará más adelante). De esta forma, existe transferencia de calor desde la pared al fluido (por ejemplo) si T_p es mayor, no que T_e , sino que T_{po} , que por ello se denomina la *temperatura adiabática* de la pared.

Para terminar es conveniente señalar que el uso de analogías es muy frecuente en los cálculos ingenieriles, no sólo entre la transferencia de calor y la fricción, sino también con respecto a la transferencia de masa. Una recopilación de muchas de ellas se pueden encontrar, por ejemplo, en Bird, Stewart y Lightfoot (1960).

Referencias.

- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulos XII y XIII.
- C.S. YIH, 1988. Capítulo 8.

Parte IX

FLUJOS TURBULENTOS

Capítulo 29

Introducción a la turbulencia

29.1. Propiedades de los flujos turbulentos

La mayoría de los flujos que se presentan en la Naturaleza y en las aplicaciones ingenieriles y tecnológicas son turbulentos. Desde las corrientes de agua en ríos y canales hasta casi todos los flujos que se producen en la industria química, donde la eficacia de la mezcla fluida es un requisito importante, pasando por innumerables tipos de flujos. El flujo laminar es la excepción, no la regla; sólo se produce para altas viscosidades, dimensiones pequeñas o pequeñas velocidades ($Re \ll 1$).

Es difícil dar una definición precisa de la turbulencia. Sin embargo, cualquiera que haya observado el humo que emana de un cigarrillo o la estela que se forma detrás de un objeto interpuesto en la corriente de un río tiene una idea más o menos clara de lo que es un flujo turbulento. Por ello, la mejor forma de introducir los flujos turbulentos, antes de pasar a una descripción más precisa, es enumerar las propiedades fundamentales que los caracteriza.

Irregularidad y aletoriedad. Los flujos turbulentos son irregulares, *caóticos*, si se utiliza el término más de moda. De aquí la imposibilidad (o, en cualquier caso, la ineficacia) de un tratamiento determinista para su descripción; en su lugar se recurre a métodos estadísticos (ver capítulo 31).

Difusividad. Los flujos turbulentos son muy efectivos en difundir cantidad de movimiento, masa y energía. Un flujo con aspecto irregular, pero en el que esa irregularidad no venga acompañada de una difusión efectiva, no es turbulento. Este aspecto de la difusión es el que hace a los flujos turbulentos más *atractivos* en muchas aplicaciones tecnológicas. Es el responsable, entre otros ejemplos, de la mezcla efectiva y rápida de las diferentes especies químicas requerida para que las reacciones químicas se produzcan más rápidamente;

retrasa o previene la separación de la capa límite, disminuyendo la resistencia aerodinámica; aumenta la resistencia de los flujos en conductos en relación al flujo laminar; incrementa la velocidad de transmisión de calor entre una pared sólida y un fluido en cualquier máquina que utilice un fluido; etc. Para tener una idea aproximada del incremento de la difusividad turbulenta en relación a la difusividad molecular (la cual es la única que aparece en los flujos *laminares*), es interesante estimar, por ejemplo, el orden de magnitud del tiempo necesario para que un incremento de temperatura ΔT se propague a todo el fluido contenido en un volumen de longitud característica L (por ejemplo, para que el aire de una habitación cúbica de lado L se caliente desde la temperatura inicial T a la temperatura $T + \Delta T$ de una de sus paredes). Si la difusión es puramente molecular, de la ecuación de la energía se tiene que $\rho c_v \partial T / \partial t \sim K \nabla^2 T$, es decir, $t_l \sim L^2 Pr / \nu$. En cambio, si el flujo es turbulento (por ejemplo, si la pared con mayor temperatura es la inferior y se produce una *convección natural* debido a las fuerzas de flotabilidad), se tiene que $|\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}| \sim |g \Delta \rho|$, donde $\Delta \rho$ es la disminución de la densidad del aire cerca de la pared con temperatura $T + \Delta T$, en relación a la densidad del aire del resto de la habitación, ρ . Suponiendo que $\Delta T \ll T$, que la presión permanece prácticamente constante y que el gas es ideal, de la ecuación de estado se tiene que $|\Delta \rho| \sim \rho \Delta T / T$, de donde la velocidad de convección natural es del orden de $V \sim (L g \Delta T / T)^{1/2}$. Así, para aire a $T = 293^\circ K$ ($\nu \simeq 10^{-5} m^2/s$, $Pr \simeq 0,7$) en una habitación de longitud característica $L = 5m$ y $\Delta T = 10^\circ C$, se tiene que $t_t \sim L/V \sim 4s$, muchísimo menor que el tiempo característico de difusión laminar, $t_l \sim 20$ días.

Número de Reynolds grande. Los flujos turbulentos ocurren siempre a altos números de Reynolds, ya que, normalmente, la turbulencia ocurre como consecuencia de inestabilidades de los flujos laminares cuando el número de Reynolds supera un cierto valor crítico, que suele ser grande (ver lección siguiente). Por encima de este número de Reynolds existe una interacción entre los términos viscoso e inercial no lineal de la ecuación de cantidad de movimiento, dando lugar a inestabilidades que desembocan en un movimiento caótico, imposible de predecir determinísticamente. La dificultad matemática de predecir los flujos turbulentos está así asociada a la no linealidad de las ecuaciones, y muchos de los últimos avances que se han hecho en el problema de la turbulencia provienen del estudio de los sistemas dinámicos no lineales que, incluso con un reducido número de grados de libertad, producen movimientos caóticos.

Tridimensionalidad y rotacionalidad. La turbulencia se caracteriza por las fluctuaciones, no sólo de la velocidad, sino también de la vorticidad.

Es decir, los flujos turbulentos no son nunca irrotacionales, sino que se caracterizan por niveles muy altos de las fluctuaciones de la vorticidad. Estas fluctuaciones no se podrían mantener en un flujo bidimensional ya que, como se vio en la lección 20, el principal mecanismo que genera vorticidad es el *estiramiento* de los vórtices (*vortex stretching*) proporcional al término $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$ en la ecuación 20.2, que es nulo para flujos bidimensionales. Por esta razón, la dinámica de la vorticidad es muy importante en la descripción de los flujos turbulentos (ver lección 31). A veces se visualiza a la turbulencia como una colección de tubos de vorticidad que por la acción de las fluctuaciones de la velocidad se van estirando, aumentando así su vorticidad, que de esta forma va realimentando este mecanismo, generando cada vez fluctuaciones más fuertes de la velocidad, que dan lugar a más vorticidad..., hasta que la escala es tal que la viscosidad actúa disipando la vorticidad (ver sección siguiente). Todo esto no podría ocurrir en flujos con fluctuaciones bidimensionales.

Disipación. Los flujos turbulentos son siempre disipativos, propiedad relacionada con la difusividad. El trabajo de deformación de los esfuerzos de viscosidad incrementa la energía interna a costa de la energía cinética de las fluctuaciones turbulentas. Por ello, las corrientes turbulentas necesitan un suministro continuo de energía para vencer la disipación viscosa. Sin este suministro las fluctuaciones turbulentas decaerían por viscosidad y el movimiento dejaría paulatinamente de ser turbulento. Por la misma razón, un movimiento (irregular) en donde no se produzcan esfuerzos viscosos que disipen las fluctuaciones no sería turbulento. Ésta es, por ejemplo, la distinción fundamental entre algunos tipos de ondas con movimiento muy irregular, donde no hay disipación, y los movimientos turbulentos, que son esencialmente disipativos. El mecanismo por el cual la energía se transfiere desde las fluctuaciones de mayor tamaño, donde no existe disipación ($Re \gg 1$), hasta fluctuaciones con escalas mucho menores donde se produce la disipación, esencial en los flujos turbulentos, se describe cualitativamente en la sección siguiente.

Medio continuo. Se verá también en la siguiente sección que las escalas más pequeñas de las fluctuaciones turbulentas son generalmente mucho mayores que las escalas de los movimientos moleculares, por lo que las fluctuaciones de las propiedades del fluido son las de un medio continuo, gobernadas por las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto no quiere decir que se puedan encontrar soluciones de estas ecuaciones ya que, como se dijo antes, las soluciones son caóticas (irregulares y aleatorias), haciéndose necesaria una descripción estadística del movimiento, pero tomando como base de partida las ecuaciones de Navier-Stokes (ver lección 31). Por otra parte, al ser la turbulencia una consecuencia casi exclusiva de la estructura de las ecuaciones del movimiento

(no linealidad) y no del fluido en sí (de la estructura molecular), la mayoría de las propiedades dinámicas de los movimientos turbulentos son las mismas para todos los fluidos, independientemente de que sean gases o líquidos, siempre que el número de Reynolds sea suficientemente grande. Esto hace que, desde un punto de vista estadístico, el estudio de la turbulencia se pueda hacer en general.

29.2. Escalas de la turbulencia. Cascada de energía. Microescala de Kolmogorov

Se ha dicho que los flujos turbulentos se caracterizan por la disipación viscosa y porque el número de Reynolds es grande. Estas dos características podrían parecer contradictorias, pero no lo son debido a que en la turbulencia existen muchas escalas espaciales y temporales.

Las inestabilidades hidrodinámicas, que constituyen el origen de los flujos turbulentos (ver lección siguiente), dan primeramente lugar a fluctuaciones con un tamaño que, en la mayoría de los casos, es del mismo orden que la longitud característica del flujo laminar original, L . Bajo ciertas condiciones, estas grandes fluctuaciones son a su vez inestables, dando lugar a fluctuaciones y torbellinos cada vez de menor tamaño. El mecanismo fundamental de esta transferencia de energía desde los torbellinos de escala mayor a torbellinos más pequeños (lo que se suele denominar como cascada de energía) es el estiramiento de los vórtices, ya que el número de Reynolds asociado a estas escalas grandes es elevado (requisito indispensable para que pueda existir turbulencia) y el flujo se puede considerar ideal, no existiendo disipación viscosa en esa escala. Con el estiramiento aumenta la vorticidad haciéndose más inestable el movimiento, dando lugar a torbellinos más pequeños, y así sucesivamente. Este proceso continúa hasta que la escala es tan pequeña que la disipación viscosa actúa, difundiendo y disipando la vorticidad. De acuerdo con este proceso, la turbulencia no se puede mantener a sí misma, dependiendo de su entorno para obtener energía. Como se verá en la lección siguiente, las fuentes externas de energía pueden ser debidas a fuerzas de flotabilidad, fuerzas centrífugas, etc. Paradójicamente, la fuente más común es la difusión *transversal* de cantidad de movimiento debido a la viscosidad, que aparece en los flujos denominados de *cortadura*, de los cuales los ejemplos más significativos son los flujos en conductos y en capas límites. Si la turbulencia llega a una región donde no exista ningún mecanismo que la mantenga, decae por la disipación viscosa y el flujo vuelve a ser laminar. Un ejemplo típico es la turbulencia formada en el flujo normal a una rejilla (una red metálica, por ejemplo): detrás de la rejilla

el flujo se hace turbulento debido las inestabilidades originadas por la difusión de cantidad de movimiento como consecuencia de los gradientes transversales (cortadura) que la rejilla produce en la corriente principal. Pero si no existe ninguna fuente de cortadura aguas abajo, la turbulencia se disipa y el flujo vuelve a ser laminar.

Obviamente, la escala de los torbellinos más pequeños donde se disipa la energía es tal que el número de Reynolds asociado a ellos es de orden unidad. Esto da un criterio para estimar el orden de magnitud de la escala espacial y temporal más pequeña de la turbulencia, denominada **microescala de Kolmogorov**. La generación de esta escala pequeña de las fluctuaciones es debida a los términos no lineales de la ecuación del movimiento (inestabilidades y estiramiento de vórtices), pero los términos viscosos impiden que las escalas sean infinitamente pequeñas, ya que disipan su energía en calor. Por tanto, la escala más pequeña se autoajusta automáticamente al valor de la viscosidad ν , que es pequeño (más precisamente, Re^{-1} es pequeño). Como las fluctuaciones con escala de longitud pequeña tienen también una escala temporal pequeña, se puede suponer que estas fluctuaciones son estadísticamente independientes de las fluctuaciones mucho más lentas de la escala grande y del flujo medio. Es decir, la escala más pequeña a la que se disipa la energía turbulenta tiene que ser *universal*, en el sentido de que no depende de las particularidades de los grandes *torbellinos* ni del movimiento medio de cada flujo turbulento, dependiendo así, exclusivamente, de la viscosidad cinemática ν y de la velocidad de transferencia de energía ϵ desde las grandes escalas a la escala pequeña, que es también la velocidad a la que se disipa la energía en la escala pequeña, transformándose en calor. Esta es la llamada *teoría de equilibrio universal de Kolmogorov*, cuyos resultados concuerdan muy bien con las observaciones experimentales. Como ϵ tiene dimensiones de $[L]^2[t]^{-3}$ y $[\nu] = [L]^2[t]^{-1}$, los órdenes de magnitud de las escalas espaciales, temporales y de velocidad a los que se disipa la energía turbulenta viene dada por

$$l = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}, \quad v = (\nu\epsilon)^{1/4}, \quad (29.1)$$

que constituyen la microescala de Kolmogorov, también llamada *escala interna* de la turbulencia. Obviamente, el número de Reynolds asociado a esta microescala es de orden unidad: $lv/\nu = 1$.

Para tener una idea más precisa de la microescala de Kolmogorov habría que relacionar la velocidad de disipación de energía ϵ con la longitud y la velocidad características de las escalas grandes de la turbulencia (que en muchas ocasiones coinciden con las del flujo medio). Si V es la velocidad característica

de las fluctuaciones mayores, la energía cinética por unidad de masa asociada a ellas será de orden de V^2 . Suponiendo que esta energía se transfiere a las escalas menores en un tiempo característico del orden de L/V , donde L es el tamaño característico de estas fluctuaciones, se tiene que la energía se transfiere a una velocidad V^3/L , que es también la velocidad de energía disipada en la microescala,

$$\epsilon \sim V^3/L. \quad (29.2)$$

Esta estimación implica que una fluctuación o torbellino pierde una fracción importante de su energía cinética, proporcional a V^2 , en el tiempo que *da una vuelta*. Esto no quiere decir que en ese tiempo se disipe esa energía, sino que se transfiere a una escala más pequeña, hasta que al final del proceso se disipa en la microescala. Sustituyendo (29.2) en (29.1) se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{l}{L} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-3/4} = Re^{-3/4}, \quad (29.3)$$

$$\frac{\tau}{t_c} \sim \frac{\tau V}{L} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-1/2} = Re^{-1/2}, \quad (29.4)$$

$$\frac{v}{V} \sim \left(\frac{VL}{\nu}\right)^{-1/4} = Re^{-1/4}, \quad (29.5)$$

donde $Re = (VL/\nu) \gg 1$ es el número de Reynolds de la escala grande. Estas relaciones nos indican que las escalas de longitud, tiempo y velocidad de los torbellinos más pequeños son mucho menores que las de los grandes torbellinos. A medida que el número de Reynolds aumenta, la separación entre las escalas también aumenta, por lo que la independencia estadística de la microescala de Kolmogorov será más evidente a grandes números de Reynolds.

Para terminar esta sección se comprobará que la microescala de Kolmogorov es, en general, mucho mayor que la escala del movimiento molecular, por lo que la turbulencia es realmente un fenómeno del fluido como medio continuo (y en equilibrio termodinámico local). Para ello se toma el caso más desfavorable de un gas, donde el recorrido libre medio entre colisiones moleculares es del orden de $\lambda \sim \nu/a$ (ver ecuaciones 8.4, 9.20 y 9.61), donde a es la velocidad del sonido. Comparando con (29.3) se tiene

$$\frac{\lambda}{l} \sim \frac{\nu/a}{LRe^{-3/4}} = \frac{M}{Re^{1/4}}, \quad (29.6)$$

donde $M = V/a$ es el número de Mach. Como $Re \gg 1$ y M es a lo sumo de orden unidad en la mayoría de las ocasiones, se tiene que $\lambda \ll l$.¹ Análogamente, el tiempo característico entre colisiones es del orden $\tau_c \sim \lambda/a$, de donde

$$\frac{\tau_c}{\tau} \sim \frac{M^2}{Re^{1/2}} \quad (29.7)$$

Referencias.

- D.J. ACHESON, 1990. Capítulo 9.
- U. FRISCH, 1995. Capítulo 7.
- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987. Capítulo III.
- M. LESIEUR, 1993. Capítulos I y III.
- A. S. MONIN y A. M. YAGLOM, 1971. Volumen 1, capítulo 1.
- H. TENNEKES y J.L. LUMLEY, 1972. Capítulo 1.
- C.-S. YIH, 1988. Capítulo 9.

¹Esta condición es similar a la de validez de la hipótesis de equilibrio termodinámico local (ecuación 11.23). Lo habitual es que si M es grande, el número de Reynolds asociado sea mucho mayor.

Capítulo 30

Inestabilidades y transición a la turbulencia

30.1. Introducción

Los flujos laminares pasan a ser turbulentos como consecuencia de inestabilidades que se producen, típicamente, cuando el número de Reynolds supera un cierto valor crítico. El ejemplo más representativo es el flujo en conductos, que pasa de laminar a turbulento para números de Reynolds, $Re = VD/\nu$ (V es la velocidad media y D el diámetro), por encima de un valor crítico. En particular, experimentalmente se comprueba que por debajo de $Re \simeq 2300$, el flujo es siempre laminar. Si $Re > 2300$ el flujo puede ser laminar si se pone un cuidado exquisito en evitar perturbaciones en el flujo. Pero, si éstas se producen, por encima de un valor $Re_c \geq 2300$ (que depende básicamente de la amplitud inicial de las perturbaciones; ver figura 30.1) crecen aguas abajo, destruyendo el flujo laminar y dando lugar a un flujo turbulento. Otro ejemplo característico es la capa límite laminar sobre una placa plana con ángulo de ataque nulo (gradiente de presión igual a cero), que pasa a ser turbulenta cuando el número de Reynolds basado en el espesor de desplazamiento, $Re = U\delta_1/\nu$, es mayor que aproximadamente 3000, en este caso independientemente de la amplitud inicial de las perturbaciones. Como $\delta_1 \simeq 1,72(\nu x/U)^{1/2}$ (ver sección 27.3), a una distancia del borde de ataque igual a $3 \times 10^6 \nu/U$, aproximadamente, se produce siempre la transición de capa límite laminar a turbulenta. Esta capa límite turbulenta tiene un espesor considerablemente mayor y da lugar a una fricción también mayor (ver lección 32). La transición de capa límite laminar a turbulenta no es brusca, sino que existe una región de transición donde el flujo es muy complejo, con zonas intermitentemente laminares y turbulentas

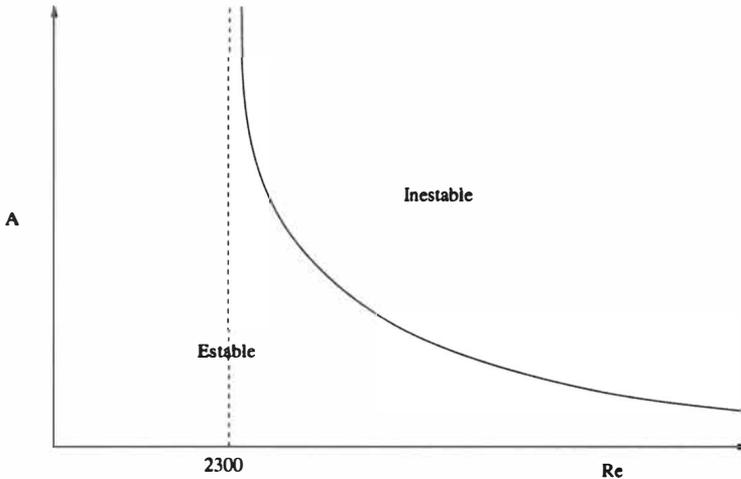


Figura 30.1: Esquema del número de Reynolds crítico en función de la amplitud de las perturbaciones en el flujo en un conducto circular.

(ver sección 30.5 más abajo).

En este capítulo se pretende dar una breve introducción a la teoría de las inestabilidades hidrodinámicas. Primeramente se formulará el problema matemático para flujos incompresibles y se definirán los conceptos básicos de la teoría. A continuación se considerarán algunos ejemplos significativos, prestando especial atención al origen físico de las inestabilidades. Por último, se tratará la estabilidad de los flujos casi unidireccionales en general, y de la capa límite sobre una placa plana en particular, y se describirá muy brevemente el problema de la transición a la turbulencia en este tipo de flujos.

30.2. Conceptos básicos de la teoría lineal de la estabilidad hidrodinámica

Por simplicidad se considerará un flujo incompresible con propiedades constantes. Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento que gobiernan la evolución de la velocidad \vec{v} y la presión p son:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (30.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}_m + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (30.2)$$

Supóngase que uno está interesado en saber si un determinado flujo estacionario (\vec{V}, P) , denominado *flujo base*, que está gobernado por las ecuaciones

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (30.3)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{f}_m + \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad (30.4)$$

y sus correspondientes condiciones de contorno, es o no estable. Para ello, lo que se suele hacer es *perturbar* este flujo base y estudiar la evolución temporal y/o espacial de las perturbaciones. Es decir, el flujo perturbado se descompone en la forma

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \vec{V}(\vec{x}) + \vec{v}'(\vec{x}, t), \quad (30.5)$$

$$p(\vec{x}, t) = P(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t), \quad (30.6)$$

donde las magnitudes con primas son las perturbaciones. En la denominada teoría lineal de estabilidad, que es la que se va a considerar aquí, se supone que las perturbaciones son pequeñas:

$$|\vec{v}'| \ll |\vec{V}|, \quad p' \ll P. \quad (30.7)$$

Con esta premisa, la sustitución de (30.5)-(30.6) en (30.1)-(30.2), teniendo en cuenta (30.3)-(30.4) y despreciando los términos cuadráticos en las pequeñas perturbaciones, proporciona las siguientes ecuaciones linealizadas para las perturbaciones:

$$\nabla \cdot \vec{v}' = 0, \quad (30.8)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{v}' + \vec{v}' \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \vec{v}'. \quad (30.9)$$

Obviamente, estas ecuaciones son más simples que las ecuaciones no lineales originales (30.1)-(30.2). En particular, dada la linealidad de las ecuaciones y la independencia temporal del flujo base, las soluciones se pueden escribir en la forma¹

$$\vec{s}'(\vec{x}, t) \equiv \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ p' \end{pmatrix} = \vec{S}(\vec{x}) e^{-i\omega t}, \quad (30.10)$$

¹Como las perturbaciones puede ser arbitrarias, en principio uno no tiene en cuenta ningún tipo especial de condición inicial para las mismas.

donde ω es, en general, una constante compleja:

$$\omega = \omega_r + i\omega_i. \quad (30.11)$$

El problema (30.8)-(30.10), junto con sus correspondientes condiciones de contorno, suele constituir un problema de **autovalores**, donde la constante ω no puede tomar un valor cualquiera, sino sólo aquellos compatibles con las condiciones de contorno. Si todos los valores admisibles de ω tienen la parte imaginaria negativa ($\omega_i < 0$), el flujo base es **estable**, pues toda posible perturbación decae en el tiempo. Sin embargo, basta que tan solo uno de los autovalores tenga la parte imaginaria positiva para que el flujo base sea **inestable**, pues ese *modo*, que en principio puede estar presente en el flujo como cualquier otra perturbación infinitesimal, crecerá indefinidamente en el tiempo, destruyendo la estructura del flujo base.

30.2.1. Modos normales. Flujos unidireccionales

Para concretar algo más, se considerará el caso simple en el que el flujo base es unidireccional. Por ejemplo, supóngase que, en coordenadas cartesianas, el flujo base viene dado por

$$\vec{V} = U(y)\vec{e}_x, \quad (30.12)$$

con las restantes componentes de la velocidad nulas y el gradiente de presión reducida constante (ver sección 14.1). En este caso, los coeficientes de las ecuaciones lineales de estabilidad (30.8)-(30.9) sólo dependen de la coordenada y , por lo que la solución se puede escribir como una superposición de **modos normales**:

$$\vec{s}'(\vec{x}, t) \equiv \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ p' \end{pmatrix} = \vec{S}'(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad (30.13)$$

donde α y β son los números de onda en las direcciones x y z , respectivamente, y ω es la frecuencia. En general, α y ω son números complejos, mientras que el número de onda en la dirección perpendicular al movimiento, β , suele ser real. La sustitución de esta solución normal en las ecuaciones lineales de estabilidad adimensionalizadas con sus respectivas condiciones de contorno da lugar a un problema de autovalores, que se puede escribir en la forma

$$\overline{\vec{A}} \cdot \vec{S} = 0, \quad (30.14)$$

donde el operador lineal \overline{A} contiene derivadas primeras y segundas respecto a y (ver ejemplos en las secciones siguientes). Este problema homogéneo sólo tiene solución para una cierta combinación de los parámetros dada por una relación del tipo

$$D(\alpha, \beta, \omega; Re, \dots) = 0, \quad (30.15)$$

denominada **relación de dispersión**. Todos sus argumentos son adimensionales, aunque se haya utilizado los mismos símbolos para los números de onda α y β y para la frecuencia ω . Además del número de Reynolds Re , en (30.15) aparecerán también todos los demás parámetros adimensionales que definen el flujo base cuya estabilidad se esté analizando (Re suele ser el parámetro más relevante). Cualquier perturbación del flujo base puede ser considerada como una cierta superposición de los (en general) infinitos modos normales que son solución de (30.14)-(30.15).

30.2.2. Estabilidad temporal y espacial

La relación de dispersión (que en la inmensa mayoría de los casos hay que determinarla numéricamente) es la ecuación básica que contiene toda la información sobre la estabilidad *lineal* del flujo. Es decir, nos dice si *ondas* del tipo (30.13), caracterizadas por los autovalores α , β y ω , son estables o inestables en el flujo considerado para los distintos valores de los parámetros. Tradicionalmente, se han considerado dos tipos de análisis estabilidad, constituyendo cada uno de ellos un conjunto de soluciones particulares de la relación de dispersión: la estabilidad temporal y la estabilidad espacial. En la **estabilidad temporal** se supone que el número de onda α es real (como se comentó, β suele ser siempre real), y se buscan los autovalores complejos $\omega = \omega_r + i\omega_i$ que satisfacen (30.15). Es decir, se pretende saber si perturbaciones del tipo $e^{i(\alpha x + \beta z - \omega_r t)}$, que son ondas cuya velocidad de fase en la dirección x viene dada por $c = \omega_r/\alpha$, crecen o decrecen en el tiempo, comportamiento que viene fijado por el signo de la parte imaginaria de ω . Estos son los denominados modos temporales. Para cada valor de Re (y de los demás parámetros), el flujo es temporalmente estable si $\omega_i < 0$ para todos los valores de α y β (cualquier perturbación decae exponencialmente en el tiempo). Por el contrario, el flujo será inestable si $\omega_i > 0$ para algún valor de α y β , pues perturbaciones con esos valores de los números de onda, que en principio pueden estar presentes en el flujo, crecen exponencialmente en el tiempo. A ω_i se le suele denominar, por tanto, factor de amplificación de la onda. La transición de estable a inestable típicamente viene dada por un valor *crítico* del número de Reynolds (o de otro

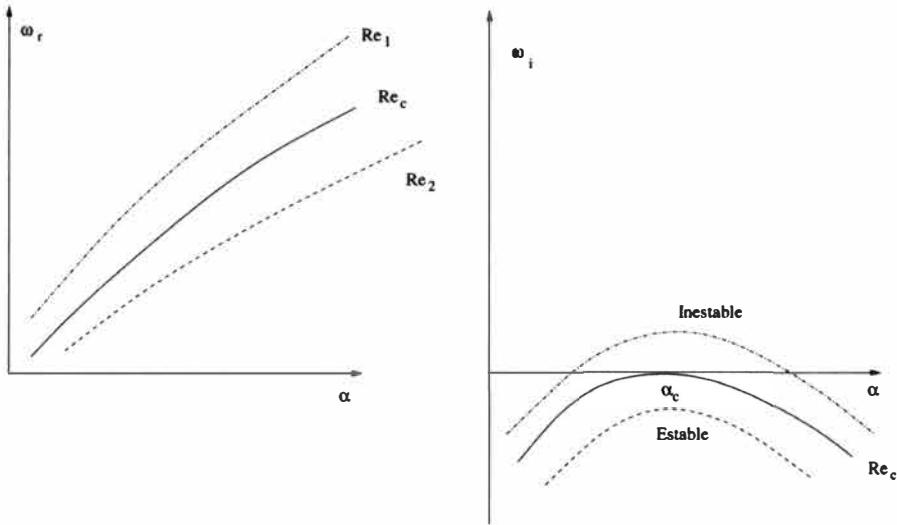


Figura 30.2: Esquema típico de la parte real e imaginaria de ω en función de α para un cierto valor de β y tres valores del número de Reynolds. Para Re_2 el flujo es estable, mientras que es inestable para Re_1 . El valor Re_c para el cual ω_i se anula en un solo punto α_c es el número de Reynolds crítico de estabilidad para el valor de β considerado (normalmente, $Re_2 < Re_c < Re_1$).

parámetro adimensional que caracterize al flujo base), para el que ω_i se anula para un cierto valor de α y β (ver figura 30.2).

En la **estabilidad espacial** se supone que ω es real y se buscan soluciones (autovalores) de la relación de dispersión con $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ complejo. Este tipo de análisis de estabilidad se suele utilizar principalmente en flujos casi-unidireccionales (o estrictamente unidireccionales como el ejemplo presente), pues experimentalmente es más fácil excitar con una determinada frecuencia ω un determinado punto del flujo y comprobar si perturbaciones con esa frecuencia crecen o no aguas abajo del flujo. Es decir, una perturbación ondulatoria del tipo $e^{i(\alpha_r x + \beta z - \omega t)}$ (denominado modo espacial al ser ω real) será espacialmente estable para un determinado valor de Re si la parte imaginaria de α es positiva, pues la amplitud de la perturbación decaerá a medida que ésta se mueve con el flujo en la dirección x (con velocidad de fase $c = \omega/\alpha_r$). El flujo será espacialmente estable para ese valor de Re si $\alpha_i > 0$ para todo ω y β . Por el contrario, el flujo será espacialmente inestable si $\alpha_i < 0$ para al menos un valor de ω y de β . En la estabilidad espacial, α_i es el factor de amplificación.

Obviamente, si un flujo es inestable temporalmente, debe serlo también espacialmente, por lo que las transiciones de estable a inestable desde un punto de vista temporal deben coincidir, en principio, con las transiciones desde

un punto de vista espacial, y viceversa.² Para verlo, considérese el caso general de modos *espacio-temporales*, en los que tanto α como ω son complejos. Supóngase que para un determinado valor de β y de los parámetros adimensionales del flujo, la relación de dispersión (30.15) se puede escribir como una función analítica entre esas dos variables complejas:

$$\omega = \omega(\alpha; \beta, Re, \dots). \quad (30.16)$$

De las relaciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_r}. \quad (30.17)$$

En el caso *temporal*, que se designará con (T) , se tiene que $\alpha_i(T) = 0$, $\alpha = \alpha_r(T)$ y $\omega = \omega_r(T) + i\omega_i(T)$; es decir, en el plano complejo de α nos moveríamos a lo largo del eje real. Por otro lado, en el caso *espacial*, que se designará mediante (E) , $\omega_i(E) = 0$, $\alpha = \alpha_r(T) + i\alpha_i(E)$ y $\omega = \omega_r(E)$, lo cual quiere decir que nos moveríamos en el eje real del plano ω . Si se integran las relaciones (30.17) con respecto a α_i desde un estado (T) [en donde $\alpha_i(T) = 0$] hasta un estado (E) [en el que $\omega_i(E) = 0$] manteniendo $\alpha_r =$ constante $= \alpha_r(T)$, se llega a

$$\omega_i(T) = - \int_0^{\alpha_i(E)} \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r} d\alpha_i, \quad (30.18)$$

$$\omega_r(E) - \omega_r(T) = - \int_0^{\alpha_i(E)} \frac{\partial \omega_i}{\partial \alpha_r} d\alpha_i. \quad (30.19)$$

Como α_r es constante entre (T) y (E) , se tiene que $\alpha_r(T) = \alpha_r(E)$. Supóngase que los parámetros adimensionales del flujo y β son tales que estamos en las proximidades de la transición de estable a inestable desde un punto de vista temporal; es decir, que $|\omega_i(T)| \ll 1$. Justo en el punto de la transición, la curva $\omega_i = \omega_i(\alpha_r)$ tiene un máximo (ver figura 30.2), por lo que $\partial \omega_i / \partial \alpha_r = 0$. En las proximidades de este punto, esta derivada es un infinitésimo de segundo orden en relación a $|\omega_i(T)|$. Por tanto, de (30.19) se tiene que $\omega_r(E) \simeq \omega_r(T)$, con errores que tienden a cero cuadráticamente con $\omega_i(T) \rightarrow 0$. Expandiendo ahora $\partial \omega_r / \partial \alpha_r$ en (30.18) en el entorno de un punto α_i^* entre 0 y $\alpha_i(E)$, se tiene

$$\omega_i(T) = -\alpha_i(E) \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r}(\alpha_i^*) - \left[\frac{1}{2} \alpha_i^2(E) - \alpha_i(E) \alpha_i^* \right] \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial \alpha_r \partial \alpha_i}(\alpha_i^*) + \dots \quad (30.20)$$

²Se verá más adelante que esto no siempre es así.

Haciendo uso de las relaciones de Cauchy-Riemann, $\partial\omega_r/\partial\alpha_i = -\partial\omega_i/\partial\alpha_r = O(\omega_i^2)$, por lo que el segundo término en el lado derecho de (30.20) es de segundo orden en $|\omega_i|$, y se puede despreciar en el límite $\omega_i(T) \rightarrow 0$. Se llega pues a que, en primera aproximación,

$$\frac{\omega_i(T)}{\alpha_i(E)} = -\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha_r} \equiv -c_g \quad \text{para } \omega_i(T) \rightarrow 0, \quad (30.21)$$

junto con

$$\alpha_r(T) = \alpha_r(E), \quad \omega_r(E) = \omega_r(T) \quad \text{para } \omega_i(T) \rightarrow 0. \quad (30.22)$$

Estas relaciones fueron obtenidas por Gaster (1962), siendo c_g la velocidad de grupo de las ondas (ver, por ejemplo, sección 24.1.3). Por tanto, para un paquete de ondas que se propagan con el flujo base hacia x crecientes ($c_g > 0$), si el flujo se hace inestable desde un punto de vista temporal, es decir, si $\omega_i(T)$ pasa de negativo a positivo [siendo, por tanto, $|\omega_i(T)| \ll 1$], también se hace inestable desde un punto de vista espacial, pues $\alpha_i(E)$ pasa de positivo a negativo [obsérvese que $|\alpha_i(E)|$ es, por tanto, también pequeño, por lo que los términos despreciados en la deducción anterior son aún más pequeños de lo que se ha supuesto]. Es interesante observar que los pequeños factores de amplificación espaciales y temporales están relacionados entre sí no con la velocidad de fase $c = \omega_r/\alpha_r$, sino con la velocidad de grupo c_g de las ondas. Lo cual no es de extrañar si se tiene en cuenta que para un conjunto de ondas con diferentes frecuencias ω , la velocidad a la que se mueve un paquete de ondas que mantienen la frecuencia constante no es la velocidad de fase, sino la velocidad de grupo (ver sección 24.1.3). Es por ello que si uno quiere relacionar la amplificación espacial de ondas con una determinada frecuencia ω con la amplificación temporal para un cierto valor del número de onda α , la velocidad relevante que se debe tomar no es c sino c_g [de acuerdo con (30.22), α_r y ω_r coinciden en ambos casos en el límite de pequeñas amplificaciones].

30.2.3. Estabilidad convectiva y absoluta

El hecho de que una transición de estabilidad temporal coincida con una transición de estabilidad espacial sólo si $c_g > 0$ (los paquetes de onda se mueven en la misma dirección que el flujo base) tiene que ver con la naturaleza convectiva o absoluta de la inestabilidad. Para ilustrar estos nuevos conceptos, supóngase que en un determinado instante ($t = 0$, por ejemplo) uno introduce una perturbación infinitesimal (tanto en amplitud como en extensión espacial y temporal) en el origen de coordenadas en un flujo con $U > 0$. Si el flujo es

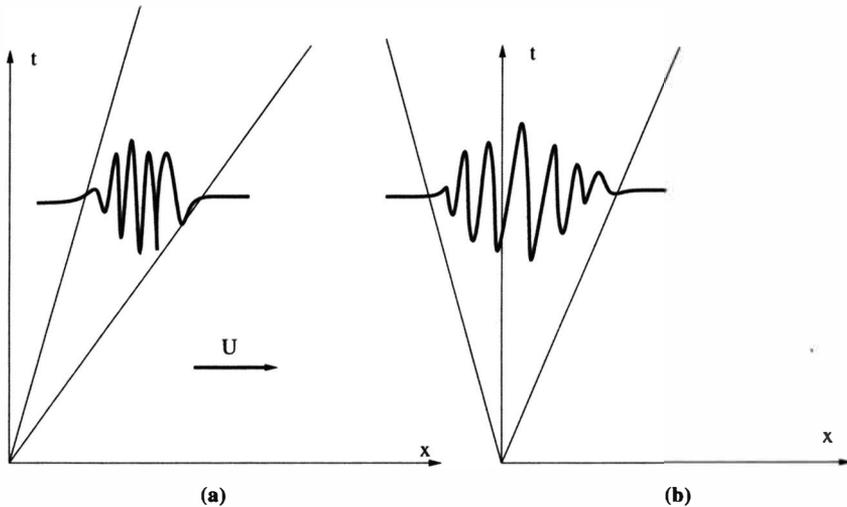


Figura 30.3: Inestabilidad convectiva (a) y absoluta (b).

inestable desde el punto de vista temporal, la amplitud de esa perturbación crecerá a medida que transcurre el tiempo. La perturbación puntual inicial también se irá extendiendo espacialmente. El flujo se dice que es **convectivamente inestable** si los límites espaciales de la perturbación se mantienen siempre en $x > 0$ y se desplazan hacia las x crecientes [en la misma dirección del flujo base; ver figura 30.3(a)]; es decir, la perturbación, aunque crece exponencialmente en amplitud, es *convectada* por el flujo. Transcurrido un cierto tiempo, la perturbación original sale fuera del dominio del flujo, que vuelve a su estado original no perturbado. Por tanto, aunque el flujo es inestable para el tipo de perturbaciones considerado, realmente se comporta como un *amplificador de ruido*, volviendo a su estado original poco después de que cesa la fuente de perturbaciones.

Por el contrario, el flujo se dice que es **absolutamente inestable** si la perturbación inicial, además de crecer su amplitud con el tiempo, se extiende tanto para valores de x positivos como negativos. En este caso, la perturbación se propaga también corriente arriba, modificando de una forma permanente el flujo base original, que tras la inestabilidad pasa a tener una estructura diferente, aunque la fuente de la perturbación haya cesado. En otras palabras, la perturbación inicial no sólo crece en amplitud, sino que se extiende a todo el flujo. La diferencia básica entre ambos tipos de inestabilidades es que, en el primer caso, la velocidad de grupo de las perturbaciones inestables es siempre positiva (tiene el mismo sentido que el flujo base), mientras que la velocidad de grupo de las perturbaciones que son inestables absolutamente son nulas o nega-

tivas para algunos modos (para algunos valores de la frecuencia). Está claro, por tanto, que la equivalencia entre crecimiento espacial hacia $x > 0$ (inestabilidad espacial) para una determinada frecuencia de las perturbaciones y crecimiento (inestabilidad) temporal sólo tiene sentido cuando $c_g > 0$, es decir, para perturbaciones cuyos paquetes de onda se mueven en la misma dirección del flujo. En cuanto c_g se hace nula o negativa, esta equivalencia se rompe y ya no tiene sentido analizar la inestabilidad espacial del flujo (aunque sí la temporal).

Normalmente, un flujo que se hace inestable al ir aumentando algún parámetro adimensional que lo caracteriza (el número de Reynolds Re , por ejemplo), primero pasa de estable a convectivamente inestable para un cierto valor crítico Re_c (para algún valor del número de onda y de la frecuencia de las perturbaciones). Al seguir aumentando Re , puede que ocurra una segunda transición desde convectivamente inestable a absolutamente inestable para otro valor crítico $Re_t > Re_c$ (generalmente para otros valores del número de onda y de la frecuencia). Esta segunda transición, en el caso de que ocurra, hay que buscarla haciendo un análisis de estabilidad espacio-temporal. El valor Re_t se alcanza cuando alguna perturbación que sea convectivamente inestable ($c_g > 0$) llega a un estado en el cual la velocidad de grupo se anula.

30.3. Algunos ejemplos de inestabilidades físicamente relevantes

En esta sección se considerarán brevemente algunas inestabilidades hidrodinámicas clásicas con el objetivo principal de presentar algunos de los **mecanismos físicos** más representativos responsables de que un flujo se haga inestable. Por ello, aunque se verá también la formulación matemática cuantitativa, se prestará atención a los aspectos físicos desde un punto de vista cualitativo. Algunas de estas inestabilidades pueden no dar lugar a un flujo turbulento. En la sección siguiente se verá un ejemplo sencillo de inestabilidad que siempre da lugar a un flujo turbulento, y que es muy relevante desde un punto de vista ingenieril: las inestabilidades que se producen en los flujos casi unidireccionales en general, y en la capa límite de Blasius en particular.

30.3.1. Inestabilidad térmica

De forma general se puede decir que las inestabilidades hidrodinámicas ocurren cuando se produce un desequilibrio entre las fuerzas que actúan sobre el fluido: fuerzas externas, fuerzas de inercia, fuerzas de presión y fuerzas

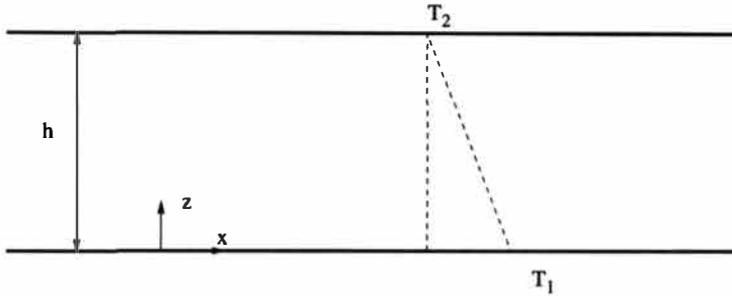


Figura 30.4: Fluido en reposo entre dos placas paralelas.

viscosas. Entre las fuerzas externas de interés están las fuerzas de flotabilidad en un fluido con densidad variable, las fuerzas de tensión superficial, las fuerzas centrífugas y de Coriolis cuando hay una rotación del sistema en el que el fluido se mueve y las fuerzas magnetohidrodinámicas. Uno de los ejemplos más simples de inestabilidad es la que se produce en un fluido estacionario estratificado con densidad variable $\rho = \rho(z)$ que aumenta con la altura z . Sobre cada partícula fluida actúan dos fuerzas, la gravedad y la fuerza de presión, que da lugar a la fuerza de flotabilidad de Arquímedes. Si el fluido está en reposo, estas dos fuerzas están equilibradas. Supóngase que, como consecuencia de una perturbación, una partícula fluida se desplaza desde el nivel z al nivel $z + h$. Si $\rho(z)$ decrece con z , para $h > 0$ la partícula tenderá a bajar debido a la fuerza de la gravedad, y para $h < 0$ tenderá a subir debido a la acción de la fuerza de flotabilidad, siendo, por tanto, el equilibrio estable. Por el contrario, si la densidad crece con la altura, para cualquier desplazamiento h de la partícula fluida, ésta tenderá a alejarse más y más de su posición original, siendo el equilibrio inestable. Por supuesto, para que el equilibrio sea realmente inestable hay que tener en cuenta las fuerzas de viscosidad que se oponen a las fuerzas (netas) de flotabilidad y tienden a estabilizar la solución de equilibrio fluidostático. La inestabilidad se producirá cuando el cociente entre la fuerza de flotabilidad neta desestabilizadora y la fuerza viscosa estatabilizadora supera un cierto valor crítico que se calcula resolviendo el problema matemático de las pequeñas perturbaciones alrededor de la solución de equilibrio.

Como ejemplo sencillo, considérese un fluido en reposo confinado entre dos placas paralelas e infinitas que se mantienen a distinta temperatura, T_1 y T_2 , constantes (figura 30.4). Si el fluido fuese aire, este problema simularía una capa atmosférica (por ejemplo la troposfera), pero por simplicidad supondremos que se trata de un fluido incompresible (de un líquido).

El flujo base sería la solución fluidostática, que se designará con el subíndice

e:

$$\vec{v}_e = 0, \quad \rho_e = \rho_o, \quad p_e = p_o - \rho_o g z, \quad T_e = \frac{T_2 - T_1}{h} z + T_1, \quad (30.23)$$

donde ρ_o y p_o son constantes y h es la separación entre placas. Para averiguar cuándo esta solución de equilibrio deja de ser estable, se perturba dicha solución:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}' = \vec{v}', \quad \rho = \rho_e + \rho', \quad p = p_e + p', \quad T = T_e + T'. \quad (30.24)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible y reteniendo sólo los términos lineales en las perturbaciones, se llega a:

$$\nabla \cdot \vec{v}' = 0, \quad (30.25)$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla(p_e + p')}{\rho_o + \rho'} - g\vec{e}_z + \nu \nabla^2 \vec{v}', \quad (30.26)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}' \cdot \nabla T_e = \alpha \nabla^2 T', \quad (30.27)$$

donde, por simplicidad, se ha supuesto que las propiedades del fluido son constantes y la densidad se ha considerado constante e igual a ρ_o en todos los términos excepto en las fuerzas de presión, puesto que este término proporciona la fuerza de flotabilidad responsable de las posibles inestabilidades del problema. Desarrollando dicho término, y reteniendo sólo el primer orden, se tiene

$$-\frac{\nabla(p_e + p')}{\rho_o + \rho'} \simeq -\frac{\nabla p_e}{\rho_o} + \frac{\rho'}{\rho_o^2} \nabla p_e - \frac{\nabla p'}{\rho_o} = g\vec{e}_z + \frac{\rho'}{\rho_o^2} \nabla p_e - \frac{\nabla p'}{\rho_o}. \quad (30.28)$$

La densidad se supone que sólo varía con la temperatura, teniéndose, en primera aproximación,

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_o}{\partial T} \right)_p T' = -\rho_o \beta T', \quad (30.29)$$

siendo β el coeficiente de expansión térmica del líquido [ecuación (10.28)]. Sustituyendo (30.28) y (30.29) en la ecuación de cantidad de movimiento (30.26) se llega a:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_o} + \beta T' g \vec{e}_z + \nu \nabla^2 \vec{v}'. \tag{30.30}$$

La aproximación anterior de suponer que la densidad sólo varía con la temperatura y afecta sólo a las fuerzas de flotabilidad se denomina **aproximación de Boussinesq**, siendo la aproximación habitual en la **convección libre o natural**.

Para ver qué parámetros adimensionales gobierna el problema, se definen las variables adimensionales

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}'}{V}, \quad \Pi = \frac{p'}{\rho_o V^2}, \quad \theta = \frac{T'}{T_1 - T_2}, \quad \nabla \leftarrow h \nabla, \quad \frac{\partial}{\partial t} \leftarrow t_c \frac{\partial}{\partial t}, \tag{30.31}$$

donde V y t_c son una velocidad característica y un tiempo característico, respectivamente, de las perturbaciones, que se elegirán de forma que simplifiquen al máximo las ecuaciones (obsérvese que, para simplificar la notación, se han tomado las mismas letras t y \vec{x} para designar las variables independientes adimensionales). Tomando $V = \nu/h$ y $t_c = h^2/\nu$, las ecuaciones (30.25), (30.30) y (30.27) quedan

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{30.32}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \Pi + Gr \theta \vec{e}_z + \nabla^2 \vec{u}, \tag{30.33}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - u_z = \frac{1}{Pr} \nabla^2 \theta, \tag{30.34}$$

donde u_z es la componente de \vec{u} según el eje z . Los únicos parámetros adimensionales que gobiernan el problema de estabilidad son el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, y el **número de Grashof**,

$$Gr \equiv \frac{\beta g h^3 (T_1 - T_2)}{\nu^2}, \tag{30.35}$$

que relaciona las fuerzas de flotabilidad con las fuerzas viscosas, siendo, por tanto, el parámetro adimensional que relaciona las dos fuerzas contrapuestas cuyo desequilibrio puede provocar la inestabilidad térmica. En realidad, los resultados muestran que el parámetro adimensional relevante es el producto del número de Grashof y el número de Prandtl, llamado **número de Rayleigh**,

$$Ra \equiv Gr Pr = \frac{\beta g h^3 (T_1 - T_2)}{\nu \alpha}. \tag{30.36}$$

Las ecuaciones (30.32)-(30.34) se deben resolver con las condiciones de contorno

$$\theta = 0, \quad \vec{u} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y } z = 1. \quad (30.37)$$

Como se describió en la sección anterior, el paso siguiente es escribir las perturbaciones como una superposición de modos normales. Previamente, es conveniente eliminar la presión, ya que no se dispone de condiciones de contorno para ella. Tomando el rotacional de (30.33), se llega a la ecuación (ver sección 7.4)

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = Gr \nabla \theta \wedge \vec{e}_z + \nabla^2 \vec{\omega}, \quad (30.38)$$

donde $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{u}$ es la vorticidad adimensional de las perturbaciones. Tomando nuevamente el rotacional y teniendo en cuenta que $\nabla \wedge \vec{\omega} = \nabla \nabla \cdot \vec{u} - \nabla^2 \vec{u} = -\nabla^2 \vec{u}$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z = Gr \nabla_1^2 \theta + \nabla^2 \nabla^2 u_z, \quad \nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (30.39)$$

que junto con (30.34) constituye un sistema de dos ecuaciones diferenciales para las variables u_z y θ . En las paredes $z = 0$ y $z = 1$, además de $\theta = u_z = 0$, hacen falta dos condiciones de contorno más para u_z , pues (30.39) contiene derivadas cuartas. Para obtenerlas, se tiene en cuenta que todas las componentes de la velocidad son nulas sobre esas paredes, por lo que $\partial u_x / \partial x = \partial u_y / \partial y = 0$ sobre $z = 0$ y $z = 1$. De la ecuación de continuidad se tiene, por tanto, que $\partial u_z / \partial z = 0$. Así, las condiciones de contorno para (30.39) y (30.34) son:

$$\theta = u_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y } z = 1. \quad (30.40)$$

La solución de este sistema se puede escribir como una superposición de modos normales en la forma

$$u_z = W(z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y) - i\omega t}, \quad (30.41)$$

$$\theta = \Theta(z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y) - i\omega t}, \quad (30.42)$$

donde α_x y α_y son los números de onda en las direcciones x e y , respectivamente, y ω es la frecuencia. La sustitución en (30.34), (30.39) y (30.40) proporciona

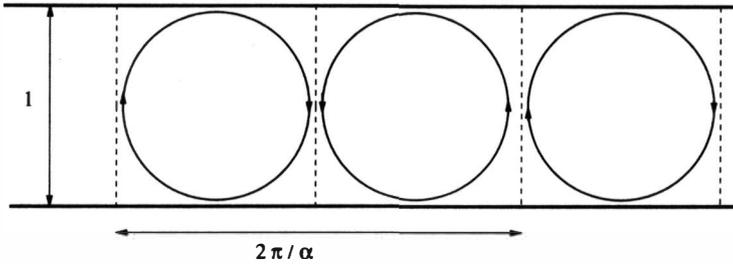


Figura 30.5: Esquema de las celdas de convección producidas tras la inestabilidad térmica.

$$D_\alpha^4 W + i\omega D_\alpha^2 W - \alpha^2 Gr \Theta = 0, \tag{30.43}$$

$$\frac{1}{Pr} D_\alpha^2 \Theta + i\omega \Theta + W = 0, \tag{30.44}$$

$$W = \frac{dW}{dz} = \Theta = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{y } z = 1, \tag{30.45}$$

donde

$$\alpha^2 \equiv \alpha_x^2 + \alpha_y^2, \quad D_\alpha^2 \equiv \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2. \tag{30.46}$$

Para cada valor de los parámetros Pr y Gr , y para cada valor real de α ,³ (30.43)-(30.45) constituye un problema de autovalores que sólo tiene solución para determinados valores complejos de $\omega = \omega_r + i\omega_i$. De hecho, las variables dependientes e independientes se pueden reescalar de forma que el número de Prandtl desaparece del problema, que así sólo viene gobernado por un parámetro adimensional que es el número de Rayleigh (30.36) (ver, por ejemplo, Chandrasekhar, 1981). Se encuentra que el flujo se hace inestable para $Ra = Ra_c \simeq 1708$. Es decir, para $Ra < Ra_c$, $\omega_i < 0$ para todos los valores de α . Para, $Ra = Ra_c$, ω_i se anula para un cierto valor de $\alpha = \alpha_c$, que resulta ser $\alpha_c \simeq 3,117$. Para $Ra > Ra_c$, el flujo es inestable, existiendo un rango de valores de α , que depende de Ra , para los que $\omega_i > 0$. Se tiene, por tanto, que la solución correspondiente al equilibrio mecánico es inestable si $Ra > 1708$, produciéndose entonces un movimiento (convección natural) entre las placas. Este movimiento tiene una periodicidad en los planos xy cuya longitud de onda viene dada, aproximadamente, por el valor de α más inestable (ω_i mayor)

³En un problema como este en donde el flujo base está en reposo no tiene mucho sentido analizar la estabilidad espacial, siendo más conveniente hacer un análisis de estabilidad temporal.

correspondiente al valor de Ra dado. Así, cuando el flujo se hace inestable justo por encima de Ra_c , la periodicidad en xy de la convección natural producida tiene una longitud de onda aproximadamente igual a $2\pi/\alpha_c \simeq 2,016$ (ver figura 30.5). En la práctica, se producen *celdas* de convección hexagonales cuyo lado es inversamente proporcional al valor de α más inestable (ver, por ejemplo, Chandrasekhar, 1981). Estas celdas se suelen denominar **celdas de Bénard**, y al movimiento en sí convección de Bénard, quien en 1900 las observó experimentalmente en una capa de líquido calentada por debajo, pero con la superficie superior libre.⁴

Desde un punto de vista físico, a medida que el número de Grashof (o el número de Rayleigh) aumenta, las fuerzas de flotabilidad se van haciendo más importantes en relación a las fuerzas viscosas. Superado un cierto valor crítico, dado analíticamente por $Ra_c \simeq 1708$, las fuerzas desestabilizadoras de flotabilidad pueden más que las fuerzas viscosas estabilizadoras, y se produce una corriente que tiende a igualar las temperaturas, desestabilizando la solución correspondiente al equilibrio mecánico. En otras palabras, dado un fluido y fijado h , la solución estática es posible si la diferencia de temperaturas entre las placas, $T_1 - T_2$, es menor que un cierto valor crítico dado por $T_1 - T_2 \simeq 1708\nu\alpha/(\beta gh^3)$ (obsérvese que si $T_1 - T_2$ es negativo, la solución estática es siempre estable). Para $T_1 - T_2$ mayor que ese valor, aunque la solución estática sigue siendo solución de las ecuaciones y condiciones de contorno, es inestable y no se da en la práctica (si la viscosidad fuese cero, la solución sería inestable para cualquier diferencia $T_1 - T_2$ positiva, lo cual está de acuerdo con el argumento no viscoso cualitativo dado al principio de esta sección). Una vez producida la inestabilidad, el movimiento resultante tiene la forma de celdas convectivas, cuya periodicidad viene dada por $h2\pi/\alpha$ (ver figura 30.5).

30.3.2. Inestabilidad centrífuga

Otro ejemplo simple donde una fuerza externa tiende a desestabilizar, y las fuerzas viscosas a estabilizar, es el flujo de Couette entre dos cilindros que giran coaxialmente [sección 14.2.2; ver figura 30.6(a)]. Históricamente, este ejemplo ha tenido mucha importancia en la teoría de las inestabilidades hidrodinámicas. Uno de los primeros que la consideraron fue Rayleigh en 1916, quien

⁴El problema con una superficie libre superior, en vez de limitada por una pared sólida, es matemáticamente muy similar al considerado aquí, cambiando sólo una condición de contorno en $z = 1$. En particular, en $z = 1$ se tiene que $d^2W/dz^2 = 0$, en vez de $dW/dz = 0$. Los correspondientes valores críticos resultan ser $Ra_c \simeq 1101$ y $\alpha_c \simeq 2,682$, que da lugar a celdas de convección con una longitud de onda algo mayores, $2\pi/\alpha_c \simeq 2,34$ (ver, por ejemplo, Drazin y Reid, 1981).

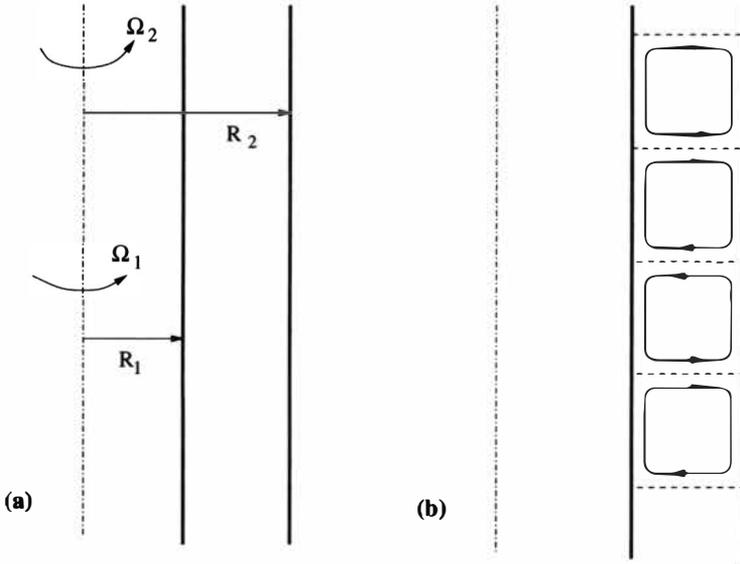


Figura 30.6: (a) Geometría del flujo de Couette entre dos cilindros coaxiales que giran. (b) Esquema de los vórtices de Taylor que se forman tras la inestabilidad del flujo base.

desarrolló un criterio de inestabilidad no viscosa mediante argumentos físicos que se verá a continuación. Las fuerzas viscosas fueron tenidas en cuenta por primera vez por Taylor en 1923. Pero la importancia de su trabajo reside, sobre todo, en que fue el primero que comparó de forma cuantitativa los resultados de un análisis de estabilidad con resultados experimentales (experimentos que él mismo realizó), prediciendo de forma muy precisa las transiciones que se producían en el flujo. Se puede decir que este trabajo asentó de forma definitiva la teoría de las inestabilidades hidrodinámicas, que así dejó de ser una mera especulación teórica.

En el movimiento laminar estacionario, las fuerzas centrífugas que actúan sobre cada partícula fluida están equilibradas con las fuerzas de presión radiales, de manera que las partículas fluidas no se mueven radialmente, sino sólo circunferencialmente. Así, en coordenadas cilíndricas, el campo de velocidad del flujo base es $\vec{V} = V(r)\vec{e}_\theta$, donde (ver sección 14.2.2)

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 r, \quad C_1 = \Omega_1 R_1^2 \frac{1 - \mu}{1 - \eta^2}, \quad C_2 = \Omega_1 \frac{\mu - \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad (30.47)$$

siendo

$$\mu \equiv \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad \text{y} \quad \eta \equiv \frac{R_1}{R_2} \quad (30.48)$$

dos parámetros adimensionales que caracterizan el flujo. La presión del flujo base se obtiene de la ecuación de cantidad de movimiento radial que, como se acaba de decir, expresa un balance entre las fuerzas centrífugas y las fuerzas de presión radiales

$$\frac{V^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (30.49)$$

Supóngase que una partícula fluida se mueve, por acción de cualquier perturbación, desde una posición r_o a otra $r > r_o$. En ausencia de fuerzas viscosas, la ecuación de cantidad de movimiento azimutal se puede escribir como $D(rV)/Dt = 0$, es decir, el momento angular (por unidad de masa) se conserva: $r_o V(r_o) = rV(r)$. Así, la nueva velocidad de la partícula fluida es $r_o V(r_o)/r$, siendo la fuerza centrífuga (por unidad de masa) que actúa sobre ella $r_o^2 V^2(r_o)/r^3$. El equilibrio será inestable si esta fuerza es mayor que la fuerza de presión (por unidad de masa) en la distancia r que, de acuerdo con (30.49), es igual a la magnitud de la fuerza centrífuga del fluido no perturbado, $V^2(r)/r$. De esta forma, el criterio de **inestabilidad** (Rayleigh, 1916) se escribe

$$r_o^2 V^2(r_o) > r^2 V^2(r) \quad \text{para} \quad r > r_o \quad (30.50)$$

Es decir

$$\frac{\partial}{\partial r} (rV)^2 < 0 \quad (30.51)$$

Teniendo en cuenta (30.47), la condición anterior se puede escribir $(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)V < 0$. Si los cilindros giran en sentidos opuestos, V debe anularse en algún punto entre ellos y el movimiento es siempre inestable. Si ambos cilindros giran en el mismo sentido, V es positivo (suponiendo que $\Omega_1 > 0$ y $\Omega_2 > 0$), por lo que el criterio de inestabilidad de Rayleigh se escribe

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \quad \text{o} \quad \mu < \eta^2 \quad (30.52)$$

Es decir, el movimiento es inestable si la velocidad angular del cilindro interior supera en $(R_2/R_1)^2$ veces la del cilindro exterior. Si $\Omega_2 = 0$, el movimiento es siempre inestable.

El criterio de inestabilidad no viscoso (30.51) es análogo al del ejemplo de la sección anterior, $d\rho/dz > 0$, en el sentido de que no tiene en cuenta el efecto estabilizador de la viscosidad. Para tener en cuenta este efecto hay que analizar la evolución de las pequeñas perturbaciones considerando la acción de la viscosidad, de forma análoga a como se ha hecho en la sección anterior. Para ello, se perturba el flujo base (30.47)-(30.49) en la forma (30.5)-(30.6), y se sustituye en las ecuaciones linealizadas (30.8)-(30.9). Estas ecuaciones se adimensionalizan tomando R_1 como longitud característica, Ω_1^{-1} como tiempo característico y $\Omega_1 R_1$ como velocidad característica. Aparece así el número de Reynolds

$$Re = \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}, \tag{30.53}$$

donde ν es la viscosidad cinemática, como parámetro adimensional, que junto con los definidos en (30.48) caracterizan el flujo base. Los coeficientes de las ecuaciones resultantes sólo dependen de r , por lo que se puede hacer una descomposición en modos normales de las perturbaciones:

$$\vec{s}' \equiv \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix} = \vec{S} e^{i(\alpha z + n\theta - \omega t)}, \quad \vec{S} \equiv \begin{pmatrix} iF(r) \\ G(r) \\ H(r) \\ \Pi(r) \end{pmatrix}, \tag{30.54}$$

donde $\vec{v}' = u'\vec{e}_r + v'\vec{e}_\theta + w'\vec{e}_z$, α es el número de onda axial, n el número de onda azimutal y ω la frecuencia. Los parámetros α y ω son en general números complejos, mientras que n debe ser un número entero para que las perturbaciones no sean funciones multivaluadas de θ . El valor $n = 0$ corresponde a perturbaciones axilsimétricas, mientras que las perturbaciones no axilsimétricas, o helicoidales, vienen caracterizadas por $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. La amplitud de la perturbación u' se ha multiplicado por i por conveniencia.

Como se comentó en la sección 30.2.1, la sustitución de (30.53) en las ecuaciones linealizadas y sus condiciones de contorno da lugar a un problema de autovalores que proporciona la amplitud de las perturbaciones \vec{S} como autofunciones y ω (o α) como autovalores. En el presente caso, estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{S} = 0, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}_0 + \frac{1}{Re} \overline{\overline{A}}_1, \tag{30.55}$$

donde

$$\bar{\bar{A}}_0 = \begin{pmatrix} -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) & i \frac{n}{r} & \alpha & 0 \\ -i \left(\omega - \frac{nV}{r} \right) & -\frac{2V}{r} & 0 & \frac{d}{dr} \\ \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} & -i \left(\omega - \frac{nV}{r} \right) & 0 & \frac{in}{r} \\ 0 & 0 & -i \left(\omega - \frac{nV}{r} \right) & i\alpha \end{pmatrix}, \quad (30.56)$$

$$\bar{\bar{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_r^2 + \frac{n^2+1}{r^2} + \alpha^2 & \frac{2ni}{r^2} & 0 & 0 \\ -\frac{2ni}{r^2} & -D_r^2 + \frac{n^2+1}{r^2} + \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D_r^2 + \frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30.57)$$

$$D_r^2 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (30.58)$$

y V viene dado por (30.47), adimensionalizando la velocidad con $\Omega_1 R_1$ y r con R_1 .⁵ Las condiciones de contorno son:

$$F(1) = G(1) = H(1) = F(\eta^{-1}) = G(\eta^{-1}) = H(\eta^{-1}) = 0. \quad (30.59)$$

Se considerará primero el **límite no viscoso** ($Re \rightarrow \infty$) para perturbaciones axilsimétricas ($n = 0$). Las ecuaciones anteriores se escriben

$$F' + \frac{F}{r} + \alpha H = 0, \quad (30.60)$$

$$\omega F - \frac{2V}{r} G + \Pi' = 0, \quad (30.61)$$

$$-i\omega G + i \left(\frac{dV}{dr} + \frac{iV}{r} \right) F = 0, \quad (30.62)$$

$$-i\omega H + i\alpha \Pi = 0, \quad (30.63)$$

donde las primas significan derivadas con respecto a r . Estas ecuaciones se pueden reducir a una sola ecuación diferencial de segundo orden para F . Para ello se despeja Π , G y H de (30.63), (30.61) y (30.60), respectivamente,

⁵Realmente estas ecuaciones son válidas para cualquier flujo que en coordenadas cilíndricas sólo tiene componente azimutal de la velocidad dada por $V(r)$.

$$\Pi = \frac{\omega}{\alpha} H, \quad G = \frac{r\omega}{2V} \left(F + \frac{H'}{\alpha} \right), \quad H = -\frac{1}{\alpha} \left(F' + \frac{F}{r} \right), \quad (30.64)$$

y se sustituye en (30.62):

$$-\omega^2 F + \frac{\omega^2}{\alpha^2} \left(F' + \frac{F}{r} \right)' + \Phi F = 0, \quad (30.65)$$

donde

$$\Phi \equiv \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (rV)^2, \quad (30.66)$$

es el denominado discriminante de Rayleigh. Si se hace $\phi \equiv rF$, se tiene un problema de **Sturm-Liouville** (ver, por ejemplo, Butkov, 1968):

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \right] + \left(\lambda \frac{\Phi(r)}{r} - \frac{\alpha^2}{r} \right) \phi = 0, \quad \lambda \equiv \frac{\alpha^2}{\omega^2}, \quad (30.67)$$

$$\phi(1) = \phi(\eta^{-1}) = 0. \quad (30.68)$$

El problema tiene infinitos autovalores λ , que son *reales* puesto que α^2/r es positivo (fijado α *real* en un problema de estabilidad temporal). Si $\Phi(r) > 0$ en el intervalo $(1, \eta^{-1})$, todos los autovalores son positivos, por lo que ω es real (positivo y negativo) y el flujo es estable. Si $\Phi(r)$ es negativo, o cambia de signo en el intervalo $(1, \eta^{-1})$, algunos autovalores pueden ser negativos, con lo que ω puede ser imaginario puro, y algunas perturbaciones pueden crecer con el tiempo, siendo el flujo inestable. Luego la condición necesaria y suficiente para que un flujo puramente circunferencial, con velocidad azimutal $V = V(r)$, sea **estable** desde un punto de vista **no viscoso** frente a perturbaciones axilsimétricas es

$$\Phi(r) > 0, \quad (30.69)$$

en el dominio de definición de V . Este resultado, que fue obtenido por Singe en 1933, incluye el obtenido por Rayleigh con argumentos más físicos y vale para cualquier flujo puramente circunferencial, no sólo para el flujo de Couette entre dos cilindros circulares que se está considerando aquí.

Si se tiene en cuenta la **viscosidad**, el criterio de Rayleigh es una condición necesaria, pero no suficiente, de estabilidad, pues la viscosidad puede amortiguar las perturbaciones que las fuerzas centrífugas hacen inestables. Dados η , μ , n y α , el flujo será inestable ($\omega_i > 0$) por encima de un cierto número

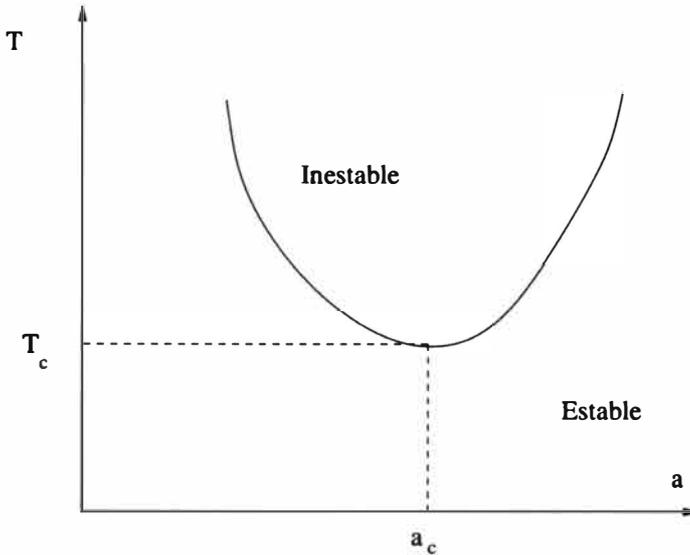


Figura 30.7: Esquema de una curva de estabilidad neutra.

de Reynolds crítico. En vez del número de Reynolds, es costumbre utilizar el denominado **número de Taylor**:

$$T \equiv \frac{4\Omega_1^2 R_1^4}{\nu^2} \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2} \left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right)^4. \quad (30.70)$$

Fijados n , η y μ , el número de Taylor crítico, por encima del cual el flujo es inestable, es una función de α , pero en su lugar se suele utilizar

$$a \equiv \alpha(\eta^{-1} - 1). \quad (30.71)$$

En la figura 30.7 se representa la forma típica de una curva *neutra* de estabilidad $T(a)$, es decir, una curva para la que $\omega_i = 0$. El menor valor de a es el número de onda crítico a_c , que proporcionará la longitud de onda $2\pi/a_c$ de la perturbación que primero se hace inestable a medida que el número de Taylor aumenta y se hace mayor que un valor crítico $T_c(n, \eta, \mu)$. Estos valores críticos hay que obtenerlos, en general, resolviendo numéricamente el problema de autovalores. Hay, sin embargo, ciertos límites en los que se puede obtener una solución analítica. Por ejemplo, para **perturbaciones** axilsimétricas ($n = 0$) en el límite en el que el espacio entre cilindros es muy pequeño ($\eta \rightarrow 1$), se tiene (este y otros resultados se pueden encontrar, por ejemplo, en Drazin y Reid, 1987)

$$\bar{T}_c \equiv \frac{1}{2}(1 + \mu)T_c \simeq 1707,76 \left[1 - 7,61 \times 10^{-3} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^2 + \dots \right], \quad |1 - \mu| \ll 1, \quad (30.72)$$

$$a_c \simeq 3,12, \quad \frac{2\pi}{a_c} \simeq 2,014. \quad (30.73)$$

Obsérvese que estos valores coinciden con los del número de Rayleigh crítico y de la longitud de onda crítica dados en la sección anterior para la inestabilidad térmica. De hecho, cuando $\eta \rightarrow 1$ ambos problemas de estabilidad coinciden matemáticamente si se usa el número de Taylor modificado \bar{T} y a en lugar de α (ver, por ejemplo, la referencia anteriormente citada). Aunque esta aproximación es válida para $|1 - \mu| \ll 1$, da buenos resultados para cualquier valor de μ en el intervalo $1 > \mu > 0$.

Cuando $T > T_c$, el flujo puramente circunferencial entre los dos cilindros deja de presentarse en la práctica y en su lugar se producen unos vórtices toroidales perpendiculares al eje de los cilindros que giran opuestamente en celdas adyacentes, llamados vórtices de Taylor, superpuestos al flujo base original [ver esquema en figura 30.6(b); estos vórtices de Taylor son análogos a las celdas de Bénard que se producen como consecuencia de la inestabilidad térmica; fotografías de ambos fenómenos pueden verse, por ejemplo, en van Dyke, 1982, páginas 76 y 83 y en Koschmieder, 1993]. La aparición experimental de estos vórtices coincide exactamente con el número de Taylor crítico que predice la teoría de estabilidad hidrodinámica, como fue comprobado por primera vez por el propio Taylor [ver figura 30.8(a)]. Para $\mu < -0,78$, el flujo se hace inestable con valores menores de T_c para perturbaciones **no axilsimétricas** ($n \neq 1$). Esto quiere decir que los vórtices que se forman tras la primera inestabilidad no son axilsimétricos, sino que presentan *ondulaciones* en la dirección azimutal. El número de estas ondulaciones depende del número n que primero se hace inestable. A medida que el número de Taylor sigue creciendo por encima de T_c , otros modos con distintos valores de n pueden hacerse más inestables. Así, por ejemplo, un flujo que primero se hace inestable con $n = 0$, produciéndose vórtices de Taylor axilsimétricos para $T > T_c$, puede experimentar otra transición para $T > T_{c1} > T_c$ hacia un flujo con vórtices no axilsimétricos, que a su vez puede ir cambiando su número de ondulaciones n a medida que T crece. En último caso, si se sigue aumentando T , el flujo se convierte, para la mayoría de los casos, en un flujo turbulento. Un diagrama experimental de las distintas transiciones se presenta en la figura 30.8(b), donde se observa la gran complejidad paramétrica del problema.

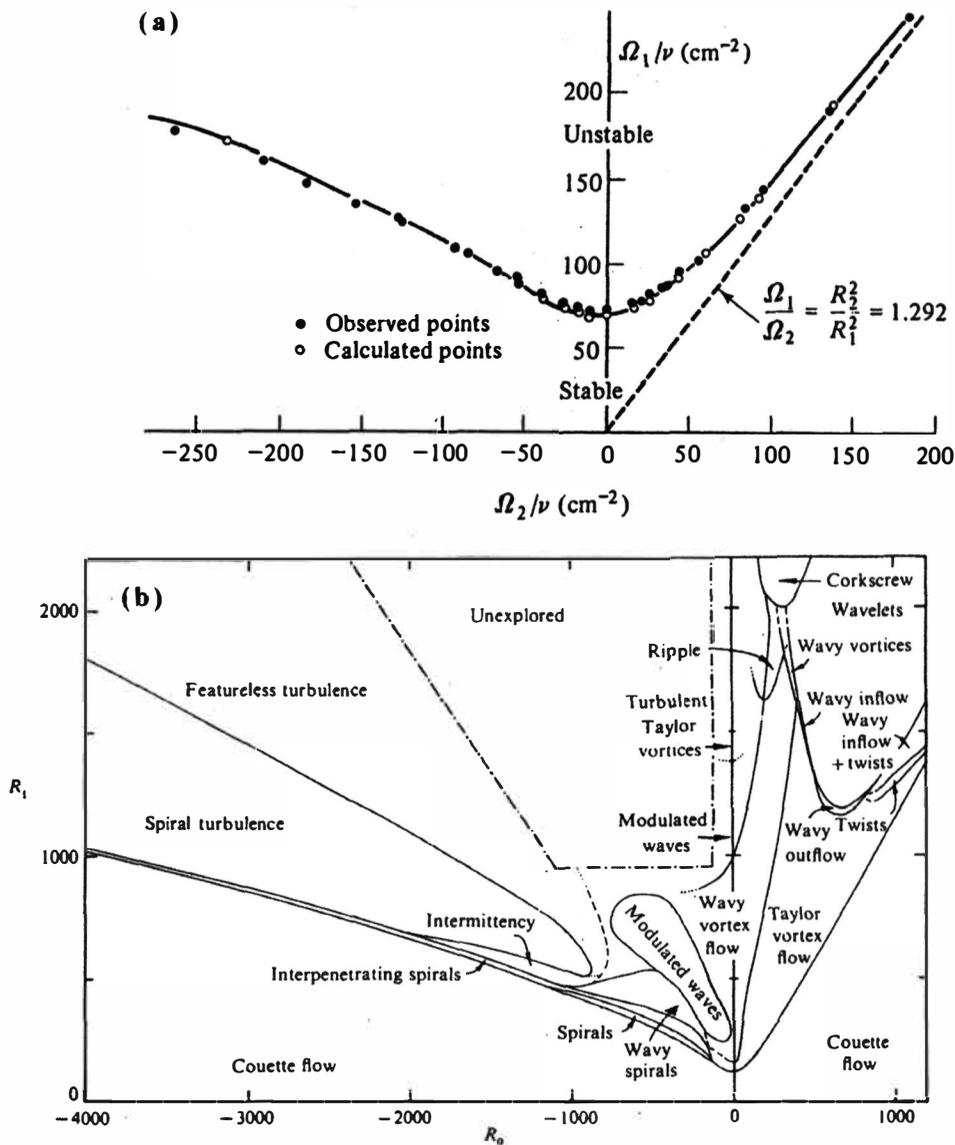


Figura 30.8: (a) Curva neutra de estabilidad teórica y experimental para $R_1 = 3,55\text{cm}$ y $R_2 = 4,035\text{cm}$ en el plano (Ω_2, Ω_1) (tomada del trabajo original de Taylor, 1923). La línea discontinua representa el criterio no viscoso de Rayleigh (de acuerdo con este criterio, el flujo es inestable a la izquierda de esa recta). (b) Diagrama experimental de estabilidad en el plano $(R_o = \Omega_2 R_2^2/\nu, R_i = \Omega_1 R_1^2/\nu)$. [Tomada de Koschmieder (1993), que a su vez reproduce los resultados de Andereck, Liu y Swinney (1986).]

30.4. Inestabilidades en flujos casi-unidireccionales

Se ha visto que la viscosidad juega un papel estabilizador frente a ciertas fuerzas externas (como las de flotabilidad o centrífugas) que tienden a producir inestabilidades en el flujo; el efecto de la viscosidad en estos casos es disipar la energía de cualquier perturbación, estabilizando el flujo. Esta es la razón por la cual cualquier flujo confinado es estable si la viscosidad es suficientemente alta. Sin embargo, la viscosidad también tiene el efecto de difundir cantidad de movimiento, por lo que puede ser el origen de inestabilidades en ciertos flujos, principalmente en flujos unidireccionales o casi-unidireccionales en los que existe un gradiente de la velocidad en la dirección transversal a la dirección del flujo. Como se ha visto en los capítulos precedentes, estos flujos son muy importantes desde el punto de vista ingenieril pues describen, más o menos aproximadamente, muchos flujos de interés práctico. Ejemplos son el flujo de Couette y de Poiseuille entre dos placas, el flujo de Poiseuille en un conducto, el flujo en una capa límite bidimensional, chorros bidimensionales o axilimétricos, capas de mezcla, etc. Se verá a continuación que desde un punto de vista no viscoso, muchos de estos flujos son estables. Sin embargo, si se tiene en cuenta la viscosidad en el análisis de estabilidad, se encuentra que estos perfiles de velocidad son inestables en un cierto intervalo del número de Reynolds, que depende del tipo de flujo y de las características de las perturbaciones. Es decir, las fuerzas viscosas juegan un doble papel: son las responsables de la inestabilidad (el flujo se hace inestable por debajo de un número de Reynolds crítico superior), y también amortiguan las perturbaciones (el flujo se vuelve a hacer estable por debajo de otro número de Reynolds crítico inferior).

Considérese el flujo bidimensional, casi unidireccional en la dirección x , $\vec{V} = U(x, y)\vec{e}_x + V(x, y)\vec{e}_y$, con $V \ll U$ y $\partial U/\partial x \ll \partial U/\partial y$, y el campo de presión $P = P(x, y)$. Supóngase que todas las variables han sido adimensionalizadas utilizando una velocidad característica U_o , una longitud característica L y la densidad ρ (el flujo es incompresible). La introducción de pequeñas perturbaciones ($\vec{v}' = u'\vec{e}_x + v'\vec{e}_y + w'\vec{e}_z$, p') da lugar a las ecuaciones linealizadas (30.8)-(30.9) adimensionales [es decir, en (30.9) la densidad no aparece y en lugar de ν el término viscoso viene multiplicado por $1/Re$, donde $Re = U_o L/\nu$ es el número de Reynolds del flujo base]. Si además se desprecian los términos proporcionales a V y a $\partial U/\partial x$ (lo que se suele denominar aproximación de flujo casi-paralelo), la solución se puede descomponer en modos normales

$$\vec{s}' \equiv \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix} = \vec{S} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad \vec{S} \equiv \begin{pmatrix} F(y) \\ G(y) \\ H(y) \\ \Pi(y) \end{pmatrix}, \quad (30.74)$$

donde α y β son los números de onda en las direcciones x y z , respectivamente y ω es la frecuencia. Con esta descomposición, las ecuaciones lineales de las perturbaciones se pueden escribir como:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{S} = 0, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}_0 + \frac{1}{Re} \overline{\overline{A}}_1, \quad (30.75)$$

donde

$$\overline{\overline{A}}_0 = \begin{pmatrix} i\alpha & \frac{d}{dy} & i\beta & 0 \\ i(\alpha U - \omega) & \frac{dU}{dy} & 0 & i\alpha \\ 0 & i(\alpha U - \omega) & 0 & \frac{d}{dy} \\ 0 & 0 & i(\alpha U - \omega) & i\beta \end{pmatrix}, \quad (30.76)$$

$$\overline{\overline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - \frac{d^2}{dy^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 - \frac{d^2}{dy^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \beta^2 - \frac{d^2}{dy^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (30.77)$$

En general, uno tiene que considerar la estabilidad de perturbaciones tridimensionales, con $\beta \neq 0$. Sin embargo, si se hace la transformación

$$\alpha^* = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{\omega^*}{\alpha^*} = \frac{\omega}{\alpha},$$

$$\alpha^* F^* = \alpha F + \beta H, \quad G^* = G, \quad \frac{\Pi^*}{\alpha^*} = \frac{\Pi}{\alpha}, \quad \alpha^* Re^* = \alpha Re, \quad (30.78)$$

en las ecuaciones anteriores, las ecuaciones con asterisco resultantes son formalmente idénticas, pero con $\beta = 0$ y $H = 0$. Es decir, cualquier solución para una perturbación bidimensional (con asterisco) se puede usar para describir una perturbación tridimensional equivalente haciendo uso de la transformación (30.78). Además, dada una perturbación tridimensional con α , β y $\omega = \omega_r + i\omega_i$ (estabilidad temporal), como $\alpha^* = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq \alpha$, la perturbación bidimensional equivalente es más inestable, puesto que $\omega_i^* = (\alpha^*/\alpha)\omega_i \geq \omega_i$, y ocurre a un número de Reynolds menor, $Re^* = (\alpha/\alpha^*)Re$. Por tanto, si uno quiere obtener el número de Reynolds crítico por encima del cual el flujo se hace

inestable, es suficiente con considerar sólo las perturbaciones bidimensionales, pues éstas son las primeras que se hacen inestables. Por otro lado, para cada perturbación tridimensional, existe otra bidimensional equivalente que es más inestable (o menos estable). Todo esto hace que sólo se tenga que considerar el problema con perturbaciones bidimensionales ($\beta = 0, H = 0$), que es lo que se hará en lo que sigue. Esta notable simplificación del problema se debe a Squire, quien en 1933 introdujo la transformación (30.78), que ahora lleva su nombre.

30.4.1. Estabilidad no viscosa. Criterio de Rayleigh

En el límite $Re \rightarrow \infty$, las ecuaciones (30.75)-(30.77) con $\beta = H = 0$ se pueden reducir a una única ecuación para G :

$$F = -i\alpha G', \quad \Pi' = -i(\alpha U - \omega)G, \quad (30.79)$$

$$G'' - G \left(\alpha^2 + \frac{\alpha U''}{\alpha U - \omega} \right) = 0, \quad (30.80)$$

donde las primas representan derivadas con respecto a y . La ecuación (30.80) se suele denominar ecuación de Rayleigh que, junto con unas condiciones de contorno en dos valores de y , da lugar a un problema de autovalores (en este caso un problema clásico de Sturm-Liouville). Por simplicidad se supondrá que $G(0) = G(1) = 0$, lo cual corresponde al flujo entre dos placas paralelas separadas por una distancia L . La solución del problema depende de la forma particular del perfil de velocidad $U(y)$. Sin embargo, es posible obtener un criterio general de estabilidad sin más que multiplicar la ecuación de Rayleigh por el complejo conjugado de G , que se designará por G^\dagger , e integrar en todo el dominio $0 \leq y \leq 1$. Integrando por partes el primer término, aplicando las condiciones de contorno y teniendo en cuenta que $GG^\dagger = |G|^2$, se llega a

$$-\int_0^1 |G'|^2 dy - \int_0^1 |G|^2 \left(\alpha^2 + \frac{\alpha U''}{\alpha U - \omega} \right) dy = 0. \quad (30.81)$$

Si se considera la estabilidad temporal (α real y $\omega = \omega_r + i\omega_i$), la parte imaginaria de la expresión anterior se puede escribir como

$$\alpha\omega_i \int_0^1 |G|^2 \frac{U''}{|\alpha U - \omega|^2} dy = 0. \quad (30.82)$$

Por tanto, para que el flujo pueda ser inestable ($\omega_i > 0$) es necesario que U'' se anule en algún punto del intervalo $0 \leq y \leq 1$; es decir, el perfil de

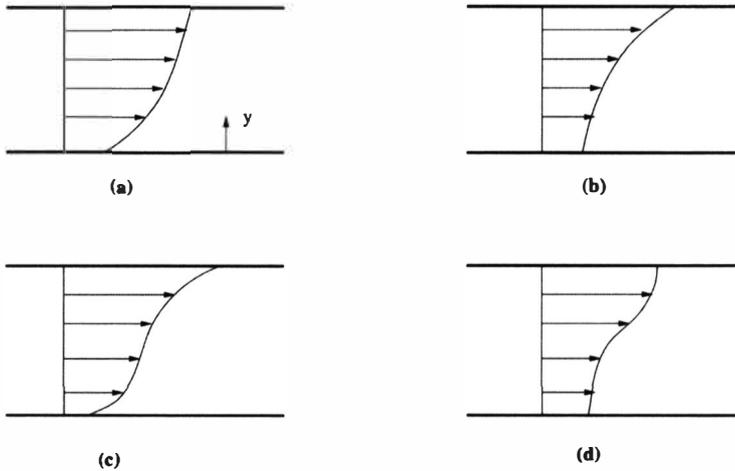


Figura 30.9: (a) y (b): Perfiles de velocidad estables de acuerdo con el criterio de Rayleigh. (c): Perfil potencialmente inestable de acuerdo con el criterio de Rayleigh, pero estable de acuerdo con el criterio de Fjörtoft. (d): Perfil potencialmente inestable de acuerdo con el criterio de Fjörtoft.

velocidad $U(y)$ debe tener algún punto de inflexión. Esta condición necesaria, pero no suficiente, de inestabilidad se suele denominar criterio del punto de inflexión de Rayleigh, quien la derivó en 1880. De acuerdo con ella, perfiles de velocidad como los de Couette, Poiseuille y Blasius son estables desde un punto de vista no viscoso, pues no tienen punto de inflexión, mientras que los perfiles de velocidad en un chorro, en una capa de mezcla o en una capa límite con gradiente adverso de presión son inestables. Una condición más fuerte de inestabilidad fue derivada por Fjörtoft en 1950.⁶ Si y_o es la posición del punto de inflexión de U [$U''(y_o) = 0$] y $U_o = U(y_o)$, una condición necesaria, pero no suficiente, para que el flujo sea inestable es que $U''(U - U_o) < 0$ en algún punto del flujo. De acuerdo con este criterio, algunos perfiles de velocidad con un punto de inflexión son siempre estables (ver figura 30.9).

30.4.2. Estabilidad viscosa. Ecuación de Orr-Sommerfeld

Los resultados anteriores muestran que flujos como el de Poiseuille entre dos placas paralelas o la capa límite de Blasius son estables para $Re \rightarrow \infty$. Sin embargo, los experimentos muestran que ambos flujos son inestables, y de

⁶Ver, por ejemplo, Godrèche y Manneville, 1998, donde además de la derivación matemática se pueden encontrar las interpretaciones físicas de los dos criterios, el de Rayleigh, que está relacionado con la conservación de cantidad de movimiento, y el de Fjörtoft, que se relaciona con la conservación de la energía cinética.

hecho se hacen turbulentos, por encima de ciertos valores críticos del número de Reynolds. Esto quiere decir que, a diferencia de los ejemplos dados en la sección anterior, donde flujos que eran inestables desde el punto de vista no viscoso se hacían estables debido a las fuerzas viscosas por debajo de un número de Reynolds crítico, la viscosidad juega aquí el papel de fuerza desestabilizadora como difusora de cantidad de movimiento en la dirección transversal al flujo principal, haciendo inestable un flujo estable desde el punto de vista no viscoso, además de su papel estabilizador por debajo de un número de Reynolds crítico. Por ello, en este tipo de flujos es esencial el análisis viscoso de estabilidad.

Las ecuaciones (30.75)-(30.77) para perturbaciones bidimensionales ($w' = 0$) también se pueden reducir a una única ecuación diferencial ordinaria para Re finito si uno utiliza como variable la función de corriente asociada a las perturbaciones (las primas ahora denotan perturbaciones, no derivadas):

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad (30.83)$$

que satisface idénticamente la ecuación de continuidad de las perturbaciones, $\nabla \cdot \vec{v}' = 0$. La descomposición normal de las perturbaciones se escribe ahora (con $\beta = 0$)

$$\psi' = \phi(y)e^{i(\alpha x - \omega t)}, \quad (30.84)$$

de donde

$$F = \frac{d\phi}{dy}, \quad G = -i\alpha\phi. \quad (30.85)$$

Sustituyendo en (30.75)-(30.77) y eliminando la perturbación de la presión $\Pi(y)$, se llega a una única ecuación para $\phi(y)$:

$$i(\alpha U - \omega) \left(\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \alpha^2 \phi \right) - i\alpha \phi \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \right)^2 \phi, \quad (30.86)$$

que es la denominada ecuación de Orr-Sommerfeld, quienes las derivaron por separado en 1907 y 1908, respectivamente. Esta ecuación necesita 4 condiciones de contorno para ϕ , que se obtienen de las dos condiciones de contorno para cada una de las componentes de la velocidad u' y v' . En el caso de paredes rígidas en $y = 0$ e $y = 1$, serían $\phi = d\phi/dy = 0$ en $y = 0$ e $y = 1$.

Si uno está interesado, como es más habitual, en la estabilidad temporal del flujo base $U(y)$, dados el número de onda α y el número de Reynolds Re ,

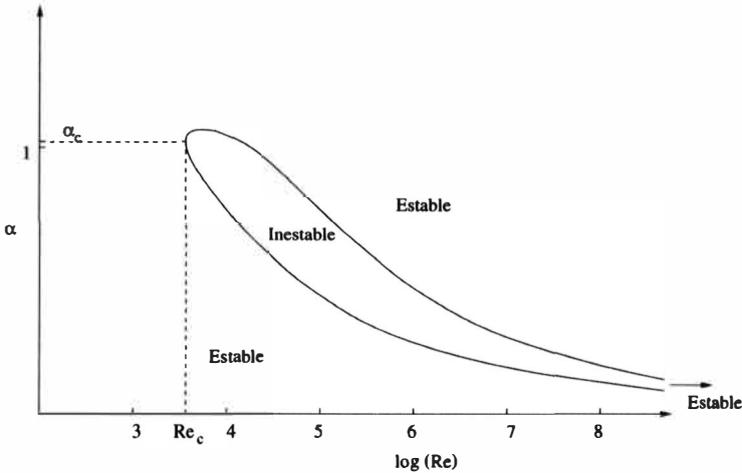


Figura 30.10: Esquema de la curva neutra de estabilidad para el flujo de Poiseuille entre dos placas planas paralelas. $Re = U_o L / \nu$, donde L es la distancia entre placas y U_o es la velocidad máxima. $Re_c \simeq 5772$ y $\alpha_c \simeq 1,02$. Estos resultados concuerdan muy bien con las observaciones experimentales. El flujo es estable para $Re \rightarrow \infty$.

la ecuación anterior junto con sus respectivas condiciones de contorno proporcionan los autovalores $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Normalmente los resultados se resumen en la forma de una curva neutra de estabilidad, que es la curva correspondiente a $\omega_i(\alpha, Re) = 0$ (ver figura 30.10 para el flujo de Poiseuille entre dos placas paralelas). Es decir, para cada tipo de perturbación infinitesimal (cada valor de α), a medida que se va incrementando el número de Reynolds existirá un valor $Re_1(\alpha)$ por encima del cual el flujo se hace inestable, pasando ω_i de negativo a positivo. Si el flujo es estable desde un punto de vista no viscoso (como es el caso de la figura 30.10), existirá además un segundo valor $Re_2(\alpha) > Re_1$ por encima del cual el flujo se vuelve a hacer estable, pasando el valor de ω_i a ser negativo de nuevo. En el caso de la figura 30.10, el flujo es estable para todo valor de α cuando $Re \rightarrow \infty$, pero es sólo neutralmente estable ($\omega_i = 0$) en este límite si $\alpha \rightarrow 0$, lo cual es una característica común en casi todos los flujos que son estables desde el punto de vista no viscoso. El menor valor del número de Reynolds para el que $\omega_i = 0$ es el número de Reynolds crítico, Re_c , por encima del cual el flujo se hace inestable para al menos algún valor del número de onda de las perturbaciones. El correspondiente valor del número de onda, α_c , es el número de onda crítico. Para el flujo de Poiseuille de la figura 30.10, $Re_c \simeq 5772$ y $\alpha_c \simeq 1,02$, donde U_o es la velocidad máxima en $y = 1/2$ y L es la separación entre placas.

En la figura 30.11 se representa la curva neutra de estabilidad para $U(y) =$

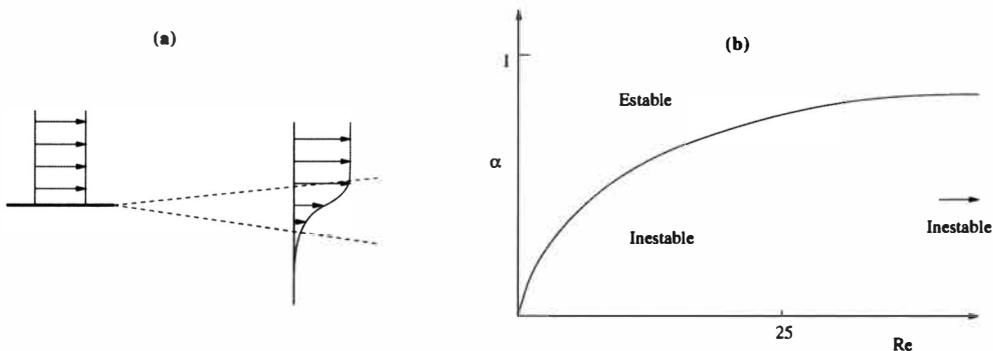


Figura 30.11: (a): Perfil de velocidad en una capa de mezcla. (b) Esquema de la curva neutra de estabilidad para el flujo en una capa de mezcla dado por $U(y) = 1 + \tanh(y)$. El flujo es inestable para $Re \rightarrow \infty$.

$1 + \tanh y$, que modela el perfil de velocidad en una capa de mezcla, producida inmediatamente aguas abajo de una discontinuidad tangencial correspondiente a un flujo uniforme se pone en contacto con un fluido en reposo [figura 30.11(a)]; en este caso la velocidad característica U_0 es la velocidad de la corriente uniforme, y la longitud $L(x)$ es un espesor característico de la capa de mezcla en cada posición x]. De acuerdo con el criterio no viscoso de Rayleigh y de Fjørtoft, esta capa de mezcla puede ser inestable para $Re \rightarrow \infty$, y de hecho los resultados numéricos muestran que así es para $0 \leq \alpha \leq 1$. Los resultados viscosos [figura 30.11(b)] muestran que este flujo es siempre inestable: $Re_c = 0$. Sin embargo, para Re muy pequeño, sólo son inestables las perturbaciones con número de onda muy pequeño (longitud de onda muy grande), para las que la validez de la aproximación de flujo casi paralelo ($\partial U / \partial x = 0$) hecha en esta sección es dudosa.⁷ Un resultado similar se obtiene para un chorro bidimensional: es linealmente inestable para $Re \rightarrow \infty$, y el número de Reynolds crítico, aunque no cero, es muy pequeño ($Re_c \simeq 4$, $\alpha_c \simeq 0,2$).

30.5. Capa límite de Blasius: inestabilidades y transición a la turbulencia

Dada su relevancia práctica, combinada con su relativa sencillez, la capa límite sobre una placa plana (solución de Blasius, ver sección 27.3) fue uno de los primeros ejemplos para el que se resolvió la ecuación de Orr-Sommerfeld.

⁷Resultados de estabilidad teniendo en cuenta que el flujo base no es estrictamente paralelo se verán en la siguiente sección para la capa límite de Blasius.

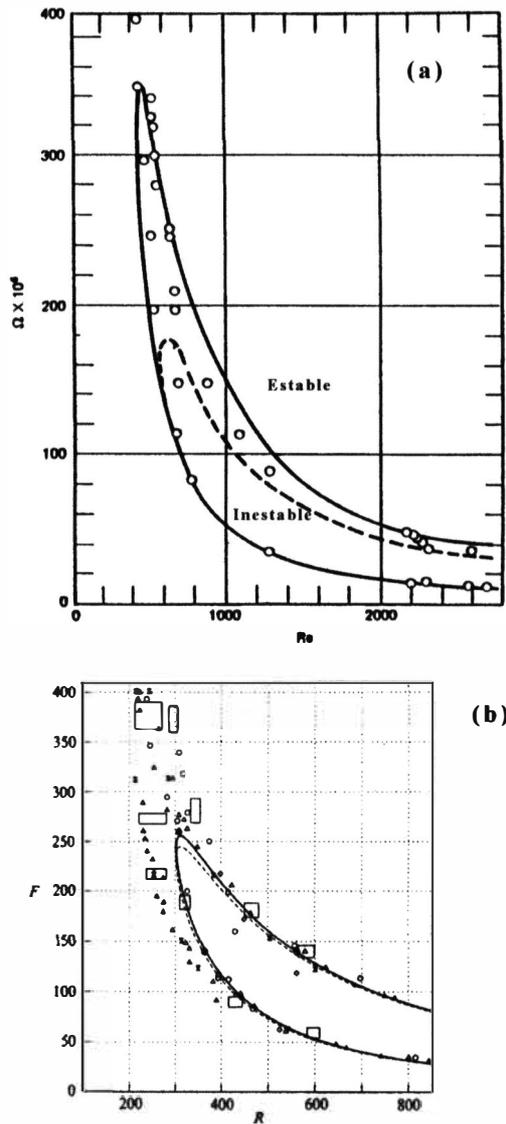


Figura 30.12: Curva neutra de estabilidad en el plano frecuencia- Re de la capa límite de Blasius. (a): Resultados numéricos de Schlichting (1933; curva discontinua) y Shen (1954; curva continua), y experimentales de Schubauer y Skramstad (1947; círculos); $\Omega = \omega/Re$, $Re = U\delta_1/\nu$ (figura tomada de Panton, 1996). (b): Resultados numéricos teniendo en cuenta la variación del flujo base con x obtenidos por Bertolotti, Herbert y Spalart (1992; curva continua), junto con los resultados de la ecuación de Orr-Sommerfeld (curva discontinua) y diversos resultados experimentales [los círculos son los mismos que en (a), mientras los otros símbolos corresponden a resultados experimentales más recientes]; $F = 10^6 \frac{\omega\nu}{U^2}$, $R = \sqrt{Ux/\nu}$ (figura tomada de Bertolotti, Herbert y Spalart, 1992).

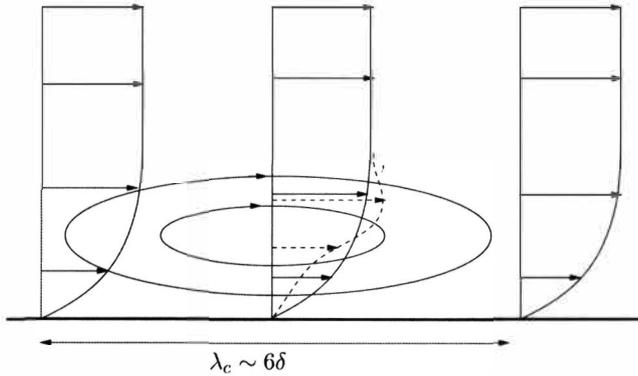


Figura 30.13: Esquema de las ondas de Tollmien-Schlichting.

La figura 30.12(a) muestra los primeros resultados aproximados de Schlichting (1933) y la mejora de Shen (1954), junto con resultados experimentales. A diferencia de los resultados mostrados en las figuras anteriores, en la figura 30.12 se representa la curva neutra de estabilidad para un análisis de estabilidad espacial,⁸ que es más fácil de reproducir experimentalmente al ser más fácil excitar una frecuencia temporal que un número de onda espacial. Obviamente, el número de Reynolds crítico de ambos análisis, el espacial y el temporal, coinciden. En la figura se observa que hay un acuerdo bastante bueno entre experimentos y teoría. Sin embargo, a pesar de que los cálculos numéricos de la ecuación de Orr-Sommerfeld se han ido refinando con el tiempo, a medida que se ha tenido acceso a computadoras más potentes, el número de Reynolds crítico [en la figura 30.12(a) se utiliza $Re = U\delta_1/\nu$, donde δ_1 es el espesor de desplazamiento de la capa límite (27.43)] calculado con esta ecuación resulta ser $Re_c \simeq 520$, bastante superior al valor experimental $Re_c \simeq 450$. Para intentar resolver esta discrepancia, se han tenido en cuenta los efectos que en el análisis de estabilidad tiene el hecho de que el perfil de velocidad no sólo depende de y , sino también de x (es decir, que el espesor de la capa límite crece aguas abajo), lo cual da lugar a ecuaciones bastante más complejas que la de Orr-Sommerfeld. Algunos resultados relativamente recientes se presentan en la figura 30.12(b). Aunque la consideración de los efectos relacionados con el hecho de que el flujo base no es paralelo mejora algo los resultados, la discrepancia entre el Re_c teórico y experimental aún permanece como una cuestión sin resolver completamente.

Cuando $Re > Re_c$ [es decir, $x > (Re_c/1,72)^2\nu/U$], el flujo de Blasius se

⁸Es decir, tomando frecuencias ω reales y números de onda α complejos, estando la curva neutra definida por $\alpha_i(Re, \omega) = 0$.

hace inestable, produciéndose en ese valor de x las denominadas ondas de Tollmien-Schlichting (TS para abreviar). Estas *ondas* bidimensionales son similares a los vórtices de Taylor considerados en la sección anterior, con una longitud de onda dada por el valor α_c (figura 30.13). A medida que el flujo avanza (el número de Reynolds aumenta), el flujo base combinación del flujo de Blasius y las ondas de TS se hace a su vez inestable frente a perturbaciones tridimensionales $\beta \neq 0$, produciéndose un flujo que también es *ondulado* en la dirección z . A partir de aquí, el flujo experimenta una serie de transiciones de inestabilidad más o menos complejas, hasta que se hace completamente turbulento (completamente irregular e impredecible) cuando el número de Reynolds basado en δ_1 es aproximadamente 3000. Para simular estas transformaciones del flujo hay que hacer uso de la teoría de estabilidad no lineal, es decir, no se pueden usar las ecuaciones linealizadas de las perturbaciones, pues éstas ya han crecido lo suficiente como para que la teoría de la estabilidad lineal deje de ser válida. Las ecuaciones no lineales son lo suficientemente complejas como para que aún hoy no se tenga una pintura detallada de los complicados fenómenos que se producen en la transición a la turbulencia de la capa límite de Blasius, que es posiblemente el ejemplo relevante más sencillo de transición a la turbulencia. Un esquema cualitativo de lo que se observa experimentalmente se muestra en la figura 30.14: Tras el flujo laminar inicial (a), se producen las ondas bidimensionales de TS para $Re > Re_c$ (b); estas ondas se hacen inestables, dando lugar a ondas de TS tridimensionales (c); las ondas de TS tridimensionales van teniendo cada vez gradientes más importantes en la dirección z , formándose vórtices periódicos con forma de Λ (a veces denominados de Kebanov), intensificándose la vorticidad en los vértices; en estos puntos de vorticidad intensa se producen de manera intermitente *erupciones* de flujo turbulento (d), que da lugar a *puntos* turbulentos (e) con fluctuaciones muy intensas de la velocidad; finalmente, la coalescencia de todos estos puntos turbulentos da lugar a la capa límite turbulenta completamente desarrollada (f), cuya descripción matemática se dará en el capítulo 32. La simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo de capa límite, que ha sido posible sólo recientemente con el uso de potentes ordenadores, ha permitido la identificación y explicación cuantitativa de algunas de las estructuras anteriores, habiéndose propuesto además diversas alternativas al esquema clásico anterior, pero quedando aún algunos puntos sin explicar adecuadamente (para más detalles, el alumno interesado puede consultar, por ejemplo, Sherman, 1990 y Schlichting y Gersten, 2000).

En el capítulo 32, además de la estructura de la capa límite turbulenta, se verá también la estructura del flujo turbulento en un conducto circular, que

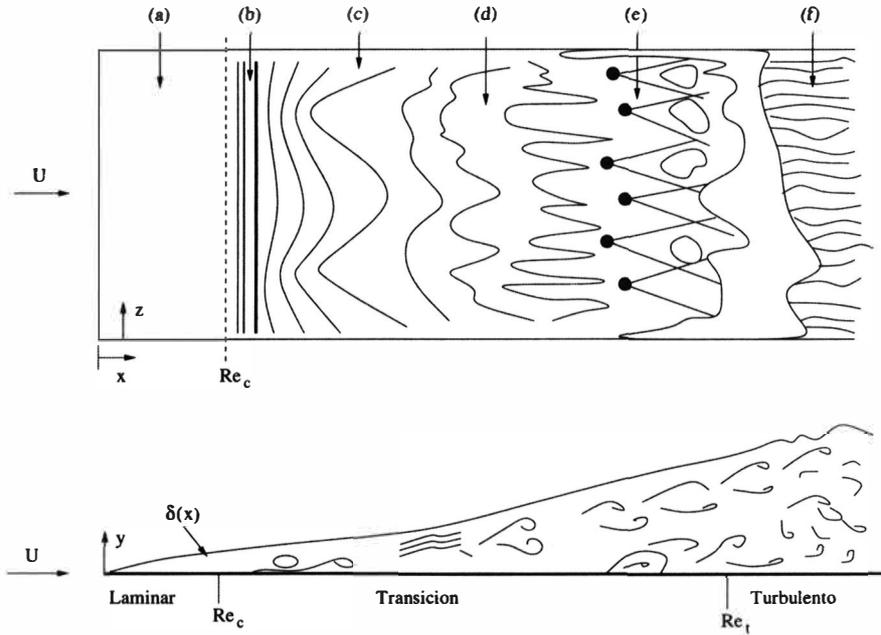


Figura 30.14: Esquema idealizado de la zona de transición a la turbulencia en una capa límite sobre una placa plana. Descripción en el texto. (Figura adaptada de White, 1991.)

es quizá el flujo turbulento simple más relevante desde el punto de vista ingenieril. Conviene comentar aquí que la transición desde el flujo de Poiseuille en un conducto al correspondiente flujo turbulento tiene cierto parecido a la que se acaba de describir para la capa límite, al menos en las últimas etapas. La diferencia fundamental estriba en que el flujo de Poiseuille en un conducto es linealmente estable frente a todo tipo de perturbaciones infinitesimales (no existe un Re_c en el sentido que se ha discutido más arriba). El flujo es inestable frente a perturbaciones de amplitud *finita*, por lo que el análisis de estabilidad (no lineal) es mucho más complejo. Los experimentos y las simulaciones directas de las ecuaciones de Navier-Stokes (más recientes) muestran que el número de Reynolds crítico depende de la amplitud de las perturbaciones, aumentando a medida que la amplitud disminuye (ver figura 30.1). El flujo es incondicionalmente estable por debajo de $Re \simeq 2300$, mientras que si no se introduce ninguna perturbación en el flujo (lo cual es prácticamente imposible tanto numérica como experimentalmente), el flujo permanece laminar para cualquier número de Reynolds. En su experimento original, Reynolds (1883) consiguió que el flujo fuese laminar hasta $Re \sim 13000$. Actualmente, mejorando las condiciones de entrada, se han conseguido flujos de Poiseuille

con números de Reynolds mayores de 10^5 . Por último indicar que, obviamente, las rugosidades de la superficie sólida favorecen la transición a la turbulencia (tanto en la capa límite como en el flujo en un conducto). Si la rugosidad relativa de la superficie es suficientemente grande, algunas de las etapas iniciales de la transición desaparecen.

Referencias.

- S. CHANDRASEKHAR, 1981. Capítulos II y VII.
- P.G. DRAZIN y W.H. REID, 1981. Capítulos 1-3.
- C. GODRÈCHE y P. MANNEVILLE (eds.), 1998. Capítulo 2: *Hydrodynamic instabilities in open flows*, por P. Huerre y M. Rossi.
- E.L. KOSCHMIEDER, 1993.
- L. LANDAU y E. LIFCHITZ, 1987. Capítulos III y V.
- R.L. PANTON, 1996. Capítulo 22.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000. Capítulos XVI y XVII.
- F.S. SHERMAN, 1990. Capítulo 13.
- F.M. WHITE, 1991. Capítulo 5.

Capítulo 31

Descripción matemática de los flujos turbulentos

31.1. Descripción determinista y estadística de la turbulencia

Se ha visto en la lección 29 que incluso las fluctuaciones más pequeñas de la turbulencia ocurren en una escala (microescala de Kolmogorov) mucho mayor que la escala del movimiento molecular. Experimentalmente se comprueba que esto es cierto incluso en flujos hipersónicos, hasta números de Mach del orden de 15 [ver ecuación (29.6)]. Por tanto, excepto en casos muy extremos ($M > 15$), los flujos turbulentos pueden ser descritos apropiadamente por las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones son deterministas, en el sentido de que dadas la posición y la velocidad de todas las partículas fluidas (en todas las escalas) en un instante t_0 , en principio existe solución de las ecuaciones para cada $t > t_0$. Es decir, la turbulencia es un fenómeno *determinista*, a pesar de lo intrincado e irregular de los movimientos turbulentos. Con el avance espectacular en la capacidad y velocidad de los ordenadores, no parece tan lejano el que se pueda simular numéricamente cualquier movimiento turbulento. Sin embargo, este panorama tan prometedor es algo engañoso ya que, debido a la no linealidad de las ecuaciones, origen de las inestabilidades, cualquier perturbación infinitesimal de las condiciones iniciales da lugar a una solución sustancialmente diferente. Esto no sólo afecta a la computación numérica, en el sentido de que es imposible conocer con precisión absoluta las condiciones iniciales, sino que es algo más profundo, relacionado con el *indeterminismo intrínseco* y, por tanto, la *impredecibilidad*, de ciertos sistemas dinámicos no lineales, como el movimiento de un fluido, en algunos rangos paramétricos. No

obstante, la simulación numérica directa está dando resultados cada vez más interesantes en flujos con número de Reynolds moderado. Para altos números de Reynolds, la simulación sólo puede tratar las escalas mayores del flujo [recuérdese que la microescala de Kolmogorov decrece a medida que aumenta Re , ver ecuaciones (29.3)-(29.5)], y estos resultados están proporcionando información muy valiosa sobre la estructura de la turbulencia. Pero la imprecisión asociada a las pequeñas escalas y a las condiciones iniciales, amplificadas por la no linealidad de las ecuaciones, da lugar a que después de un cierto periodo de tiempo el flujo turbulento simulado difiera significativamente del flujo real. Como lo expresó Lorenz (1963) en relación a la predicción atmosférica, aunque podamos simular numéricamente el movimiento en las escalas grandes y medianas (borrascas, huracanes, etc.), la imposibilidad de simular las pequeñas escalas hace que cualquier perturbación pequeña (como la producida por el vuelo de una mariposa) cambie el comportamiento del flujo, de forma que las predicciones atmosféricas no pueden ir más allá de unos pocos días. Precisamente fue el meteorólogo Lorenz quien, en su famoso artículo de 1963, encontró *caos* en un sistema dinámico no lineal muy simple, con tan solo tres grados de libertad y gobernado por un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias aparentemente muy sencillas, revolucionando así la física de los sistemas dinámicos no lineales.¹

De lo anterior se desprende la conveniencia (y también la necesidad) de usar métodos estadísticos para tratar la turbulencia, de los cuales nos ocuparemos exclusivamente en lo que sigue. De hecho, el estudio estadístico de la turbulencia es el más antiguo (las ecuaciones de Reynolds que veremos más adelante datan de 1895). Obviamente, la simulación numérica no ha sido posible hasta el desarrollo de los potentes ordenadores modernos, y, aún así, de acuerdo con lo dicho anteriormente, hay que utilizar hipótesis estadísticas para modelar las escalas más pequeñas de la turbulencia si se quiere simular flujos con números de Reynolds moderados y altos. Estas hipótesis introducen *ruido de fondo* en la simulación numérica, haciéndolas poco (o nada) precisas para tiempos grandes. Por ello, a pesar de que, como se dijo antes, la simulación numérica está proporcionando resultados muy interesantes, el tratamiento clásico estadístico, complementado con hipótesis semiempíricas o fenomenológicas, ha sido, y sigue siendo, muy útil para resolver problemas ingenieriles, sobre todo para aquellos problemas relacionados con flujos turbulentos en las inmediaciones de paredes sólidas, que son los únicos que se abordarán en las lecciones siguientes.

¹La *no integrabilidad* de ciertos problemas dinámicos simples, como el problema de tres cuerpos, era conocida, sin embargo, desde el siglo XIX.

31.2. Movimiento medio y fluctuaciones

En el tratamiento estadístico clásico de la turbulencia las magnitudes fluidas se descomponen en dos partes, un valor medio y una fluctuación con media nula. Así, por ejemplo, la velocidad $\vec{v}(\vec{x}, t)$ se descompone en un valor medio $\vec{V}(\vec{x})$ y una fluctuación $\vec{v}'(\vec{x}, t)$,

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' , \tag{31.1}$$

de forma que

$$\vec{V} = \lim_{t_o \rightarrow \infty} \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} \vec{v} dt . \tag{31.2}$$

Las magnitudes medias (promediadas en el tiempo) se designarán mediante una barra encima. Para simplificar la notación, no se utilizarán vectores, sino sus componentes. Obviamente el valor medio de las fluctuaciones es nulo,

$$\overline{v'_i} = \lim_{t_o \rightarrow \infty} \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} (v_i - V_i) dt \equiv 0 . \tag{31.3}$$

El uso de promedios temporales es la situación usual que se presenta cuando se hacen medidas experimentales, ya que éstas se realizan en un punto fijo del espacio y en un medio estadísticamente estacionario pero normalmente no homogéneo espacialmente. En un medio no homogéneo no sería apropiado usar promedios espaciales, ya que éstos variarían de punto a punto. Por otro lado, para que el promedio temporal tenga sentido, la integral (31.2) debe ser independiente de t_o ; es decir, el flujo medio V_i debe ser estacionario.²

Análogamente a la descomposición de la velocidad se hará para las demás magnitudes fluidas. Por ejemplo la presión y la temperatura (se considerará que el flujo es incompresible, con lo que la densidad es constante):

$$T = \theta + T' , \quad p = P + p' , \tag{31.4}$$

$$\overline{T'} = \overline{p'} = 0 . \tag{31.5}$$

El valor medio de la derivada espacial de una variable es igual a la derivada del valor medio, ya que el promediado se realiza integrando sobre un período largo de tiempo, pudiéndose intercambiar la derivada espacial con la integración temporal. Por ejemplo,

²Aunque sólo se considerarán en lo que sigue flujos cuyas propiedades medias son estacionarias, la descomposición de Reynolds también se puede usar para describir flujos turbulentos cuyas medias no son estacionarias, siempre que el tiempo característico de variación t_c sea mucho mayor que el tiempo t_o en el que se promedian las magnitudes fluidodinámicas.

$$\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad , \quad \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (31.6)$$

El promedio del producto de dos variables, como por ejemplo de dos componentes de la velocidad, sería:

$$\overline{v_i v_j} = \overline{(V_i + v'_i)(V_j + v'_j)} = V_i V_j + \overline{v'_i v'_j} . \quad (31.7)$$

Los términos producto de una fluctuación y un valor medio desaparecen al ser constante el valor medio y nulo el promedio de la fluctuación. Si $\overline{v'_i v'_j} \neq 0$ se dice que v'_i y v'_j están *correlacionadas*, y si $\overline{v'_i v'_j} = 0$, son estadísticamente independientes o no correlacionadas. Para que v'_i y v'_j estén correlacionadas, las fluctuaciones de v'_i y v'_j en el tiempo no pueden ser independientes estadísticamente, sino que, por ejemplo, durante el tiempo que una es positiva, la otra tiene también que serlo durante la mayor parte de ese tiempo, y viceversa. Una medida del grado de correlación entre dos fluctuaciones v'_i y v'_j viene dada por el *coeficiente de correlación*

$$C_{ij} \equiv \overline{v'_i v'_j} / (\overline{v'^2_i} \overline{v'^2_j})^{1/2} \quad , \quad (31.8)$$

que vale la unidad cuando $v'_i \equiv v'_j$, y cero si v'_i y v'_j no están correlacionadas. Las cantidades $\overline{v'^2_i}$ y $\overline{v'^2_j}$ son las *variancias* de las respectivas fluctuaciones. Sus raíces cuadradas son las *desviaciones típicas* de las fluctuaciones y normalmente se usan como velocidad característica de fluctuación de un flujo turbulento.

31.3. Ecuaciones de Reynolds. Esfuerzos aparentes de Reynolds

La descomposición de las magnitudes fluidas en valores medios y fluctuaciones fue hecha por Reynolds (1895) con el objetivo de obtener ecuaciones para las magnitudes medias. De esta forma, en vez de utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes para las magnitudes fluidas en cada punto y en cada instante, que no serían *integrables* para un flujo turbulento en el sentido descrito en la sección 31.1, se utilizan las ecuaciones para los valores medios, las cuales, con ciertas hipótesis semiempíricas que veremos más adelante, proporcionan una información muy útil sobre el flujo, sobre todo desde un punto de vista ingenieril.

Suponiendo, por simplicidad, que el flujo es incompresible, tomando el valor medio de la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v}$ y utilizando las definiciones y resultados de la sección anterior, se tiene que el flujo medio es incompresible:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0. \tag{31.9}$$

Restando esta ecuación de $\partial v_i / \partial x_i = 0$, se tiene que las fluctuaciones son también solenoidales:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0. \tag{31.10}$$

Análogamente, tomando valores medios de la ecuación de cantidad de movimiento (en ausencia de fuerzas másicas) se tiene

$$\rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \overline{\rho v'_i v'_j} \right), \tag{31.11}$$

donde, aparte de suponer que $\rho = \text{constante}$, se ha tenido en cuenta que el flujo medio es estacionario y que

$$\overline{v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}), \tag{31.12}$$

siendo la última igualdad consecuencia de (31.10). La ecuación (31.11) para el flujo medio es análoga a la ecuación de cantidad de movimiento para el flujo local, pero con un término adicional proveniente de la covención de la cantidad de movimiento de las fluctuaciones de la velocidad. Este término se ha escrito como la divergencia del tensor $-\overline{\rho v'_i v'_j}$, por lo que esta magnitud hace las veces de un esfuerzo, similar al esfuerzo viscoso $\mu \partial V_i / \partial x_j$, pero que en vez de ser consecuencia del transporte molecular de cantidad de movimiento, es consecuencia del transporte de cantidad de movimiento por las fluctuaciones turbulentas de la velocidad. Por ello se suele definir el tensor de esfuerzos aparentes, o turbulentos, de Reynolds como

$$\tau_{tij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}. \tag{31.13}$$

Los elementos diagonales de $\overline{\tau}_t$ son los esfuerzos normales (presiones) turbulentos: $-\overline{\rho v'^2_1}$, $-\overline{\rho v'^2_2}$ y $-\overline{\rho v'^2_3}$, que suelen ser muy pequeños en la mayoría de los flujos. Por el contrario, los elementos fuera de la diagonal, $-\overline{\rho v'_i v'_j}$, $i \neq j$, es decir, los esfuerzos tangenciales turbulentos, suelen ser mucho más importantes que los correspondientes esfuerzos tangenciales viscosos, pues, como se

comentó en la lección 29, el transporte turbulento es mucho más efectivo que el molecular.

La ecuación de la energía, suponiendo por simplicidad que el flujo es incompresible, que c_p y K son constantes ($\alpha = K/\rho c_p = \text{constante}$) y que no hay disipación viscosa ni aportes externos de calor, se escribe:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (31.14)$$

Utilizando la descomposición (31.4) para la temperatura y promediando, se llega a:

$$V_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \overline{v'_j T'} \right]. \quad (31.15)$$

El vector cuya componente j es $-\rho c_p \overline{v'_j T'}$ es el denominado vector de flujo de calor turbulento. Así, desde el punto de vista de las magnitudes medias, el flujo de calor es la suma de la contribución del movimiento molecular y de las fluctuaciones turbulentas:

$$q_j = -K \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \rho c_p \overline{v'_j T'}. \quad (31.16)$$

31.4. El problema del cierre

La descomposición del flujo en un flujo medio y sus fluctuaciones ha separado los efectos de las fluctuaciones en las ecuaciones del flujo medio, apareciendo un tensor de esfuerzos turbulento, $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$, y un vector flujo de calor turbulento, $q_{tj} = \rho c_p \overline{v'_j T'}$, en las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía. Estas magnitudes son desconocidas, por lo que el problema no está cerrado. Se podrían escribir ecuaciones para esas magnitudes, pero aparecerían nuevas incógnitas del tipo $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ y $\overline{v'_i v'_j T'}$, y así sucesivamente. Por ello, la forma habitual de cerrar el problema, sobre todo si uno quiere resolver problemas prácticos en los que ocurren flujos turbulentos, es mediante el uso de hipótesis fenomenológicas o semiempíricas para el tensor de esfuerzos y el vector flujo de calor turbulentos. Existen diversas aproximaciones más o menos adecuadas para describir distintos tipos de problemas (ver referencias). A continuación se verá sólo una aproximación relacionada con la denominada longitud de mezcla de Prandtl, que sobre todo tiene utilidad para describir flujos turbulentos casi unidireccionales.

31.4.1. Longitud de mezcla

La longitud de mezcla en flujos turbulentos es un concepto que proviene de la analogía formal entre la descomposición de Reynolds (31.1) y la descomposición de la velocidad molecular que se hace en la teoría cinética de gases (ver lección 9) en una velocidad media o macroscópica y la velocidad de fluctuación molecular [ecuación (9.6)]. Ahora la molécula es *sustituida* por la partícula fluida fluctuante. El concepto equivalente a la longitud de mezcla es el camino libre medio molecular entre colisiones λ . La analogía se puede hacer de una forma rigurosa, pero aquí se presentará brevemente de una forma intuitiva (para un desarrollo mucho más detallado ver, por ejemplo, Schlichting y Gersten, 2000).

Como el concepto de longitud de mezcla encuentra sobre todo aplicación en los flujos casi unidireccionales (capa límite, flujo en conductos, chorros, etc.) que, por otra parte, son los únicos flujos turbulentos que se considerarán con algún detalle, se supondrá que movimiento medio es, en primera aproximación, $\vec{V} \simeq U(y)\vec{e}_x$. La **viscosidad cinemática turbulenta** ν_t se define como

$$\tau_t \equiv -\overline{\rho u'v'} \equiv \rho \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (31.17)$$

donde u' y v' son las componentes de la velocidad de fluctuación en las direcciones x e y , respectivamente. A diferencia de ν , que depende sólo de las propiedades del fluido, ν_t depende mayormente del flujo y, por tanto, de la posición de la partícula fluida. Pero, análogamente a la viscosidad cinemática molecular, que para un gas es del orden del producto del camino libre medio entre colisiones y la velocidad de agitación molecular, $\nu \sim \lambda c_T$ [ver ecuaciones (8.4) y (9.61); c_T es del mismo orden que la velocidad del sonido a], se supone que ν_t es del orden del producto de una **longitud de mezcla**, l_m , o longitud que recorre una partícula fluida fluctuante antes de que pierda su identidad mezclándose con las partículas fluidas de su entorno, y una velocidad característica de fluctuaciones u^* ,

$$\nu_t \sim l_m u^*. \quad (31.18)$$

De esta forma se tiene que

$$\tau_t = \rho u^* l_m \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (31.19)$$

Prandtl relacionó la velocidad fluctuante u^* con el módulo del gradiente de velocidad, $u^* \sim l_m |\partial U / \partial y|$ (lo cual se obtiene de (31.17) haciendo $|u'v'| \sim u^{*2}$),

llegando a la expresión:

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (31.20)$$

La utilidad de esta expresión depende, obviamente, del grado de precisión con que se evalúe la longitud de mezcla (que es en sí un concepto algo impreciso) en cada tipo de flujo. Para movimientos turbulentos cerca de una pared sólida (capa límite turbulenta) se verá en la lección siguiente que $l_m \simeq \kappa y$, donde y es la distancia perpendicular a la pared y κ es una constante que se obtiene experimentalmente. Para una capa de mezcla, para un chorro o para una estela, bidimensionales, de anchura $b(x)$, $l_m \simeq \kappa_1 b$, donde κ_1 es otra constante a determinar experimentalmente. Ambas constantes, κ y κ_1 son universales, en el sentido de que no dependen ni del fluido ni de la intensidad turbulenta. Como la longitud de mezcla es también una longitud característica de las fluctuaciones turbulentas (de mayor escala), de estos ejemplos se sigue que los torbellinos en una capa límite crecen de tamaño a medida que se alejan de la pared, mientras que su tamaño no depende de la coordenada transversal para capas de mezcla, chorros o estelas.

31.4.2. Analogía de Reynolds

Para determinar el flujo de calor turbulento también se puede hacer uso del concepto de longitud de mezcla. Para el flujo de calor transversal en un movimiento casi unidireccional, se tiene

$$q_t \equiv \rho c_p \overline{v'T'} = -\rho c_p \alpha_t \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\rho c_p u l_m \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\rho c_p l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (31.21)$$

donde α_t es la difusividad térmica turbulenta. Sin embargo, en el problema que se estudiará en la lección siguiente de la capa límite turbulenta, se suele utilizar la analogía de Reynolds y expresar el flujo de calor en función del esfuerzo turbulento.

Esta analogía ya se consideró en el capítulo 28 en relación a la capa límite laminar. Se vió que, estrictamente, era válida para el flujo sobre una placa plana (gradiente de presión nulo), con temperatura de la pared constante, para un fluido con $Pr = 1$. Esta última condición es muy restrictiva en los flujos laminares (transporte exclusivamente molecular), pero no en los turbulentos, ya que las difusividades moleculares (de cantidad de movimiento y energía) son despreciables frente a las turbulentas, y al ser el transporte turbulento debido a las fluctuaciones de la velocidad, con igual intensidad se transporta

cantidad de movimiento y energía. Por tanto, el número de Prandtl turbulento es prácticamente igual a la unidad siempre. De hecho, comparando (31.20) con (31.21) se tiene

$$\nu_t \simeq \alpha_t \approx u^* l_m \quad , \quad Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \approx 1 \quad . \quad (31.22)$$

Así, teniendo en cuenta que en la mayoría de las ocasiones $\nu \ll \nu_t$ y $\alpha \ll \alpha_t$, las ecuaciones y condiciones de contorno de la capa límite turbulenta sobre una placa plana se escriben ($\vec{V} \equiv U\vec{e}_x + V\vec{e}_y$, $|V| \ll |U|$):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad , \quad (31.23)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\nu + \nu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad , \quad (31.24)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\alpha + \alpha_t) \frac{\partial \theta}{\partial y} \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_t \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \simeq \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \quad , \quad (31.25)$$

$$y = 0, \quad \theta = \theta_p, \quad U = V = 0; \quad y/\delta \rightarrow \infty, \quad U = U_e, \quad \theta = \theta_e. \quad (31.26)$$

Las ecuaciones y condiciones de contorno para U y para θ son análogos, verificándose $U_e(\partial\theta/\partial y)_{y=0} = (\theta_p - \theta_e)(\partial U/\partial y)_{y=0}$. Utilizando la terminología de la sección 28.3, se tiene

$$\frac{q}{c_p \tau} \simeq \frac{q_t}{c_p \tau_t} = - \frac{(\partial\theta/\partial y)_{y=0}}{(\partial U/\partial y)_{y=0}} = \frac{Sta \rho c_p U_e (\theta_e - \theta_p)}{C_f \rho U_e^2 / 2} \quad . \quad (31.27)$$

Es decir,

$$Sta = C_f / 2 \quad , \quad (31.28)$$

donde ahora Sta y C_f son el número de Stanton y el coeficiente de fricción basados en el flujo de calor y esfuerzo turbulentos.

La analogía anterior no tiene la restricción del número de Prandtl que tenía en el caso laminar. Sin embargo, la hipótesis hecha de que las difusividades turbulentas son mucho mayores que las moleculares, aunque válida en casi la totalidad de la capa límite turbulenta, no lo es en una capa muy delgada (en relación al espesor de la capa límite) en las proximidades de la pared (denominada subcapa laminar, ver lección siguiente), donde el transporte molecular puede ser muy importante y las fluctuaciones turbulentas muy pequeñas, por lo que ν y α pueden ser del mismo orden, o incluso mayores, que ν_t y α_t . Afortunadamente, esta *subcapa* es tan delgada que en muchas ocasiones su espesor es del mismo orden que el tamaño de las rugosidades de la superficie, no existiendo en tales casos. Cuando la subcapa laminar existe, la analogía de

Reynolds anterior deja de ser estrictamente válida, siendo necesario corregirla mediante otras aproximaciones.

31.5. Vorticidad en los flujos turbulentos

31.5.1. Vorticidad y esfuerzos de Reynolds

Antes de pasar a escribir la ecuación de la vorticidad para flujos turbulentos utilizando la descomposición de Reynolds,

$$\omega_i = \Omega_i + \omega'_i, \quad \overline{\omega'_i} = 0, \quad (31.29)$$

es interesante relacionar los esfuerzos de Reynolds con la vorticidad. Para ello la ecuación de cantidad de movimiento se escribe en la forma (como en toda esta lección se supone que el flujo es incompresible y no se consideran las fuerzas másicas):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla v^2/2 + \vec{v} \wedge \vec{\omega} + \nu \nabla^2 \vec{v} \quad (31.30)$$

El término $\vec{v} \wedge \vec{\omega}$ es crucial para los flujos turbulentos, representando una *fuerza de vorticidad* análoga a una fuerza de Coriolis debida al propio giro de las partículas fluidas (el factor 2 no aparece puesto que $\vec{\omega}$ es dos veces la velocidad angular de giro de una partícula fluida centrada en el punto \vec{x} , ver sección 4.2). Sustituyendo (31.1) y (31.29) en la ecuación anterior y tomando valores medios, suponiendo, como se ha hecho antes, que el flujo medio es estacionario, se llega a la ecuación (se pasa a notación con subíndices):

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V_j V_j + \frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j} \right) + \epsilon_{ijk} \left(V_j \Omega_k + \overline{v'_j \omega'_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (31.31)$$

Comparando con (31.11) se observa que el término de los esfuerzos de Reynolds se descompone en dos términos, un gradiente de la presión dinámica de las fluctuaciones, $\frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j}$ y un término de interacción entre las fluctuaciones de la velocidad y de la vorticidad, $\epsilon_{ijk} \overline{v'_j \omega'_k}$. Como se dijo anteriormente, la contribución turbulenta a la presión dinámica suele ser insignificante, $\frac{1}{2} \overline{v'_j v'_j} \ll \frac{1}{2} V_j^2$, por lo que las fuerzas originadas por los esfuerzos de Reynolds están asociadas, principalmente, a la interacción entre vorticidad y velocidad. Para ver más fácilmente esta interacción, se considerará, como en las secciones precedentes, un flujo medio bidimensional casi unidireccional ($V_1 \gg V_2, V_3 = 0$) con derivadas espaciales a lo largo del movimiento despreciables frente a las

transversales ($\partial/\partial x_1 \ll \partial/\partial x_2$). Con estas hipótesis la única componente no nula de la vorticidad es $\Omega_3 = \partial V_2/\partial x_1 - \partial V_1/\partial x_2 \simeq -\partial V_1/\partial x_2$.

En la componente según la dirección x_1 de la ecuación (31.31), los términos que contienen productos de la vorticidad media son $V_2\Omega_3$ y $-V_3\Omega_2$. El segundo es nulo ($V_3 = \Omega_2 = 0$), mientras que el primero vale $-V_2\partial V_1/\partial x_2 + V_2\partial V_2/\partial x_1$. Por otro lado, $-\partial(\frac{1}{2}V_j V_j)/\partial x_1 = -V_1\partial V_1/\partial x_1 - V_2\partial V_2/\partial x_1$. Así, los segundos sumandos se cancelan, quedando la ecuación

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \overline{v'_2 \omega'_3} - \overline{v'_3 \omega'_2} \quad (31.32)$$

Comparando esta ecuación con la componente según x_1 de (31.11) y teniendo en cuenta que $\overline{\partial v_1'^2/\partial x_1} \ll \partial(\overline{v'_1 v'_2})/\partial x_2$, se tiene la siguiente expresión para la componente $-\overline{v'_1 v'_2}$ del esfuerzo de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (-\overline{v'_1 v'_2}) = \overline{v'_2 \omega'_3} - \overline{v'_3 \omega'_2} \quad (31.33)$$

Para tener una idea del significado de cada uno de los dos términos involucrados, se puede hacer uso de la teoría de la longitud de mezcla, apropiada para estos flujos casi unidireccionales, y suponer, de acuerdo con (31.19), que

$$-\overline{v'_1 v'_2} \sim ul_m \partial V_1 / \partial x_2, \quad (31.34)$$

donde la longitud de mezcla l_m es un tamaño característico de las fluctuaciones (vórtices) y u una velocidad característica de las fluctuaciones, que normalmente depende muy poco de la coordenada transversal x_2 . Así,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (-\overline{v'_1 v'_2}) \sim ul_m \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + u \frac{\partial l_m}{\partial x_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \sim -ul_m \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2} - u \Omega_3 \frac{\partial l_m}{\partial x_2}, \quad (31.35)$$

donde se ha hecho uso de $\Omega_3 \simeq -\partial V_1/\partial x_2$. Por otra parte, por analogía con (31.34), se puede escribir

$$\overline{v'_2 \omega'_3} \sim -ul_m \partial \Omega_3 / \partial x_2, \quad (31.36)$$

no existiendo expresión análoga para $\overline{v'_3 \omega'_2}$ puesto que $\Omega_2 = 0$. De esta forma, salvo constantes numéricas que no se están considerando, comparando las expresiones anteriores se tiene que

$$\overline{v'_3 \omega'_2} \sim u \Omega_3 \frac{\partial l_m}{\partial x_2} \quad (31.37)$$

Es decir, la fuerza originada por los esfuerzos de Reynolds se puede descomponer en dos partes: una debida al transporte de vorticidad [ecuación (31.36)] y otra cuyo origen es el estiramiento de los vórtices, que al incrementar la vorticidad de los mismos aumentan la velocidad de fluctuación [ecuación (31.37)]. En algunos flujos como los chorros, estelas y capas de mezcla, $l_m \simeq \text{constante}$ a través del flujo, por lo que la fuerza correspondiente al estiramiento de los vórtices es despreciable y la fuerza dada por el gradiente de los esfuerzos de Reynolds se puede interpretar como exclusivamente debida al transporte de vorticidad. Por el contrario, para los flujos casi unidireccionales en las proximidades de una pared sólida, que son los que se considerarán con más detalle en la lección siguiente, la longitud característica de los vórtices l_m varía transversalmente (linealmente con la distancia a la pared), y el esfuerzo de Reynolds no es exclusivamente debido al transporte de vorticidad, sino que hay una contribución importante debida al estiramiento de los vórtices. Se verá en la lección siguiente que el esfuerzo de Reynolds permanece practicamente constante a través de gran parte de la capa límite turbulenta, por lo que la vorticidad media Ω_3 también es constante. De acuerdo con lo visto anteriormente, para que esto ocurra, la ganancia de vorticidad media debida al transporte neto de vorticidad tiene que compensarse con la pérdida de vorticidad media debida al transporte de vorticidad originado por el estiramiento de los vórtices por las fluctuaciones de la velocidad. Todo esto quizá se vea más claro a partir de la ecuación de la vorticidad, que se considera a continuación.

31.5.2. Ecuación de la vorticidad en flujos turbulentos

Para un flujo incompresible, la ecuación de la vorticidad se escribe:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (31.38)$$

Ya se describió en la lección 20 el significado físico de los dos términos del segundo miembro: generación de vorticidad debido al estiramiento de los vórtices producido por el gradiente de velocidad y difusión de la vorticidad por viscosidad. El primero de estos dos términos es el responsable, como ya se comentó en la lección 29, de la cascada de energía entre las escalas turbulentas más grandes y escalas cada vez más pequeñas, hasta que los vórtices son tan pequeños que el término viscoso ya no es despreciable y disipa la vorticidad. El efecto de éste término $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v}$, aunque ya se discutió con detalle en el capítulo 20 cuando se consideraron los teoremas de Helmholtz, puede quizá hacerse aún más claro si se tiene en cuenta la descomposición de $\nabla \vec{v}$ en su parte simétrica y antisimétrica hecha en la lección 4, $\nabla \vec{v} = \bar{\bar{\gamma}} + \bar{\bar{\xi}}$, donde la parte simétrica $\bar{\bar{\gamma}}$ es el

tensor de velocidad de deformación y la parte antisimétrica $\bar{\bar{\xi}}$ está relacionada con la vorticidad $\vec{\omega}$ mediante $\vec{a} \cdot \bar{\bar{\xi}} = \vec{\omega} \wedge \vec{a}$ [ecuación (4.7)] para cualquier vector \vec{a} . Por tanto, $\vec{\omega} \cdot \bar{\bar{\xi}} \equiv 0$ y $\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{\omega} \cdot \bar{\gamma}$, de donde queda claro que este término representa la generación (o destrucción) de vorticidad por estiramiento (o acortamiento) de los vórtices producida por el campo de velocidad.

Sustituyendo la descomposición de Reynolds para \vec{v} y $\vec{\omega}$ en (31.38) y tomando valores medios se tiene

$$V_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = -\overline{v'_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j}} + \Omega_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \overline{\omega'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad , \quad (31.39)$$

donde, como anteriormente, se ha supuesto que el flujo medio es estacionario y se ha utilizado la notación de subíndices. Como $\nabla \cdot \vec{\omega} \equiv 0$, se tiene que tanto $\vec{\Omega}$ como $\vec{\omega}'$ son también solenoidales. De la ecuación de continuidad, \vec{v}' también lo es, de donde

$$\overline{v'_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_j \omega'_i}) \quad , \quad (31.40)$$

$$\overline{\omega'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\omega'_j v'_i}) \quad . \quad (31.41)$$

El término dado por (31.40) es análogo al término de los esfuerzos de Reynolds en la ecuación para V_i , y es debido al transporte medio de ω'_i a través de su interacción con las fluctuaciones de la velocidad v'_j en la dirección de los gradientes $\partial/\partial x_j$. Por supuesto, este término cambia la vorticidad media Ω_i sólo si $\overline{v'_j \omega'_i}$ cambia en la dirección x_j , de forma análoga a un transporte molecular. El término (31.41) representa la producción (o eliminación) de vorticidad media Ω_i debido al estiramiento de los vórtices fluctuantes causado por las fluctuaciones del tensor de velocidad de deformación.

Para comparar estos términos con lo visto en la sección anterior, se supone un flujo casi unidireccional como el allí considerado: $V_3 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0$, $\partial/\partial x_3 = 0$, $\partial/\partial x_1 \ll \partial/\partial x_2$. Los términos (31.40) y (31.41) correspondientes a la ecuación para Ω_3 son, en primera aproximación,

$$\overline{v'_j \frac{\partial \omega'_3}{\partial x_j}} \simeq \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{v'_2 \omega'_3}) \quad , \quad (31.42)$$

$$\overline{\omega'_j \frac{\partial v'_3}{\partial x_j}} \simeq \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{\omega'_2 v'_3}) \quad . \quad (31.43)$$

Los productos $\overline{v'_2 \omega'_3}$ y $\overline{v'_3 \omega'_2}$ están relacionados con el gradiente del esfuerzo de Reynolds mediante (31.33): $\overline{v'_2 \omega'_3}$ se interpretaba como la fuerza originada

por el transporte de ω'_3 por v'_2 en un gradiente medio $\partial\Omega_3/\partial x_2$, mientras que $\overline{v'_3\omega'_2}$ era interpretado como la fuerza asociada a los cambios de tamaño de los torbellinos en un flujo con una variación de la escala de longitud. Esta última fuerza, que se dijo era consecuencia del estiramiento de los vórtices, ve confirmada esta interpretación por (31.43), ya que su gradiente transversal es una fuente (o sumidero) de vorticidad media.

Referencias.

- J.O. HINZE, 1975. Capítulos 1 y 5
- M. LESIEUR, 1993. Capítulos I y VI.
- A.S. MONIN y A.M. YAGLOM, 1971. Vol. I., capítulo 3.
- S.B. POPE, 2000. Capítulo 4.
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN 2000. Capítulos XVIII y XIX.
- H. TENNEKES y J.L. LUMLEY, 1972. Capítulo 2.

Capítulo 32

Turbulencia en presencia de paredes

32.1. Capa límite turbulenta

La única aplicación práctica de un flujo turbulento que se va a considerar en este curso es el flujo turbulento en conductos. En particular, se calculará el esfuerzo de fricción que la pared de un conducto ejerce sobre un fluido en movimiento turbulento completamente desarrollado en su interior, cuyo conocimiento es esencial para calcular la potencia necesaria para vehicular dicho fluido por el conducto. El intercambio de calor entre la pared del conducto y el fluido se calculará mediante la analogía de Reynolds una vez conocida la fricción. Pero antes de pasar a considerar este problema es conveniente tener una idea previa sobre la capa límite turbulenta.

Las ecuaciones para la capa límite bidimensional e incompresible sobre una placa plana (gradiente de presión nulo) ya se escribieron en la sección 31.4.2. La capa límite de velocidad está gobernada por las ecuaciones siguientes:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \quad (32.1)$$

$$y = 0, \quad U = V = 0; \quad y/\delta \rightarrow \infty, \quad U = U_e. \quad (32.2)$$

$$y = 0, \quad U = V = 0; \quad y/\delta \rightarrow \infty, \quad U = U_e. \quad (32.3)$$

Para resolver este problema, tradicionalmente se suele utilizar un modelo multiplicapa debido a Prandtl y von Kármán, entre otros. Según este modelo, la estructura de la capa límite turbulenta se divide en tres regiones más o menos

diferenciadas, en cada una de las cuales alguno (o varios) de los términos de la ecuación de cantidad de movimiento (32.2) es despreciable, simplificándose su solución. Estas soluciones más simples en cada capa acoplan unas con otras asintóticamente y dan lugar a la estructura completa de la capa límite.

Para definir las distintas escalas, se define una velocidad característica u^* asociada al esfuerzo de fricción en la pared τ_p ,

$$u^* \equiv (\tau_p/\rho)^{1/2} \quad , \quad \tau_p \equiv \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad . \quad (32.4)$$

Se supondrá que u^* es el orden de magnitud de la velocidad de las fluctuaciones de mayor tamaño; es decir,

$$| -\overline{u'v'} | \sim u^{*2} \quad , \quad (32.5)$$

lo cual se comprobará *a posteriori*. Ya se dijo en la sección 31.5.1 que los experimentos muestran que esta velocidad característica apenas depende de la coordenada transversal y . Comparando el primer y segundo miembro de la ecuación de cantidad de movimiento (32.2) se tiene que

$$\frac{U_e^2}{L} \sim \frac{u^{*2}}{\delta} \quad , \quad \frac{u^*}{U_e} \sim \sqrt{\frac{\delta}{L}} \ll 1 \quad , \quad (32.6)$$

donde L es la longitud característica a lo largo del movimiento y δ es el espesor característico de la capa límite.

Muy cerca de la pared ($y \rightarrow 0$) es obvio que el término de esfuerzos viscosos es dominante en la ecuación (32.2), de donde

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} \right) \simeq 0 \quad . \quad (32.7)$$

Es decir,

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} \simeq \text{constante} \equiv \frac{\tau_p}{\rho} = u^{*2} \quad . \quad (32.8)$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno $U(y=0) = 0$, se obtiene el perfil lineal de velocidad

$$\frac{U}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu} \quad , \quad (32.9)$$

que se suele escribir como

$$u^+ = y^+ \quad , \quad u^+ \equiv \frac{U}{u^*} \quad , \quad y^+ \equiv \frac{u^* y}{\nu} \quad . \quad (32.10)$$

Esta solución es válida hasta una distancia a la pared y del orden de ν/u^* , puesto que para $y \sim \nu/u^*$, $U \sim u^*$, y el término de esfuerzos aparentes de Reynolds se hace tan importante como el de esfuerzos viscosos:

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} \sim \frac{\nu u^*}{\nu/u^*} \sim u^{*2} \sim |-\overline{u'v'}| \quad . \quad (32.11)$$

Así, la solución lineal (32.9) [o (32.10)] es válida para $y \ll \nu/u^*$ ($y^+ \ll 1$). Esta región del flujo cerca de la pared donde los esfuerzos viscosos son dominantes y la velocidad media viene dada por (32.9) se suele denominar **subcapa viscosa** o **subcapa laminar**. Su espesor, del orden de ν/u^* , constituye una fracción muy pequeña del espesor total de la capa límite:

$$\frac{\nu}{u^* \delta} \ll 1 \quad . \quad (32.12)$$

Para $\nu/u^* \ll y \ll \delta$, de (32.2) se desprende que los esfuerzos aparentes de Reynolds son dominantes frente a los esfuerzos viscosos y, por otra parte, también son dominantes frente a la convección de cantidad de movimiento media, puesto que $|\partial(-\overline{u'v'})/\partial y| \sim u^{*2}/y \gg u^{*2}/\delta \sim U_e^2/L \sim |U\partial U/\partial x|$. Por tanto, la ecuación de cantidad de movimiento se simplifica a

$$\frac{\partial(-\overline{u'v'})}{\partial y} = 0, \quad -\overline{u'v'} \simeq \text{constante}, \quad (32.13)$$

donde la constante vale $\tau_p/\rho = u^{*2}$ para que acople con la solución en la subcapa viscosa cuando $y \rightarrow \nu/u^*$. Es decir,

$$-\overline{u'v'} \simeq u^{*2}, \quad (32.14)$$

lo cual corrobora la hipótesis (32.5). Se observa que el esfuerzo es constante cerca de la pared, lo cual fue introducido como hipótesis por Prandtl, permitiendo así obtener la solución universal del perfil de velocidad turbulenta cerca de la pared que estamos considerando. Para ello, Prandtl hizo uso de su concepto de longitud de mezcla, suponiendo que, cerca de la pared, dicha longitud es proporcional a la distancia a la misma:

$$\nu_t = l_m u^* = \kappa y u^*, \quad (32.15)$$

donde κ es una constante universal. Sustituyendo en (32.14),

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} = \kappa u^* y \frac{\partial U}{\partial y} = u^{*2}, \quad (32.16)$$

proporciona un perfil logarítmico para la velocidad:

$$u^+ = \frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C. \quad (32.17)$$

Esta expresión se suele escribir

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (32.18)$$

donde tanto C como $B = C + (\ln \nu / u^*) / \kappa$ son constantes en principio arbitrarias, al igual que κ . La comparación con datos experimentales cerca de la pared demuestran que $\kappa \simeq 0,41$ y $B \simeq 4,9$ [ver figura 32.1(a)]. La constante κ se suele denominar **constante de von Kármán**, quien obtuvo (32.18) independientemente de Prandtl por otro procedimiento. A esta región de la capa límite se le suele denominar **subcapa intermedia** o **subcapa logarítmica**.

Se podría haber obtenido directamente una solución válida tanto para la subcapa laminar como para la intermedia sin más que suponer $y \ll \delta$, en cuyo caso el primer miembro de (32.2) es despreciable frente al segundo, teniéndose

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u'v'} = \text{constante} = \tau_p / \rho = u^{*2} \quad (32.19)$$

Sustituyendo (32.15), se llega a

$$(1 + \kappa y^+) \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1 \quad (32.20)$$

cuya integración con la condición $u^+(y^+ = 0) = 0$ proporciona

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) \quad (32.21)$$

Para $y^+ \ll 1$ ($y \ll \nu / u^+$) esta expresión tiene como límite la ley lineal (32.10), mientras que para $y^+ \gg 1$ ($y \gg \nu / u^+$), $u^+ = \ln(\kappa y^+) / \kappa$. La constante experimental $B \simeq 4,9$ en (32.18) no coincide con el valor $(\ln \kappa) / \kappa$ dado por la expresión anterior debido a que al ser κ una constante pequeña, la aproximación $\ln(1 + \kappa y^+) \simeq \ln(\kappa y^+)$ no es demasiado correcta [aparte de que (32.15) no es una ley exacta, sino una aproximación, y los experimentos ajustan las constantes κ y B por separado, no conjuntamente].

Para $y \sim \delta$, el movimiento viene gobernado por un balance entre la convección de cantidad de movimiento exterior y los esfuerzos turbulentos originados en el interior. La ecuación que habría que resolver sería (32.2) pero sin el término de esfuerzos viscosos (recuérdese que la capa límite laminar se hace turbulenta para $U_e \delta / \nu > 600$, aproximadamente; al ser un número de Reynolds muy grande, los esfuerzos viscosos son despreciables a distancias de la

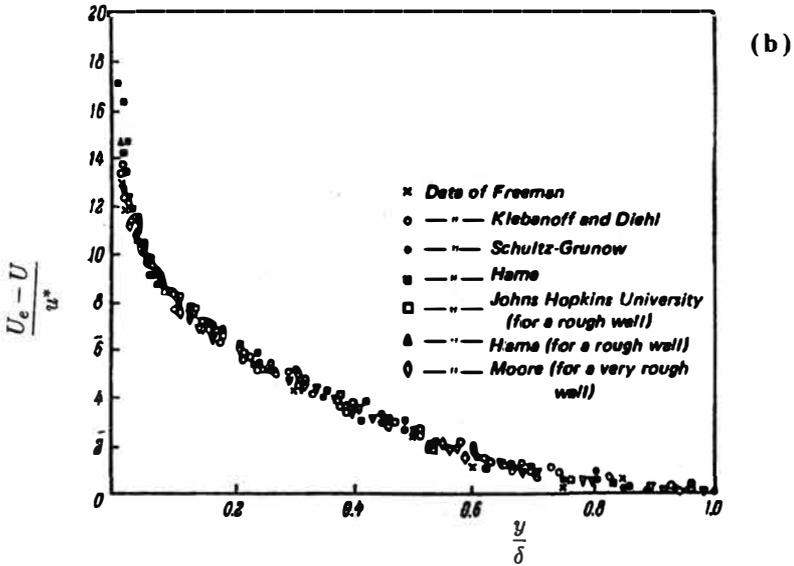
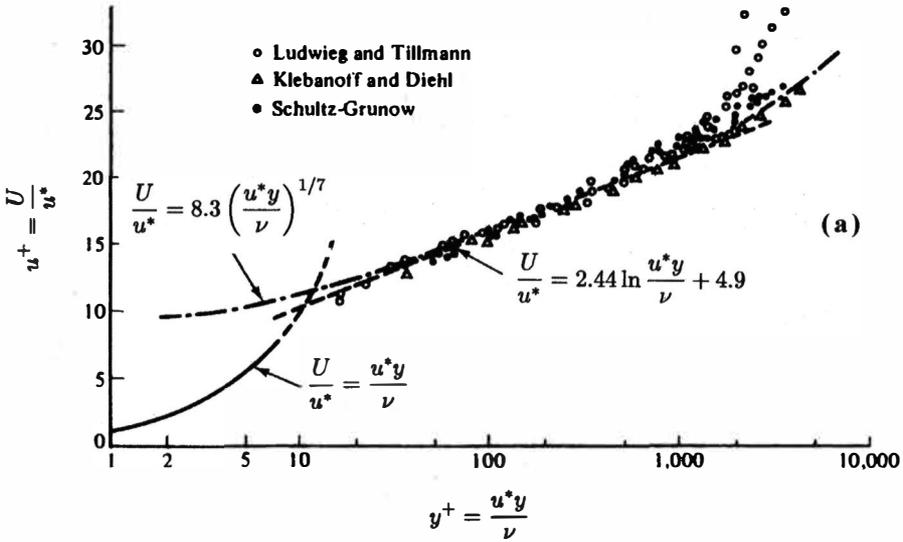


Figura 32.1: (a): Perfil de velocidad en un flujo turbulento cerca de una pared lisa [ecuaciones (32.10) y (32.18)] y comparación con los experimentos (puntos). La expresión potencial $u^+ = 8,3(y^+)^{1/7}$ se obtiene ajustando los resultados experimentales para las subcapas intermedia y externa (figura tomada de Hinze, 1975). (b): Valores experimentales de la velocidad en una capa límite turbulenta sobre una placa plana, donde se aprecia que la ley de defecto de velocidad se satisface. Obsérvese que la ley de defecto de velocidad es válida incluso para superficies rugosas (cuadrados, triángulos y rombos), ya que la rugosidad sólo afecta a la solución muy cerca de la pared (figura tomada de Monin y Yaglom, 1971).

pared del orden de δ). Esta ecuación no se puede resolver analíticamente debido a que la aproximación para los esfuerzos de Reynolds (32.16) no vale lejos de la pared, y no existe ninguna correlación simple para ellos. Por tanto, la solución en esta **región exterior**, que constituye la mayor parte de la capa límite, se debe obtener experimentalmente. Los experimentos, sin embargo, se simplifican notoriamente debido a que el perfil de velocidad en esta región (de forma más precisa, $U - U_e$) no depende de la viscosidad. Así,¹

$$U - U_e = F(u^*, \delta, y, U_e), \quad (32.22)$$

que en forma adimensional se escribe

$$\frac{U - U_e}{u^*} = f\left(\frac{y}{\delta}, \frac{U_e}{u^*}\right). \quad (32.23)$$

Como $U_e/u^* \gg 1$ [ecuación (32.6)] se puede eliminar la dependencia de $(U - U_e)/u^*$ con U_e/u^* en primera aproximación [de hecho, si se escribe (32.1)-(32.3) en términos de $U - U_e$, U_e desaparece del problema], quedando

$$\frac{U - U_e}{u^*} \simeq f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad \text{para } y = O(\delta), \quad (32.24)$$

que es la denominada **ley de defecto de velocidad**. Esta ley está ampliamente corroborada por los experimentos [ver figura 32.1(b)].

Resumiendo, la estructura de la capa límite turbulenta sobre una placa plana lisa se puede dividir en tres regiones diferenciadas:

- (a) Subcapa laminar o viscosa, donde la velocidad satisface la ley lineal

$$u^+ \simeq y^+, \quad y^+ < 5. \quad (32.25)$$

- (b) Subcapa intermedia o logarítmica,

$$u^+ \simeq \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad 5 < y^+ < 30. \quad (32.26)$$

- (c) Región exterior,

$$\frac{U - U_e}{u^*} \simeq f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad y^+ > 30. \quad (32.27)$$

¹Obsérvese que la densidad ρ no aparece en el problema (32.1)-(32.3).

Los valores límites de y^+ para los que son válidos los distintos perfiles de velocidad anteriores están sacados de resultados experimentales [ver figura 32.1(a)]. Obsérvese que el rango de validez del perfil lineal (32.25) se extiende mucho más allá de $y^+ \ll 1$. Obsérvese también que el espesor de las dos primeras subcapas, $y^+ \simeq 30$, constituye una fracción muy pequeña del total del espesor de la capa límite [como se puede apreciar en la figura 32.1(b)], puesto que es equivalente a $y/\delta = 30\nu/\delta u^*$, siendo $\delta u^*/\nu \gg 1$. Concretamente, este espesor suele constituir alrededor de un 10 por ciento del total. Esto no quiere decir que la solución en esas subcapas no sea importante, ya que, como se verá en la sección siguiente, permite obtener la fricción que la pared ejerce sobre el fluido (recuérdese que $\tau_p = \rho u^{*2}$) en función de la velocidad exterior. Más concretamente, el coeficiente de fricción C_f en función del número de Reynolds. De hecho, las leyes (32.25) y (32.26) son universales, puesto que no dependen de lo que ocurre fuera de la capa límite. Por ello también valen para el perfil de velocidad cerca de la pared en el flujo turbulento en un conducto. Sin embargo, este ejercicio de hallar el coeficiente de fricción a partir del perfil de velocidad sólo se hará para el caso del flujo turbulento en un conducto circular (sección siguiente), ya que es el caso más interesante desde un punto de vista ingenieril (para el cálculo del coeficiente de fricción en una placa plana, y otras capas límites, se puede consultar, por ejemplo, Schlichting y Gersten, 2000).

Para terminar esta sección se debe comentar que trabajos más recientes [ver, por ejemplo, Barenblatt (1996) y Pope (2000)] han demostrado que la ley logarítmica (32.26) se puede considerar como una aproximación de una expresión más general en la que u^+ depende, no sólo de y^+ , sino también del número de Reynolds $U_e\delta/\nu$. En particular, (32.26) constituye una envolvente aproximada de las distintas curvas $u^+(y^+)$ para los distintos números de Reynolds. La teoría subyacente a esta expresión más general proporciona, además, la constante de von Kármán de forma teórica como $\kappa = 2/(\sqrt{3}e)$. Sin embargo, como la expresión logarítmica universal (32.26) ha proporcionado buenos resultados desde un punto de vista ingenieril desde los tiempos de Prandtl y von Kármán, no se considerará aquí esa expresión más general, pues es mucho más complicada y, además, todavía no está exenta de controversia algunas de las hipótesis que utiliza.

32.2. Flujo turbulento en un conducto circular

En esta sección aplicaremos los conceptos y soluciones anteriores sobre la turbulencia en las proximidades de paredes sólidas para hallar una expresión

que nos relacione la fricción en un flujo turbulento en el interior de un conducto con el caudal que circula por él.

Suponiendo que el flujo medio es puramente axial, $\vec{V} = U\vec{e}_x$, donde x es la coordenada a lo largo del conducto, y siendo $\vec{v}' \equiv u'\vec{e}_x + v'\vec{e}_r + w'\vec{e}_\theta$ el vector de velocidad de fluctuación, las ecuaciones de Reynolds de continuidad y cantidad de movimiento en las direcciones \vec{e}_x y \vec{e}_r se escriben (por supuesto en coordenadas cilíndricas, suponiendo que el fluido es incompresible):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (32.28)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r \overline{u'v'} \right), \quad (32.29)$$

$$-\frac{\overline{w'^2}}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{v'^2}). \quad (32.30)$$

Como hay simetría azimutal, la primera ecuación nos dice que la velocidad media es función sólo de r , $U = U(r)$, hecho que se ha utilizado en las otras dos ecuaciones para anular idénticamente la convección de cantidad de movimiento. La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección radial puede integrarse con respecto a r :

$$P - P_p + \rho \overline{v'^2} - \rho \int_r^R \frac{\overline{w'^2} - \overline{v'^2}}{r} dr = 0, \quad (32.31)$$

donde P_p es la presión en $r = R$ (pared del conducto). Para un flujo turbulento completamente desarrollado, las fluctuaciones no dependen de la coordenada axial x , y de la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_p}{\partial x}. \quad (32.32)$$

Es decir, la variación de P con x es la misma para cualquier r . Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección axial e integrando con respecto a r una vez, se obtiene (multiplicando previamente dicha ecuación por r):

$$-\frac{1}{\rho} \frac{r^2}{2} \frac{\partial P_p}{\partial x} + \nu r \frac{\partial U}{\partial r} - r \overline{u'v'} = \text{constante} = 0, \quad (32.33)$$

siendo la constante de integración nula puesto que para $r = 0$ lo es el primer miembro de la ecuación.

Para utilizar los resultados de la sección anterior es conveniente usar la distancia a la pared, $y = R - r$, en vez de r . La ecuación (32.33) se escribe

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u'v'} + \frac{R-y}{2\rho} \frac{\partial P_p}{\partial x} = 0. \quad (32.34)$$

Particularizando esta ecuación en $y = 0$,

$$\frac{\tau_p}{\rho} \equiv \nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{R}{2\rho} \frac{\partial P_p}{\partial x} = u^{*2}, \quad (32.35)$$

donde $u^* \equiv \sqrt{\tau_p/\rho}$ es la velocidad característica de fluctuación asociada al esfuerzo de fricción en la pared. Sustituyendo en (32.34),

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{u'v'} = u^{*2} \left(\frac{R-y}{R} \right). \quad (32.36)$$

Para escribir esto en forma adimensional se define

$$\eta \equiv \frac{y}{R}, \quad u^+ \equiv \frac{U}{u^*}, \quad (32.37)$$

llegándose a

$$\frac{1}{Re^*} \frac{du^+}{d\eta} + \frac{\overline{u'v'}}{u^{*2}} = 1 - \eta, \quad (32.38)$$

donde

$$Re^* = \frac{u^* R}{\nu} \quad (32.39)$$

es el número de Reynolds asociado a la velocidad de fluctuación, que es mucho mayor que la unidad debido a que la longitud característica donde los efectos de la viscosidad molecular son importantes, ν/u^* , es mucho menor que el radio del conducto.

El hecho de que $Re^* \gg 1$ permite resolver la ecuación (32.38) en dos regiones bien diferenciadas, análogamente a como se hizo en la sección anterior para la capa límite: una capa delgada cerca de la pared, donde $\eta \sim \nu/u^* R \ll 1$ ($y \sim \nu/u^*$), y la región externa donde $\eta \sim 1$ ($y \sim R$). La primera de ellas incluye la subcapa viscosa y la región logarítmica intermedia considerada anteriormente, mientras que la segunda es análoga a la región externa gobernada por una ley de defecto de velocidad.

Para la capa próxima a la pared ($\eta \sim 1/Re^* \ll 1$), el segundo miembro de (32.38) se reduce a la unidad, en primera aproximación. Reescalando la variable η mediante

$$\eta^+ \equiv \eta Re^* = \frac{yu^*}{\nu} \quad , \quad (32.40)$$

que es de orden unidad en esta capa, la ecuación queda,

$$\frac{du^+}{d\eta^+} + \frac{\overline{u'v'}}{u^{*2}} = 1 \quad . \quad (32.41)$$

Si ahora se utiliza la hipótesis de longitud de mezcla de Prandtl [obsérvese que y tiene dirección opuesta a r , y por ello el cambio de signo en relación a (32.16)]

$$\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} = \kappa u^* y \frac{\partial U}{\partial y} = \kappa u^{*2} \eta^+ \frac{\partial u^+}{\partial \eta^+} \quad , \quad (32.42)$$

se tiene,

$$(1 + \kappa \eta^+) \frac{du^+}{d\eta^+} = 1 \quad , \quad (32.43)$$

que debe resolverse con la condición de contorno

$$u^+(\eta^+ = 0) = 0 \quad , \quad (32.44)$$

obteniéndose la ley logarítmica

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa \eta^+) \quad . \quad (32.45)$$

Para $\eta^+ \ll 1$ ($y \ll \nu/u^*$), esta expresión se reduce a la ley lineal de la subcapa laminar:

$$u^+ \equiv \frac{U}{u^*} \simeq \eta^+ \equiv \frac{yu^*}{\nu} \quad . \quad (32.46)$$

En la región externa, $\eta = O(1)$, la ecuación (32.38) se reduce a $\overline{u'v'}/u^{*2} \simeq 1 - \eta$, pero ahora la aproximación de Prandtl (32.42) no es válida. Sin embargo, análogamente a como se hizo en la sección anterior, el análisis dimensional nos dice que se debe verificar una ley de defecto de velocidad del tipo

$$\frac{U - U_o}{u^*} = F(\eta) \quad , \quad (32.47)$$

donde U_o es la velocidad en el eje (que es la máxima). Esta ley tiene que, por un lado, satisfacer la condición $F(\eta = 1) = 0$ y, por otra parte, acoplar con la solución (32.45) para $\eta \ll 1$, cuando en (32.45) se hace $\eta^+ \gg 1$ (acople

asintótico de las dos soluciones). Esta última condición nos dice que, para $\eta \rightarrow 0$,

$$F(\eta) + \frac{U_o}{u^*} \rightarrow \frac{1}{\kappa} \ln \kappa \eta^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + \frac{1}{\kappa} \ln Re^* + \frac{1}{\kappa} \ln \kappa \quad . \quad (32.48)$$

Es decir,

$$F(\eta) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \ln \eta + B, \quad (32.49)$$

con

$$\frac{U_o}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln Re^* + A, \quad (32.50)$$

donde A y B son constantes arbitrarias, pero que verifican $A + B = (\ln \kappa)/\kappa$. Estas constantes, al igual que κ ($\simeq 0,41$), se determinan experimentalmente. Se encuentra que $B \simeq 5,5$ [obsérvese que (32.49) es análoga a la ley logarítmica (32.26); la pequeña diferencia en la constante se debe a que a medida que nos alejamos de la pared el flujo en un conducto se parece menos al flujo sobre una placa plana], de donde $A \simeq 7,7$. Los experimentos demuestran que la ley lineal (32.46) vale para $\eta^+ < 5$, de forma análoga a la capa límite sobre una placa plana. La ley logarítmica (32.45), que incluye a la anterior, es aproximadamente válida para $\eta^+ < 70$, mientras que para $\eta^+ > 70$ la ley de defecto de velocidad se puede aproximar por $u^+ \simeq 11,5 \eta^{1/10}$ [ver figura 32.2(a)].

En realidad, para el propósito de hallar una relación entre la fricción y el caudal, no interesa tanto los detalles del perfil de velocidad como la relación (32.50). De hecho, debido a que el perfil de velocidad turbulento resultante de las expresiones anteriores es mucho más plano que el correspondiente al flujo laminar de Poiseuille (ver figura 32.3), se puede aproximar la velocidad media V por la velocidad máxima en el eje U_o [la diferencia se absorberá en las constantes empíricas de las expresiones anteriores], de forma que el caudal viene dado por

$$Q = \pi R^2 V \simeq \pi R^2 U_o. \quad (32.51)$$

Definiendo, como de costumbre, el número de Reynolds basado en la velocidad media y el diámetro,

$$Re = \frac{2RV}{\nu} \simeq \frac{2RU_o}{\nu} = Re^* \frac{2U_o}{u^*}, \quad (32.52)$$

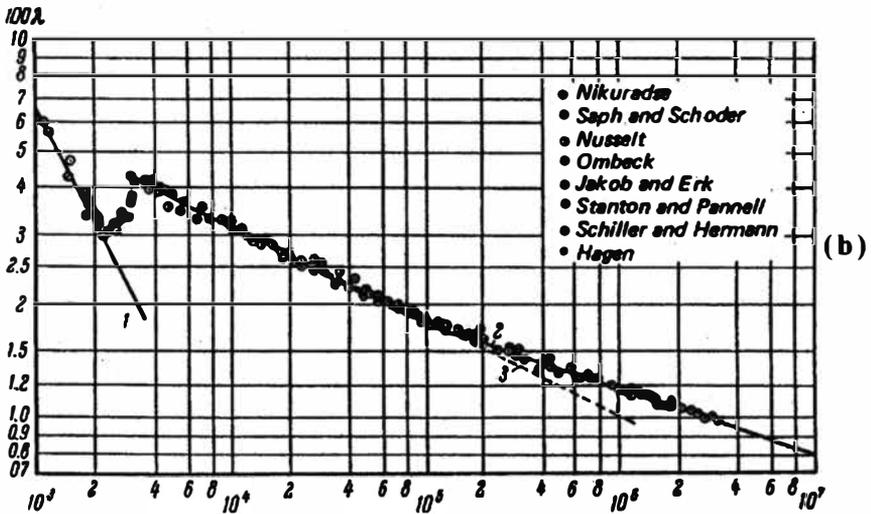
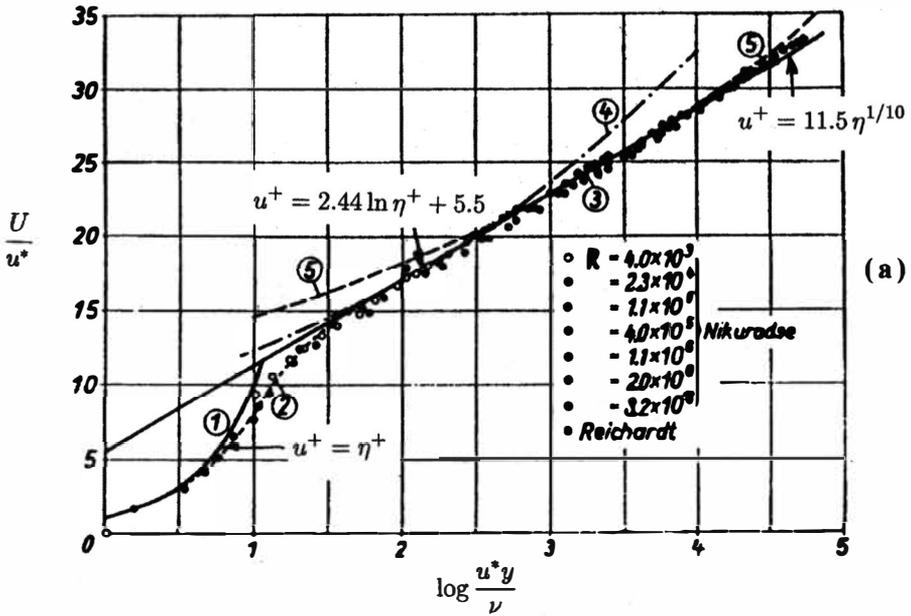


Figura 32.2: (a): Distribución de velocidad en un conducto de pared lisa y su comparación con medidas experimentales de Nikuradse y Reichardt. Téngase en cuenta que la abscisa es el logaritmo decimal de η^+ (figura tomada de Schlichting, 1987). (b): Coeficiente de fricción λ en función del número de Reynolds. La curva 1 es la correspondiente al flujo laminar, $\lambda = 64/Re$; la curva 2 es la ecuación (32.57) y la 3 corresponde a la aproximación de Blasius (32.59) (figura tomada de Monin y Yaglom, 1971).

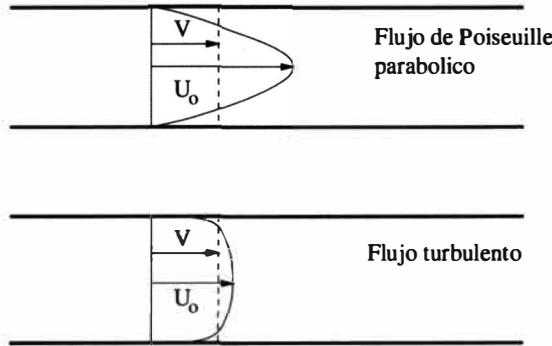


Figura 32.3: Comparación entre el perfil de velocidad laminar y turbulento en un conducto circular por el que circula el mismo caudal (misma velocidad media V).

así como el coeficiente de fricción

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho V^2} \approx \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_o^2} = 2 \left(\frac{u^*}{U_o} \right)^2 \quad (32.53)$$

la expresión (32.50) proporciona la siguiente relación entre C_f y Re :

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = \frac{1}{\kappa} \ln Re + \frac{1}{\kappa} \ln \sqrt{\frac{C_f}{2}} + A - \ln 2 \quad (32.54)$$

La constante libre A no coincide con el valor dado anteriormente ya que U_o no es exactamente igual a V . Experimentalmente se encuentra que para un flujo turbulento completamente desarrollado en un conducto circular de pared lisa se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} \approx 1,76 \ln(Re\sqrt{C_f}) - 0,7. \quad (32.55)$$

Normalmente se suele utilizar, en vez de C_f , el denominado **factor de fricción de Fanning** (también llamado de **Darcy-Weisbach** en la literatura *hidráulica*)

$$\lambda \equiv 4C_f = \frac{8\tau_p}{\rho V^2}, \quad (32.56)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 0,88 \ln(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8. \quad (32.57)$$

Esta expresión permite calcular, para cada Re , la fricción turbulenta y, por tanto, la caída de presión en el conducto debida a la fricción [ecuación (32.35) o (15.7)]

$$\Delta P_p \pi R^2 = 2\pi RL\tau_p \quad , \quad \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda L}{R} . \quad (32.58)$$

Así, dado un caudal y un diámetro, que definen Re , las expresiones (32.57) y (32.58) proporcionan el incremento de presión necesario (en general presión reducida) para mover ese caudal.

La expresión (32.57), junto con la correspondiente para un flujo laminar, $\lambda = 64/Re$ [ecuación (15.11)] y resultados experimentales, se representan en la figura 32.2(b). La expresión laminar vale hasta el número de Reynolds crítico (aproximadamente 2300; ver capítulo anterior). Desde $Re \simeq 2300$ hasta Re aproximadamente igual a 4000 no existe ninguna expresión analítica, y los valores del coeficiente de fricción λ fluctúan bastante. A partir de $Re \simeq 4000$, la expresión (32.57) es válida para un conducto de pared *lisa* (ver sección siguiente para una definición precisa de pared hidrodinámicamente lisa). Esta expresión se puede simplificar en ciertos rangos del número de Reynolds mediante fórmulas aproximadas semiempíricas. Por ejemplo, Blasius (1911) introdujo la simplificación

$$\lambda \simeq 0,316Re^{-1/4} , \quad 4000 < Re < 10^5 , \quad (32.59)$$

que también se representa en la figura 32.2(b). Otra correlación simplificada debida a White (1974), que tiene un rango de validez mayor [prácticamente la misma que la ecuación (32.57)], es

$$\lambda \simeq 1,02(\log Re)^{-2,5} , \quad (32.60)$$

donde \log representa el logaritmo decimal.

32.3. Efecto de la rugosidad de la pared

La rugosidad de la pared del conducto apenas afecta a la fricción cuando el flujo es laminar (flujo de Poiseuille). Sin embargo, cuando el flujo es turbulento, su efecto es muy importante: las rugosidades promueven la turbulencia y, sobre todo, pueden llegar a *destruir* la subcapa laminar, cambiando completamente el perfil de velocidad y, por tanto, la fricción.

Es evidente que las rugosidades aumentan la fricción en relación a un conducto liso. Pero la cuantificación de este efecto no se puede hacer de una forma analítica como se ha hecho antes para un conducto de pared lisa, teniéndose que recurrir a la experimentación. Por supuesto, esta experimentación se hace guiada por el análisis dimensional y la semejanza física. En relación al

problema considerado anteriormente del conducto liso, aparece una longitud característica adicional que es la altura media de las rugosidades, ϵ . Así, el problema tiene tres longitudes características: el espesor de la subcapa laminar o distancia a la pared hasta donde se deja *sentir* la viscosidad molecular, ν/u^* ; el radio del conducto, R , y la altura media de las rugosidades, ϵ . En la solución cerca de la pared el radio del conducto no cuenta y se tiene

$$U = U(\nu, u^*, \epsilon, y), \quad (32.61)$$

que mediante análisis dimensional se simplifica a

$$u^+ \equiv \frac{U}{u^*} = f\left(\frac{yu^*}{\nu}, \frac{\epsilon u^*}{\nu}\right) \equiv f(\eta^+, \epsilon^+). \quad (32.62)$$

Es decir, además de la variable adimensional η^+ que aparecía en la solución para un conducto liso, se tiene que u^+ depende de la rugosidad a través del parámetro adimensional $\epsilon^+ \equiv \epsilon u^*/\nu$. Este simple análisis dimensional nos proporciona un criterio para saber cuando un conducto se puede considerar *hidráulicamente liso*: el efecto de la rugosidad es despreciable cuando

$$\epsilon^+ = \frac{u^* \epsilon}{\nu} \ll 1. \quad (32.63)$$

En otras palabras, el conducto (la superficie sólida en general) se puede considerar liso a efectos hidrodinámicos cuando la altura de las rugosidades es mucho menor que el espesor de la subcapa laminar. Cuando esto ocurre, la viscosidad se encarga de disipar cualquier perturbación del movimiento originada por la rugosidad, no dejándose sentir su efecto en el resto del flujo.

Aunque analíticamente no se puede conocer la expresión (32.62), lo que sí se sabe es que debe acoplarse con la ley de defecto de la velocidad (27.49) para $\eta^+ \gg 1$, ya que ésta no depende de la rugosidad si $\epsilon/R \ll 1$, lo cual ocurre siempre (en caso contrario no sería un conducto de sección circular). Es decir, para $\eta^+ \gg 1$, se tiene

$$u^+ = \frac{U}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \eta^+ + f_r(\epsilon^+), \quad (32.64)$$

donde f_r es una función que tiende asintóticamente a la constante B definida en (32.49) (que es aproximadamente igual a 5,5) para $\epsilon^+ \rightarrow 0$. Esta función se determina experimentalmente, siendo la única información adicional requerida para hallar la fricción en un conducto rugoso en relación a uno liso.² Se encuentra que $f_r \simeq 5,5$ para $\epsilon^+ < 5$, aproximadamente. Es decir, la aproximación

²El alumno podrá apreciar con este ejemplo la potencia del análisis dimensional. Un problema aparentemente tan complejo como es el cálculo de la fricción en un conducto

de tubo liso va mucho más allá de la condición encontrada dimensionalmente, $\epsilon^+ \ll 1$. Por ello se suele escribir

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \eta^+ + B - \Delta B \quad , \quad (32.65)$$

donde ΔB , que es una función de ϵ^+ , mide el efecto de la rugosidad sobre la velocidad, valiendo cero para $\epsilon^+ < 5$, aproximadamente. En el límite opuesto de un conducto *completamente rugoso*, $\epsilon^+ \gg 1$, los datos experimentales se ajustan a la expresión

$$\Delta B \simeq \frac{1}{\kappa} \ln \epsilon^+ - 3,5 \quad , \quad (32.66)$$

que aproximadamente es válida para $\epsilon^+ > 70$. Para valores intermedios de ϵ^+ ($5 < \epsilon^+ < 70$), los datos experimentales están algo más dispersos.

Una vez conocido el perfil de velocidad, por un procedimiento análogo al descrito anteriormente para un conducto liso, se puede hallar una expresión para el coeficiente de fricción λ , que ahora dependerá del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, ϵ/D . Una expresión que recoge los datos experimentales tanto para conductos lisos como rugosos dada por Colebrook y corregida por White es

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2,0 \log \left[\frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right] \quad . \quad (32.67)$$

Normalmente toda la información $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$, tanto para flujo laminar como para flujo turbulento en conductos lisos y rugosos, se suele dar en forma de un diagrama denominado **diagrama de Moody** (1944), que se representa en la figura 32.4.

Una particularidad importante de la relación $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$ es que deja de ser función del número de Reynolds para conductos completamente rugosos ($\epsilon^+ = \epsilon u^*/\nu > 70$, aproximadamente). De acuerdo con la expresión (32.67), esto ocurre para ϵ/D mayor que, aproximadamente, $9,3/Re\sqrt{\lambda}$. El valor de Re , para cada valor de la rugosidad relativa ϵ/D , a partir del cual λ sólo depende de esta última se representa en la figura 32.4 mediante una línea discontinua. En estos casos los cálculos se simplifican muchísimo al no depender el coeficiente de fricción del número de Reynolds (ver lección siguiente).

Para terminar, es conveniente señalar que el valor del factor de fricción dado por el diagrama de Moody se suele también utilizar de forma aproximada

rugoso se reduce (por supuesto una vez introducidas las hipótesis sobre los esfuerzos de Reynolds de Prandtl y von Kármán) al cálculo experimental de una constante y una única función que depende sólo de la altura media de las rugosidades.

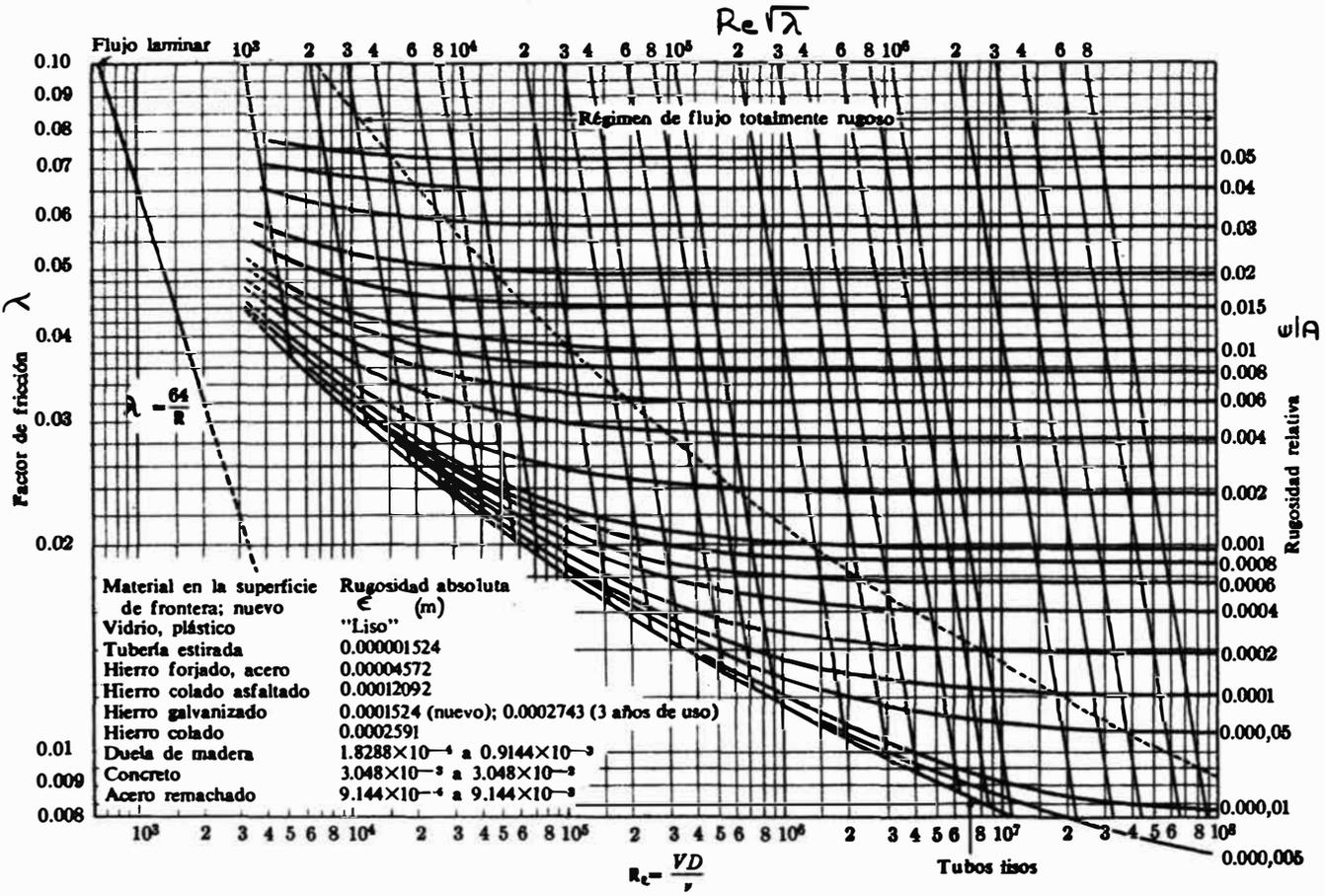


Figura 32.4: Diagrama de Moody para $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$. (Tomado de Dally y Hartleman, 1975.)

en los casos en que el conducto no sea circular, siempre que se utilice, en el lugar del diámetro D del conducto circular, un diámetro equivalente obtenido en función del denominado **radio hidráulico**, definido como el cociente entre la sección A del conducto dividida por el perímetro *mojado* Π :

$$r_h \equiv \frac{A}{\Pi}. \quad (32.68)$$

Para un conducto circular, $r_h = \pi D^2 / 4\pi D = D/4$. Así, se utiliza el diagrama de Moody sustituyendo D (en el número de Reynolds y en la rugosidad relativa) por $4r_h$. En cuanto a la velocidad que aparece en el número de Reynolds, se toma la velocidad media, Q/A .

Referencias.

- G.I. BARENBLATT, 1996. Capítulo 10.
- J.W. DAILY y D.R.F. HARLEMAN, 1975. Capítulo 13.
- J.O. HINZE, 1975. Capítulo 7.
- A.S. MONIN y A.M. YAGLOM, 1971. Capítulo 3.
- S.B. POPE, 2000. Capítulo 7.
- S.M. RICHARDSON, 1989. Capítulo 12.
- H. SCHLICHTING, 1987. Capítulos XX y XXI.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulos 6 y 7.

Capítulo 33

Flujo turbulento en conductos

33.1. Ecuaciones, condiciones iniciales y de contorno

En esta lección se considerará el movimiento turbulento, tanto de gases como de líquidos, en conductos de sección lentamente variable, teniendo en cuenta la fricción en la pared y el posible intercambio de calor del fluido con la pared. Para derivar las ecuaciones se seguirá un procedimiento análogo al utilizado en la lección 23, aplicando los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía a un volumen de control como el de la figura 23.1, pero teniendo en cuenta los resultados sobre la fricción turbulenta derivados en la lección anterior y el flujo de calor, para el que se utilizará la analogía de Reynolds.

En primer lugar se supondrá que no hay variaciones bruscas de la sección ni de la dirección a lo largo del conducto (el efecto de cambios bruscos en la sección y en la dirección se tendrá en cuenta al final de esta lección). Es decir, si r_h es el radio hidráulico del conducto [ecuación (27.68)], el cual dependerá, en general, de la coordenada axial a lo largo del conducto x , se supondrá que

$$\left| \frac{dr_h}{dx} \right| \ll 1 \quad (r_h \ll L), \quad r_h \ll R_c, \quad (33.1)$$

donde L y R_c son una longitud axial y un radio de curvatura característicos.

De la ecuación de continuidad, la primera condición (33.1) implica que el movimiento en el conducto es aproximadamente unidireccional:

$$V_t \sim V \frac{r_h}{L} \ll V, \quad (33.2)$$

donde V y V_T son velocidades características en las direcciones axial y transversal al eje del conducto, respectivamente. Por otro lado, se supondrá que el flujo es turbulento completamente desarrollado y, de acuerdo con la sección 32.2 (figura 32.3), en primera aproximación se puede suponer que el perfil de velocidad en cada sección es prácticamente plano. Es decir, la velocidad turbulenta media, $\bar{v} \simeq v\bar{e}_x$,¹ será función sólo de la coordenada axial x y del tiempo t , $v \simeq v(x, t)$. El efecto de la fricción queda así relegado a la pared, y se tendrá en cuenta de forma global utilizando las expresiones de la lección anterior. Para ello se definirá un esfuerzo de fricción medio τ_o en cada sección

$$\tau_o \equiv \frac{r_h}{A} \int_{\Pi} \tau_p dl, \quad (33.3)$$

donde $\Pi(x)$ y $A(x)$ son el perímetro y la sección; $\tau_o(x, t)$ se calculará mediante el coeficiente de fricción λ ,

$$\tau_o = \frac{1}{8} \lambda \rho v^2, \quad (33.4)$$

donde λ es una función del número de Reynolds, $Re = 4vr_h/\nu$, y de la rugosidad relativa, $\epsilon/4r_h$, representada en la figura 32.4.

En cuanto a la presión media, también se considerará que es una función de x y de t solamente, $p = p(x, t)$, puesto que la hipótesis (33.1) implica, como ya se vió en la sección 23.1, que las variaciones transversales de la presión son mucho más pequeñas que las longitudinales a lo largo del conducto: $\Delta_T p / \Delta_L p \sim (r_h/L)^2 \ll 1$. (Lo mismo ocurre para el potencial de fuerzas másicas, por lo que en la expresión anterior se puede sustituir p por la presión reducida; ver sección 23.1.)

Por último, se supondrá también que la temperatura media es sólo función de x y de t , $T = T(x, t)$. La justificación de esta hipótesis es análoga a la de suponer que la velocidad media es prácticamente constante en cada sección: la turbulencia es muy efectiva transportando calor, como lo es transportando cantidad de movimiento y masa, por lo que el perfil de temperatura en cada sección es prácticamente plano, excepto muy cerca de la pared, donde la temperatura varía desde aproximadamente el valor medio de cada sección hasta la temperatura de la pared. Esta variación se tendrá en cuenta de forma, *global* análogamente a como se hará con la fricción, mediante el flujo de calor q_s intercambiado entre la pared y el fluido, el cual se modelará por la analogía de Reynolds.

¹Como en lo que sigue no aparecerán magnitudes de fluctuación, no se utilizarán letras mayúsculas para designar los valores medios.

En definitiva, se supondrá que el flujo turbulento completamente desarrollado en un conducto de sección y curvatura lentamente variables está definido por las magnitudes turbulentas medias, no sólo en relación a las fluctuaciones turbulentas, sino también en cada sección,

$$v(x, t), \quad p(x, t), \quad T(x, t),^2 \tag{33.5}$$

para las cuales se derivarán ecuaciones y se fijarán condiciones iniciales y de contorno a continuación.

33.1.1. Ecuaciones del movimiento

Aplicando el principio de conservación de la masa al volumen de control de la figura 33.1, despreciando términos de orden $(dx)^2$ y dividiendo por dx se tiene

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0. \tag{33.6}$$

Análogamente, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x se escribe

$$A \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 A)}{\partial x} = -A \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_o \frac{A}{r_h} - \rho \frac{\partial U}{\partial x} A, \tag{33.7}$$

donde se ha supuesto que las fuerzas másicas derivan del potencial U y se ha utilizado el esfuerzo de fricción medio (33.3). Para obtener el término de fuerzas de presión se ha tenido en cuenta también la fuerza de presión que en la dirección x las paredes ejercen sobre el fluido, la cual, despreciando términos de orden $(dx)^2$, es igual a $p(\partial A/\partial x)dx$. Utilizando la ecuación de continuidad y (33.4), la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{8r_h}, \tag{33.8}$$

donde el factor de fricción

$$\lambda = \lambda \left(\frac{4r_h v}{\nu}, \frac{\epsilon}{4r_h} \right) \tag{33.9}$$

viene dado por la figura 32.4. Se observa que la única diferencia entre esta ecuación y la correspondiente a un fluido ideal es el término de fricción (diferencia formal; conceptualmente son muy distintas puesto que en un fluido

²Como consecuencia de que p y T sólo dependen de x y t , $\rho = \rho(x, t)$, de acuerdo con la ecuación de estado.

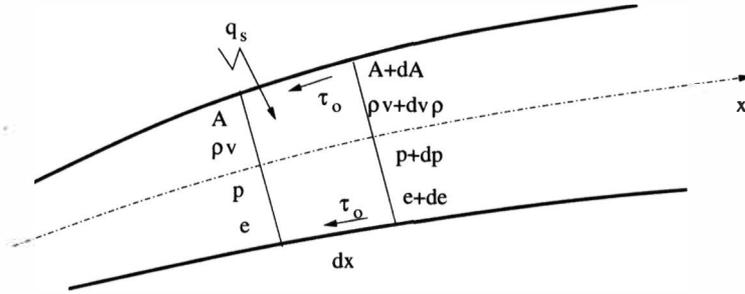


Figura 33.1: Volumen diferencial de control.

ideal el primer miembro es igual a cero a lo largo de cada línea de corriente y, puesto que todas las líneas de corriente parten de la misma región uniforme, se cumple para toda la sección; aquí es un promedio aproximado en cada sección). Si comparamos el término de fricción con el convectivo, el primero será importante si $\lambda L/r_h \geq O(1)$. Para $\lambda L/r_h \ll 1$, el término de fricción desaparece y se tiene la misma ecuación que para un fluido ideal.

La ecuación de la energía total aplicada al volumen de control de la figura 33.1, dividiendo por dx , se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v A \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] = -\frac{\partial(pvA)}{\partial x} - \rho \frac{\partial U}{\partial x} vA + q_s \frac{A}{r_h} + q_r, \tag{33.10}$$

donde q_s es el calor intercambiado entre el fluido y la pared por unidad de área y q_r es el calor liberado por las reacciones químicas o absorbido por radiación, por *unidad de longitud* del conducto (por supuesto, son valores promedios).³ Esta ecuación se puede escribir en términos de la entalpía, desapareciendo así el término de trabajo de las fuerzas de presión, pero apareciendo un nuevo término de variación de p con el tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v A \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] = A \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{\partial U}{\partial x} vA + q_s \frac{A}{r_h} + q_r \tag{33.11}$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad y dividiendo por A , estas dos ecuaciones se escriben

³Obsérvese que las fuerzas de fricción que la pared ejerce sobre el fluido no realizan trabajo alguno ya que la velocidad es cero en la pared.

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{1}{A} \frac{\partial(pvA)}{\partial x} - \rho v \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{q_s}{r_h} + \frac{q_r}{A} \quad , \quad (33.12)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{v^2}{2} + U \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{q_s}{r_h} + \frac{q_r}{A} . \quad (33.13)$$

Desde un punto de vista práctico la última ecuación es mucho más útil. De hecho, en el caso bastante frecuente de un flujo estacionario y adiabático, la cantidad $h + v^2/2 + U$, que en el flujo de un gas es aproximadamente igual a la entalpía de remanso, $h + v^2/2$, se conserva.

En algunas ocasiones es interesante utilizar la ecuación de la entropía. Restándole a la ecuación (33.13) la energía mecánica, que se obtiene multiplicando la ecuación de cantidad de movimiento (33.7) por v , y teniendo en cuenta que $dh = Tds + dp/\rho$, se llega a:

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{\lambda v^3}{8r_h} + \frac{q_s}{\rho r_h} + \frac{q_r}{\rho A} \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) . \quad (33.14)$$

Obviamente, la entropía aumenta solamente como consecuencia de la fricción (disipación viscosa) y de la adición de calor. Normalmente, el efecto de la disipación viscosa es muy pequeño. Comparando este término con el de convección de entropía, para un líquido ($T\Delta s \simeq c\Delta T$), se tiene que el parámetro que mide su importancia relativa es

$$\frac{\lambda v^2 L}{r_h c (\Delta T)} . \quad (33.15)$$

Dado que la capacidad calorífica c de los líquidos suele ser muy alta, sólo en condiciones muy extremas de velocidades muy altas la disipación viscosa tendría alguna importancia para los líquidos. En cuanto a los gases, la importancia relativa de la disipación viscosa viene dada por

$$\frac{\lambda L}{r_h} M^2 \frac{T}{\Delta T} . \quad (33.16)$$

Así, la disipación viscosa será despreciable si el número de Mach satisface la condición

$$M^2 \ll \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{\lambda L}{r_h} \right)^{-1} . \quad (33.17)$$

Por tanto, puede ocurrir (como de hecho ocurre en muchas ocasiones) que la fricción sea importante en la ecuación de cantidad de movimiento [$\lambda L/r_h >$

$O(1)$], pero su efecto en la ecuación de la energía (disipación viscosa) sea despreciable al no ser el número de Mach suficientemente alto.

Para evaluar el flujo de calor entre la pared del conducto y el fluido se utilizará la analogía de Reynolds:

$$Sta \equiv \frac{q_s}{\rho v (h_p - h - v^2/2)} = \frac{C_f}{2} \equiv \frac{1}{2} \frac{\tau_o}{\rho v^2/2} = \frac{\lambda}{8}. \quad (33.18)$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta el efecto de la compresibilidad y de la disipación viscosa mediante la redefinición del número de Stanton en términos de la entalpía de remanso (en realidad, de la temperatura adiabática de la pared; ver sección 28.4), con un factor de recuperación igual a la unidad (puesto que el número de Prandtl turbulento es aproximadamente igual a uno). Para un líquido, estos efectos son prácticamente despreciables:

$$q_s = \frac{\lambda \rho v c}{8} \left[T_p - T - \frac{v^2}{2c} \right] \simeq \frac{\lambda \rho v c}{8} (T_p - T), \quad (33.19)$$

ya que v^2/cT suele ser muy pequeño, como se comentó anteriormente. Para un gas ideal se tiene:

$$q_s = \frac{\lambda \rho v c_p T}{8} \left[\frac{T_p}{T} - 1 - \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right]; \quad (33.20)$$

es decir, los efectos de la disipación viscosa y la compresibilidad son despreciables si $M^2 \ll 1$. De lo anterior se desprende que existirá un flujo neto de calor desde la pared al fluido si $T_p > T + (\gamma - 1)M^2T/2$; y viceversa, habrá un flujo de calor desde el fluido a la pared si $T_p < T + (\gamma - 1)M^2T/2$. Esto quiere decir que, debido a los efectos de compresibilidad y de disipación viscosa, el gas se calienta cerca de la pared y el flujo de calor puede ser desde el fluido a la pared incluso si $T_p > T$ [siempre que $T_p < T + \gamma(\gamma - 1)M^2T/2$].

En cualquiera de las situaciones anteriores, la analogía de Reynolds permite calcular q_s en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa a partir del coeficiente de fricción. Como se comentó en la sección 31.4.2, esta analogía es más *fiable* a medida que la pared del conducto es más rugosa, debido a que la subcapa laminar *falsea* la analogía, siendo más precisa cuando λ sólo depende de la rugosidad relativa.

33.1.2. Condiciones iniciales y de contorno

De acuerdo con las ecuaciones anteriores [por ejemplo (33.6), (33.8) y (33.13)], en general se necesitan tres condiciones iniciales y tres condiciones de contorno para su resolución. Por ejemplo,

$$v(x, 0), \quad \rho(x, 0), \quad T(x, 0); \quad (33.21)$$

$$v(0, t), \quad \rho(0, t), \quad T(0, t). \quad (33.22)$$

Sin embargo, la forma de dar estas condiciones varían mucho de unas situaciones a otras.

Así, para un líquido ($\rho = \text{constante}$), desaparece una condición inicial, ya que la ecuación de continuidad (33.6) se escribe

$$\rho v A = G(t) \quad , \quad (33.23)$$

donde el gasto G no depende de x . Como

$$v(x, t) = \frac{G(t)}{\rho A(x)} \quad , \quad (33.24)$$

dado $A(x)$ y el valor de v en un punto para cada instante, por ejemplo $v(0, t)$, automáticamente se conoce $v(x, t)$ para todo x y t . Por tanto, tampoco hace falta condición inicial para la velocidad, y sólo hace falta una condición inicial para la temperatura, $T(x, 0)$, que permitirá integrar la ecuación de la energía. En cuanto a las condiciones de contorno, no se suele especificar $v(0, t)$, sino dos condiciones de contorno para la presión, además de una para la temperatura: $p(0, t)$, $p(L, t)$ y $T(0, t)$.

Para los gases, en general hacen falta tres condiciones iniciales y tres condiciones de contorno. En la situación bastante habitual en la que el flujo en el conducto es consecuencia de la descarga de un depósito, $p(0, t)$ y $T(0, t)$ son en principio desconocidas y se deben relacionar con las magnitudes de remanso en el depósito. Por otro lado, en vez de $v(0, t)$, que tampoco se conoce en principio, se especifica $p(L, t)$, que es igual a la presión de descarga si el flujo es subsónico. Este problema se considerará con detalle más adelante.

33.2. Flujo casi estacionario de líquidos

Este es el caso en que las ecuaciones anteriores son más sencillas. Para que el movimiento sea casi estacionario se debe verificar que el número de Strouhal sea muy pequeño:

$$S_t = \frac{L}{vt_o} \ll 1 \quad , \quad (33.25)$$

lo cual asegura que los efectos no estacionarios son pequeños frente a los convectivos. Si la fricción es muy importante, mucho más que la convección de

cantidad de movimiento, es decir, si $\lambda L/r_h \gg 1$, la condición anterior se *relaja* a

$$S_t \ll \frac{\lambda L}{r_h} (\gg 1) \quad , \quad (33.26)$$

ya que es suficiente con que el término no estacionario sea despreciable frente al término de fricción.

Las ecuaciones serían [(33.6), (33.8) y (33.14)]:

$$vA = \frac{G}{\rho} = Q \quad , \quad (33.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = -\frac{\lambda v^2}{8r_h} \quad , \quad (33.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{8r_h} (T_p - T) + \frac{q_r}{\rho cvA} \quad , \quad (33.29)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\rho = \text{constante}$, que $Tds = cdT$, se ha utilizado la analogía de Reynolds y se ha despreciado la disipación viscosa. Sustituyendo (33.27) en (33.28) e integrando, teniendo en cuenta que Q es constante (a lo sumo depende paraméricamente del tiempo a través de las condiciones de contorno) se tiene que

$$\frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^2(0)} \right) + \frac{p - p(0)}{\rho} + U - U(0) = -\frac{Q^2}{8} \int_0^x \frac{\lambda}{r_h A^2} dx \quad . \quad (33.30)$$

Para un conducto de sección y rugosidad constantes, la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{p - p(0)}{\rho} + U - U(0) = -\frac{\lambda Q^2}{8r_h A^2} x \quad , \quad (33.31)$$

de forma que el caudal para un conducto de longitud L viene dado por

$$Q^2 = \frac{8r_h A^2}{\rho \lambda L} [p(0) + \rho U(0) - p(L) - \rho U(L)] \quad . \quad (33.32)$$

Como λ depende del número de Reynolds y, por tanto, de Q (para un r_h y un A dados), la ecuación anterior se suele resolver iterativamente utilizando el diagrama de la figura 32.4: dadas la diferencia de presión reducida entre la entrada y la salida del conducto y la geometría del mismo, se supone un caudal y se calcula λ ; mediante la ecuación anterior se obtiene un nuevo caudal que

se utiliza para recalculer λ , y así sucesivamente hasta que el proceso converja. En el límite en el que la pared del conducto sea completamente rugosa, λ es sólo función de la rugosidad relativa, y la ecuación anterior proporciona explícitamente el caudal.

En cuanto a la temperatura, suponiendo el caso más simple en el que $q_r = 0$, y que tanto T_p como λ son constantes, viene dada por

$$T = T_p + [T(0) - T_p] \exp[-\lambda x / 8r_h] \quad , \quad (33.33)$$

que nos dice que la temperatura del líquido se aproxima a la de la pared exponencialmente en una longitud del orden de r_h/λ .

33.3. Movimiento casi estacionario de un gas en un conducto aislado térmicamente

Los flujos de gases en conductos son mucho más complicados de resolver que los de líquidos. Incluso en el límite casi estacionario, las ecuaciones son lo suficientemente complejas como para que no se puedan resolver analíticamente. Por ello, se considerarán los efectos de la fricción y de la adición de calor por separado en un conducto de sección constante (el efecto de la variación de la sección del conducto ya se consideró en la lección 23 para un gas ideal).

En el supuesto en que el flujo sea casi estacionario y adiabático ($q_s = q_r = 0$), y la sección del conducto sea constante, las ecuaciones (33.6), (33.8) y (33.13) se escriben

$$\frac{\partial \rho v A}{\partial x} = 0 \quad , \quad (33.34)$$

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{8r_h} \quad , \quad (33.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{v^2}{2} + U \right) = 0 \quad . \quad (33.36)$$

Normalmente, las fuerzas másicas son despreciables en el flujo de gases, por lo que estas ecuaciones, integrando la primera y última, se reducen a

$$\rho v = G/A = \text{constante} \quad , \quad (33.37)$$

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{8r_h} \quad , \quad (33.38)$$

$$h + \frac{v^2}{2} = h_o = \text{constante}; \quad (33.39)$$

es decir, tanto el gasto como la entalpía de remanso se conservan a lo largo del conducto.

La ecuación (33.38) también es posible integrarla analíticamente. Para ello suponemos que el gas es ideal. Teniendo en cuenta que $h = \gamma p / (\gamma - 1) \rho$, derivando (33.39) se tiene

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{\partial v^2 / 2}{\partial x} = 0 \quad (33.40)$$

Eliminando $\partial \rho / \partial x$ mediante la ecuación de continuidad, sustituyendo en (33.38) y utilizando la definición del número de Mach, se llega a

$$\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \frac{\partial v^2 / 2}{\partial x} = - \frac{\lambda v^2}{8r_h} \quad (33.41)$$

Por otro lado, de (33.39), M^2 es sólo función de v^2 :

$$M^2 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{\gamma R_g T} = \frac{v^2}{(\gamma - 1)(h_o - v^2/2)} \quad (33.42)$$

Así, se tiene que

$$\frac{1}{\gamma} \left[1 - \frac{(\gamma - 1)(h_o - v^2/2)}{v^2} \right] \frac{\partial v^2 / 2}{\partial x} = - \frac{\lambda v^2}{8r_h} \quad (33.43)$$

Esta ecuación se integra fácilmente:

$$\ln \frac{v^2}{v(0)^2} + \frac{2(\gamma - 1)h_o}{(\gamma + 1)} \left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v(0)^2} \right] = - \frac{\gamma}{2(\gamma + 1)} \int_o^x \frac{\lambda}{r_h} dx, \quad (33.44)$$

siendo el segundo miembro lineal con x cuando λ es independiente del número de Reynolds. Esta ecuación, junto con $\rho v = G/A$ y $h + v^2/2 = \gamma p / (\gamma - 1) \rho + v^2/2 = h_o$, determinan $v(x)$, $\rho(x)$ y $p(x)$ en función de $v(0)$, h_o y G y de las condiciones $\rho(0)$ y $p(0)$. La ecuación de estado proporcionará $T(x)$.

La ecuación (33.41), junto con la ecuación de la entropía,

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\lambda v^2}{8r_h T}, \quad (33.45)$$

permiten describir cualitativamente el movimiento en función del número de Mach. Para ello se utiliza (33.41) y el cociente entre (33.45) y (33.41),

$$\frac{\partial s}{\partial v^2/2} = -\frac{1}{\gamma T} \frac{M^2 - 1}{M^2}, \quad (33.46)$$

que expresa la variación de la entropía con la energía cinética (por unidad de masa). De acuerdo con (33.41), para un flujo subsónico, es decir, un flujo con $M(0) < 1$, la velocidad aumenta a lo largo del conducto y, de acuerdo con (33.42), también lo hace el número de Mach. La ecuación (33.46) dice que, obviamente, la entropía aumenta. A medida que la longitud del conducto aumenta, así lo hace el número de Mach a la salida, hasta que $M(L) = 1$, el cual no puede ser superado ya que un número de Mach mayor que la unidad implicaría, de acuerdo con (33.46), una disminución de la entropía. A partir de aquí el flujo en el conducto se *bloquea* y un aumento de su longitud no cambiaría la condición $M(L) = 1$, con lo que las condiciones en $x = 0$ tendrían que cambiar para adaptarse a la nueva longitud, lo cual generalmente impide que la condición de contorno de la presión a la salida del conducto se satisfaga, habiendo una expansión posterior fuera del conducto (expansión Prandtl-Meyer) donde la presión se adapta a la ambiente.

Por el contrario, si el flujo es supersónico [$M(0) > 1$], tanto la velocidad como el número de Mach disminuyen a lo largo del conducto, y la entropía aumenta. Pero al igual que antes, el número de Mach no puede atravesar el límite sónico, al menos de una forma continua, ya que ello implicaría, de acuerdo con (33.46), una disminución de la entropía. La diferencia con el caso subsónico es que ahora existe la posibilidad de una onda de choque. Así, antes de que se llegue a $M(L) = 1$, se produce una onda de choque en el interior del conducto en la posición apropiada para que el movimiento subsónico posterior se adapte a las condiciones ambientales a la salida del conducto.

La forma más conveniente de obtener la evolución de las distintas magnitudes fluidas a lo largo del conducto es en función del número de Mach:

$$\frac{dM^2}{M^2} = \gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} \frac{\lambda}{4r_h} dx, \quad (33.47)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)} \frac{\lambda}{4r_h} dx, \quad (33.48)$$

$$\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{2(1 - M^2)} \frac{\lambda}{4r_h} dx, \quad (33.49)$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma - 1)M^4}{2(1 - M^2)} \frac{\lambda}{4r_h} dx, \quad (33.50)$$

$$\frac{dp_o}{p_o} = \frac{d\rho_o}{\rho_o} = -\frac{1}{2}\gamma M^2 \frac{\lambda}{4r_h} dx, \quad (33.51)$$

donde para la última expresión se ha hecho también uso de (19.26)-(19.29). En todas las relaciones anteriores (excepto para las magnitudes de remanso) aparece el factor $1 - M^2$ en el denominador, de modo que las magnitudes fluidas tienen evoluciones opuestas a lo largo del conducto dependiendo de que el flujo sea subsónico o supersónico (las magnitudes de remanso siempre disminuyen, del mismo modo que la entropía siempre aumenta, al ser la fricción un proceso disipativo). Estas evoluciones, a la vista de las ecuaciones anteriores, se pueden resumir en la tabla siguiente:

Propiedad	Subsónico	Supersónico
M	aumenta	disminuye
ρ	disminuye	aumenta
v	aumenta	disminuye
p	disminuye	aumenta
T	disminuye	aumenta
p_o, ρ_o	disminuye	disminuye
s	aumenta	aumenta

De acuerdo con lo dicho anteriormente, la fricción siempre hace tender el número de Mach hacia la unidad, acelerando los flujos subsónicos y decelerando los supersónicos. En la figura 33.2 se representa la evolución del número de Mach en función de $\lambda x/4r_h$, resultado de la integración de (33.47) (suponiendo que λ es constante),

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} \frac{M^2(0)}{M^2} \right) + \frac{1}{\gamma M^2(0)} - \frac{1}{\gamma M^2} = \frac{\lambda x}{4r_h}, \quad (33.52)$$

para un flujo subsónico que parte de $M(0) = 0,1$ [figura 33.2(a)] y un flujo supersónico que parte de $M(0) = 10$ [figura 33.2(b)].⁴ Se observa que, comparativamente, hace falta un conducto mucho más corto para decelerar un flujo supersónico que para acelerar un flujo subsónico [excepto si $M(0)$ es muy próximo a la unidad]. Como se comentó antes, para cada número de Mach a la entrada del conducto existe una *longitud crítica*, $L^*(M(0))$, correspondiente

⁴Estas figuras proporcionan también $M = M(\lambda x/4r_h)$ para $M(0) > 0,1$ y $M(0) < 10$, respectivamente, sin más que trasladar el origen de las abscisas.

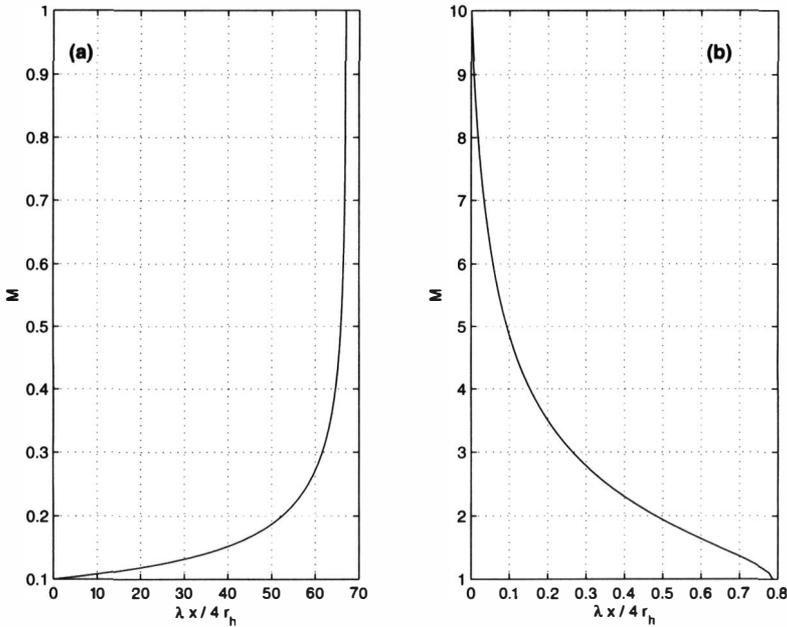


Figura 33.2: Número de Mach en función de $\lambda x / 4 r_h$ [ecuación (33.52)] para un flujo subsónico con $M(0) = 0,1$ (a) y un flujo supersónico con $M(0) = 10$ (b). $\gamma = 1,4$.

a $M(L^*) = 1$ [en la figura 33.2, $\lambda L^*(0,1) / 4 r_h \simeq 67$ y $\lambda L^*(10) / 4 r_h \simeq 0,78$]. Para un flujo subsónico, si $L > L^*$, el flujo se ajusta para que $M(L) = 1$, disminuyendo el número de Mach a la entrada y, por tanto, el gasto que circula por el conducto. Normalmente esto implica que la presión a la salida del conducto no es igual a la existente en el exterior del conducto (ver más adelante), y se produce una expansión de Prandtl-Meyer en la descarga. Para un flujo supersónico, si $L > L^*$, la curva dada por la figura 33.2(b) es válida hasta una cierta longitud L_c , donde se produce una onda de choque normal, de tal forma que la intensidad de la onda de choque correspondiente a $M(L_c)$ es la apropiada para que la evolución subsónica posterior [dada por la figura 33.2(a)] ajuste la presión de salida a la existente en la descarga.

Usualmente, es conveniente integrar las relaciones anteriores expresando el resultado en función de las condiciones de remanso en vez de las condiciones a la entrada del conducto. Esto es particularmente útil cuando se desea estudiar la descarga de un depósito a través de un conducto, ya que las condiciones de remanso, p_o , ρ_o y T_o , coinciden con las existentes en el depósito. A este problema se dedicará lo que resta de esta sección. De la ecuación de continuidad, $\rho(0)v(0) = \rho(L)v(L)$ y de $a^2 = \gamma p / \rho$, eliminando la densidad, se tiene

$$\frac{p(0)}{p(L)} = \frac{a^2(0) v(L)}{a^2(L) v(0)} = \frac{M(L) a(0)}{M(0) a(L)} = \frac{M(L)}{M(0)} \sqrt{\frac{T(0)}{T(L)}}; \quad (33.53)$$

como la entalpía de remanso se conserva en el conducto,

$$\frac{T(0)}{T(L)} = \frac{T(0)/T_o}{T(L)/T_o} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)}, \quad (33.54)$$

donde se ha hecho uso de (19.26); por tanto,

$$\frac{p(0)}{p(L)} = \frac{M(L)}{M(0)} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} \right]^{1/2}. \quad (33.55)$$

Por otra parte, como $p(L) = p_a$, donde p_a es la presión exterior a la que descarga el conducto, usando (19.29),

$$\frac{p_o}{p(0)} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (33.56)$$

se llega a

$$\frac{p_o}{p_a} = \frac{p_o}{p(0)} \frac{p(0)}{p(L)} = \frac{M(L)}{M(0)} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} \right]^{1/2}. \quad (33.57)$$

Otra relación entre $M(0)$ y $M(L)$ se obtiene de (33.52):

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} \frac{M^2(0)}{M^2(L)} \right] + \frac{1}{\gamma M^2(0)} - \frac{1}{\gamma M^2(L)} = \frac{\lambda L}{4r_h}, \quad (33.58)$$

donde se ha supuesto que λ es constante. Así, dada la relación entre la presión del depósito y la de descarga, p_o/p_a , y dado $\lambda L/4r_h$, mediante (33.57) y (33.58) se obtiene $M(0)$ y $M(L)$, los cuales están representados en la figura 33.3. [Para $\lambda L/4r_h \rightarrow 0$ la relación entre $M(0)$ y p_o/p_a viene dada, obviamente, por (33.56).] Con $M(0)$ y las condiciones de remanso se obtiene el gasto que circula por el conducto:

$$\begin{aligned} G &= \rho(0)v(0)A = \rho_o a_o A \frac{\rho(0)}{\rho_o} \frac{a(0)}{a_o} M(0) \\ &= \rho_o a_o A M(0) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) \right]^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)}. \end{aligned} \quad (33.59)$$

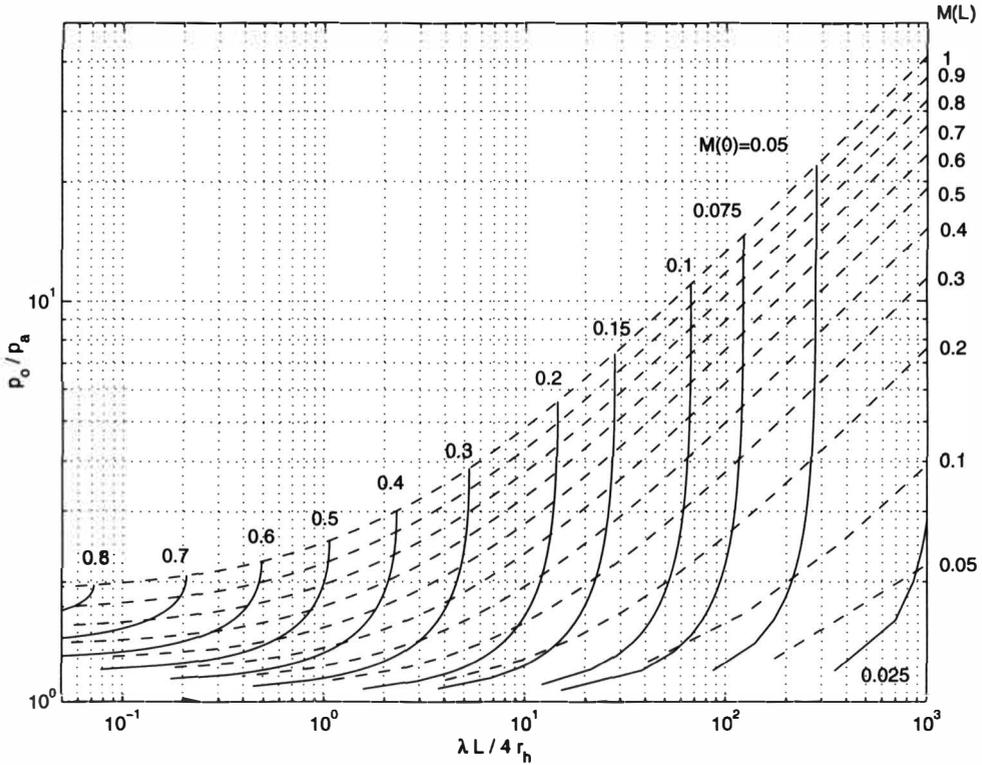


Figura 33.3: Descarga de un depósito a través de un conducto aislado térmicamente. $\gamma = 1,4$.

Si se define G^* como el gasto correspondiente a $M(0) = 1$ (por supuesto, este gasto no se alcanza nunca, pues si el flujo llega a ser sónico lo es a la salida del conducto),

$$G^* \equiv \rho_o a_o A \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)}, \tag{33.60}$$

la cantidad adimensional G/G^* sólo depende de $M(0)$,

$$\frac{G}{G^*} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} M(0) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0) \right]^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)}, \tag{33.61}$$

la cual se representa en la figura 33.4 para $\gamma = 1,4$.

Con $M(0)$ queda también definida la evolución de todas las magnitudes fluidas a lo largo del conducto sin más que integrar las ecuaciones (33.47)-(33.51). En el caso en que la longitud del conducto exceda la longitud crítica,

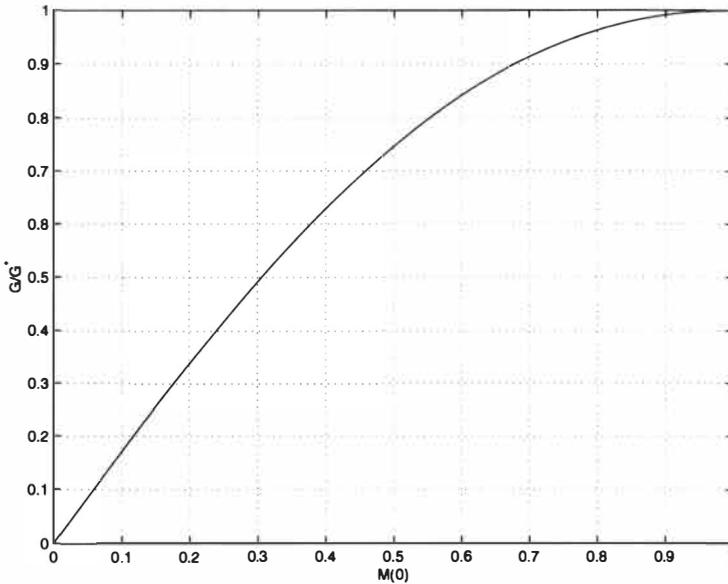


Figura 33.4: Gasto adimensional (33.61) en función de $M(0)$ para $\gamma = 1,4$.

la expresión (33.58) sigue siendo válida con $M(L) = 1$, proporcionando $M(0)$, el gasto (que será menor al ser $M(0)$ más pequeño) y la evolución de todas las magnitudes fluidas a lo largo del conducto. Sin embargo, la presión a la salida, $p(L)$, no coincide con p_a . Su valor se obtiene de (33.57) haciendo $M(L) = 1$ [que es la condición de contorno que sustituye a $p(L) = p_a$; por supuesto, $p(L)$ será mayor que p_a al ser menor el valor de $M(0)$ que el correspondiente a $p(L) = p_a$]. Detrás del conducto se producirá una expansión del tipo Prandtl-Meyer desde $p(L)$ hasta p_a .

33.3.1. Límite de fricción dominante

Un caso particular interesante en el cual el flujo estacionario, adiabático y con fricción de un gas en un conducto, no necesariamente de sección constante, se simplifica enormemente, es el correspondiente a $\lambda L/r_h \gg 1$ (fricción muy importante).

De la ecuación (33.38) se tiene que las variaciones de presión a lo largo del conducto son del orden de

$$\Delta p \sim \rho v^2 (1 + \lambda L/r_h). \quad (33.62)$$

Es decir,

$$\frac{\Delta p}{p} \sim M^2 \left(1 + \frac{\lambda L}{r_h} \right). \quad (33.63)$$

Si $\lambda L/r_h \gg 1$, $\Delta p/p \sim M^2 \lambda L/r_h$. Si, además, $\Delta p/p$ es, a lo sumo, de orden unidad, se tiene que $M^2 \ll 1$. Más concretamente, si $\lambda L/r_h \gg 1$ y

$$\frac{\Delta p}{p} \left(\frac{\lambda L}{r_h} \right)^{-1} \ll 1, \quad (33.64)$$

la relación (33.63) implica que $M^2 \ll 1$. Por ejemplo, en el caso de la descarga de un depósito a través de un conducto, se tiene que $M^2 \ll 1$ si, además de $\lambda L/r_h \gg 1$, se verifica $[(p_o - p_a)/p_o][\lambda L/r_h]^{-1} \ll 1$.

Como la entalpía de remanso se conserva, $M^2 \ll 1$ implica que la entalpía y, por tanto, la temperatura, también se conserva. Es decir, fricción dominante y (33.64) implican que el flujo a través del conducto es isoterma. La condición $\lambda L/r_h \gg 1$ implica, además, que el primer término de (33.38) es despreciable frente al tercero, teniéndose

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{\lambda v^2}{8r_h}. \quad (33.65)$$

Sustituyendo $\rho = p/R_g T$ con $T = \text{constante}$ y la ecuación de continuidad $\rho v A = G = \text{constante}$ (A no necesariamente constante) se tiene

$$\frac{dp^2}{dx} = - \frac{\lambda G^2 R_g T_a}{4r_h A^2}, \quad (33.66)$$

ecuación que se puede integrar directamente proporcionando p en función del gasto (y de T y la geometría del conducto). La constante de integración quedaría fijada por la condición de contorno a la entrada, $p(0) \simeq p_o$, puesto de $M^2(0) \ll 1$. La condición de contorno a la salida, $p(L) = p_a$, fija el gasto. La distribución de densidad, $\rho(x)$, vendría dada por la ecuación de estado, mientras que la ecuación de continuidad fijaría $v(x)$, quedando resuelto el problema. Una vez resuelto, se debe comprobar que $M^2(L) \ll 1$, es decir, que la condición (33.64) realmente se satisface. Hay que observar que, a pesar de que $M^2 \ll 1$, el flujo no se puede considerar incompresible, pues

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{\Delta p}{p} \sim M^2 \frac{\lambda L}{r_h}, \quad (33.67)$$

que no necesariamente es pequeño (la primera parte de la relación anterior proviene de $\Delta p \sim a^2 \Delta \rho$, al ser el flujo prácticamente isentrópico por ser adiabático y no contar la disipación viscosa debido a que $M^2 \ll 1$).

33.4. Movimiento casi estacionario de un gas sin fricción y con adición de calor

Suponiendo que la fricción es despreciable, es decir, $\lambda L/r_h \ll 1$, las ecuaciones que describen el movimiento estacionario de un gas en un conducto de sección constante son:

$$\rho v = G/A = \text{constante} \quad , \quad (33.68)$$

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad , \quad (33.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{q_s}{r_h} \frac{A}{G} + \frac{q_r}{G} \quad . \quad (33.70)$$

Si $Q(x)$ es el calor total añadido al fluido por unidad de masa desde la entrada del conducto hasta la sección x ,

$$Q(x) \equiv \frac{A}{Gr_h} \int_0^x q_s dx + \frac{1}{G} \int_0^x q_r dx \quad , \quad (33.71)$$

las ecuaciones anteriores se escriben

$$\rho v = \rho(0)v(0) = G/A \quad , \quad (33.72)$$

$$\rho v^2 + p = \rho(0)v^2(0) + p(0) \quad , \quad (33.73)$$

$$h + \frac{v^2}{2} = h(0) + \frac{v^2(0)}{2} + Q(x) \quad . \quad (33.74)$$

Estas expresiones proporcionan las magnitudes fluidas en cada sección del conducto y el gasto en función de las condiciones a la entrada y $Q(x)$.

Como se hizo en la sección, es conveniente expresar estas relaciones en función del número de Mach. Teniendo en cuenta que $a^2 = \gamma p/\rho$ y $h = \gamma p/(\gamma - 1)\rho = a^2/(\gamma - 1)$, se obtiene

$$\frac{p}{p(0)} = \frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2} \quad , \quad (33.75)$$

$$\frac{h}{h(0)} = \frac{T}{T(0)} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0) + Q(x)/h(0)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad , \quad (33.76)$$

$$\frac{\rho}{\rho(0)} = \frac{v(0)}{v} = \frac{M^2(0) p(0)}{M^2 p} = \frac{M^2(0)}{M^2} \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma M^2(0)} \quad . \quad (33.77)$$

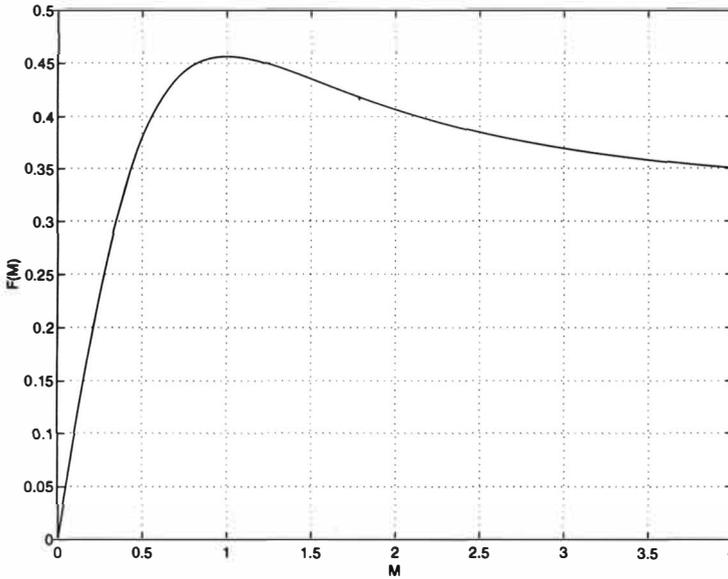


Figura 33.5: Función $F(M)$ para $\gamma = 1,4$ [ecuación (33.79)].

Así, conocidas las condiciones en $x = 0$, $Q(x)$ y el número de Mach en cada sección, se obtienen las distintas magnitudes fluidas en cada sección. Como, por otra parte, se tiene que verificar la ecuación de estado, $p/\rho T = constante$, se puede obtener una relación adicional que proporciona el número de Mach en cada sección en función de las condiciones a la entrada y $Q(x)$, quedando así cerrado el problema:

$$\frac{F^2(M)}{F^2(M(0))} = 1 + \frac{Q(x)/h(0)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)}, \tag{33.78}$$

donde, por comodidad, se ha definido la función

$$F(M) \equiv \frac{M}{1 + \gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/2}, \tag{33.79}$$

que se representa en la figura 33.5.

El comportamiento cualitativo del flujo a lo largo del conducto se puede obtener considerando las expresiones anteriores con la ayuda de la figura 33.5. En esta figura se observa que $F(M)$ alcanza un máximo para $M = 1$. Por tanto, dependiendo de si el flujo es subsónico o supersónico, la adición de calor tiene un efecto opuesto en el mismo, análogamente a como ocurría

en el movimiento considerado en la sección anterior. Si el flujo es subsónico, $[M(0) < 1]$, una adición de calor incrementa la función $F(M)$ [ecuación (33.78)] y, por consiguiente, el número de Mach aumenta de acuerdo con la figura 33.5. Por el contrario, si el flujo es supersónico $[M(0) > 1]$, una adición de calor disminuye el número de Mach ya que $F(M)$ también debe aumentar. Lo contrario ocurriría si se elimina calor del fluido. De acuerdo con las expresiones (33.75)-(33.77) y con

$$\frac{p_o}{p_o(0)} = \frac{p}{p(0)} \frac{p_o}{p} \frac{p(0)}{p_o(0)} = \frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2} \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (33.80)$$

$$\frac{T_o}{T_o(0)} = \left(\frac{1 + \gamma M^2(0)}{1 + \gamma M^2} \right)^2 \frac{M^2}{M^2(0)} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)}, \quad (33.81)$$

la evolución de las diferentes magnitudes fluidas es la siguiente:

Propiedad	Calentamiento subsónico	Calentamiento supersónico	Enfriamiento subsónico	Enfriamiento supersónico
M	crece	decrece	decrece	crece
p	decrece	crece	crece	decrece
ρ	decrece	crece	crece	decrece
v	crece	decrece	decrece	crece
T		crece		decrece
T_o	crece	crece	decrece	decrece
p_o	decrece	decrece	crece	crece
s	crece	crece	decrece	decrece

Se observa que la temperatura de remanso crece cuando se calienta el gas y decrece cuando se enfría, independientemente de que sea subsónico o supersónico, ya que la adición de calor aumenta la entalpía de remanso, mientras que la sustracción la disminuye. En cuanto a la temperatura, en un calentamiento subsónico crece hasta $M = \gamma^{-1/2}$ y decrece desde $M = \gamma^{-1/2}$ hasta $M = 1$, mientras que en enfriamiento subsónico decrece cuando $M < \gamma^{-1/2}$ y crece si $\gamma^{-1/2} < M < 1$.

La adición de calor siempre hace tender el número de Mach hacia la unidad, análogamente al efecto de la fricción considerado anteriormente. Por el

contrario, el enfriamiento del gas siempre aleja el número de Mach de la unidad. Si el flujo es inicialmente subsónico, dadas unas condiciones de entrada en el conducto, no se le puede añadir al gas una cantidad de calor por encima del valor máximo correspondiente a $M(L) = 1$ [ecuación (33.78)]:

$$Q(L)_{max} = h(0) \frac{[1 - M^2(0)]^2}{2(\gamma + 1)M^2(0)} . \tag{33.82}$$

Si el calor añadido es mayor, las condiciones a la entrada deben modificarse, disminuyendo $M(0)$ y, por tanto, el gasto que circula por el conducto. Esto implicaría que la presión a la salida del conducto, $p(L)$, no coincide con la presión externa a la cual descarga (ver más adelante para un ejemplo concreto).

Si el flujo es supersónico, la expresión (33.82) proporciona también el calor máximo que se le puede añadir al gas para unas condiciones de entrada fijas, correspondiente a $M(L) = 1$, si el flujo permanece supersónico en todo el conducto. Sin embargo, en este caso se puede añadir más calor al gas sin modificar las condiciones de entrada, ya que existe la posibilidad de que se produzca una onda de choque en el conducto, que se situará en la posición apropiada para que el flujo subsónico posterior se adapte a las condiciones de descarga, sin necesidad de que se modifique $M(0)$.

En el caso frecuente en que el conducto sirve de descarga de un depósito desde la presión p_o (entalpía de remanso h_o) hasta la presión exterior p_a , es posible, análogamente al caso considerado en la sección anterior, escribir un par de relaciones que proporcionen $M(0)$ y $M(L)$ en función de la relación de presiones p_o/p_a y el calor añadido $Q(L)/h_o$. Estas relaciones se obtienen directamente de (33.75) y (33.76) teniendo en cuenta que $p(L) = p_a$ y las relaciones $p_o/p(0)$ y $h_o/h(0) = T_o/T(0)$ dadas por (19.29) y (19.26) en función de $M(0)$:

$$\frac{p_a}{p_o} = \frac{1 + \gamma M^2(0)}{[1 + \gamma M^2(L)][1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)]^{\gamma/(\gamma-1)}} , \tag{33.83}$$

$$\frac{Q(L)}{h_o} = \frac{M^2(L)}{M^2(0)} \frac{[1 + \gamma M^2(0)]^2}{[1 + \gamma M^2(L)]^2} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)} - 1 . \tag{33.84}$$

En la figura 33.6 se representan estas relaciones. El gasto adimensional, G/G^* , es función sólo de $M(0)$ y viene dado por (33.61), representado en la figura 33.4. Si $Q(L)/h_o$ supera el valor máximo,

$$\frac{Q(L)_{max}}{h_o} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)\right]^{-1} \frac{[1 - M^2(0)]^2}{2(\gamma + 1)M^2(0)} , \tag{33.85}$$

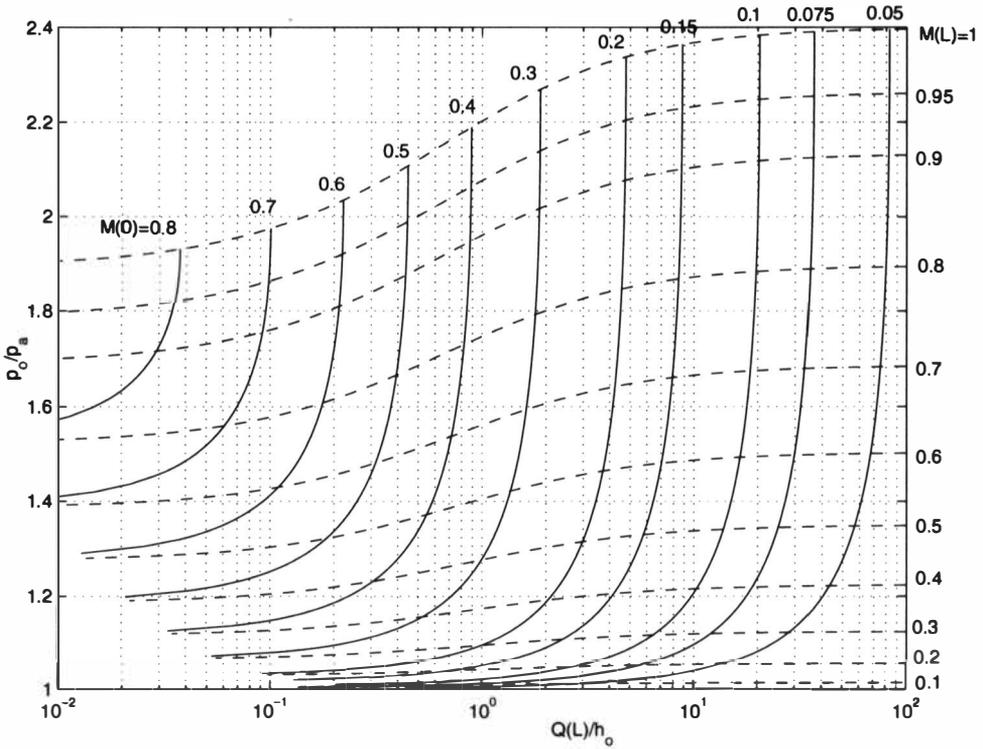


Figura 33.6: Descarga de un depósito a través de un conducto sin fricción y con adición de calor ($\gamma = 1,4$).

la condición de contorno a la salida deja de ser $p(L) = p_a$, para ser $M(L) = 1$, disminuyendo $M(0)$ y, por tanto, el gasto. Detrás de la salida se producirá una expansión desde $p(L)$ hasta p_a .

33.5. Pérdidas localizadas en tuberías

Los sistemas de tuberías suelen tener cambios bruscos en la sección de los conductos (válvulas, ensanchamientos y contracciones, etc.) así como cambios repentinos de la dirección de los mismos (codos, tes, etc.). La caída de presión de remanso en estas regiones suele ser relativamente importante, a pesar de lo reducido de las dimensiones espaciales de estos *accesorios* en comparación con la longitud de los conductos, y a veces puede superar con creces la caída de presión originada por la fricción en las paredes de los conductos. Por ello la importancia de su cuantificación. Estas pérdidas *localizadas* de la presión

de remanso se deben, fundamentalmente, a la formación de torbellinos como consecuencia de la separación de la corriente y a la producción de corrientes secundarias en relación a la corriente principal en los conductos. Estos movimientos suelen ser muy complicados, por lo que la cuantificación teórica de estas pérdidas es, salvo excepciones, prácticamente imposible. Por ello se recurre a la experimentación (guiada, por supuesto, por el análisis dimensional y la semejanza física). En esta sección se comentarán muy brevemente algunas de las pérdidas localizadas más significativas.

En el caso de flujos turbulentos incompresibles, que serán los únicos que se considerarán aquí, es práctica habitual expresar la pérdida de la presión de remanso en términos de un coeficiente adimensional ζ que relaciona la caída de la presión de remanso con la energía cinética del flujo por unidad de volumen:

$$(\Delta p)_{loc} = \zeta \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (33.86)$$

Para cada tipo de accesorio en donde se produce la caída localizada de presión, ζ depende de los diferentes parámetros geométricos adimensionalizados y, si la fricción es también importante, del número de Reynolds. En ocasiones también se suelen expresar las pérdidas localizadas en términos de la longitud equivalente de tubería que por fricción originaría la misma caída en la presión de remanso, pero es menos usual.

A continuación se considerarán brevemente los tipos más básicos de situaciones donde se producen pérdidas localizadas, comenzando con el ensanchamiento brusco, que es el único caso para el que es posible obtener ζ teóricamente. Información exhaustiva sobre pérdidas localizadas puede encontrarse, por ejemplo, en la monografía de Idelchik (1986).

33.5.1. Ensanchamiento brusco

Considérese un cambio brusco en la sección de una tubería como el esquematizado en la figura 33.7. La caída de presión de remanso es debida a la separación de la corriente y la consecuente formación de torbellinos, y se puede obtener sin más que aplicar las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento aplicadas al volumen de control de la figura:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q, \quad (33.87)$$

$$\rho Q(v_2 - v_1) = (p_2 - p_1) A_2. \quad (33.88)$$

Dividiendo esta última ecuación por ρA_2 y utilizando la primera, se obtiene

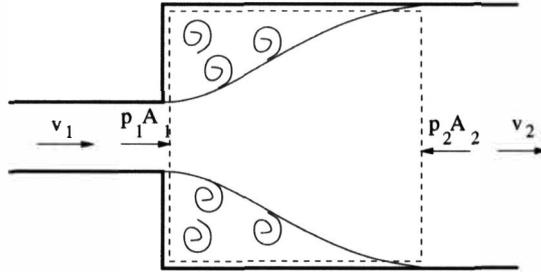


Figura 33.7: Ensanchamiento brusco.

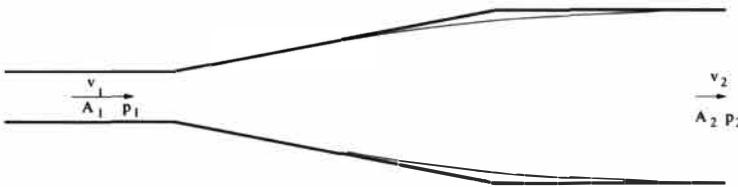


Figura 33.8: Difusor cónico.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2}. \quad (33.89)$$

Así,

$$\zeta_{ens.} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \quad (33.90)$$

En el límite $A_2 \gg A_1$, $\zeta_{ens.} \simeq 1$, perdiéndose, como es lógico, toda la energía cinética del fluido que entra en el ensanchamiento, $(\Delta p)_{ens.} \simeq \rho v_1^2/2$. Como en este límite $v_2 \ll v_1$, la ecuación (33.89) se reduce a $p_1 = p_2$. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando un conducto descarga en un depósito, siendo la presión del líquido en la descarga del conducto prácticamente igual a la del líquido en el depósito en el punto de descarga.

33.5.2. Ensanchamiento gradual. Difusor

Sea el ensanchamiento gradual desde una sección A_1 a otra $A_2 > A_1$ mediante un tramo cónico de semiángulo θ de la figura 33.8. Las pérdidas en este caso son debidas tanto a la separación de la corriente como a la fricción en la pared cónica:

$$(\Delta p)_{dif.} = (\Delta p)_f + (\Delta p)_{ens.}. \quad (33.91)$$

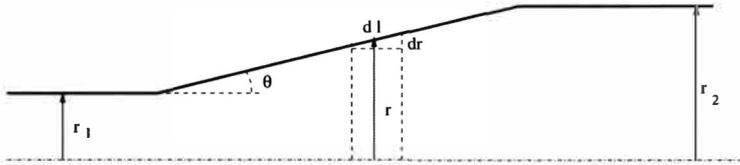


Figura 33.9: Pérdidas de fricción en un difusor cónico.

Las pérdidas por fricción se pueden estimar mediante el coeficiente de fricción λ para conductos circulares:

$$(dp)_f = \lambda \rho \frac{dl}{2r} \frac{v^2}{2} = \lambda \rho \frac{dr}{2r \sin \theta} \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \frac{v_1^2}{2}. \tag{33.92}$$

Suponiendo λ constante,

$$(\Delta p)_f = \frac{\lambda \rho}{2 \sin \theta} \frac{v_1^2}{2} r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^5} = \frac{\lambda \rho}{8 \sin \theta} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2}. \tag{33.93}$$

Las pérdidas por separación de la corriente se suelen expresar como una fracción de las correspondientes a un ensanchamiento brusco:

$$(\Delta p)_{ens.} = K(\theta) \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \rho \frac{v_1^2}{2}, \tag{33.94}$$

siendo $K(\theta)$ una constante empírica. Para $\theta < 20^\circ$, se tiene, aproximadamente,

$$K(\theta) \simeq 3,2(\tan \theta)^{5/4}. \tag{33.95}$$

Sumando las dos pérdidas,

$$(\Delta p)_{dif.} = \zeta_{dif.} \rho \frac{v_1^2}{2}, \tag{33.96}$$

$$\zeta_{dif.} = \frac{\lambda}{8 \sin \theta} \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] + K(\theta) \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2. \tag{33.97}$$

Es decir, $\zeta_{dif.}$ depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa (a través de λ), del ángulo θ y de la relación de áreas $n \equiv A_2/A_1$. Información detallada sobre $\zeta_{dif.}$ en función de todos estos parámetros (y no sólo para ensanchamientos cónicos) puede encontrarse en la referencia antes citada. Como comentario general se puede decir que a medida que θ aumenta (para n y λ constantes), las pérdidas por rozamiento disminuyen puesto que el difusor

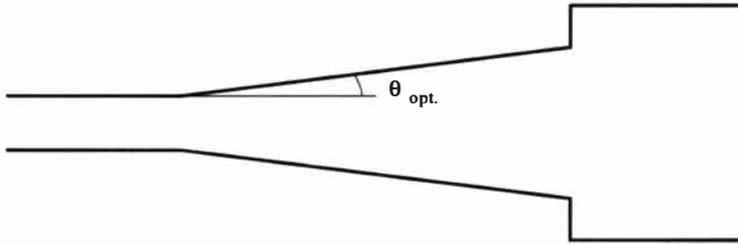


Figura 33.10: Difusor escalonado.

es más corto, pero aumentan las pérdidas por separación, y al contrario si θ disminuye. Por tanto, para cada n y λ , $\zeta_{dif.}$ tiene un mínimo correspondiente a un ángulo θ óptimo, que aproximadamente vale

$$\theta_{optimo} \simeq \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \frac{\lambda}{4}}, \quad n = \frac{A_2}{A_1}. \quad (33.98)$$

Como λ suele estar entre 0,015 y 0,025, y n no suele superar 3 ó 4, el ángulo óptimo suele ser muy pequeño, lo cual obliga a que el difusor tenga que ser muy largo, con el consecuente mayor coste de tubería. Por ello se suele utilizar una solución intermedia como la esquematizada en la figura 33.10. El ensanchamiento brusco posterior al difusor cónico no introduce pérdidas importantes ya que la velocidad es ya bastante menor que a la entrada. La elección de la longitud del difusor es por tanto una cuestión de optimización pérdidas de presión-coste. Otra solución que se suele tomar es el uso de difusores no cónicos que minimizan las pérdidas por separación buscando que el gradiente de presión en la pared sea lo menos adverso posible.

33.5.3. Contracción brusca

En una contracción brusca como la de la figura 33.11, la corriente se separa antes y después de la misma, produciéndose un estrechamiento de la *vena líquida* después de la contracción. A pesar de ello, las pérdidas suelen ser bastante menores que en un ensanchamiento brusco de la misma relación de áreas. Definiendo

$$(\Delta p)_{con.} = \zeta_{con.} \rho \frac{v_2^2}{2}, \quad (33.99)$$

el coeficiente $\zeta_{con.}$ no se puede determinar teóricamente como en el caso de un ensanchamiento brusco puesto que A_{min} es desconocida, y hay que recurrir a la experimentación. Aproximadamente se tiene

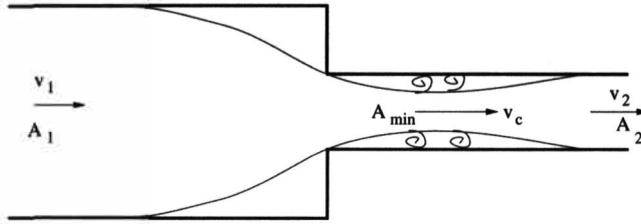


Figura 33.11: Contracción brusca.

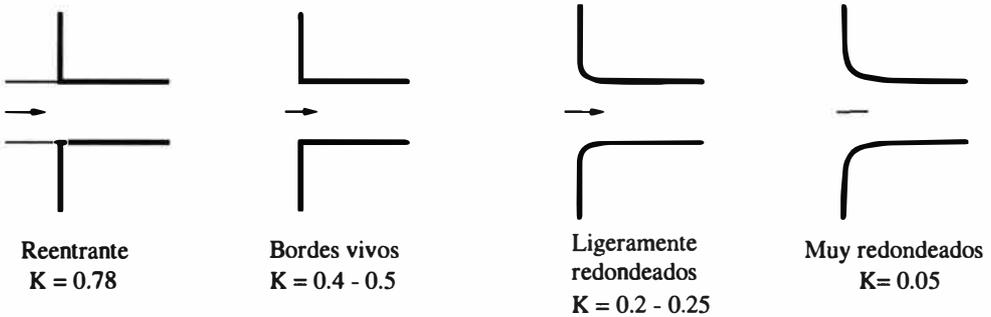


Figura 33.12: Coeficiente de pérdida de presión de remanso a la entrada de un conducto (tomada de White, 1983).

$$\zeta_{con.} \simeq K \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) , \quad K = 0,4 - 0,5 \quad (33.100)$$

Si $A_2/A_1 \ll 1$, lo cual correspondería, por ejemplo, a la descarga de un depósito a través de un conducto, $\zeta_{con.} \simeq K$. Como se observa en la figura 33.12, el coeficiente K puede reducirse apreciablemente redondeando los bordes de la entrada del conducto. Así, cuando los bordes están suficientemente redondeados, las pérdidas son despreciables y puede suponerse que la presión de remanso se conserva a la entrada del conducto.

33.5.4. Contracción gradual

En una contracción gradual cónica sólo se produce separación de la corriente a la salida de la misma, ya que el gradiente de presión es favorable en la contracción. Esta separación puede a su vez evitarse redondeando los bordes, de forma que las pérdidas son exclusivamente debidas a la fricción. Suponiendo λ constante, estas pérdidas vienen dadas por (ver sección 33.5.3.):

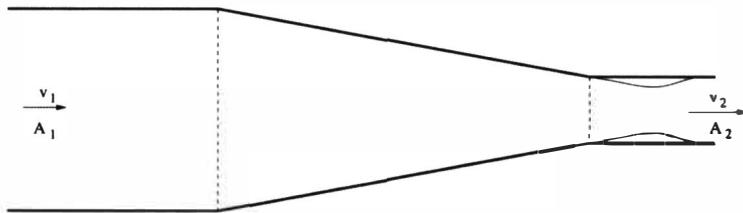


Figura 33.13: Contracción gradual.

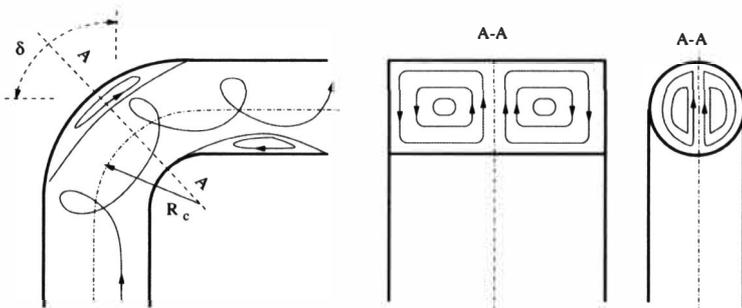


Figura 33.14: Esquema de la corriente en un codo.

$$(\Delta p)_{cg} \equiv \frac{\lambda \rho}{8 \sin \theta} \left(1 - \frac{A_2^2}{A_1^2} \right) \frac{v_2^2}{2}. \quad (33.101)$$

ζ_{cg} depende, por tanto, de A_2/A_1 , de θ , del Reynolds y de la rugosidad relativa.

33.5.5. Codos

En los cambios bruscos de la dirección del flujo en un conducto, la pérdida de presión de remanso se produce por tres mecanismos: por separación de la corriente, por fricción en la pared y por la formación de flujos secundarios (ver figura 33.14). Estos últimos son debidos a la acción de las fuerzas centrífugas, y se superponen a la corriente principal.

El coeficiente de pérdidas depende, para un conducto circular, del ángulo del codo (δ), de la relación entre el radio de curvatura y el diámetro del conducto (R_c/D), de la rugosidad relativa y del número de Reynolds (estos dos últimos a través del coeficiente de fricción λ). Si la sección no es circular, hay que añadir además algún parámetro geométrico adimensional que caracterice a la sección. Por ejemplo, para un conducto de sección rectangular, depende además la relación entre los lados del rectángulo. Para un conducto de sección

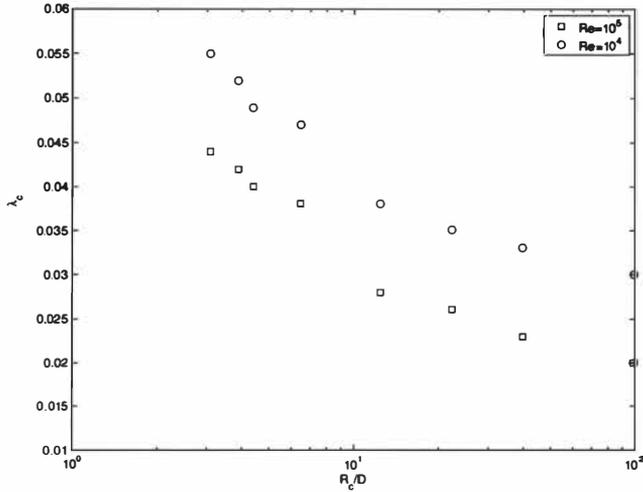


Figura 33.15: Coeficiente de pérdida de presión en un codo de sección circular, según la expresión (33.102), en función de R_c/D (datos tomados de Idelchik, 1986).

circular, se puede utilizar la expresión (válida para $R_c/D > 3$, aproximadamente)

$$\zeta_{codo} \simeq 0,0175 \lambda_c \frac{R_c}{D} \delta, \tag{33.102}$$

donde el ángulo δ viene dado en grados y $\lambda_c = \lambda_c(R_c/D, Re)$. Valores experimentales de λ_c en función de R_c/D para dos números de Reynolds se muestran en la figura 33.15. Los resultados se pueden extrapolar a secciones no circulares si uno usa $4r_h$ en vez de D .

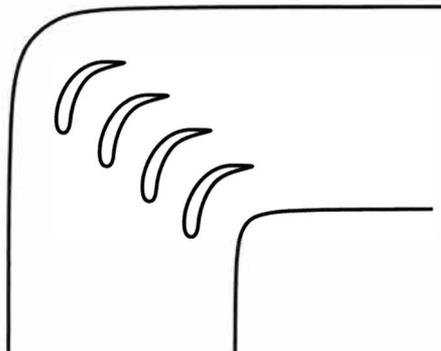


Figura 33.16: Codo con aletas.

Se debe observar que, aunque las pérdidas por separación de la corriente disminuyen a medida que aumenta R_c/D , las pérdidas por fricción aumentan, pues el codo es más largo. Por ello ζ_{codo} tiene un mínimo para un valor óptimo de R_c/D que depende del número de Reynolds, de δ y de la forma de la sección. Las pérdidas debidas al flujo secundario apenas se ven afectadas por R_c/D , pero dependen mucho de la forma de la sección. Son mínimas en conductos de sección rectangular con un lado aproximadamente el doble que el otro, pues los gradientes de velocidad transversal a la corriente correspondientes al flujo secundario son menores (véase figura 33.14). Sin embargo, las pérdidas por fricción y por separación son mayores en los conductos rectangulares pues la superficie de contacto sólido - fluido es mayor para una misma sección. Por ello, en flujo de gases, donde la fricción es relativamente menos importante que en flujo de líquidos, se suelen usar, si las pérdidas son críticas, conducciones rectangulares, para que así las pérdidas originadas por los flujos secundarios en los codos sean las menores posibles. Cuando la sección es grande se añaden además aletas que *guían* a la corriente, disminuyendo así las pérdidas por separación y por formación de flujos secundarios (figura 33.16). Para líquidos se suelen utilizar conducciones circulares pues las pérdidas por fricción son relativamente más importantes.

Referencias.

- J.D. ANDERSON, 1990. Capítulo 3.
- J.W. DAILY y D.R.F. HARLEMAN, 1975. Capítulo 14.
- I.E. IDELCHIK, 1986.
- F.M. WHITE, 1983. Capítulo 9.

Bibliografía

- D.J. ACHESON, 1990, *Elementary Fluid Mechanics* (Clarendon Press, Oxford).
- J.D. ANDERSON, 1990, *Modern compressible flow* (McGraw-Hill, Nueva York; segunda edición).
- R. ARIS, 1989, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- G.I. BARENBLATT, 1996, *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics* (Cambridge University Press, Cambridge).
- G.I. BARENBLATT, V.M. ENTOV y V.M. RYZHIK, 1990, *Theory of fluid flows through natural rocks* (Kluwer, Dordrecht).
- G.K. BATCHELOR, 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge).
- J. BEAR, 1988, *Dynamics of fluids in porous media* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- R.B. BIRD, W. E. STEWART y E. LIGHTFOOT, 1960, *Transport Phenomena* (Wiley, Nueva York). Existe traducción castellana en la editorial Reverté.
- D.E. BOURNE y P.C. KENDALL, 1992, *Vector analysis and cartesian tensors* (Chapman and Hall, Londres; tercera edición).
- E. BUTKOV, 1968, *Mathematical Physics* (Addison-Wesley, Reading, Ma.).
- S. CHANDRASEKHAR, 1981, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* (Dover, Nueva York; reimpresión de la 3ª edición).

- S. CHAPMAN y T.G. COWLING, 1970, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge University Press, New York; 3ª edición).
- M.H. CHAUDHRY, 1993, *Open-Channel flow* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs).
- A. CHORIN y J.E. MARSDEN, 1993, *A mathematical introduction to fluid mechanics* (Springer-Verlag, Nueva York; 3ª edición).
- R. COURANT y K.O. FRIEDRICHS, 1976, *Supersonic flow and shock waves* (Springer-Verlag, Nueva York).
- J.W. DAILY y D.R.F. HARLEMAN, 1975, *Dinámica de los fluidos* (Trillas, México; 2ª edición).
- P.G. DRAZIN y W.H. REID, 1981, *Hydrodynamic stability* (Cambridge University Press, Nueva York).
- U. FRISCH, 1995, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- C. GODRÈCHE y P. MANNEVILLE (eds.), 1998, *Hydrodynamics and non-linear instabilities* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.)
- S. GOLDSTEIN, 1969, *Fluid mechanics in the first half of this century*, Annual Review Fluid Mechanics **Vol. 1**, pp. 1-28.
- R.A. GRANGER, 1995, *Fluid mechanics* (Dover, Nueva York; 2ª edición).
- S.R. de GROOT y P. MAZUR, 1984, *Non-equilibrium Thermodynamics* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- B.J. HAMROCK, 1994, *Fundamentals of fluid film lubrication* (McGraw-Hill, Nueva York).
- J.O. HINZE, 1975, *Turbulence* (McGraw-Hill, Nueva York; 2ª ed.).
- J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y R. B. BIRD, 1964, *Molecular Theory of Gases and Liquids* (John Wiley and Sons, Nueva York).
- I.E. IDELCHIK, 1986, *Handbook of hydraulic resistance* (Hemisphere, Nueva York; 2ª edición.).
- E.L. KOSCHMIEDER, 1993, *Bénard cells and Taylor vortices* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- H. LAMB, 1975, *Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge; reimpresión de la 6ª edición).

- L.D. LANDAU y E.M. LIFSHITZ, 1987, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 2ª edición; existe traducción española de la primera edición en la Ed. Reverté).
- M. LESIEUR, 1993, *Turbulence in fluids* (Kluwer, Dordrecht; 2ª edición).
- H.W. LIEPMANN y A. ROSHKO, 1957, *Elements of gasdynamics* (John Wiley and Sons, Nueva York).
- E.M. LIFSHITZ y L.P. PITAEVSKII, 1981, *Physical Kinetics* (Pergamon, Nueva York). Existe traducción española en la editorial Reverté.
- J. Lighthill, 1978, *Waves in fluids* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- J. Lighthill, 1986, *An informal introduction to theoretical fluid mechanics* (Clarendon Press, Oxford).
- H.J. LUGT, 1983, *Vortex flow in Nature and Technology* (Wiley-Interscience, Nueva York).
- H.J. LUGT, 1996, *Introduction to vortex theory* (Vortex Flow Press, Potomac, Maryland).
- S. MIDDLEMAN, 1995, *Modeling axisymmetric flows. Dynamics of films, jets, and drops* (Academic, San Diego).
- G. MILLÁN BARBANY, 1975, *Problemas matemáticos de la Mecánica de Fluidos. Estructura de las ondas de choque y combustión* (Real Academia de Ciencias, Madrid).
- L.M. MILNE-THOMSON, 1973, *Theoretical aerodynamics* (Dover, Nueva York; reimpresión de la 4ª edición).
- L.M. MILNE-THOMSON, 1996, *Theoretical hydrodynamics* (Dover, Nueva York; reimpresión de la 5ª edición).
- A.S. MONIN y A. M. YAGLOM, 1971, 1975, *Statistical fluid mechanics I y II* (The MIT Press, Cambridge, Ma.).
- P.M. MORSE y H. FESHBACH, 1953, *Methods of mathematical physics* (McGraw-Hill, Nueva York).
- A.D. MYSHKIS, et al., 1987, *Low-gravity fluid mechanics* (Springer-Verlag, Berlín).

- J.M. OTTINO, 1990, *The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- J. PALACIOS, 1964, *Análisis dimensional* (Espasa-Calpe, Madrid).
- R.L. PANTON, 1996, *Incompressible Flow* (John Wiley and sons, Nueva York; segunda edición).
- S.B. POPE, 2000, *Turbulent flows* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- L. PRANDTL y O.G. TIETJENS, 1957a, *Fundamentals of hydro -and aeromechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- L. PRANDTL y O.G. TIETJENS, 1957b, *Applied Hydro- and Aeromechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- P. RESIBOIS y M. De LEENER, 1977, *Classical Kinetic Theory of Fluids* (Wiley, Nueva York).
- S.M. RICHARDSON, 1989, *Fluid Mechanics* (Hemisphere, Nueva York).
- J.A. ROBERSON y C. T. CROWE, 1997, *Engineering Fluid Mechanics* (Wiley, Nueva York; 6ª edición).
- L. ROSENHEAD (editor), 1988, *Laminar Boundary Layer* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- D.E. ROSNER, 1986, *Transport Processes in Chemical Reacting Flow Systems* (Butterworth, Boston).
- D.N. ROY, 1988, *Applied fluid mechanics* (Ellis Horwood, Chichester).
- I.L. RYHMING, 1991, *Dynamique des fluides* (Presses Polytechniques Romandes, Lausana; 2ª edición).
- P.G. SAFFMAN, 1992, *Vortex dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge).
- H. SCHLICHTING, 1987 *Boundary Layer Theory* (McGraw-Hill, Nueva York; 7ª edición).
- H. SCHLICHTING y K. GERSTEN, 2000, *Boundary Layer Theory* (Springer-Verlag, Berlín; 8ª edición).

- L.J. SEDOV, 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (Academic, Nueva York).
- L.A. SEGEL, 1987, *Mathematics Applied to Continuum Mechanics* (Dover, Nueva York; reimpresión).
- F.S. SHERMAN, 1990, *Viscous flow* (McGraw-Hill, Nueva York, 1990).
- A. SOMMERFELD, 1950, *Mechanics of Deformable Bodies* (Academic, Nueva York).
- J.H. SPURK, 1997, *Fluid mechanics* (Springer-Verlag, Berlín).
- A. Z. SZERI, 1998, *Fluid film lubrication: theory and design* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.).
- H. TENNEKES y J.L. LUMLEY, 1972, *A first course in turbulence* (The MIT Press, Cambridge, Ma.).
- C. TRUESDELL y R.G. MUNCASTER, 1980, *Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monatomic Gas* (Academic, Nueva York).
- M. VAN DYKE, 1982, *An album of fluid motion* (Parabolic Press, Stanford).
- W.G. VINCENTY y C.H. KRUGER, 1965, *Introduction to Physical Gas Dynamics* (Wiley, Nueva York).
- J.M. WALLACE y P.V. HOBBS, 1977, *Atmospheric Science* (Academic, Nueva York).
- F.M. WHITE, 2004, *Mecánica de Fluidos* (McGraw-Hill, Madrid; 5ª edición).
- F.M. WHITE, 1991, *Viscous fluid flow* (McGraw-Hill, Nueva York; 2ª edición).
- G.B. WHITHAM, 1974, *Linear and nonlinear waves* (John Wiley and sons, Nueva York).
- C.-S. YIH, 1988, *Fluid Mechanics* (West River Press, Ann Arbor).
- J. ZIEREP, 1971, *Similarity Laws and Modeling* (Marcel Dekker, Nueva York).

Este libro es una introducción a la Mecánica de Fluidos, principalmente enfocada a los estudiantes de Ingeniería. El contenido está pensado para que sea cubierto durante dos cursos: uno más básico, donde se introducen los fundamentos y se estudian las principales aplicaciones ingenieriles de la Mecánica de Fluidos (con la importante excepción de las Máquinas Hidráulicas, que no se consideran aquí porque suele constituir un curso aparte en algunas ramas de la Ingeniería, existiendo muy buenos textos en español), y otro más avanzado donde, el alumno interesado, puede atisbar otros aspectos interesantes de la Mecánica de Fluidos.

ISBN 84-7496-897-6



UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

SERVICIO de PUBLICACIONES
Universidad de Málaga