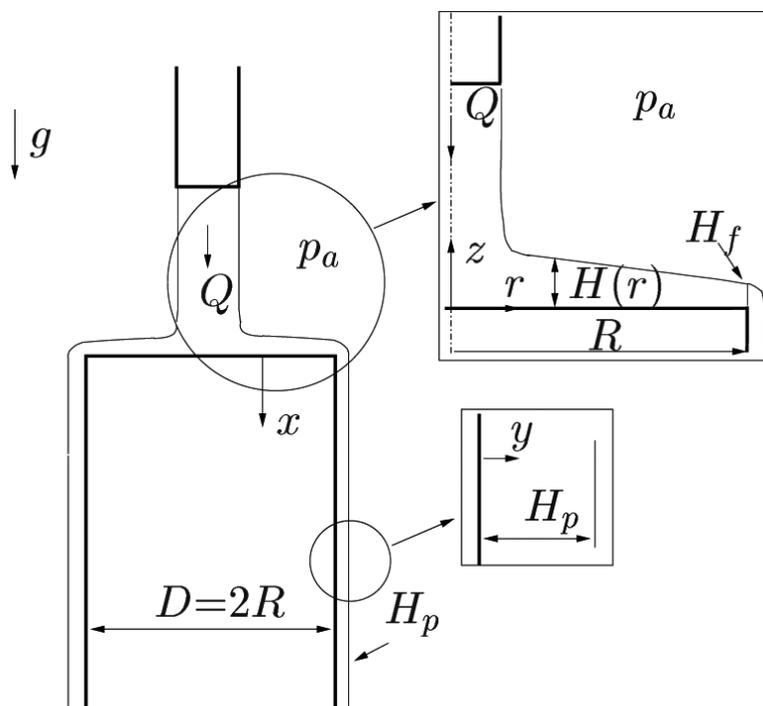


**PROBLEMAS RESUELTOS
DE MECÁNICA DE FLUIDOS**



Este libro es una recopilación de problemas resueltos de Mecánica de Fluidos. Se han seleccionado una serie de problemas típicos de cada una de las diferentes materias que se desarrollan en el libro *Mecánica de Fluidos* (manual número 40 de esta misma colección). La mayoría de los problemas provienen de exámenes que se han venido poniendo en la asignatura Mecánica de Fluidos en la Universidad de Málaga, aunque se han añadido algunos otros que los complementan. Además de la exposición detallada de los pasos que conducen a la resolución de cada problema, siempre que ha sido posible se ha añadido información complementaria tendente a enriquecer la formación fluidomecánica.

**RAMÓN FERNÁNDEZ FERIA
CARLOS DEL PINO PEÑAS
JOAQUÍN ORTEGA CASANOVA**

**PROBLEMAS RESUELTOS
DE MECÁNICA DE FLUIDOS**

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES

2017

Segunda edición: junio 2017

© Los autores

© UMA editorial

Bulevar Louis Pasteur, 30 (Campus de Teatinos)

29071 Málaga

www.uma.es/servicio-publicaciones-y-divulgacion-cientifica

Diseño de colección: J. M. Mercado

Maquetación: Los autores

Colección: Manuales

ISBN: 978-84-9747-822-9

Esta obra está editada en papel.



Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional.

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la Ley.

Este libro es una recopilación de problemas resueltos de Mecánica de Fluidos. Se han seleccionado una serie de problemas típicos de cada una de las diferentes materias que se desarrollan en el libro *Mecánica de Fluidos* (manual número 40 de esta misma colección). Para evitar duplicidad, se hace referencia a las ecuaciones y a las secciones de ese libro mediante el acrónimo MF cada vez que es necesario. Así, (MF22.13) hace referencia a la ecuación (22.13) del citado manual, mientras que MF §22.2 hace referencia a la sección 22.2 del mismo.

La mayoría de los problemas provienen de exámenes que se han venido poniendo en los últimos años en la asignatura Mecánica de Fluidos de la titulación Ingeniero Industrial de la Universidad de Málaga, aunque se han añadido algunos otros que los complementan. Cada problema se presenta con el suficiente detalle para que los estudiantes de Ingeniería que cursen la materia de Mecánica de Fluidos no tengan ninguna dificultad en seguir su resolución. Además de la exposición detallada de los pasos que conducen a la resolución de cada problema, siempre que ha sido posible se ha añadido información complementaria, de manera que el alumno enriquezca su formación fluidomecánica, e ingenieril en general. Algunos de los problemas se han incluido con este fin.

Nuestro agradecimiento a Aurora Mateo Cid, Luis Parras Anguita, Sebastián Martín Rivas y José Luis Rico Díaz por la revisión y las sugerencias realizadas en la edición de este libro.

Málaga, 2006.

En la presente reimpresión se han corregido las erratas detectadas en la edición de 2006. Nuestro agradecimiento al profesor Ignacio González Loscertales por haber contribuido a la detección de algunas erratas de la primera edición.

Málaga, 2010.

En esta nueva edición se ha reescrito parte de la solución de algunos problemas, se ha añadido uno nuevo en el capítulo 7 y se han corregido unas pocas erratas que todavía quedaban en la reimpresión de 2010.

Málaga, 2017.

Índice general

Índice general	5
1. Coordenadas y cinemática	7
2. Ecuaciones en forma integral	23
3. Análisis dimensional y semejanza física	41
4. Fluidostática y tensión superficial	53
5. Flujos viscosos de líquidos y lubricación	61
6. Flujos con $Re \ll 1$ y en medios porosos	97
7. Flujos ideales y ondas de choque	117
8. Ondas sonoras	153
9. Capa límite laminar	161
10. Flujo turbulento de líquidos en conductos	167
11. Flujo compresible y turbulento en conductos	199

Capítulo 1

Coordenadas y cinemática

P.1.1 Coordenadas curvilíneas bidimensionales sobre una superficie arbitraria

Para describir el flujo bidimensional sobre una superficie sólida, que en coordenadas cartesianas (X, Y) viene dada por la curva $Y = F(X)$, se desea utilizar coordenadas curvilíneas (x, y) , donde x es la coordenada a lo largo de la curva e y es la coordenada normal a la misma (ver figura 1.1).

Si $\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$ es un vector en estas nuevas coordenadas curvilíneas, halle las expresiones de:

1. $\nabla \cdot \vec{v}$,
2. $\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v}$,
3. $\nabla^2 \vec{v}$,
4. $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$.

Escriba estas expresiones en términos de x , y y $\partial\theta/\partial x \equiv \theta_x$, donde $\theta(x)$ es el ángulo que forma la curva $Y = F(X)$ con el eje X , expresado en función de la coordenada x a lo largo de la curva.

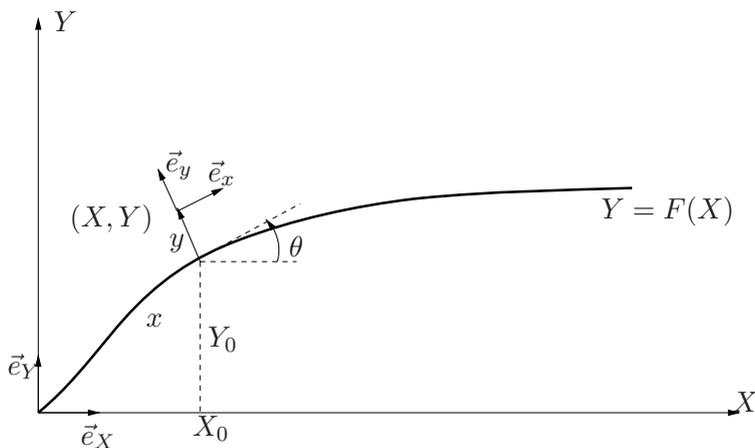


Figura 1.1: Coordenadas curvilíneas bidimensionales sobre una curva arbitraria

Solución.

La descripción del movimiento bidimensional de la manera solicitada es relevante, por ejemplo, para formular el movimiento bidimensional de capa límite sobre una superficie arbitraria.

Para hallar las funciones de escala (MF1.4), expresamos el vector posición $\vec{x} = X\vec{e}_X + Y\vec{e}_Y$ de un punto genérico (X, Y) en términos de sus coordenadas curvilíneas (x, y) y de su proyección X_0 sobre la curva [$Y_0 = F(X_0)$, ver figura 1.1]:

$$\vec{x} = [X_0 - y \operatorname{sen} \theta] \vec{e}_X + [F(X_0) + y \operatorname{cos} \theta] \vec{e}_Y, \quad (1.1)$$

donde tanto X_0 como θ son funciones de x , que verifican

$$\theta = \tan^{-1}[F'(X_0)], \quad \left(\frac{\partial X_0}{\partial x} \right)_{X=X_0} = \operatorname{cos} \theta, \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=X_0} = \frac{F''(X_0)}{1 + F'(X_0)^2} = F''(X_0) \operatorname{cos}^2 \theta, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\theta}{dx} \equiv \theta_x = \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=X_0} \left(\frac{ds}{dX_0} \right)^{-1} = \frac{F''(X_0)}{[1 + F'(X_0)^2]^{3/2}}, \quad (1.4)$$

donde las primas representan derivadas con respecto a X_0 . Por tanto, teniendo en cuenta además que

$$\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_X + \operatorname{sen} \theta \vec{e}_Y, \quad \vec{e}_y = -\operatorname{sen} \theta \vec{e}_X + \cos \theta \vec{e}_Y, \quad (1.5)$$

se tiene

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = \cos \theta (1 - y\theta_x) \vec{e}_X + \operatorname{sen} \theta (1 - y\theta_x) \vec{e}_Y = (1 - y\theta_x) \vec{e}_x, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial y} = -\operatorname{sen} \theta \vec{e}_X + \cos \theta \vec{e}_Y = \vec{e}_y, \quad (1.7)$$

de donde

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{x}}{\partial y} dy \equiv h_x dx \vec{e}_x + h_y dy \vec{e}_y, \quad (1.8)$$

$$h_x = 1 - y\theta_x \equiv J, \quad h_y = 1. \quad (1.9)$$

Observe que $J(x, y) = 1 - y\theta_x$ es el Jacobiano de la transformación de coordenadas $(X, Y) \mapsto (x, y)$ (1.1).

1. De acuerdo con (MF1.9) y (1.9),

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{h_x h_y} \left[\frac{\partial(h_y v)}{\partial x} + \frac{\partial(h_x v)}{\partial y} \right] = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(Jv)}{\partial y} \right]. \quad (1.10)$$

2. Haciendo uso de (M1.10),

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{v} = \frac{\vec{e}_z}{h_x h_y} \left[\frac{\partial(h_y v)}{\partial x} - \frac{\partial(h_x u)}{\partial y} \right] = \frac{\vec{e}_z}{J} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial(Ju)}{\partial y} \right], \quad (1.11)$$

donde \vec{e}_z es el vector unitario perpendicular al plano (x, y) .

3. De acuerdo con (MF1.12)-(MF1.14), teniendo en cuenta (1.5) y (1.9), se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v} &= \frac{1}{J} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial J}{\partial y} \right) \vec{e}_x \vec{e}_x \\ &+ \frac{1}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial J}{\partial y} \right) \vec{e}_x \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y \vec{e}_x + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_y \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= \nabla \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\vec{e}_x}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - v \theta_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[J \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\theta_x}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + u \theta_x \right) \right\} \\ &+ \frac{\vec{e}_y}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{J} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + u \theta_x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[J \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\theta_x}{J} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - v \theta_x \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

4. El producto escalar de \vec{v} por el operador gradiente (MF1.8) se escribe

$$\vec{v} \cdot \nabla = \frac{u}{J} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.14)$$

de donde [o, alternativamente, haciendo uso de (MF1.15)]

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left[\frac{u}{J} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{uv \theta_x}{J} \right] \vec{e}_x + \left[\frac{u}{J} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u^2 \theta_x}{J} \right] \vec{e}_y. \quad (1.15)$$

P.1.2 Trayectorias, líneas de corriente, trazas

Un movimiento bidimensional viene dado por el siguiente campo de velocidad en coordenadas cartesianas (x, y) :

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y, \quad u = -\omega y + bt, \quad v = \omega x, \quad (1.16)$$

donde ω y b son constantes. Se pide:

1. Trayectoria de la partícula fluida que en el instante $t = 0$ pasa por el origen de coordenadas. Dibuje la senda.
2. Líneas de corriente que pasan por el origen.
3. Trazas que salen del origen.

Solución.

1. De (MF3.3) y (1.16), las ecuaciones y condiciones iniciales que describen la trayectoria solicitada son

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + bt, \quad (1.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x, \quad (1.18)$$

$$x(t=0) = y(t=0) = 0. \quad (1.19)$$

Si derivamos (1.17) con respecto al tiempo y sustituimos (1.18), se obtiene la siguiente ecuación lineal de segundo orden para $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = b, \quad (1.20)$$

cuya solución general se escribe

$$x = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \operatorname{cos} \omega t + \frac{b}{\omega^2}, \quad (1.21)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Sustituyendo en (1.18) e integrando, se obtiene

$$y = -C_1 \operatorname{cos} \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{b}{\omega} t. \quad (1.22)$$

La solución que satisface la condición inicial (1.19) corresponde a $C_1 = 0$ y $C_2 = -b/\omega^2$. Es decir,

$$x = \frac{b}{\omega^2}(1 - \operatorname{cos} \omega t), \quad (1.23)$$

$$y = \frac{b}{\omega^2}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t). \quad (1.24)$$

Como se observa en la figura 1.2, esta trayectoria corresponde a una senda con forma de *cicloide* de periodo $2\pi/\omega$.

2. Las líneas de corriente, o curvas paralelas en todos sus puntos y en cada instante al vector velocidad, vienen descritas por la ecuación diferencial (MF3.6)

$$\frac{dx}{-\omega y + bt} = \frac{dy}{\omega x}. \quad (1.25)$$

La integración de esta ecuación es inmediata, proporcionando

$$\omega \frac{x^2}{2} = -\omega \frac{y^2}{2} + bty + C,$$

donde C es una constante de integración. Las líneas de corriente que pasan por el origen de coordenadas $x = y = 0$ corresponden a $C = 0$, y se pueden escribir como

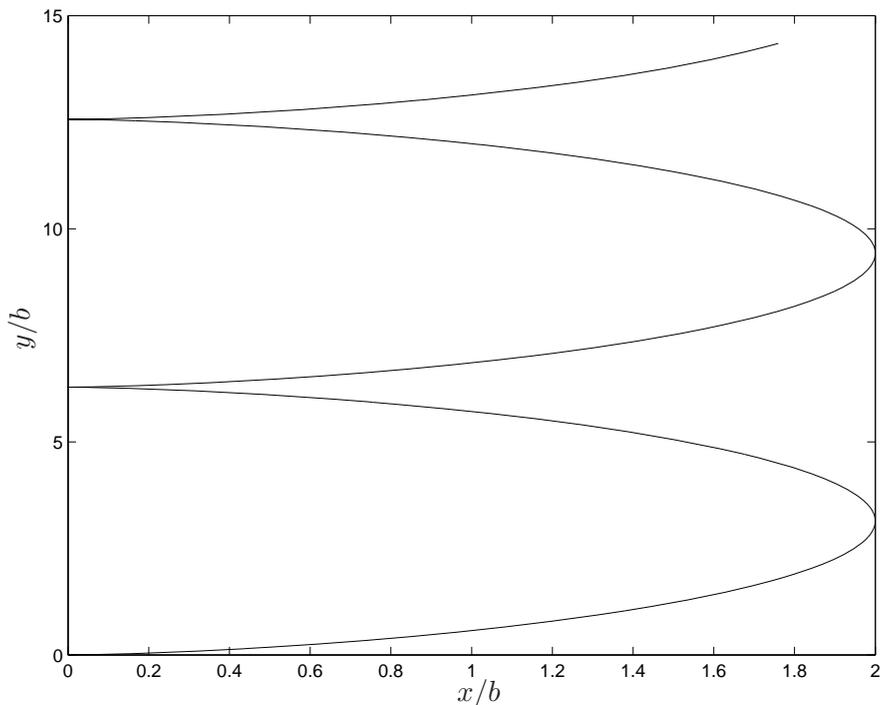


Figura 1.2: Senda correspondiente a (1.23)-(1.24) para $\omega = 1$

$$x^2 + \left(y - \frac{bt}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{bt}{\omega}\right)^2, \quad (1.26)$$

que representan circunferencias centradas en $(x = 0, y = bt/\omega)$, con radios que aumentan linealmente con el tiempo, $R = bt/\omega$, de forma que siempre pasan por el origen.

3. Las trazas que pasan por el origen satisfacen el mismo par de ecuaciones diferenciales (1.17)-(1.18) que las trayectorias, pero sustituyendo las condiciones iniciales (1.19) por

$$x(t = \tau) = y(t = \tau) = 0, \quad (1.27)$$

donde τ es el parámetro que define la curva. Por tanto, la solución es la misma que la dada por (1.21)-(1.22), pero con $C_1 = b(\omega\tau \cos \omega\tau - \text{sen } \omega\tau)/\omega^2$ y $C_2 = b(\omega\tau \text{ sen } \omega\tau - \cos \omega\tau)/\omega^2$, quedando, tras algunas operaciones trigonométricas, como

$$x = \frac{b}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - \tau) + \omega\tau \text{ sen } \omega(t + \tau)] , \quad (1.28)$$

$$y = \frac{b}{\omega^2} [\omega t - \text{sen } \omega(t - \tau) - \omega\tau \cos \omega(t + \tau)] . \quad (1.29)$$

Como se puede apreciar, la senda que pasa por el origen no coincide con ninguna de las líneas de corriente, ni con ninguna de las trazas, que en los sucesivos instantes pasan por el origen.

P.1.3 Cinemática de un modelo de torbellino

En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , el campo de velocidad de un determinado movimiento fluido puede escribirse como

$$\vec{v} = -ar\vec{e}_r + \frac{b}{r} \left(1 - e^{-a^2r^2}\right) \vec{e}_\theta + 2az\vec{e}_z, \quad (1.30)$$

donde a y b son constantes.¹ Se pide:

1. ¿Corresponde (1.30) a un flujo incompresible?
2. ¿Puede definirse una función de corriente? En caso afirmativo, hállela.
3. Hallen la velocidad angular de giro como sólido rígido de una partícula fluida situada en el origen de coordenadas.

Solución.

1. Haciendo uso de (MF1.18),

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{1}{r}(-2ar) + 0 + 2a = 0, \quad (1.31)$$

luego, efectivamente, (1.30) corresponde a un flujo incompresible.

2. Aunque el flujo es tridimensional, debido a que $\partial v_\theta / \partial \theta = 0$, sólo existen dos términos no nulos en la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, por lo que se puede definir una función de corriente Ψ para el movimiento meridional (v_r, v_z) , de tal manera que $\nabla \cdot \vec{v}$ es siempre idénticamente nulo:

$$v_r \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (1.32)$$

¹Este campo de velocidad corresponde, aunque *no exactamente*, al denominado vórtice de Burgers. Ver, por ejemplo, Acheson (1990). Todas las referencias citadas en este libro están en la lista bibliográfica al final de MF.

$$v_z \equiv -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (1.33)$$

Sustituyendo v_r de (1.30) en (1.32), e integrando, se tiene

$$\Psi = -ar^2z + C(r),$$

donde C es una función arbitraria de r ; sustituyendo esta expresión, junto con v_z de (1.30), en (1.33), se obtiene $dC/dr = 0$, por lo que C es una constante, que podemos tomar nula sin pérdida de generalidad. Por tanto, la función de corriente del movimiento meridional es

$$\Psi(r, z) = -ar^2z. \quad (1.34)$$

Es decir, las líneas de corriente en los planos (r, z) vienen dadas por las curvas $z = \text{constante}/r^2$.

3. La velocidad angular de giro como sólido rígido de una partícula fluida viene dada por la mitad de la vorticidad en el punto donde se encuentra la partícula fluida (MF4.7). Haciendo uso de (MF1.19) y sustituyendo (1.30), las componentes del vector vorticidad $\vec{\omega}$ vienen dadas por

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0, \quad (1.35)$$

$$\omega_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \quad (1.36)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{b}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - e^{-a^2r^2}\right) = 2a^2be^{-a^2r^2}. \quad (1.37)$$

Sustituyendo en el origen, la velocidad angular como sólido rígido queda

$$\frac{1}{2}\vec{\omega} = a^2 b \vec{e}_z, \text{ en } r = 0. \quad (1.38)$$

P.1.4 Movimiento en el entorno de un punto en el flujo de Couette

El movimiento de un líquido entre dos placas planas, paralelas e infinitas, producido por el movimiento relativo de una de ellas respecto a la otra con velocidad V según el eje x viene dado por el campo de velocidad $u/V = y/h$, donde u es la velocidad en la dirección del eje x , y es la distancia perpendicular a las placas medida a partir de la placa fija y h es la distancia entre las placas.²

Calcular:

1. Líneas de corriente.
2. Divergencia del vector velocidad.
3. Vector vorticidad.
4. Tensor de velocidad de deformación y velocidad de dilatación cúbica unitaria.
5. Dibuje la superficie fluida en que se transforma un cuadrado de lado δl , orientado paralelamente a los ejes x e y , al cabo de un tiempo δt . Indicar cómo contribuyen la vorticidad y la velocidad de deformación a la forma final de la superficie fluida.

Solución.

En las coordenadas de la figura 1.3, el campo de velocidad de este flujo unidireccional se escribe

$$\vec{v} = \frac{Vy}{h} \vec{e}_x. \quad (1.39)$$

1. Las líneas de corriente vienen descritas por la ecuación (MF3.6)

²Este movimiento se denomina flujo o corriente de *Couette* (ver figura 1.3). También se suele denominar con este nombre al movimiento de un líquido entre dos cilindros coaxiales que giran relativamente, por ello, para diferenciarlo, a veces se denomina flujo plano de Couette.

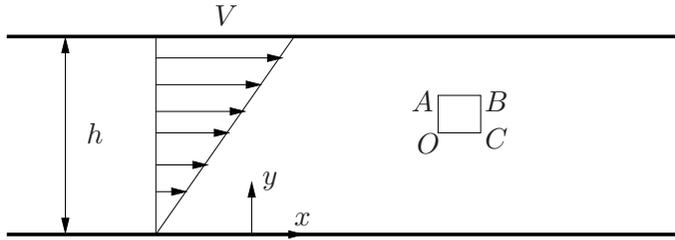


Figura 1.3: Flujo de Couette plano. Se dibuja también un elemento cuadrado genérico cuyo movimiento relativo se considera en la figura 1.4

$$\frac{dx}{Vy/h} = \frac{dy}{0}, \quad (1.40)$$

cuya solución corresponde a rectas paralelas al eje x ,

$$y = \text{constante}. \quad (1.41)$$

2. El movimiento corresponde a un flujo incompresible, pues su divergencia es nula. En efecto, si denominamos $u = Vy/h$ a la componente de la velocidad según el eje x y $v = 0$ a la componente según y , la divergencia se escribe

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.42)$$

3. El rotacional viene dado por

$$\nabla \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Vy/h & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{V}{h} \vec{e}_z, \quad (1.43)$$

donde z es la coordenada perpendicular al plano de la figura 1.3.

4. El tensor gradiente de velocidad tiene sólo una componente no nula:

$$\nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ V/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.44)$$

por tanto, de acuerdo con (MF4.5), el tensor de velocidad de deformación viene dado por

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{1}{2}[\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & V/h & 0 \\ V/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

La velocidad de dilatación cúbica unitaria es nula de acuerdo con (1.42).

5. Para ver cómo se deforma un cuadrado de lado δl , calculamos, de acuerdo con (MF4.15), el desplazamiento relativo al punto O de cada uno de los vértices A , B y C del cuadrado (ver figura 1.4) después de un intervalo de tiempo δt :

$$\vec{r} \cdot \nabla\vec{v}\delta t = \left[\frac{1}{2}(\nabla \wedge \vec{v}) \wedge \vec{r} + \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^T) \cdot \vec{r} \right] \delta t, \quad (1.46)$$

donde el primer sumando del lado derecho corresponde a un giro como sólido rígido en torno al punto O y el segundo a una deformación del elemento de volumen (superficie en este movimiento plano), sin cambio de volumen (superficie) pues el movimiento es incompresible.

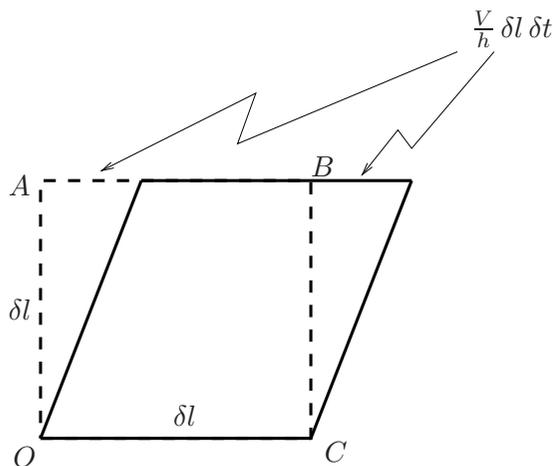


Figura 1.4: Superficie en que se transforma un cuadrado genérico de lado δl

- Punto A , coordenadas relativas a O : $\vec{r} = (0, \delta l)$.

$$\vec{r} \cdot \nabla \vec{v} \delta t = \left[\frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_x + \frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_x \right] \delta t. \quad (1.47)$$

Luego este punto se desplaza a lo largo del eje x una longitud, relativa al punto O , $V(\delta l)(\delta t)/h$, la mitad de la cual se debe al giro del elemento cuadrado alrededor del punto O y la otra mitad a la deformación del cuadrado.

- Punto B , coordenadas relativas a O : $\vec{r} = (\delta l, \delta l)$.

$$\vec{r} \cdot \nabla \vec{v} \delta t = \left[\left(\frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_x - \frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_y \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_x + \frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_y \right) \right] \delta t. \quad (1.48)$$

En este caso, la componente del desplazamiento en la dirección y debida al giro se cancela con la correspondiente a la deformación, de manera que el punto sólo se desplaza a lo largo del eje x , siendo la longitud del desplazamiento la misma que la del punto A .

- Punto C , coordenadas relativas a O : $\vec{r} = (\delta l, 0)$.

$$\vec{r} \cdot \nabla \vec{v} \delta t = \left[-\frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_y + \frac{1}{2} \frac{V}{h} \delta l \vec{e}_y \right] \delta t = \vec{0}. \quad (1.49)$$

Este punto permanece por tanto fijo en relación al punto O , pues la componente del desplazamiento debida al giro se cancela con la correspondiente a la deformación.

La figura 1.4 muestra el desplazamiento relativo de cada vértice y la superficie final en la cual se transforma el cuadrado. Por supuesto, al ser

el flujo incompresible, el área del rombo final coincide con la del cuadrado original.

Capítulo 2

Ecuaciones en forma integral

P.2.1 Carrito a reacción

Un depósito de sección A que contiene un líquido de densidad ρ descarga a través de un pequeño conducto de diámetro D situado en la parte inferior del mismo. El depósito posee unas ruedas debajo de la tapa inferior. Se desea calcular la fuerza F que se tiene que ejercer (ver figura 2.1) para que el depósito no se desplace como consecuencia de la descarga. Para ello utilicen las ecuaciones en forma integral y supongan que el movimiento se comporta como ideal en la descarga. Calculen F en función del tiempo y de los datos del problema suponiendo que $H(t = 0) = H_0$.

Solución.

El carro objeto de estudio está fijo debido a que la fuerza F es la necesaria para impedirle el movimiento al que se vería sometido como reacción a la descarga que está teniendo lugar por su parte inferior. Por tanto, por el principio de acción y reacción, esta fuerza F será igual, pero con el signo cambiado, a la componente horizontal de la fuerza que el fluido ejerce sobre las paredes del carro:

$$F = \left(- \int_{S_p} (p - p_a) \vec{n} dS + \int_{S_p} \vec{\tau}' \cdot \vec{n} dS \right) \cdot \vec{e}_x, \quad (2.1)$$

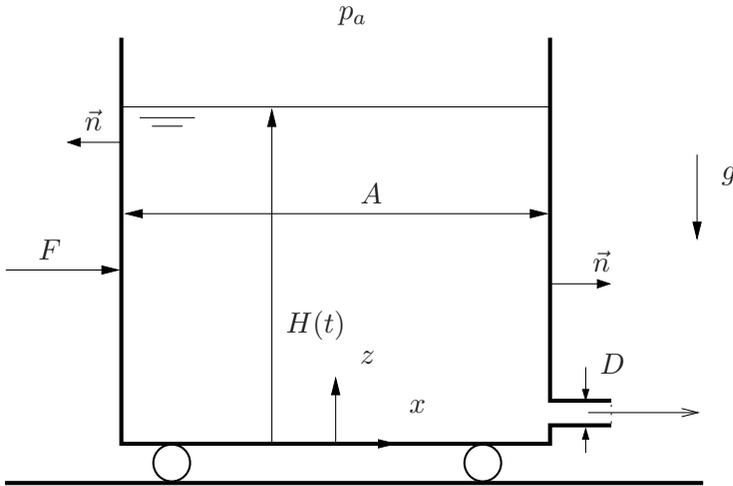


Figura 2.1: Sistema a estudiar y volumen de control

donde \vec{n} es el vector unitario hacia afuera del volumen de control del carro, p_a es la presión atmosférica, S_p es la superficie sólida (pared) del carro mojada por el fluido, p es la presión del fluido y $\vec{\tau}$ su tensor de esfuerzos viscosos. Es fácil intuir que la contribución más importante en F es la debida a la fuerza de presión neta $p - p_a$, pero en la formulación con ecuaciones integrales que se verá a continuación no se desprecia la posible contribución de las fuerzas viscosas sobre S_p . Así, para calcular F debemos obtener la fuerza que el líquido ejerce sobre las paredes sólidas del carro, que se calculará usando las ecuaciones de conservación de masa (MF6.2), de cantidad de movimiento (MF7.21) y de energía (MF8.12)-(MF8.13) en forma integral.

El volumen de control en el que se van a escribir los principios de conservación consiste en el volumen del líquido que llena el carro y que va variando con el tiempo (ver figura 2.1). Su volumen es aproximadamente $V_c = AH(t)$, si descontamos el pequeño volumen del conducto de salida. Su superficie se va a dividir en tres partes: la superficie pared (S_p), la superficie libre superior (S_l) y la superficie de salida del líquido (S_s). Esta última

superficie es la única donde hay flujo convectivo, con velocidad uniforme $\vec{v}_s = V\vec{e}_x$, superficie $A_s = \pi D^2/4$ y normal $\vec{n}_s = \vec{e}_x$.

La ecuación de conservación de la masa aplicada al volumen de control mencionado se escribe

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta que se trata de un líquido incompresible ($\rho = \text{constante}$), que $\vec{v} = \vec{v}_c = 0$ en S_p , $\vec{v} = \vec{v}_c$ en S_l y las magnitudes uniformes en la sección de salida S_s , con $\vec{v}_c = 0$ en S_s , la ecuación de conservación de la masa integrada se escribe

$$A \frac{dH}{dt} + V \frac{\pi D^2}{4} = 0. \quad (2.3)$$

Esta primera ecuación relaciona la altura del líquido, en particular, su variación con el tiempo, con la velocidad de salida del chorro.

Antes de escribir la ecuación integral de cantidad de movimiento para obtener la fuerza que se nos pide, es conveniente escribir la ecuación integral de la energía para calcular una segunda relación entre V y H . Aplicada al volumen de control anterior, la ecuación de conservación de la energía total (MF8.12)-(MF8.13) se escribe

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = \\ & - \int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{f} \cdot \vec{n} dS - \int_{V_c} \rho g \vec{v} \cdot \vec{e}_z dV - \int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_{V_c} Q_r dV, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $e = c_v T$ es la energía interna por unidad de masa y en el quinto término ya se ha tenido en cuenta que la única fuerza másica es la gravitatoria en la dirección vertical z , $\vec{f}_m = \vec{g} = -g\vec{e}_z$. Los términos sexto y séptimo son nulos

pues se supone que el sistema está aislado térmicamente del exterior y no existe ninguna otra fuente de calor.

Del primer término solo es relevante la energía interna, pues en la mayor parte del depósito la velocidad es nula (salvo muy cerca de la salida). Como todas las propiedades son uniformes en el depósito (salvo en esa pequeña región cerca de la salida), se tiene

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV \simeq A \rho c_v T \frac{dH}{dt}. \quad (2.5)$$

Del segundo término, solo la integral sobre la superficie de salida S_s es no nula, pues es la única que es atravesada por el líquido:

$$\int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = \rho \left(c_v T + \frac{V^2}{2} \right) V \frac{\pi D^2}{4}. \quad (2.6)$$

Obsérvese que se ha supuesto que la temperatura a la salida es la misma que la temperatura T del líquido en el resto del depósito, lo cual es coherente con el hecho de que se está despreciando todo intercambio o fuente de calor. Como consecuencia, el primer término de (2.6) cancela con (2.5) en virtud de la conservación de la masa (2.3).

El término de trabajo de las fuerzas de presión es distinto de cero en la superficie de salida y en la superficie libre, pues en la pared $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Teniendo en cuenta que en ambas superficies la presión es la atmosférica, este término se cancela obviamente en virtud también de la conservación de la masa:

$$- \int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -p_a \frac{dH}{dt} A - p_a V \frac{\pi D^2}{4} = 0. \quad (2.7)$$

El término de trabajo de las fuerzas viscosas es nulo en la pared del carrito S_p al ser la velocidad nula, y despreciable en las superficies libre y de salida por ser muy pequeños los gradientes de velocidad (se está suponiendo que la velocidad es uniforme en la sección de salida, lo cual es equivalente a suponer

que el número de Reynolds es muy grande a la salida). Queda, por tanto, solo el término de trabajo de las fuerzas gravitatorias. La velocidad del fluido en el depósito, aunque pequeña comparada con la de salida, juega un papel relevante aquí. Suponiendo que esa velocidad es aproximadamente uniforme en el depósito, como las demás propiedades fluidas, e igual a $(dH/dt)\vec{e}_z$, se tiene

$$-\int_{V_c} \rho g \vec{v} \cdot \vec{e}_z dV \simeq -\rho g \frac{dH}{dt} H A. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.5)-(2.8) en (2.4) y haciendo uso de nuevo de (2.3) se llega a la siguiente relación

$$V = \sqrt{2gH}. \quad (2.9)$$

Esta relación entre la velocidad de descarga del líquido y su altura por encima de la salida es la conocida como *ley de Torricelli*, que como se ve procede del balance entre la energía cinética del líquido a la salida y el trabajo de las fuerzas gravitatorias que hacen salir al líquido del depósito. Se puede derivar mucho más fácilmente aplicando la ecuación de Bernoulli (MF19.17) al movimiento, considerado como ideal, en una línea de corriente desde un punto cercano a la descarga en el que la presión es aproximadamente la hidrostática por ser la velocidad muy pequeña comparada con V y otro punto en la sección de salida (ver capítulo 7 para algunos ejemplos de aplicación de esta ecuación). Pero, como se ve, procede de un principio físico más básico como es el de la conservación de la energía y, de hecho, Evangelista Torricelli es muy anterior a Johann y a Daniel Bernoulli.

Introduciendo (2.9) en (2.3) la ecuación diferencial para la evolución de H con el tiempo se escribe como

$$A \frac{dH}{dt} + \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH} = 0. \quad (2.10)$$

Integrando esta ecuación e imponiendo la condición inicial $H(t = 0) = H_0$, se llega a la expresión

$$H(t) = \left(\sqrt{H_0} - Kt \right)^2, \quad \text{con} \quad K = \frac{\pi D^2 \sqrt{2g}}{8A}. \quad (2.11)$$

Para obtener la fuerza F que se está buscando se aplicará la ecuación de cantidad de movimiento (MF7.21) al mismo volumen de control,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho \vec{v} dV + \int_{S_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} dS = \\ - \int_{S_c} (p - p_a) \vec{n} dS + \int_{S_c} \vec{\tau} \cdot \vec{n} dS + \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV. \end{aligned} \quad (2.12)$$

El primer término de esta ecuación es muy pequeño y se puede despreciar por el mismo motivo que no se ha tenido en cuenta la energía cinética en el primer término de (2.4): la velocidad es muy pequeña en todo el volumen de control comparada con la velocidad de salida V , excepto en una pequeña región en torno a la sección de descarga que, al ser pequeña en comparación con el resto del volumen, tiene una aportación casi despreciable a la ecuación (2.12).¹

El segundo término solo tiene contribución en la sección de salida S_s , pues $\vec{v} = \vec{v}_c = 0$ en S_p y $\vec{v} = \vec{v}_c$ en S_l . En S_s vale ($\vec{v}_c = 0$ en S_s)

$$\int_{S_s} \rho \vec{v}_s \vec{v}_s \cdot \vec{n}_s dS = \rho \vec{v}_s V \frac{\pi D^2}{4} = \rho V^2 \frac{\pi D^2}{4} \vec{e}_x. \quad (2.13)$$

El tercer término, que representa la fuerza de presión que se está ejerciendo sobre la superficie del volumen de control, es nulo en las secciones que están sometidas a presión atmosférica (superficie libre y superficie de salida), y es distinto de cero sobre las paredes del carro. Esta integral sobre S_p representa la fuerza de presión, desconocida, que las paredes ejercen sobre el fluido:

¹En cualquier caso, su contribución principal sería a la componente vertical de la ecuación de cantidad de movimiento, mientras que aquí interesa la componente horizontal. Ver más abajo.

$$-\int_{S_p} (p - p_a) \vec{n} dS \equiv \vec{F}_p. \quad (2.14)$$

El cuarto término de la ecuación (2.12), referente a las fuerzas viscosas sobre la superficie del volumen de control, es prácticamente nulo en la superficie libre y muy pequeño en la sección de descarga, donde se considera el movimiento ideal (número de Reynolds muy alto), mientras que la contribución sobre las paredes sólidas se suma a la de (2.14) para proporcionar la fuerza total \vec{F} que las paredes ejercen sobre el fluido. La componente x de esta fuerza total, dada por (2.1), es, por tanto, el valor $F \equiv F_x$ que se está buscando. Como ya se ha comentado, $\vec{F} \simeq \vec{F}_p$, pues la contribución de las fuerzas viscosas es muy pequeña en este caso, pero no se hace ninguna aproximación aquí en ese sentido (solo se desprecian las fuerzas viscosas en la sección de salida y en la superficie libre).

En cuanto al último término, que representa las fuerzas másicas en el volumen de control, teniendo en cuenta que solo existe fuerza gravitatoria como se ha comentado para la ecuación de la energía, $\vec{f}_m = \vec{g} = -g\vec{e}_z$, se tiene

$$\int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV \simeq -\rho g A H \vec{e}_z. \quad (2.15)$$

Como se observa, esta última fuerza en el volumen de control proviene del peso total del líquido, tiene la dirección del eje z y no contribuirá a la componente x de \vec{F} que se está buscando. Su valor debe ser igual, pero cambiado de signo, a la componente z de esta fuerza, $F_z = \rho g A H$.²

Agrupando todos los términos no nulos de la ecuación de cantidad de movimiento y quedándonos solo con la componente x , se tiene:

²De hecho, a este peso habría que añadir la contribución del primer término de (2.12) que se ha despreciado, y que representa la pequeña fuerza asociada a la variación de cantidad de movimiento vertical. Ya cambiada de signo, su valor es aproximadamente igual a $-\rho A d[H(dH/dt)]/dt$, que habría que añadir a F_z .

$$\rho V^2 \frac{\pi D^2}{4} = F. \quad (2.16)$$

Sabiendo que $V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g}(\sqrt{H_0} - Kt)$, la fuerza que se tiene que ejercer para que el depósito no se desplace como consecuencia de la descarga es

$$F(t) = \frac{g\rho\pi D^2}{2} (\sqrt{H_0} - Kt)^2, \quad K = \frac{\pi D^2 \sqrt{2g}}{8A}. \quad (2.17)$$

P.2.2 Aspersor

El aspersor de la figura consta de dos brazos de longitud R y diámetro D que terminan en sendos codos de 90° cuya longitud es despreciable frente a R . Por el centro (punto O) entra un caudal Q constante de un líquido de densidad ρ y, como consecuencia, el aspersor gira con una velocidad angular constante Ω . Suponiendo que debido a la fricción de los cojinetes existe un par resistente en O de valor Γ , calculen, mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la masa y del momento cinético en forma integral, la velocidad angular de giro en función de Q , Γ , ρ y la geometría. ¿Cuál sería la velocidad angular máxima? Desprecien las fuerzas viscosas y las gravitatorias.

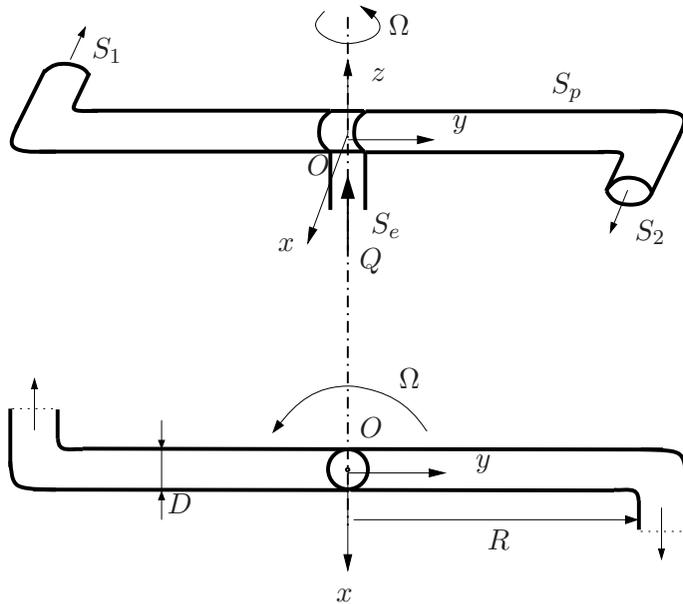


Figura 2.2: Aspersor girando con velocidad angular constante Ω , con indicación del volumen de control

Solución.

Para aplicar las ecuaciones de conservación en forma integral se escogerá como volumen de control el volumen de líquido contenido en el propio aspersor, de

tal modo que este volumen tendrá una entrada (superficie S_e), dos salidas (superficies S_1 y S_2) y las superficies sólidas, paredes, del aspersor (superficie S_p), todas ellas representadas en la figura 2.2. Los ejes del sistema de referencia respecto al cual se particularizarán las ecuaciones de conservación serán unos ejes solidarios al aspersor, que girarán por tanto con velocidad angular Ω (sistema de referencia no inercial), y respecto a los cuales el volumen de control escogido tiene velocidad nula, $\vec{v}_c = 0$. Además, ninguna propiedad fluida, ni el volumen de control elegido, varía con el tiempo, por lo que el proceso será estacionario.

La ecuación de conservación de masa (MF6.2) aplicada sobre el volumen de control indicado, teniendo en cuenta que sólo hay flujo convectivo en las superficies S_e , S_1 y S_2 , y suponiendo que en estas dos últimas superficies la velocidad es uniforme y de valor V , queda como

$$\int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -Q + 2V \frac{\pi D^2}{4} = 0. \quad (2.18)$$

La velocidad de salida del fluido por las boquillas del aspersor es, por tanto,

$$V = \frac{2Q}{\pi D^2}. \quad (2.19)$$

Para escribir de forma correcta la ecuación de conservación del momento cinético (MF7.22) tenemos que tener en cuenta que el sistema de referencia es no inercial, por lo que el vector de fuerzas másicas (MF7.3) vendrá dado por

$$\vec{f}_m = -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}, \quad (2.20)$$

donde se han despreciado los términos gravitatorios por ser un movimiento horizontal, y se ha supuesto que Ω es constante. Teniendo en cuenta que el proceso es estacionario, la ecuación de conservación del momento cinético se puede escribir como

$$\begin{aligned} \int_{S_e} \rho(\vec{v} \wedge \vec{x})\vec{v} \cdot \vec{n}dS &= \int_{V_c} \rho \vec{f}_m \wedge \vec{x}dV \\ - \int_{S_e} (p - p_a)\vec{n} \wedge \vec{x}dS &+ \int_{S_e} (\vec{\tau}' \cdot \vec{n}) \wedge \vec{x}dS.^3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los dos últimos términos de la ecuación, asociados a las fuerzas de presión y a las fuerzas viscosas, sólo son distintos de cero en S_p : la fricción es despreciable a la entrada y a la salida (S_e , S_1 y S_2), pues estamos suponiendo propiedades uniformes en esas secciones, el término de presión en S_1 y S_2 se anula por ser $p = p_a$ y también se anula en S_e por simetría axial. La suma de estos dos términos de presión y fuerzas viscosas en las paredes sólidas (S_p) producen el par necesario para hacer girar el aspersionador. Como la velocidad angular de giro Ω es constante, el par que el fluido ejerce sobre las paredes (¡ojo con el signo!) debe ser igual, pero de sentido opuesto, al par resistente en los rodamientos del aspersionador:

$$- \int_{S_p} \left[-(p - p_a)\vec{n} + \vec{\tau}' \cdot \vec{n} \right] \wedge \vec{x}dS = -\Gamma \vec{e}_z. \quad (2.22)$$

Se pasará a continuación a evaluar los otros dos términos, primero y segundo, de la ecuación (2.21). La componente asociada a S_e del término convectivo, $\int_{S_e} \rho(\vec{v} \wedge \vec{x})\vec{v} \cdot \vec{n}dS$, se anula pues $\vec{v} \wedge \vec{x} = 0$. Sobre S_1 y S_2 éste término vale, respectivamente,

$$\int_{S_1} \rho(\vec{v} \wedge \vec{x})\vec{v} \cdot \vec{n}dS = \int_{S_1} \rho(VR\vec{e}_z)VdS = \frac{\rho V^2 R\pi D^2}{4} \vec{e}_z, \quad (2.23)$$

$$\int_{S_2} \rho(\vec{v} \wedge \vec{x})\vec{v} \cdot \vec{n}dS = \int_{S_1} \rho(VR\vec{e}_z)VdS = \frac{\rho V^2 R\pi D^2}{4} \vec{e}_z. \quad (2.24)$$

³En muchos textos esta ecuación se escribe con \vec{x} multiplicando vectorialmente por la izquierda en cada término, en vez de por la derecha. Para los propósitos de este ejercicio el signo del momento es irrelevante, lo importante es que esta multiplicación vectorial se haga por el mismo lado en todos los términos.

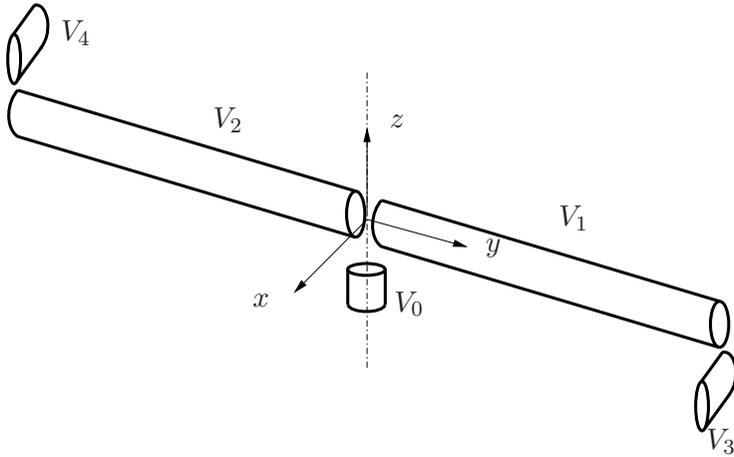


Figura 2.3: División en subvolúmenes del volumen de control inicial

Por último, sobre S_p se anula al ser $\vec{v} = 0$.

El segundo término, teniendo en cuenta el vector de fuerzas másicas dado en (2.20), se escribe

$$\int_{V_c} \rho \vec{f}_m \wedge \vec{x} dV = \int_{V_c} \rho \left(-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right) \wedge \vec{x} dV. \quad (2.25)$$

Para llevar a cabo esta integral se va a dividir el volumen de control en 5 subvolúmenes, indicados en la figura 2.3. Sobre V_1 , $dV = (\pi D^2/4) dy$, $\vec{x} = y\vec{e}_y$, $\vec{v} = V\vec{e}_y$, $\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$, de donde, $-\rho(\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})) \wedge \vec{x} = 0$, $-2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{x} = 2\rho\Omega V y\vec{e}_z$, por lo que

$$\int_{V_1} \rho \vec{f}_m \wedge \vec{x} dV = \int_0^R (2\rho\Omega V y\vec{e}_z) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) dy = \frac{\pi\rho\Omega V R^2 D^2}{4} \vec{e}_z. \quad (2.26)$$

Sobre V_2 la integral sería similar:

$$\int_{V_2} \rho \vec{f}_m \wedge \vec{x} dV = \int_0^R (2\rho\Omega V y\vec{e}_z) \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) dy = \frac{\pi\rho\Omega V R^2 D^2}{4} \vec{e}_z. \quad (2.27)$$

El valor de las integrales sobre los volúmenes V_0 , V_3 y V_4 es despreciable frente a (2.26) y (2.27), ya que éstos constituyen casi todo el volumen de control. Por tanto, el resultado de (2.25) sobre todo el volumen de control queda finalmente

$$\int_{V_c} \rho \vec{f}_m \wedge \vec{x} dV = \pi D^2 \rho \Omega V (R^2/2) \vec{e}_z = Q \rho \Omega R^2 \vec{e}_z. \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.22), (2.23), (2.24) y (2.28) en la ecuación del momento cinético (2.21), se llega a la relación

$$\rho V^2 R \pi (D^2/2) \vec{e}_z = \Gamma \vec{e}_z + Q \rho \Omega R^2 \vec{e}_z. \quad (2.29)$$

Esta ecuación permite obtener el valor de la velocidad angular de giro Ω , constante, para la que el par de fricción hace balance con el momento cinético:

$$\Omega = \frac{2Q}{\pi D^2 R} - \frac{\Gamma}{\rho Q R^2}.$$

El valor máximo de Ω se alcanza cuando la fricción con los cojinetes es nula ($\Gamma = 0$):

$$\Omega_{max} = \frac{2Q}{\pi D^2 R}.$$

P.2.3 Termo eléctrico

Se desea hallar la evolución de la temperatura en un termo eléctrico de volumen V cuando por él circula un caudal constante Q de agua (densidad ρ y coeficiente de capacidad calorífica c), a la que se le suministra un calor por unidad de tiempo constante q . La temperatura a la entrada, T_1 , también permanece constante.

Escriban las ecuaciones de conservación de masa y energía en forma integral. Supongan que las magnitudes fluidas en la entrada y en la salida son uniformes, que el agua en el interior del termo tiene temperatura homogénea (T sólo depende del tiempo t) y velocidad despreciable. Simplifiquen las ecuaciones suponiendo que las secciones de entrada y de salida son iguales, $A_1 = A_2$, que $p_1 = p_2$ y que $T_2 = T$, y hallen $T(t)$ para el caso en el que $T(0) = T_0$. ¿Cuál es el valor estacionario de T ?

Solución.

El volumen de control al que le vamos a aplicar las ecuaciones de conservación es el volumen V del termo eléctrico cerrado por las paredes y por las secciones de entrada y salida. Por tanto, la superficie total del volumen de control es la suma de la sección de entrada A_1 , la de salida A_2 y toda la pared sólida del termo, que denotaremos por A_p (ver figura 2.4). El volumen de control elegido no varía con el tiempo.

El principio de conservación de la masa (MF6.2) aplicado al volumen de control, teniendo en cuenta que el flujo es estacionario y que $\rho = \text{constante}$, se escribe

$$\int_{A_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{A_2} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{A_p} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (2.30)$$

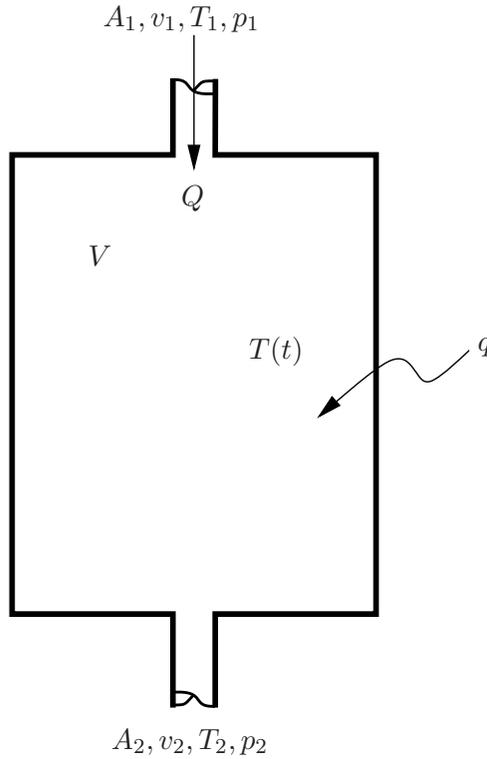


Figura 2.4: Geometría del termo eléctrico

En A_p , $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, mientras que $\vec{v} \cdot \vec{n} = -v_1$ en A_1 y $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_2$ en A_2 . Suponiendo que las propiedades fluidas son uniformes en A_1 y A_2 , se tiene

$$-v_1 A_1 + v_2 A_2 = 0. \quad (2.31)$$

Es decir,

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \equiv Q, \quad (2.32)$$

de donde podemos obtener la velocidad en las secciones de entrada y salida en función del caudal Q y del área de las mismas,

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}. \quad (2.33)$$

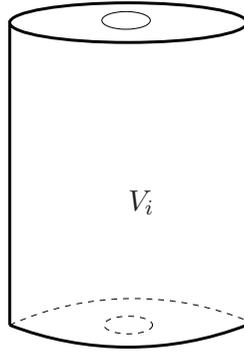


Figura 2.5: División en subvolúmenes

La ecuación de la energía (MF8.13) aplicada al volumen de control se escribe

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} dV - \int_{S_c} p \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{n} dS - \int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n} dS + \int_{V_c} Q_r dV. \quad (2.34)$$

El primer término, suponiendo que las propiedades son espacialmente uniformes en el volumen de control y que la velocidad es pequeña, salvo muy cerca de la entrada y de la salida, queda (ver figura 2.5)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV \simeq \frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho e dV = \frac{d}{dt} \int_{V_i} \rho c T dV = \rho c V \frac{dT}{dt}, \quad (2.35)$$

donde se ha supuesto que $V_i \simeq V$, el volumen del termo.

El segundo término es distinto de cero solo a la entrada y a la salida:

$$\int_{S_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \rho \left(cT_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) (-v_1) A_1 + \rho \left(cT_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2 A_2, \quad (2.36)$$

donde se ha supuesto que todas las propiedades son uniformes en esas secciones.

El término de trabajo de las fuerzas másicas es despreciable pues $\vec{v} \simeq \vec{0}$, excepto muy cerca de la entrada y de la salida.

El término de trabajo de las fuerzas de presión queda

$$-\int_{S_c} p\vec{v} \cdot \vec{n}dS = -\int_{A_1} p\vec{v} \cdot \vec{n}dS - \int_{A_2} p\vec{v} \cdot \vec{n}dS = p_1v_1A_1 - p_2v_2A_2, \quad (2.37)$$

pues $\vec{v} = \vec{0}$ en A_p y las propiedades son uniformes en A_1 y A_2 .

El término de flujo de calor por conducción queda

$$-\int_{S_c} \vec{q} \cdot \vec{n}dS = q, \quad (2.38)$$

siendo q el calor por unidad de tiempo suministrado al fluido, que es conocido.

El término de trabajo de las fuerzas viscosas es despreciable pues es nulo en A_p por ser $\vec{v} = \vec{0}$, y también prácticamente nulo en A_1 y A_2 por ser uniformes las propiedades a la entrada y a la salida. Finalmente, el último término de (2.34) es también nulo.

Recopilando todos los resultados de las diferentes integrales, la ecuación de conservación de la energía da lugar a una ecuación diferencial ordinaria para la temperatura del agua en el termo, que se escribe

$$\begin{aligned} \rho cV \frac{dT}{dt} - \rho \left(cT_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) v_1 A_1 + \rho \left(cT_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) v_2 A_2 = \\ + p_1 v_1 A_1 - p_2 v_2 A_2 + q, \end{aligned} \quad (2.39)$$

con la condición inicial

$$T(t=0) = T_0. \quad (2.40)$$

Haciendo uso de (2.33), se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \rho cV \frac{dT}{dt} - \rho \left(cT_1 + \frac{Q^2}{2A_1^2} \right) Q + \rho \left(cT_2 + \frac{Q^2}{2A_2^2} \right) Q = \\ Q(p_1 - p_2) + q, \end{aligned} \quad (2.41)$$

Suponiendo que $A_1 = A_2$, $p_1 = p_2$ y $T_2 = T$, de (2.31) se obtiene que $v_1 = v_2$, con lo que (2.41) queda como

$$\rho c V \frac{dT}{dt} + \rho c T Q = q + \rho c T_1 Q. \quad (2.42)$$

Es conveniente utilizar las variables adimensionales

$$\theta \equiv \frac{T}{T_1}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_c} \equiv \frac{Qt}{V}, \quad (2.43)$$

con las que (2.42) se escribe

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \theta = 1 + \alpha, \quad \theta(0) = \beta, \quad (2.44)$$

donde los dos parámetros adimensionales son

$$\alpha \equiv \frac{q}{\rho c Q T_1}, \quad \beta \equiv \frac{T_0}{T_1}. \quad (2.45)$$

La solución de (2.44) se escribe

$$\theta(\tau) = (\beta - 1 - \alpha) e^{-\tau} + 1 + \alpha. \quad (2.46)$$

La solución estacionaria ($\tau \rightarrow \infty$) es

$$\theta_e = 1 + \alpha. \quad (2.47)$$

En forma dimensional, la temperatura estacionaria a la que tiende el fluido a la salida del termo es

$$T_e = T_1 + \frac{q}{\rho c Q}. \quad (2.48)$$

Capítulo 3

Análisis dimensional y semejanza física

P.3.1 Caudalímetro

Un caudalímetro de bola (también llamado rotámetro) es un aparato que determina el caudal Q que circula por una instalación mediante la medición de la posición final X a la que queda suspendida una bola, de diámetro d y densidad ρ_s , en el interior de un tubo troncocónico vertical de diámetro característico D por el que circula desde abajo el líquido (la bola permanece en equilibrio en la posición X cuando la fuerza de resistencia que ejerce el líquido sobre ella para el caudal dado se hace igual al peso neto de la bola). Mediante análisis dimensional halle la relación funcional más simple posible entre X y Q . ¿Cómo se simplificaría esa relación cuando el número de Reynolds (basado en d ó en D , ambos diámetros son del mismo orden) es muy pequeño y la densidad de la bola es mucho mayor que la del fluido? Desprecien también el efecto de la gravedad en este último caso. Justificar la hipótesis empleada.

Solución.

El que la bola alcance una posición de equilibrio X más o menos elevada dentro del tubo vertical en el que se encuentra, dependerá de su densidad ρ_s ,

del diámetro d , de la gravedad g , del caudal Q que esté circulando, del diámetro característico del tubo vertical D , además de la viscosidad μ y densidad ρ del fluido cuyo caudal se desea medir. Es decir, la posición X depende de

$$X = X(\rho_s, d, g, Q, D, \mu, \rho). \quad (3.1)$$

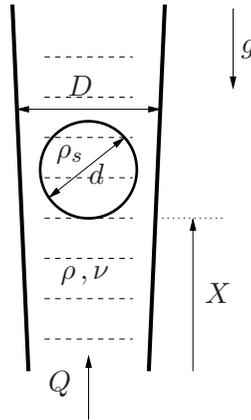


Figura 3.1: Esquema del caudalímetro y los parámetros de los que depende X

Para encontrar la dependencia funcional más simple entre X y Q , se aplicará el Teorema II de Buckingham que, al ser un problema puramente mecánico, permitirá eliminar tres parámetros de la dependencia funcional (3.1), pues existen tres dimensiones independientes. Los tres parámetros que se eliminarán serán los que se elijan como dimensionalmente independientes y deberán contener en sus dimensiones las unidades de masa $[M]$, longitud $[L]$ y tiempo $[t]$. Para llevar a cabo la elección de estas tres magnitudes se tendrá en cuenta que posteriormente se simplificará esta relación de acuerdo con las consideraciones que se dan en el enunciado: diámetros de la bola y del tubo del mismo orden (esto supone que no los podremos escoger como magnitudes dimensionalmente independientes pues entonces aparecería en la función la relación D/d , o su inversa, que serían de orden unidad y no se podría despreciar

su efecto), y se considera también que la gravedad es despreciable, por lo que tampoco se podrá elegir como independiente. De los parámetros que quedan se escogerán, por tanto, la densidad ρ y la viscosidad μ del fluido, y el caudal Q que circula, representando a las unidades de longitud, masa y tiempo. La elección de μ como magnitud dimensionalmente independiente también está justificada por el hecho de que se va a simplificar la expresión final en el límite de número de Reynolds muy pequeño, que sabemos que físicamente significa que las fuerzas viscosas son dominantes, por lo que interesa que la viscosidad aparezca en el parámetro adimensional asociado a X .

Indicando entre corchetes las unidades de las magnitudes, las de las tres escogidas como dimensionalmente independientes son

$$[\mu] = \left[\frac{M}{Lt} \right], \quad (3.2)$$

$$[\rho] = \left[\frac{M}{L^3} \right], \quad (3.3)$$

$$[Q] = \left[\frac{L^3}{t} \right]. \quad (3.4)$$

Las dimensiones del resto de las magnitudes de (3.1) se expresarían como combinación de las tres escogidas. Así, para cada una de las restantes variables se tiene

$$[X] = [L] = [\mu]^{-1} [\rho]^1 [Q]^1, \quad (3.5)$$

$$[d] = [L] = [\mu]^{-1} [\rho]^1 [Q]^1, \quad (3.6)$$

$$[D] = [L] = [\mu]^{-1} [\rho]^1 [Q]^1, \quad (3.7)$$

$$[g] = \left[\frac{L}{T^2} \right] = [\mu]^5 [\rho]^{-5} [Q]^{-3}, \quad (3.8)$$

$$[\rho_s] = \left[\frac{M}{L^3} \right] = [\rho]^1, \quad (3.9)$$

donde los exponentes de las variables dimensionalmente independientes se han ajustado haciendo coincidir las dimensiones a un lado y a otro de las igualdades, teniendo en cuenta (3.2)-(3.4). De esta manera, se pueden definir las siguientes variables adimensionales asociadas a cada una de las magnitudes de (3.1), descontando las seleccionadas como dimensionalmente independientes (3.2)-(3.4):

$$\pi_X = \frac{X}{\rho Q / \mu}, \quad (3.10)$$

$$\pi_{\rho_s} = \frac{\rho_s}{\rho}, \quad (3.11)$$

$$\pi_d = \frac{d}{\rho Q / \mu} = Re_d^{-1}, \quad (3.12)$$

$$\pi_g = \frac{g}{\rho^{-5} Q^{-3} \mu^5}, \quad (3.13)$$

$$\pi_D = \frac{D}{\rho Q / \mu} = Re_D^{-1}, \quad (3.14)$$

donde Re_d y Re_D son los números de Reynolds basados en el diámetro de la bola y del tubo vertical, respectivamente. Si en (3.1) se introducen las variables adimensionales (3.10)–(3.14), de acuerdo con el Teorema II de Buckingham se obtiene la dependencia funcional más simple posible que permitiría conocer la altura de la bola en función del mínimo número posible de parámetros del problema,

$$\pi_X = f(\pi_{\rho_s}, Re_d^{-1}, \pi_g, Re_D^{-1}). \quad (3.15)$$

Si ahora se considera que la densidad de la bola es mucho mayor que la del fluido, $\pi_{\rho_s} \gg 1$, que los números de Reynolds basados en d y en D son ambos muy pequeños, $Re_d \ll 1$ y $Re_D \ll 1$ y se desprecia el efecto de la gravedad, $\pi_g \ll 1$, se tiene

$$\pi_X \simeq \text{constante} \equiv K, \quad (3.16)$$

pues todos los argumentos de f en (3.15) son o bien muy grandes o bien muy pequeños. Por tanto, en variables dimensionales, la altura que en este caso alcanzará la bola en el tubo será,

$$X = K \frac{\rho Q}{\mu}, \quad (3.17)$$

donde la constante K se podría obtener con un único experimento.

Para que, como se ha dicho, el efecto de la gravedad sea despreciable, se tiene que cumplir

$$\pi_g = \frac{g \rho^5 Q^3}{\mu^5} \ll 1. \quad (3.18)$$

Esta condición se verifica si el caudal es tal que

$$Q \ll \frac{\nu^{5/3}}{g^{1/3}}, \quad (3.19)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática del fluido. Tomando valores típicos para el agua, $\nu_{\text{agua}} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, y para el aire $\nu_{\text{aire}} = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, junto con $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$, se tiene que

$$Q \ll 4 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{s} \quad (3.20)$$

para el agua y

$$Q \ll 2 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s} \quad (3.21)$$

para el aire. Como se puede apreciar, ambas condiciones son muy restrictivas.

P.3.2 Hélice de un barco

Para diseñar la hélice de un barco se planea experimentar con modelos geoméricamente semejantes a escala y utilizar el análisis dimensional y la semejanza física para extrapolar los resultados del modelo a la hélice real. En concreto se pide:

1. Relación funcional más simple posible que proporcione el empuje de la hélice en función de la velocidad de avance, la velocidad angular de giro y demás magnitudes que intervienen en el problema.
2. Suponiendo que los experimentos con el modelo se hacen utilizando el mismo fluido (agua de mar) que en el problema real, compruebe que no es posible la semejanza física total. Justifique una semejanza física parcial.
3. Utilizando la semejanza física parcial del apartado anterior, y suponiendo que el diámetro del modelo de hélice es la mitad del de la hélice real, obtengan:
 - a) Velocidad de avance y velocidad angular de giro que hay que utilizar en los experimentos con el modelo en función de los respectivos valores en el problema real.
 - b) Empuje de la hélice en el problema real en función del empuje medido experimentalmente con el modelo de hélice.

Solución.

1. Para encontrar la relación más simple para el empuje E en función de las diferentes magnitudes que intervienen en el problema, lo primero será identificar estas magnitudes. Para ello se tendrá en cuenta que el empuje será función: del medio en el que se esté moviendo el cuerpo, dependiendo

por tanto de su densidad y de su viscosidad dinámica, ρ y μ , respectivamente; también dependerá del peso del cuerpo, es decir, de su masa m y de la gravedad g ; de la velocidad a la que se va a desplazar el barco V ; de la longitud del mismo l ; de la velocidad de giro de la hélice Ω y, finalmente, de su diámetro D . Por tanto, se puede decir que el empuje depende de

$$E = E(\rho, \mu, m, g, V, l, \Omega, D) . \quad (3.22)$$

Esta dependencia del empuje, con ocho variables, se puede reducir si aplicamos el Teorema II de Buckingham y escribimos esa dependencia de forma adimensional. Para ello, y al tratarse de un problema puramente mecánico, se han de elegir tres variables como dimensionalmente independientes que contengan en sus dimensiones unidades de masa, longitud y tiempo. Se seleccionarán la densidad, $[\rho] = [M/L^3]$, el diámetro de la hélice, $[D] = [L]$, y su velocidad de giro, $[\Omega] = [t^{-1}]$, respectivamente, donde $[M]$ representa la dimensión de masa, $[L]$ la de longitud y $[t]$ la del tiempo. De esta manera, el empuje adimensional dependerá de $8 - 3 = 5$ variables. El primer paso será, por tanto, escribir las dimensiones de cada una de las variables que aparecen en (3.22) como combinación de las dimensiones de las variables elegidas como dimensionalmente independientes. Estas relaciones son:

$$[E] = \left[\frac{ML}{t^2} \right] = [\rho D^4 \Omega^2] , \quad (3.23)$$

$$[\rho] = [\rho] , \quad (3.24)$$

$$[\mu] = \left[\frac{M}{Lt} \right] = [\rho D^2 \Omega] , \quad (3.25)$$

$$[m] = [M] = [\rho D^3] , \quad (3.26)$$

$$[g] = \left[\frac{L}{t^2} \right] = [D \Omega^2] , \quad (3.27)$$

$$[V] = \left[\frac{L}{t} \right] = [D\Omega] , \quad (3.28)$$

$$[l] = [L] = [D] , \quad (3.29)$$

$$[\Omega] = [t^{-1}] = [\Omega] , \quad (3.30)$$

$$[D] = [L] = [D] . \quad (3.31)$$

Por tanto, se pueden definir las cinco variables adimensionales de las que dependerá el empuje, que también se adimensionalizará:

$$\pi_E = \frac{E}{\rho D^4 \Omega^2} , \quad (3.32)$$

$$\pi_\mu = \frac{\mu}{\rho D^2 \Omega} , \quad (3.33)$$

$$\pi_m = \frac{m}{\rho D^3} , \quad (3.34)$$

$$\pi_g = \frac{g}{D \Omega^2} , \quad (3.35)$$

$$\pi_V = \frac{V}{D \Omega} , \quad (3.36)$$

$$\pi_l = \frac{l}{D} . \quad (3.37)$$

Obsérvese que π_μ es el inverso de un número de Reynolds, con velocidad ΩD , y π_g es el inverso del número de Froude con la misma velocidad. Si en la ecuación (3.22) se introducen las correspondientes variables adimensionales definidas en (3.32)–(3.37), se obtiene una relación funcional más simple para el empuje:

$$\pi_E = \frac{E}{\rho D^4 \Omega^2} = F \left(\frac{\mu}{\rho D^2 \Omega}, \frac{m}{\rho D^3}, \frac{g}{D \Omega^2}, \frac{V}{D \Omega}, \frac{l}{D} \right) , \quad (3.38)$$

en donde, como se observa, el empuje no depende de cada una de las variables indicadas inicialmente por separado, sino de una serie de combinaciones de ellas.

2. Si en los experimentos con el modelo se utiliza el mismo fluido que en el problema real (agua de mar), indicando mediante los subíndices \mathcal{R} y \mathcal{M} la pertenencia de la correspondiente variable al problema real o al modelo, respectivamente, se tiene

$$\mu_{\mathcal{R}} = \mu_{\mathcal{M}} \quad \text{y} \quad \rho_{\mathcal{R}} = \rho_{\mathcal{M}}. \quad (3.39)$$

Además, para que exista semejanza física entre los dos problemas y poder extrapolar los resultados obtenidos con el modelo al problema real, es necesario que todos los parámetros adimensionales que intervienen en el problema, es decir, los dados en (3.38), sean iguales en los experimentos con el modelo y en el problema real. Ello supone que, haciendo uso de (3.39), se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\frac{\mu_{\mathcal{R}}}{\rho_{\mathcal{R}} D_{\mathcal{R}}^2 \Omega_{\mathcal{R}}} = \frac{\mu_{\mathcal{M}}}{\rho_{\mathcal{M}} D_{\mathcal{M}}^2 \Omega_{\mathcal{M}}} \implies D_{\mathcal{R}}^2 \Omega_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{M}}^2 \Omega_{\mathcal{M}}, \quad (3.40)$$

$$\frac{m_{\mathcal{R}}}{\rho_{\mathcal{R}} D_{\mathcal{R}}^3} = \frac{m_{\mathcal{M}}}{\rho_{\mathcal{M}} D_{\mathcal{M}}^3} \implies \frac{m_{\mathcal{R}}}{D_{\mathcal{R}}^3} = \frac{m_{\mathcal{M}}}{D_{\mathcal{M}}^3}, \quad (3.41)$$

$$\frac{g_{\mathcal{R}}}{D_{\mathcal{R}} \Omega_{\mathcal{R}}^2} = \frac{g_{\mathcal{M}}}{D_{\mathcal{M}} \Omega_{\mathcal{M}}^2} \implies D_{\mathcal{R}} \Omega_{\mathcal{R}}^2 = D_{\mathcal{M}} \Omega_{\mathcal{M}}^2, \quad (3.42)$$

$$\frac{V_{\mathcal{R}}}{D_{\mathcal{R}} \Omega_{\mathcal{R}}} = \frac{V_{\mathcal{M}}}{D_{\mathcal{M}} \Omega_{\mathcal{M}}} \implies V_{\mathcal{R}} D_{\mathcal{M}} \Omega_{\mathcal{M}} = V_{\mathcal{M}} D_{\mathcal{R}} \Omega_{\mathcal{R}}, \quad (3.43)$$

$$\frac{l_{\mathcal{R}}}{D_{\mathcal{R}}} = \frac{l_{\mathcal{M}}}{D_{\mathcal{M}}} \implies l_{\mathcal{R}} D_{\mathcal{M}} = l_{\mathcal{M}} D_{\mathcal{R}}, \quad (3.44)$$

donde, además, se ha tenido en cuenta que $g_{\mathcal{R}} = g_{\mathcal{M}}$. Si de (3.40) se despeja la relación de velocidades de giro de la hélice entre ambos problemas, dada ésta por

$$\frac{\Omega_{\mathcal{R}}}{\Omega_{\mathcal{M}}} = \frac{D_{\mathcal{M}}^2}{D_{\mathcal{R}}^2}, \quad (3.45)$$

y se sustituye en (3.42), se obtiene

$$D_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{M}}, \quad (3.46)$$

es decir, que los diámetros de la hélice en el modelo y en el problema real han de ser los mismos, por lo que (3.45) se escribe entonces

$$\Omega_{\mathcal{R}} = \Omega_{\mathcal{M}}, \quad (3.47)$$

teniendo, de nuevo, que han de ser iguales las velocidades de giro de las hélices en ambos problemas. Sustituyendo (3.46) y (3.47) en (3.41), (3.43) y (3.44) se obtiene,

$$m_{\mathcal{R}} = m_{\mathcal{M}}, \quad V_{\mathcal{R}} = V_{\mathcal{M}}, \quad \text{y} \quad l_{\mathcal{R}} = l_{\mathcal{M}}. \quad (3.48)$$

A la vista de estos resultados se concluye con que no habría diferencia entre el modelo a escala y el problema real cuando ambos problemas se ensayaran en agua de mar. Es decir, es imposible una semejanza física total sin que los problemas sean idénticos. Ahora bien, si manteniendo la igualdad entre el fluido en que se ensayarán ambas hélices [suponiendo que, aproximadamente, $\mu = 10^{-3}$ kg/(ms) y $\rho = 1000$ kg/m³], para una hélice de $D = 4$ m y con una velocidad de giro de $\Omega = 20$ rps para un barco de $l = 40$ m, una masa de $m = 5$ Tn y una velocidad de crucero de $V = 30$ km/h, se estima el orden de magnitud de cada uno de los parámetros adimensionales de los que depende el empuje, se obtendría

$$\pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho D^2 \Omega} = 4,9 \times 10^{-10}, \quad (3.49)$$

$$\pi_m = \frac{m}{\rho D^3} = 5/4, \quad (3.50)$$

$$\pi_g = \frac{g}{D \Omega^2} = 0,1125, \quad (3.51)$$

$$\pi_V = \frac{V}{D \Omega} = 0,104, \quad (3.52)$$

$$\pi_l = \frac{l}{D} = 10. \quad (3.53)$$

Se observa que hay un parámetro adimensional muy pequeño, por lo que para la semejanza física entre el modelo a escala y el problema real se podría utilizar

una semejanza parcial, no exigiendo la igualdad del parámetro $\pi_\mu = Re^{-1} \ll 1$. Más concretamente, si la función π_E depende de un parámetro muy pequeño como π_μ , desarrollando en serie de Taylor en torno a $\pi_\mu = 0$,

$$\pi_E = F(0, \pi_m, \pi_g, \pi_l, \pi_V) + \pi_\mu \frac{\partial F(0, \pi_m, \pi_g, \pi_l, \pi_V)}{\partial \pi_\mu} + O(\pi_\mu^2). \quad (3.54)$$

Por tanto, en primera aproximación se puede eliminar la dependencia del empuje con π_μ ,

$$\pi_E \simeq F(\pi_m, \pi_g, \pi_l, \pi_V). \quad (3.55)$$

Se tiene así una semejanza física parcial en la que sólo hay que exigir las igualdades (3.41)–(3.44).

3 (a). Si haciendo uso de la semejanza física parcial ya comentada, se decide utilizar una hélice en el modelo con un diámetro la mitad del real, es decir, $2D_{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{R}}$, las relaciones (3.41)–(3.44) para obtener los valores de ensayo en el modelo en función de los reales se escriben, respectivamente,

$$m_{\mathcal{M}} = \frac{m_{\mathcal{R}}}{8}, \quad (3.56)$$

$$\Omega_{\mathcal{M}} = \sqrt{2}\Omega_{\mathcal{R}}, \quad (3.57)$$

$$V_{\mathcal{M}} = \frac{\sqrt{2}}{2}V_{\mathcal{R}}, \quad (3.58)$$

$$l_{\mathcal{M}} = \frac{l_{\mathcal{R}}}{2}. \quad (3.59)$$

3 (b). Si se cumple la semejanza física parcial anteriormente indicada y los parámetros π_m , π_g , π_l y π_V son iguales, es decir, si se cumple (3.56)–(3.59), los empujes adimensionales entre los problemas real y a escala serán también iguales de acuerdo con (3.55). Esto es,

$$\pi_{E_{\mathcal{R}}} = \frac{E_{\mathcal{R}}}{\rho_{\mathcal{R}} D_{\mathcal{R}}^4 \Omega_{\mathcal{R}}^2} = \pi_{E_{\mathcal{M}}} = \frac{E_{\mathcal{M}}}{\rho_{\mathcal{M}} D_{\mathcal{M}}^4 \Omega_{\mathcal{M}}^2}. \quad (3.60)$$

Teniendo en cuenta que en ambos problemas el fluido es el mismo, que $2D_{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{R}}$ y (3.57), se obtiene

$$E_{\mathcal{R}} = 2^3 E_{\mathcal{M}} = 8E_{\mathcal{M}}. \quad (3.61)$$

Es decir, ensayando con un modelo que verifica (3.56)-(3.59) junto con $D_{\mathcal{M}} = D_{\mathcal{R}}/2$ y midiendo el empuje con dicho modelo, el empuje real será, aproximadamente, ocho veces el medido con el modelo.

Capítulo 4

Fluidostática y tensión superficial

P.4.1 Frenada de un camión cisterna

Un camión cisterna transporta un volumen V de un líquido de densidad ρ . Debido a un imprevisto, el conductor tiene que frenar hasta pararse cuando viaja a una velocidad v_o . Como consecuencia de ello, el líquido ejerce una fuerza F sobre la pared frontal del tanque, que se quiere calcular. Suponiendo que la frenada ocurre con desaceleración constante en un tiempo t_f , que el tanque es un paralelepípedo de longitud l , altura h y anchura e , que el líquido no llena completamente el tanque, existiendo sobre él un gas a presión p_o , y que el líquido adquiere la nueva disposición de equilibrio respecto al tanque en un tiempo mucho menor que t_f , se pide:

1. Posición de la superficie libre del líquido durante la frenada. Supongan que el líquido no toca la pared superior del tanque.
2. Fuerza ejercida sobre la pared frontal del tanque (la presión exterior es p_a).

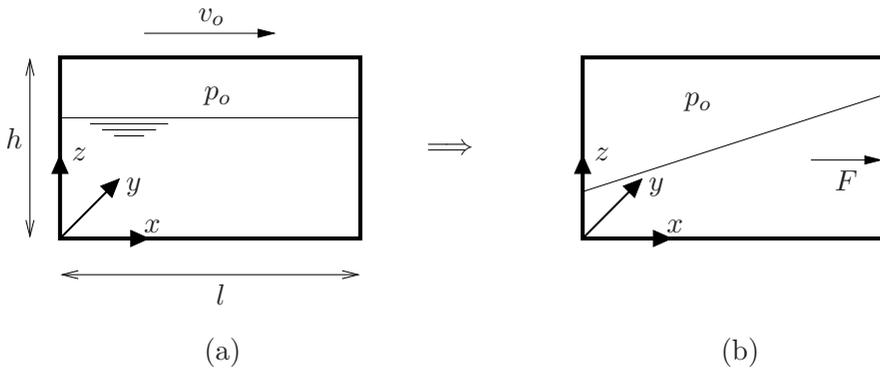


Figura 4.1: Sistema a estudiar: (a) moviéndose con velocidad constante v_o ; (b) frenando con desaceleración constante a_o

Solución.

1. Debido a que el fluido adquiere su nuevo estado de reposo en un tiempo mucho menor que el que dura la frenada, durante ésta, y respecto a un sistema de referencia que se mueva con el camión (sistema de referencia no inercial), el fluido se podrá considerar en reposo. Por tanto, el cálculo de la fuerza que se desea obtener se hará resolviendo la situación de fluidostática en que se encuentra el fluido respecto al camión [figura 4.1(b)].

Como el sistema de referencia es no inercial, el vector de fuerzas másicas (MF12.5) tendrá el término de gravedad \vec{g} y el de aceleración lineal \vec{a} debido al movimiento del sistema de referencia. Por tanto, este vector se escribe

$$\vec{f}_m = \vec{g} - \vec{a}, \quad (4.1)$$

donde \vec{a} es la aceleración asociada a la frenada del camión, cuyo valor es

$$\vec{a} = \frac{0 - v_o}{t_f} \vec{e}_x = -\frac{v_o}{t_f} \vec{e}_x \equiv -a_o \vec{e}_x. \quad (4.2)$$

Debido a la situación de fluidostática, la ecuación de cantidad de movimiento (MF12.2) se escribe

$$p + \rho U = \text{constante} , \quad (4.3)$$

donde U es el potencial de fuerzas másicas, dado por $U = -\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{x} = gz - a_o x$. La evaluación de la constante en (4.3) con alguna condición de contorno determinará la distribución de presión en el interior del líquido. En particular, se sabe que todo el gas que está sobre la superficie libre del líquido, de coordenadas $x = x$, $z = z_s(x)$, se encuentra a presión p_o . Esta condición de contorno proporciona como valor para la constante en (4.3)

$$\text{constante} = p_o + \rho g z_s(x) - \rho a_o x , \quad (4.4)$$

con lo que la distribución de presión en el líquido quedará en función de la altura desconocida de la superficie libre $z_s(x)$. Introduciendo (4.4) en (4.3) se obtiene

$$p(x, z) = p_o + \rho g [z_s(x) - z] . \quad (4.5)$$

Para tener, por tanto, determinada la distribución de presión en el interior del líquido en reposo hay que obtener el valor de $z_s(x)$.

Introduciendo la incógnita h_0 como el valor de z_s en $x = 0$, en donde también $p = p_o$, la constante de (4.3) quedaría como

$$\text{constante} = p_o + \rho g h_0 . \quad (4.6)$$

Igualando (4.4) y (4.6) se obtiene

$$z_s(x) = h_0 + \frac{a_o}{g} x . \quad (4.7)$$

Para calcular h_0 se tiene en cuenta que inicialmente la cisterna contenía un volumen V de líquido, volumen que se conserva en cualquier otro momento de la frenada; es decir,

$$V = \int_0^e \int_0^l z_s(x) dx dy, \quad (4.8)$$

donde e es la profundidad del depósito (dirección y en la figura 4.1). Usando (4.7), se tiene

$$V = e \left(h_0 l + \frac{a_o l^2}{g} \right), \quad (4.9)$$

de donde

$$h_0 = \frac{V}{el} - \frac{a_o l}{2g}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo este valor en (4.7) y en (4.5), se obtiene la distribución de presión en el líquido y la forma de la superficie libre en función de los datos del problema.

2. Con la presión conocida en cualquier punto del fluido se está en disposición de calcular la fuerza que el fluido ejerce sobre la pared frontal de la cisterna, denotada esta superficie por S_f . Tomando el vector normal hacia fuera de esa superficie como $\vec{n} = \vec{e}_x$, la fuerza neta sobre la pared, \vec{F}_{S_f} , se escribe

$$\vec{F}_{S_f} = \int_{S_f} (p - p_a) \vec{n} dS, \quad (4.11)$$

donde p es igual a la presión del líquido en la parte que éste “moja” a la pared, que vale p_o en la parte superior ocupada por el gas, mientras que $dS = dz dy$. Separando la integral sobre S_f en dos, una para el líquido que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = z_s(l)$, y otra para el gas, desde $z = z_s(l)$ hasta $z = h$, la fuerza buscada es

$$\vec{F}_{S_f} = \int_0^e \int_0^{z_s(l)} [\rho g (h_0 + \frac{a_0 l}{g} - z) - p_a] \vec{e}_x dz dy + \int_0^e \int_{z_s(l)}^h (p_o - p_a) \vec{e}_x dz dy. \quad (4.12)$$

Como $p(l, z) = p_o + \rho g \left(h_0 + \frac{a_0 l}{g} - z \right)$, se obtiene

$$\vec{F}_{S_f} = \left[e \rho g \left(\frac{h_0}{2} + \frac{a_0 l}{g} \right) - e h (p_o - p_a) \right] \vec{e}_x. \quad (4.13)$$

Esta fuerza puede servir como referencia para diseñar la resistencia mecánica de las paredes de la cisterna frente a las frenadas imprevistas.

P.4.2 Subida capilar entre dos placas

Calculen la elevación capilar $z_s(x)$ de un líquido de densidad ρ que se produce entre dos placas planas verticales que forman un ángulo $\alpha \ll 1$ (ver figura 4.2). La tensión superficial líquido-aire es σ y el ángulo de contacto θ . Supongan que las fuerzas de tensión superficial son dominantes frente a las gravitatorias en el espacio entre placas (den el criterio para que esto ocurra).

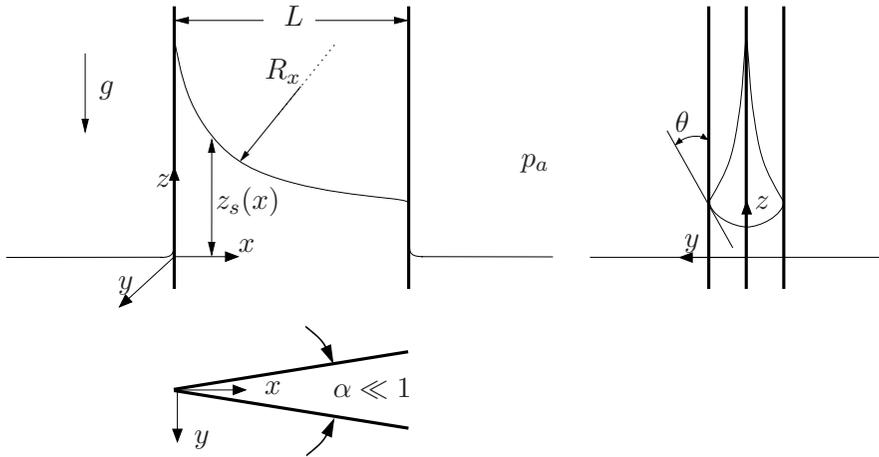


Figura 4.2: Diferentes vistas del problema

Solución.

La influencia o no de la tensión superficial dependerá de la distancia de separación entre las placas. Si las placas están muy separadas el efecto de la tensión superficial será despreciable. Por esto, se elegirán dos longitudes características, una para la dirección x , $L_{cx} = L$, y otra para la y , $L_{cy} = \alpha L$, siendo ésta última, si $\alpha \ll 1$, la separación máxima entre las placas. Por tanto, la longitud en la dirección y será la que se tenga en cuenta para determinar el efecto o no de la tensión superficial. Para que dominen las fuerzas de tensión superficial frente a las gravitatorias, el número de Bond (MF13.17) tiene que ser muy pequeño; es decir,

$$B = \frac{g\rho L_{cy}^2}{\sigma} = \frac{g\rho(\alpha L)^2}{\sigma} \ll 1. \quad (4.14)$$

Bajo esta hipótesis, la diferencia de presión a través de la superficie libre vendrá dada por la ecuación de Young-Laplace (MF13.10)

$$p_1 - p_2 = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (4.15)$$

donde R_x y R_y son los radios de curvatura de la superficie libre en los planos xz e yz , respectivamente (ver figuras 4.2 y 4.3). Esta ecuación nos dará la forma de la superficie libre una vez especificados los valores de R_x , R_y , p_1 y p_2 . El radio de curvatura R_x no es constante, pero es mucho mayor que R_y , por lo que $\frac{1}{R_x} \ll \frac{1}{R_y}$, y su efecto no se tendrá en cuenta en la ecuación (4.15). En cuanto a R_y , para una distancia genérica x desde el origen (sección A-A' de la figura 4.3), a partir del triángulo definido por los puntos abc (ver detalle en la figura 4.3) se tiene

$$\cos \theta = \frac{x\alpha/2}{R_y}; \quad (4.16)$$

es decir,

$$R_y = \frac{x\alpha/2}{\cos \theta}. \quad (4.17)$$

En cuanto al salto de presiones a través de la superficie libre se tiene $p_1 = p_a$ (ver figura 4.3) y para el cálculo de la presión en el punto 2 se aplicará la ecuación de fluidostática (MF12.11) entre $z = 0$, donde $p = p_a$ y $z = z_s(x)$, donde $p = p_2$:

$$p + \rho gz = \text{constante} = p_2 + \rho g z_s(x) = p_a, \quad (4.18)$$

de donde

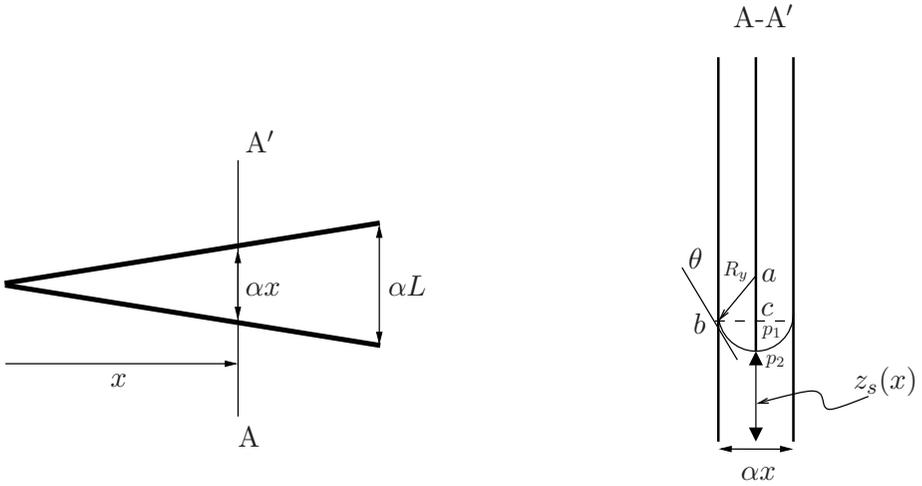


Figura 4.3: Radios de curvatura de la superficie libre

$$p_2 = p_a - \rho g z_s(x). \quad (4.19)$$

Introduciendo p_1 , p_2 y R_y en (4.15) se obtiene

$$p_a - p_a + \rho g z_s(x) = \frac{2\sigma \cos \theta}{x\alpha}, \quad (4.20)$$

y despejando $z_s(x)$

$$z_s(x) = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g \alpha x}. \quad (4.21)$$

Esta expresión no es válida (diverge) para $x \rightarrow 0$, puesto que en la unión entre las placas la hipótesis $R_x \gg R_y$ deja de ser correcta.

Capítulo 5

Flujos viscosos de líquidos y lubricación

P.5.1 Descarga de un conducto vertical cerrado por arriba

Un conducto circular de diámetro D y longitud $L \gg D$ se encuentra en posición vertical y tiene su extremo superior tapado y el inferior abierto a la atmósfera. En el interior del conducto hay un líquido de densidad ρ y viscosidad μ . Si la longitud del conducto es inferior a una cierta longitud L^* , el líquido se mantiene en el interior del cilindro por acción de la presión atmosférica. Sin embargo, si $L > L^*$, parte del líquido saldrá por el extremo inferior del conducto hasta alcanzar una nueva posición de equilibrio.

Se pide:

1. Longitud L^* . Supongan que la presión de vapor del líquido es prácticamente nula comparada con la atmosférica y desprecien el efecto de la tensión superficial.
2. Si $L > L^*$, escriban la ecuación diferencial que describe el movimiento de la superficie de separación $x_S(t)$, entre líquido y vapor (ver figura 5.1), en el tiempo. Supongan que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido (den los criterios para que esto sea cierto).

3. Integren la ecuación anterior y den el valor final de x_S .

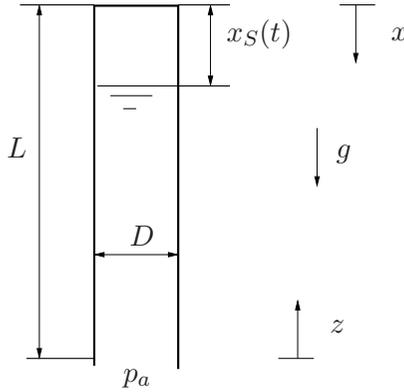


Figura 5.1: Esquema de la descarga del conducto

Solución.

1. De acuerdo con el enunciado el líquido no cae si $L < L^*$ y cae hasta alcanzar un equilibrio si $L > L^*$. Para el cálculo de la longitud crítica L^* se utiliza la expresión hidrostática (MF12.11),

$$p + \rho U = p + \rho g z = \text{constante}, \quad (5.1)$$

pues en equilibrio el fluido está en reposo. Aplicando la condición de contorno $z = 0, p = p_a$ a la ecuación (5.1) resulta

$$p = p_a - \rho g z. \quad (5.2)$$

Para una longitud crítica $z = L^*$ la presión es $p = p_v \simeq 0$ y la ecuación anterior queda

$$p_a - \rho g L^* = 0; \quad (5.3)$$

luego la longitud crítica es

$$L^* = \frac{p_a}{\rho g} .^1 \quad (5.4)$$

Para este cálculo se ha supuesto que la presión de vapor del líquido (p_v) es prácticamente cero y se han despreciado los efectos de la tensión superficial.

2. Si $L > L^*$, el líquido baja por acción de la gravedad. Como las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento, el caudal viene dado por la ecuación de Hagen-Poiseuille (MF15.5),

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} . \quad (5.5)$$

Aplicando las condiciones de contorno (ver figura 5.1 para las coordenadas)

$$\begin{aligned} x = L, z = 0, p = p_a, \\ x = x_S(t), z = L - x_S(t), p = p_v \approx 0, \end{aligned} \quad (5.6)$$

se llega a la expresión para el caudal

$$Q = \frac{\pi D^4 \{ \rho g [L - x_S(t)] - p_a \}}{128\mu [L - x_S(t)]} . \quad (5.7)$$

Por conservación de la masa, este caudal es igual al producto de la sección y la variación temporal de $x_S(t)$,

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dx_S}{dt} , \quad (5.8)$$

de donde se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento de la superficie de separación $x_S(t)$ entre el líquido y el vapor,

$$\frac{dx_S}{dt} = \frac{D^2}{32\mu} \left[\rho g - \frac{p_a}{L - x_S} \right] . \quad (5.9)$$

¹Para agua en la superficie terrestre esta longitud vale, aproximadamente, 10,5 m, mientras que para mercurio (experimento de Torricelli) vale 780 mm, aproximadamente.

Esta ecuación debe ser resuelta con la condición inicial

$$x_S(t = 0) = 0. \quad (5.10)$$

Para que las ecuaciones (5.7) y (5.9) sean válidas se deben cumplir una serie de requisitos. En primer lugar, la longitud L debe ser mucho mayor que el diámetro D , en cuyo caso el movimiento se puede considerar casi unidireccional. Además, se debe verificar que las fuerzas viscosas sean dominantes. El criterio para esta hipótesis es $Re \frac{D}{L} \ll 1$, donde Re es el número de Reynolds basado en el diámetro (MF15.20),

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \quad (5.11)$$

siendo V la velocidad característica del movimiento: $V \sim \frac{Q}{D^2}$. De (5.8) se tiene que $Q \sim \frac{D^2 L}{t_0}$, donde t_0 es un tiempo característico de bajada del líquido, que se puede obtener de (5.9), $t_0 = \frac{D^2 \rho g}{32 \mu}$. De este modo, $V \sim \frac{L}{t_0} \sim \frac{32 \mu L}{D^2 \rho g}$, y la condición $Re \frac{D}{L} \ll 1$ queda

$$\frac{D^4 \rho^2 g}{32 \mu^2 L} \ll 1. \quad (5.12)$$

Por último, es necesario que se cumpla la hipótesis de casi estacionariedad del proceso, por lo que $\frac{\rho D^2}{\mu t_0} \ll 1$ (MF15.21). En resumen, se deben verificar las siguientes condiciones:

$$\frac{D}{L} \ll 1, \quad \frac{\rho^2 D^4 g}{32 \mu^2 L} \ll 1. \quad (5.13)$$

Obsérvese que los requisitos $\frac{Re D}{L} \ll 1$ y $\frac{\rho D^2}{\mu t_0} \ll 1$ dan lugar a la misma condición, pues los dos derivan de la hipótesis de fuerzas viscosas dominantes y en este problema el tiempo característico t_0 es del mismo orden que el tiempo

de residencia $\frac{L}{V}$. El factor numérico 32 se ha mantenido en la condición (5.13) por ser bastante mayor que la unidad.

3. La ecuación (5.9) es de variables separadas y se puede integrar de forma genérica. Teniendo en cuenta la condición inicial (5.10), se tiene

$$\int_0^{x_S} \frac{dx_S}{\left(\rho g - \frac{p_a}{L-x_S}\right)} = \int_0^t \frac{D^2 dt}{32\mu}, \quad (5.14)$$

que integrada proporciona

$$\frac{1}{\rho g} \left\{ x_S + \frac{p_a}{\rho g} \ln \left[\frac{p_a - \rho g L}{p_a - \rho g (L - x_S)} \right] \right\} = \frac{D^2 t}{32\mu}, \quad (5.15)$$

que es una expresión implícita para $x_S(t)$.

El valor estacionario de x_S se obtiene haciendo $\frac{dx_S}{dt} = 0$ en (5.9), con lo cual

$$x_S(\infty) = L - \frac{p_a}{\rho g} = L - L^*, \quad (5.16)$$

que obviamente se relaciona con la longitud crítica L^* calculada en el primer apartado. Si $L > L^*$ el fluido cae y $x_S(\infty) > 0$. Otra forma de obtener este valor estacionario de x_S es haciendo uso de la solución (5.15). En el límite formal $t \rightarrow \infty$, se debe verificar

$$p_a - \rho g [L - x_S(\infty)] = 0, \quad (5.17)$$

llegándose al mismo resultado anterior (5.16).

P.5.2 Cinta transportadora

Una cinta transportadora inclinada un ángulo α se utiliza para elevar un líquido de densidad ρ y viscosidad μ . Suponiendo que la velocidad de la cinta es V , que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido y que la altura del mismo sobre la cinta es constante e igual a h , se pide:

1. Perfil de velocidad del líquido. Dibújelo y obtenga el valor de h para el cual la velocidad del líquido en la superficie libre es nula.
2. Caudal de líquido transportado por unidad de anchura de la cinta. ¿Para qué valor de h se hace cero el caudal?
3. Si la longitud y anchura de la cinta son a y b , respectivamente, ¿qué potencia hace falta para mover la cinta transportadora?

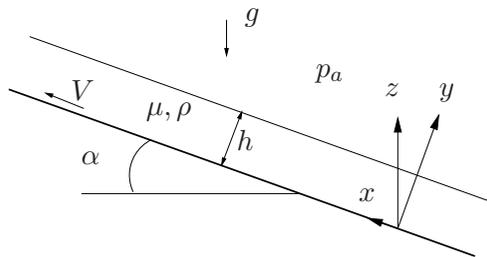


Figura 5.2: Esquema del problema y de las coordenadas

Solución.

1. Perfil de velocidad del líquido.

Las hipótesis de partida del problema son fuerzas viscosas dominantes, estado estacionario y $h \ll a$, siendo a la longitud de la cinta transportadora.

Es conveniente trabajar en unas coordenadas perpendiculares y tangenciales al plano inclinado, en las que el movimiento es unidireccional y paralelo al eje x (ver figura 5.2). Estas coordenadas están relacionadas con el eje vertical z mediante

$$z = x \operatorname{sen} \alpha + y \operatorname{cos} \alpha . \quad (5.18)$$

Como la cinta se mueve a una velocidad V en la dirección x , se tiene que la velocidad del fluido $\vec{v} = u\vec{e}_x$, por lo que, según la ecuación de conservación de la masa para un líquido incompresible (MF14.1),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad (5.19)$$

lo que implica que $u \neq u(x)$. Para calcular el perfil de velocidad $u = u(y)$ hacemos uso de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x (MF14.7), siendo el gradiente de la presión reducida

$$p_l = -\frac{\partial p_r}{\partial x} = -\frac{\partial (p + \rho U)}{\partial x} = -\frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} = -\rho g \operatorname{sen} \alpha , \quad (5.20)$$

con lo que (MF14.7) queda

$$0 = -\rho g \operatorname{sen} \alpha + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (5.21)$$

Las condiciones de contorno son

$$u = V , \quad y = 0 , \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \quad y = h . \quad (5.23)$$

La primera condición de contorno deriva de la ausencia de deslizamiento entre el fluido y la cinta transportadora, mientras que la segunda se debe a la igualdad de esfuerzos cortantes entre el líquido y el gas ($\mu \partial u / \partial y = \mu_{\text{aire}} \partial u / \partial y$). Como la viscosidad dinámica del aire es mucho menor que la del líquido ($\mu_{\text{aire}} \ll \mu$), en primera aproximación se puede suponer que el esfuerzo cortante del líquido es nulo en la superficie libre.

De la ecuación (5.19) se tiene que las derivadas parciales en (5.21) y (5.23) son derivadas totales. Integrando la ecuación (5.21) y aplicando las condiciones de contorno (5.22)-(5.23), se llega a

$$u = \frac{\rho g y \operatorname{sen} \alpha}{\mu} \left(\frac{y}{2} - h \right) + V. \quad (5.24)$$

En la figura 5.3 se representa esquemáticamente la función $u = u(y)$. Nótese como la pendiente es nula en $y = h$ para el cumplimiento de la condición de contorno en el interfaz líquido-gas.

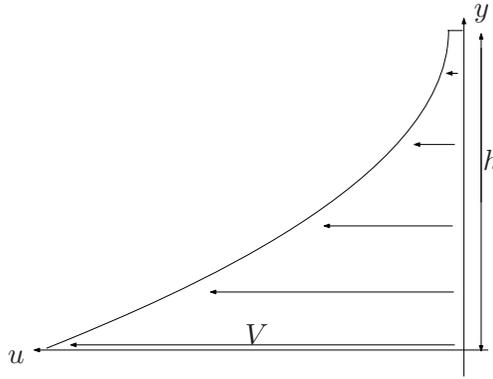


Figura 5.3: Esquema del perfil de velocidad $u = u(y)$

De acuerdo con la solución (5.24), la velocidad en la superficie es nula si h vale

$$h = h^* \equiv \sqrt{\frac{2V\mu}{\rho g \operatorname{sen} \alpha}}. \quad (5.25)$$

Se entiende, por tanto, que en la figura anterior $h < h^*$ [$u(h) > 0$].

2. Caudal de líquido transportado por unidad de anchura de la cinta.

El caudal q que circula por unidad de longitud perpendicular al plano (x,y) es

$$q = \int_0^h u dy. \quad (5.26)$$

Sustituyendo u de (5.24), se tiene

$$q = h \left(V - \frac{\rho g h^2 \operatorname{sen} \alpha}{3\mu} \right). \quad (5.27)$$

Existe una altura crítica h^{**} para la cual no hay caudal neto, es decir, $q = 0$. En otras palabras, habrá un espesor de líquido crítico h^{**} para el que baja el mismo líquido que sube. De (5.27) se deduce que

$$h^{**} = \sqrt{\frac{3V\mu}{\rho g \operatorname{sen} \alpha}}. \quad (5.28)$$

En la figura 5.4 se representa gráficamente qué le ocurre al perfil de velocidad para que el caudal neto sea nulo: la integral de la velocidad $u(y)$ desde $y=0$ hasta $y=h^*$ es idéntica a la de $u(y)$ desde $y=h^*$ hasta $y=h^{**}$.

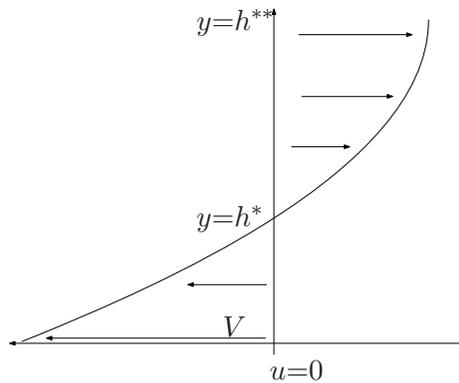


Figura 5.4: Esquema del perfil de velocidad $u = u(y)$ para $q=0$

3. La potencia que hace falta para mover una cinta transportadora de longitud a y anchura b , es

$$P = F_x V, \quad (5.29)$$

donde F_x es la fuerza ejercida en la dirección x por el fluido sobre la cinta transportadora, es decir, $F_x = ab|\tau'_{xy}|_{y=0}$, donde $|\tau'_{xy}|_{y=0}$ es el esfuerzo cortante entre la cinta transportadora y el líquido (MF7.27). Por lo tanto,

$$\tau'_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \rho g \operatorname{sen} \alpha (y - h) , \quad (5.30)$$

que para $y = 0$ y sustituyendo en (5.29), se tiene

$$P = F_x V = abV|\tau'_{xy}|_{y=0} = \rho g h abV \operatorname{sen} \alpha . \quad (5.31)$$

P.5.3 Viscosímetro de cono y plato

Un viscosímetro de plato y cono consta de una superficie cónica que se apoya normalmente a su eje sobre su vértice en una superficie plana (ver figura 5.5). El fluido cuya viscosidad se desea determinar se coloca sobre la superficie plana y se hace girar la superficie cónica alrededor de su eje con una velocidad angular ω constante; la medida del par necesario para hacer girar al cono permite obtener la viscosidad.

Se desea determinar la relación que existe entre la viscosidad μ del fluido, el par Γ , la velocidad angular de giro ω y las dimensiones geométricas del viscosímetro. En particular se pide:

1. Suponiendo que el flujo es incompresible, que se ha alcanzado el estado estacionario y que la única componente no nula de la velocidad es la azimutal v_ϕ , escriban la ecuación diferencial y las condiciones de contorno que proporciona $v_\phi(r, \theta)$ [utilicen las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de la figura 5.5]. Esta ecuación será válida para la mayor parte de la región entre cono y plano si θ_o es muy pequeño.
2. Escriban la expresión para el par en función de v_ϕ .
3. Hallen v_ϕ y el par sabiendo que $v_\phi(r, \theta) = rf(\theta)$ y suponiendo que el ángulo del cono θ_o es muy pequeño. Para ello hagan $\theta = \pi/2 - \beta$, $\beta \ll 1$, en la ecuación diferencial ordinaria para $f(\theta)$ y simplifíquela.

Solución.

1. Ecuación diferencial y condiciones de contorno.

Las hipótesis de partida del problema son movimiento unidireccional ($\vec{v} = v_\phi \vec{e}_\phi$), estado estacionario y flujo incompresible. De la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas (MF1.27) se tiene que

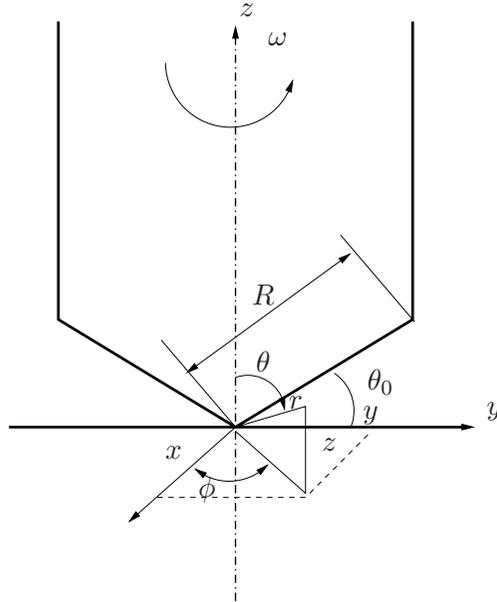


Figura 5.5: Esquema del viscosímetro

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0, \quad (5.32)$$

lo que implica que $v_\phi \neq v_\phi(\phi)$. A esta misma conclusión se llegaría aplicando la condición de simetría axial del flujo.

Para calcular el perfil de velocidad $v_\phi = v_\phi(r, \theta)$ hacemos uso de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección azimutal ϕ (correspondiente a la última ecuación de MF §7.8) en la que se desprecian las fuerzas másicas y se tiene en cuenta que también la presión es axilsimétrica, $p = p(r, \theta)$. La ecuación diferencial queda [recuérdese que $v_r = v_\theta = 0$ y $v_\phi \neq v_\phi(\phi)$]

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (5.33)$$

que ha de resolverse con las tres condiciones de contorno siguientes:

$$v_\phi \neq \infty, r = 0, \quad (5.34)$$

$$v_\phi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (5.35)$$

$$v_\phi = r\omega \cos \theta_0, \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0. \quad (5.36)$$

La primera condición de contorno nos dice que la solución debe ser regular en el origen, la segunda se debe a la ausencia de deslizamiento entre el fluido y la superficie plana fija, mientras que la tercera condición de contorno se relaciona con la proyección de la velocidad lineal de giro de la superficie cónica correspondiente a la velocidad angular de giro ω aplicada.

2. Expresión para el par Γ .

El par es el producto de la fuerza de fricción en la superficie cónica por la distancia al eje de giro integrado sobre la superficie. La componente del esfuerzo que nos interesa es $\tau'_{\theta\phi}$ en la superficie definida por $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_0$. Así, el módulo del par es

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| \tau'_{\theta\phi} \right|_{(\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_0)} r^2 \cos^2 \theta_0 dr d\phi, \quad (5.37)$$

donde $\tau'_{\theta\phi}$, que representa el esfuerzo viscoso sobre una superficie θ constante en la dirección ϕ , viene definido por (ecuaciones en coordenadas esféricas de MF §7.7)

$$\tau'_{\theta\phi} = \mu \left[\frac{\text{sen } \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\text{sen } \theta} \right) \right], \quad (5.38)$$

donde se ha tenido en cuenta que $v_\theta = 0$.

3. Cálculo de $v_\phi(r, \theta)$.

Se propone en el enunciado la solución de semejanza $v_\phi = rf(\theta)$. Sustituyendo en (5.33), queda la siguiente ecuación diferencial ordinaria para f :

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{df}{d\theta} + f \left(2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) = 0, \quad (5.39)$$

lo cual indica que, efectivamente, el problema admite ese tipo de solución. Además, se propone el cambio $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ con $\beta \ll 1$. La ecuación anterior queda entonces, en primera aproximación,

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2} + f = 0, \quad (5.40)$$

cuya solución general es $f = C_1 \sin \beta + C_2 \cos \beta$. En el límite $\beta \ll 1$, esta solución se escribe $f \approx C_1 \beta + C_2$. Aplicando las condiciones de contorno (5.34)-(5.36), la función f queda

$$f = \frac{\omega \beta}{\theta_0} = \frac{\omega \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\theta_0}, \quad (5.41)$$

es decir,

$$v_\phi \simeq \frac{r\omega}{\theta_0} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right). \quad (5.42)$$

Por último, en la ecuación del par (5.37) hay que introducir, a través de (5.38) y (5.42),

$$\tau'_{\theta\phi} = -\frac{\mu\omega}{\theta_0}. \quad (5.43)$$

Una vez integrada la ecuación (5.37), el par Γ , en el mismo límite utilizado para obtener (5.43), tiene la expresión

$$\Gamma = \frac{2\pi\mu\omega R^3}{3\theta_0}. \quad (5.44)$$

Se cumple por tanto el objetivo del viscosímetro, que es poder determinar la viscosidad dinámica μ a partir de la medida del par Γ , porque el resto de

parámetros en (5.44) son constantes y conocidos. En la práctica, dado que se han hecho una serie de hipótesis simplificadoras, se utiliza la expresión

$$\Gamma = \frac{K\mu\omega R^3}{\theta_0}, \quad (5.45)$$

donde K es una constante de calibración que se determina empíricamente. Indicar, finalmente, que este tipo de viscosímetro es muy utilizado tanto para fluidos newtonianos, que es el caso del problema resuelto, como para fluidos no newtonianos.

P.5.4 Subida mediante un émbolo de un líquido por un conducto

A través de un conducto vertical de sección circular y diámetro D se extrae un líquido de densidad ρ y viscosidad μ por la acción de un émbolo de masa M sobre el que se ejerce una fuerza vertical hacia arriba F (ver figura 5.6). Suponiendo que las fuerzas de viscosidad son dominantes en el movimiento del líquido en el interior del conducto, que la fricción del émbolo con las paredes del conducto es despreciable y que la fuerza F es constante (y conocida), se pide:

1. Ecuación diferencial que describe $h(t)$.
2. Condición que debe satisfacer F para que el líquido no cavite.
3. Resolver la ecuación del apartado 1 en el supuesto de que la inercia del émbolo sea despreciable. Den el criterio que se debe satisfacer para que esta condición se cumpla, así como los criterios para que las fuerzas de viscosidad sean dominantes en el movimiento del líquido.

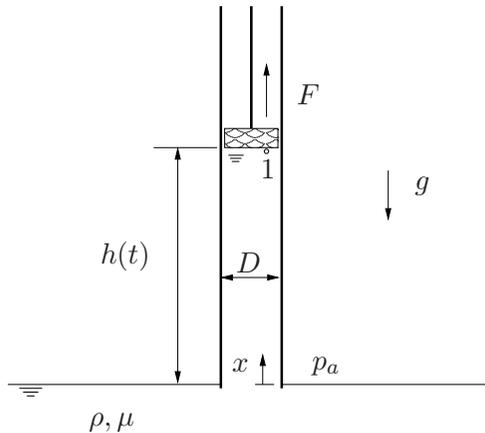


Figura 5.6: Esquema del problema

Solución.

1. Para conocer la ecuación diferencial de $h(t)$ realizamos el balance de fuerzas en el émbolo que, según la segunda ley de Newton, es

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} = F - Mg + \frac{\pi D^2}{4} (p_1 - p_a) , \quad (5.46)$$

donde los distintos términos hacen referencia a la aceleración del émbolo o fuerzas de inercia, la fuerza F aplicada, la fuerza gravitatoria sobre la masa M y la fuerza de presión (contrarios a la superficie del émbolo y en los que el subíndice 1 hace referencia a la región de fluido justo debajo del émbolo). De esta expresión se obtiene la diferencia de presión

$$p_1 - p_a = \frac{4}{\pi D^2} \left(M \frac{d^2 h}{dt^2} - F + Mg \right) . \quad (5.47)$$

El caudal Q que circula por el conducto vertical viene dado por la ley de Hagen-Poiseuille (MF15.5),

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} , \quad (5.48)$$

que integrada a lo largo del conducto queda como

$$-\frac{128\mu}{\pi D^4} \int_0^h Q dx = \int_{p_a}^{p_1 + \rho g h} d(p + \rho g z) , \quad (5.49)$$

que resulta

$$-\frac{128\mu}{\pi D^4} Q h = p_1 + \rho g h - p_a . \quad (5.50)$$

Por conservación de la masa, el caudal Q está relacionado con h mediante

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} . \quad (5.51)$$

Sustituyendo (5.47) y (5.51) en (5.50) se llega a la ecuación diferencial para h ,

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} = F - Mg - \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{32\mu h}{D^2} \frac{dh}{dt} + \rho g h \right]. \quad (5.52)$$

Es conveniente adimensionalizar esta ecuación. Para ello definimos las variables adimensionales

$$\beta = \frac{h}{h_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad V_0 = \frac{h_0}{t_0}, \quad (5.53)$$

donde h_0 es una altura característica (por ejemplo, una altura inicial) y t_0 es un tiempo característico que determinaremos a continuación. La ecuación (5.52) queda

$$\frac{M h_0}{F t_0^2} \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} = 1 - \frac{Mg}{F} - \frac{8\pi\mu h_0^2}{F t_0} \beta \frac{d\beta}{d\tau} - \frac{\pi D^2 \rho g h_0}{4F} \beta, \quad (5.54)$$

donde se han dividido todos los términos por la fuerza F para que sean adimensionales y para que el término motriz, que nunca va a ser despreciable, aparezca como la unidad. El valor del tiempo característico t_0 viene determinado por el término de fuerzas de fricción [tercer término en el segundo miembro de (5.54)], puesto que la inercia [primer miembro de (5.54)] puede ser despreciable, y de hecho se va a despreciar en el tercer apartado. Por simplicidad hacemos

$$t_0 = \frac{8\pi\mu h_0^2}{F}, \quad (5.55)$$

de forma que (5.54) se escribe

$$\alpha \frac{d^2 \beta}{d\tau^2} = 1 - \frac{Mg}{F} - \beta \frac{d\beta}{d\tau} - \gamma \beta, \quad (5.56)$$

donde se han definido los parámetros adimensionales

$$\alpha \equiv \frac{MF}{64\pi^2\mu^2h_0^3}, \quad (5.57)$$

que caracteriza la inercia del émbolo, y

$$\gamma \equiv \frac{\pi D^2\rho gh_0}{4F}, \quad (5.58)$$

que caracteriza las fuerzas gravitatorias frente a F . En (5.56) aparece un tercer parámetro adimensional, $\frac{Mg}{F}$, que caracteriza el peso del émbolo frente a F .

La ecuación (5.56) hay que resolverla con las condiciones iniciales

$$\beta = 1 \quad \text{y} \quad \frac{d\beta}{d\tau} = 0 \quad \text{en} \quad \tau = 0. \quad (5.59)$$

2. Para que el líquido no cavite, la presión en 1, que tiene que ser menor que p_a para que exista el movimiento ascendente del líquido, debe ser mayor que la presión de vapor del líquido p_v , $p_1 > p_v \approx 0$. Esta condición se traduce, según la ecuación (5.47), en que la fuerza F aplicada al émbolo tiene que cumplir la condición

$$F < \frac{\pi D^2}{4}p_a + Mg + M\frac{d^2h}{dt^2}. \quad (5.60)$$

Si la inercia del émbolo fuese despreciable, el umbral para F impuesto por la condición anterior sería

$$F < \frac{\pi D^2}{4}p_a + Mg. \quad (5.61)$$

3. De acuerdo con (5.56), la inercia del émbolo será despreciable en el movimiento si $\alpha \ll 1$; es decir, si

$$\frac{MF}{64\pi^2\mu^2h_0^3} \ll 1. \quad (5.62)$$

Con esta condición, la ecuación (5.56) quedaría, en primera aproximación,

$$\beta \frac{d\beta}{d\tau} = \delta - \gamma\beta, \quad (5.63)$$

donde se ha definido el parámetro

$$\delta \equiv 1 - \frac{Mg}{F}. \quad (5.64)$$

La solución de (5.63), teniendo en cuenta la condición inicial $\beta(\tau = 0) = 1$, es

$$1 - \beta + \frac{\delta}{\gamma} \ln \left(\frac{\delta - \gamma}{\delta - \gamma\beta} \right) = \gamma\tau. \quad (5.65)$$

En variables dimensionales, la solución anterior se escribiría

$$1 - \frac{h}{h_0} + \frac{4(F - Mg)}{\pi D^2 \rho g h_0} \ln \left[\frac{4(F - Mg) - \pi D^2 \rho g h_0}{4(F - Mg) - \pi D^2 \rho g h} \right] = \frac{D^2 g t}{32\nu h_0}. \quad (5.66)$$

Este resultado es válido si las fuerzas viscosas son dominantes; es decir, si [ver (MF15.20) y (MF15.21)]

$$Re \frac{R}{L} \ll 1 \quad \text{y} \quad Re St \frac{D}{L} \ll 1, \quad (5.67)$$

siendo $Re = \frac{V_0 D}{\nu}$, $St = \frac{L}{V_0 t_0}$, $V_0 = \frac{h_0}{t_0}$ y L la longitud del conducto. Haciendo uso de (5.55) y expresando estas condiciones con los datos del problema, se tiene que

$$\frac{\rho F D^2}{8\pi \mu^2 L h_0} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho F D^2}{8\pi \mu^2 h_0^2} \ll 1. \quad (5.68)$$

Se ha mantenido el factor 8π al no ser de orden unidad.

P.5.5 Flujo radial producido por la caída de una placa dentro de un depósito

Un depósito cilíndrico de radio interior R contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ hasta una altura $h_0 \ll R$. Sobre este líquido se deposita una placa cilíndrica de radio R y masa M con un orificio en el centro de radio $a \ll R$ (ver figura 5.7). Bajo la acción del peso de la placa, y suponiendo que no hay holgura entre el disco y las paredes del depósito, el líquido empieza a salir por el orificio. Se desea averiguar el caudal en función del tiempo $Q(t)$ que sale por el orificio. Para calcularlo supongan que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento radial del líquido entre la placa y el fondo del depósito, que el rozamiento entre el disco y las paredes laterales del depósito es despreciable, y que también es despreciable la inercia de la placa.

Den también las condiciones, en función de los datos del problema, que se deben verificar para que la expresión $Q(t)$ obtenida sea válida.

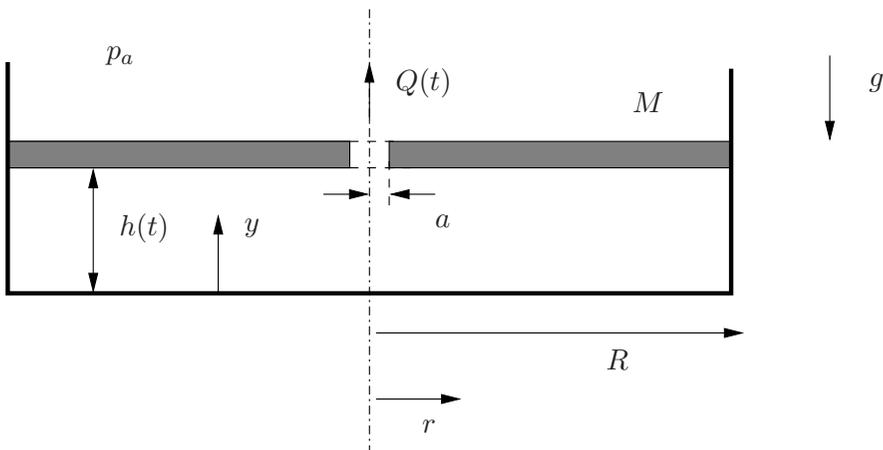


Figura 5.7: Esquema del sistema a estudiar

Solución.

Aplicando la ecuación de conservación de la masa en forma integral (MF5.7) al volumen de control que ocupa el líquido entre el disco y el fondo del depósito cilíndrico se tiene que

$$Q(t) = -\pi(R^2 - a^2)\frac{dh}{dt} \simeq -\pi R^2\frac{dh}{dt}, \quad (5.69)$$

donde se ha usado la condición $a \ll R$. Por tanto, debemos conocer $h(t)$ para calcular $Q(t)$.

Al ser la altura inicial $h_0 \ll R$ y ser dominantes las fuerzas viscosas en el movimiento, se debe resolver la ecuación de Reynolds (MF16.38), con (MF16.32), (MF16.36) y (MF16.37). El sistema de coordenadas curvilíneas (α, β) de la ecuación de Reynolds viene dado en este caso por las coordenadas cilíndricas (r, θ) :

$$y = z, \quad (5.70)$$

$$\alpha = r, h_\alpha = h_r = 1, \quad (5.71)$$

$$\beta = \theta, h_\beta = h_\theta = r. \quad (5.72)$$

Para la otra coordenada y perpendicular al plano se toma la referencia $y = 0$ en el fondo del depósito cilíndrico (ver figura 5.7). Así, las ecuaciones (MF16.32), (MF16.36) y (MF16.38) quedan como

$$p_r \equiv -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (5.73)$$

$$q_r = \frac{h^3}{12\mu} p_r, \quad (5.74)$$

y

$$r \frac{dh}{dt} + \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} = 0, \quad (5.75)$$

respectivamente. Por otro lado, el caudal en la dirección r por unidad de longitud según θ , q_r , se relaciona con el caudal desconocido $Q(t)$ a través de la expresión

$$Q(t) = [2\pi r q_r]_{r=a}. \quad (5.76)$$

Al integrar la ecuación (5.75) respecto a r se tiene

$$\frac{r^2}{2} \frac{dh}{dt} = -r q_r + C_1, \quad (5.77)$$

donde C_1 es una constante que puede depender del tiempo y que se determina mediante la condición de contorno en la pared lateral del depósito $r = R$:

$$q_r = 0 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \right) \quad \text{en} \quad r = R. \quad (5.78)$$

Así, el caudal por unidad de longitud resultante es

$$q_r = \left(\frac{R^2 - r^2}{2r} \right) \frac{dh}{dt}. \quad (5.79)$$

Obsérvese que (5.69) se cumple al sustituir (5.79) en (5.76) para $r = a$. A continuación, para determinar la distribución de presión $p(r, t)$, es necesario introducir el valor $q_r(r, t)$ en (5.74) y, teniendo en cuenta la definición (5.73) de p_r , integrar de nuevo la ecuación resultante, llegándose a la expresión

$$-\left(\frac{R^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) \frac{dh}{dt} = \frac{h^3}{12\mu} p + C_2, \quad (5.80)$$

donde C_2 es otra constante de integración que puede depender del tiempo y que se determina gracias a la condición de contorno

$$p \simeq p_a, \quad \text{en } r = a. \quad (5.81)$$

Reagrupando términos y simplificando logaritmos queda la siguiente expresión para la presión

$$p(r, t) = p_a - \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \left[R^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{(r^2 - a^2)}{2} \right]. \quad (5.82)$$

Conocida la distribución de presión debajo de la placa, que depende de $h(t)$ a través de su derivada, la ecuación diferencial que proporciona $h(t)$ se obtiene de la ecuación dinámica de la placa. Despreciando la inercia de la placa, Md^2h/dt^2 , y el posible rozamiento entre la placa y el depósito, esta ecuación es simplemente un balance entre el peso de la placa y las fuerzas de presión,

$$Mg + \pi(R^2 - a^2)p_a - 2\pi \int_a^R p(r, t)rdr \simeq 0, \quad (5.83)$$

donde se ha tenido en cuenta que la presión sobre la placa es p_a . Sustituyendo (5.82) e integrando, esta ecuación se escribe, despreciando términos pequeños del orden de a^2/R^2 , como

$$\frac{1}{h^3} \frac{dh}{dt} = - \frac{Mg}{6\pi\mu R^4 \left[\ln \left(\frac{R}{a} \right) - \frac{3}{4} \right]}; \quad (5.84)$$

Es conveniente adimensionalizar esta ecuación mediante el uso de las variables adimensionales de orden unidad

$$\eta = \frac{h}{h_0} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (5.85)$$

donde h_0 es la altura inicial y t_c es el tiempo característico del problema que, sustituyendo (5.85) en (5.84), resulta ser

$$t_c = \frac{6\pi\mu R^4 \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{3}{4} \right]}{h_0^2 Mg}. \quad (5.86)$$

Con estas variables, (5.84) queda

$$\frac{1}{\eta^3} \frac{d\eta}{dt} = 1. \quad (5.87)$$

Resolviendo la ecuación con la condición inicial

$$\eta(0) = 1, \quad (5.88)$$

se obtiene la solución

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau}} \quad (5.89)$$

o, en su forma dimensional,

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{Mgh_0^2}{3\pi\mu R^4 \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{3}{4} \right]} t}}. \quad (5.90)$$

Finalmente, sustituyendo (5.90) en (5.69), se obtiene el caudal pedido

$$Q(t) = \pi R^2 \frac{Mg}{6\pi\mu R^4 \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{3}{4} \right]} \frac{h_0^3}{\left\{ 1 + \frac{Mgh_0^2}{3\pi\mu R^4 \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) - \frac{3}{4} \right]} t \right\}^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.91)$$

La solución anterior es válida si, además de la condición $h_0/R \ll 1$, se verifica que las fuerzas viscosas son dominantes sobre la inercia, tanto la convección de cantidad de movimiento como la aceleración local del fluido; es decir, si [ver (MF16.29)]

$$Re \frac{h_0}{R} = \frac{\rho V_c h_0}{\mu} \frac{h_0}{R} \ll 1 \quad \text{y} \quad \frac{\rho h_0^2}{\mu t_c} \ll 1. \quad (5.92)$$

Como la velocidad característica V_c en la dirección r es del orden de q_r/h_0 , que de acuerdo con (5.79) y (5.84) resulta ser $V_c \sim Rh_0^2 Mg/[6\pi\mu R^4 \ln(R/a)]^2$, la primera condición (5.92) se escribe

$$\frac{\rho Mg}{6\pi\mu^2 \ln\left(\frac{R}{a}\right)} \left(\frac{h_0}{R}\right)^4 \ll 1. \quad (5.93)$$

Teniendo en cuenta (5.86), la segunda condición en (5.92) queda exactamente igual que (5.93). Por último, la hipótesis de inercia de la placa despreciable, hecha en la ecuación (5.83), es aproximadamente válida si

$$M \frac{h_0}{t_c^2} \ll Mg; \quad (5.94)$$

es decir, si

$$\frac{M^2 g}{36\pi^2 \mu^2 \left[\ln\left(\frac{R}{a}\right)\right]^2} \left(\frac{h_0}{R}\right)^5 \ll 1. \quad (5.95)$$

Como $\frac{h_0}{R} \ll 1$, las condiciones (5.93) y (5.95) se van a verificar siempre que la masa de la placa no sea extremadamente grande.

²En la estimación de los órdenes de magnitud se va a despreciar el término 3/4 frente a $\ln(R/a)$, pero se va a retener el factor 6π debido a que no es de orden unidad.

P.5.6 Película líquida producida por un chorro sobre un cilindro

Un caudal Q de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ sale de un conducto vertical para incidir sobre la base horizontal de un cilindro vertical de radio R , mucho mayor que el diámetro del conducto. Supongan que el movimiento del líquido sobre este plano horizontal es casi unidireccional suficientemente lejos del chorro que sale del conducto y que las fuerzas de viscosidad son dominantes en ese movimiento (ver zona superior ampliada de la figura 5.8). El mismo chorro cae sobre la superficie lateral del cilindro formando una película fluida de espesor $H_p \ll R$ (ver zona inferior ampliada de la figura 5.8). Supongan que las fuerzas viscosas son también dominantes en el movimiento de la película líquida descendente y que la tensión superficial es despreciable en la interfaz líquido-aire. Se pide:

1. Hallar la altura $H(r)$ del líquido sobre la base del cilindro. Por simplicidad, supongan que la altura final H_f es conocida (ver detalle en la parte superior de la figura 5.8).
2. Perfil de velocidad en la película líquida que desciende por la superficie lateral del cilindro.
3. Espesor constante H_p de la película líquida que cae lateralmente.
4. Reescriban la solución del apartado 1 suponiendo que $H_f \simeq H_p$.

Solución.

1. Altura $H(r)$.

Analicemos en primer lugar la zona ampliada, relacionada con la base horizontal del cilindro, de la figura 5.8. En esta región se tiene un movimiento estacionario, axilsimétrico y casi unidireccional de un líquido. Para poder

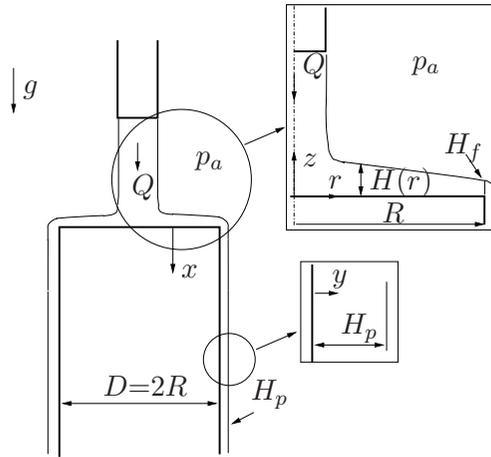


Figura 5.8: Esquema del problema y detalle de la región superior

conocer $H(r)$ se procede en primer lugar a calcular el perfil de velocidad suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento.

De la ecuación de conservación de la masa (MF6.5) en coordenadas cilíndricas (MF1.18) se tiene $v_r = v_r(r, z)$ y $v_\theta = v_z \simeq 0$. Por otro lado, las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones r y z (ver MF §16.3) quedan como

$$0 = -\frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}, \quad (5.96)$$

$$0 = \frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial z}, \quad (5.97)$$

respectivamente, donde se ha supuesto que las únicas fuerzas másicas son las gravitatorias. Integrando esta última ecuación con la condición de contorno

$$p = p_a, \quad z = H(r), \quad (5.98)$$

se tiene que la distribución de presión en la película líquida es

$$p = p_a + \rho g[H(r) - z]. \quad (5.99)$$

La ecuación (5.96) queda entonces

$$\mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \rho g \frac{dH(r)}{dr}, \quad (5.100)$$

que integrada dos veces resulta

$$v_r = \frac{\rho g}{2\mu} \frac{dH(r)}{dr} z^2 + C_1 z + C_2, \quad (5.101)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración, que se obtendrán de las condiciones de contorno

$$v_r = 0, \quad z = 0, \quad (5.102)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} \simeq 0, \quad z = H(r). \quad (5.103)$$

La primera de las condiciones tiene en cuenta la ausencia de deslizamiento del líquido sobre la superficie sólida, mientras que la segunda se debe a que la viscosidad dinámica del aire es mucho menor que la del líquido y, por tanto, se puede suponer, en primera aproximación, un esfuerzo cortante nulo en la interfaz aire-líquido. Teniendo en cuenta estas condiciones,

$$C_2 = 0, \quad (5.104)$$

$$C_1 = -\frac{\rho g H(r)}{\mu} \frac{dH}{dr}, \quad (5.105)$$

por lo que la expresión definitiva de (5.101) para v_r es

$$v_r = -\frac{\rho g}{\mu} \frac{dH}{dr} \left[H(r)z - \frac{z^2}{2} \right]. \quad (5.106)$$

Como el caudal total Q es constante y conocido, por conservación de la masa se deduce que

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{H(r)} v_r r dz d\theta = -\frac{2\pi r \rho g}{\mu} \frac{dH}{dr} \int_0^{H(r)} \left[H(r)z - \frac{z^2}{2} \right] dz, \quad (5.107)$$

por lo que se llega a la siguiente ecuación diferencial para $H(r)$

$$Q = -\frac{2\pi r \rho g}{\mu} \frac{H^3}{3} \frac{dH}{dr}. \quad (5.108)$$

A esta ecuación se podría haber llegado también calculando el caudal q_r por unidad de longitud,

$$q_r = \int_0^{H(r)} v_r dz, \quad (5.109)$$

y teniendo en cuenta, de la ecuación de Reynolds (MF16.38), que

$$r q_r = \text{constante} = \frac{Q}{2\pi}. \quad (5.110)$$

Integrando (5.108) junto con la condición de contorno $H(R) = H_f$, se tiene el espesor $H(r)$ pedido:

$$H(r) = \left(H_f^4 + \frac{6Q\mu}{\pi\rho g} \ln \frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.111)$$

2. Perfil de velocidad en la cara lateral del cilindro.

Como el movimiento es también casi unidireccional, ahora en el eje x (ver figura 5.8), se tiene por continuidad y axilsimetría, $\vec{v} \simeq v_x(r)\vec{e}_x$. Se ha introducido la coordenada x pues z no tiene el mismo sentido del flujo (la equivalencia es $x = -z$). El hecho de que v_x no dependa de x implica que el espesor H_p es constante.

La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x , suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes, es (MF16.30)

$$p_l + \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0, \quad (5.112)$$

donde y es la coordenada perpendicular a la superficie lateral del cilindro ($y = r - R$, ver zona ampliada de la figura 5.8 que se corresponde con la cara lateral del cilindro). La ecuación de cantidad de movimiento en la dirección radial, $\partial(p + \rho gz)/\partial y = 0$, nos dice que la presión no depende de la dirección y , por lo que $p = p_a$ en toda la película líquida. Por tanto, la presión reducida vale, $p_l \equiv -\partial(p + \rho gz)/\partial x = \rho g$. Las condiciones de contorno para (5.112) son idénticas a (5.102)-(5.103), pero aplicadas a la pared lateral; es decir,

$$v_x = 0, \quad y = 0, \quad (5.113)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq 0, \quad y = H_p. \quad (5.114)$$

Integrando (5.112) y aplicando las condiciones (5.113)-(5.114) resulta un perfil de velocidad

$$v_x = \frac{\rho g y}{\mu} \left(H_p - \frac{y}{2} \right). \quad (5.115)$$

3. Espesor de la película H_p .

Para calcular el espesor, procedemos de la misma forma que en el apartado 1, es decir, calculamos el caudal Q (conocido) en función de la altura constante H_p a través de la ecuación de conservación de la masa (suponiendo que $H_p \ll R$)

$$Q = 2\pi R \int_0^{H_p} v_x dy = \frac{2\pi R \rho g H_p^3}{3\mu}, \quad (5.116)$$

de donde

$$H_p = \left(\frac{3Q\mu}{2\pi R \rho g} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.117)$$

4. Solución del apartado 1 suponiendo que $H_f \simeq H_p$.

Sustituyendo $H_f = H_p$ en (5.111), donde H_p viene dado por (5.117), se llega a

$$H(r) \simeq \left[\frac{6Q\mu}{\pi\rho g} (\ln r - \ln R) + \left(\frac{3Q\mu}{2\pi R\rho g} \right)^{\frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (5.118)$$

P.5.7 Flujo no newtoniano en un conducto

Se desea averiguar cómo descarga a través de un conducto de diámetro D y longitud $L \gg D$ un fluido no newtoniano cuya componente relevante del tensor de esfuerzos viscosos viene dada, en coordenadas cilíndricas (r, θ, x) , siendo x la dirección a lo largo del conducto, por

$$\tau'_{xr} = -m \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n, \quad (5.119)$$

donde m y n son constantes conocidas y u es la componente de la velocidad en la dirección x . En particular, se pide:

1. Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes, hallen la ley equivalente a la de Hagen-Poiseuille para este tipo de fluido que proporciona el caudal Q en función de p_l .
2. Evolución temporal de $l(t)$ suponiendo que $l(0) = L$ (ver figura 5.9).

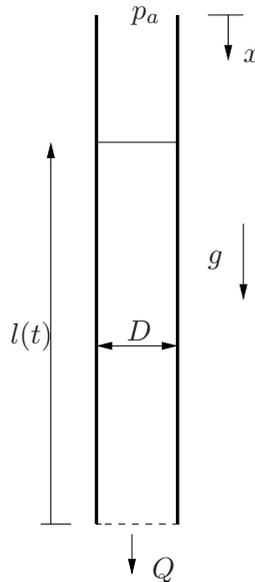


Figura 5.9: Esquema del flujo en el conducto

Solución.

1. Suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x , haciendo uso de (MF15.1) y (5.119), se escribe

$$p_l + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau'_{xr}) = p_l - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \right] = 0. \quad (5.120)$$

Integrando esta ecuación dos veces e imponiendo las condiciones de contorno de regularidad de la velocidad en el eje y de velocidad nula en $r = D/2$, se llega a la siguiente distribución radial de la velocidad:

$$u = \frac{n}{n+1} \left(\frac{p_l}{2m} \right)^{1/n} \left[\left(\frac{D}{2} \right)^{(n+1)/n} - r^{(n+1)/n} \right]. \quad (5.121)$$

El caudal se obtiene de la integración de esta expresión en la sección del conducto:

$$Q = 2\pi \int_0^{D/2} r u dr = \frac{n\pi}{3n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left(\frac{p_l}{2m} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (5.122)$$

que es la expresión equivalente a la de Hagen-Poiseuille (MF15.5) para este fluido no newtoniano (evidentemente, cuando $n = 1$ y $m = \mu$ ambas expresiones coinciden).

2. Teniendo en cuenta que (ver figura 5.9)

$$p_l \equiv -\frac{\partial(p + \rho g z)}{\partial x} = \rho g, \quad (5.123)$$

donde ρ es la densidad (constante) del fluido y g es la aceleración de la gravedad, y sustituyendo en (5.122), se llega a la siguiente ecuación diferencial para la posición $l(t)$ de la superficie libre:

$$Q = \frac{n\pi}{3n+1} \left(\frac{D}{2} \right)^{\frac{3n+1}{n}} \left(\frac{\rho g}{2m} \right)^{\frac{1}{n}} = -\frac{\pi D^2}{4} \frac{dl}{dt}, \quad (5.124)$$

donde la última igualdad corresponde a la conservación de la masa dentro del conducto para un fluido de densidad constante. Integrando e imponiendo la condición inicial dada en el enunciado se obtiene

$$l = L - \frac{4n}{(3n+1)D^2} \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{3n+1}{n}} \left(\frac{\rho g}{2m}\right)^{\frac{1}{n}} t. \quad (5.125)$$

Capítulo 6

Flujos con $Re \ll 1$ y en medios porosos

P.6.1 Velocidad terminal de una esfera dentro de un cilindro

Una esfera sólida de densidad ρ_s y radio R cae verticalmente por la acción de la gravedad en el interior de un cilindro de radio $R + h_o$, $h_o \ll R$, que está relleno de un líquido de densidad $\rho < \rho_s$ y viscosidad μ (ver figura 6.1). Se desea calcular la evolución de la velocidad de caída $V(t)$ suponiendo que en el movimiento del líquido entre la esfera y la pared del cilindro las fuerzas viscosas son dominantes. En particular, se pide:

1. Diferencia de presión que existe entre ambos lados de la esfera ($p_1 - p_2$) en función de $V(t)$ y los datos del problema. Para ello calculen previamente el espesor $h(x)$ de la película líquida en función de h_o y R , y el caudal por unidad de longitud q que circula entre la esfera y el cilindro. Supongan que, prácticamente, toda la caída de presión ocurre en una región en torno a $h(x = 0) = h_o$ en la que $x \ll R$ (ver detalle de la figura 6.1), simplificando así $h(x)$, y utilicen la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2/a)^n} = \frac{n\pi\sqrt{a}}{2^{n-1}(n-1)!}. \quad (6.1)$$

Desprecien la contribución de la gravedad a la diferencia de presión.

2. Fuerza de resistencia total (fuerza de fricción más fuerza de presión). Simplifiquen las expresiones resultantes teniendo en cuenta lo dicho en el apartado anterior y $h_0/R \ll 1$.
3. Ecuación para $V(t)$. Hallen la velocidad terminal. Comparen esta velocidad terminal con la que tendría la misma esfera cayendo libremente en el mismo fluido cuando las fuerzas viscosas son dominantes.

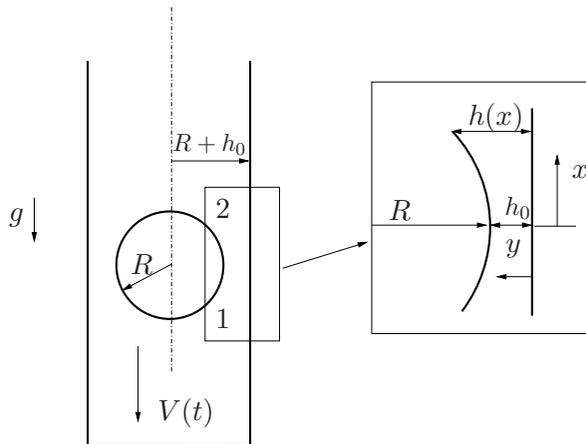


Figura 6.1: Esquema del problema y detalle de la región cercana a la pared

Solución.

Según el enunciado del problema se parte de las siguientes suposiciones (MF16.29)

$$\frac{h_0}{R} \ll 1, \quad Re \frac{h_0}{R} \ll 1, \quad Re St \frac{h_0}{R} \ll 1, \quad (6.2)$$

donde el número de Reynolds Re y el de Strouhal St se definen como

$$Re = \frac{\rho V_t R}{\mu},$$

$$St = \frac{R}{V_t t_0}, \quad (6.3)$$

respectivamente, y donde V_t es la velocidad terminal y t_0 un tiempo característico del movimiento del fluido. Los valores de V_t y t_0 se obtendrán de la solución del problema.

1. Diferencia de presión, $p_1 - p_2$.

Para calcular la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2 en función de la velocidad de caída $V(t)$, la viscosidad dinámica μ y el radio de la esfera R , y siguiendo las indicaciones del enunciado, debemos conocer previamente $h(x)$ en función de los datos geométricos del problema. Por simple deducción trigonométrica de la figura 6.2 se tiene

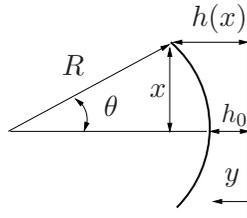


Figura 6.2: Esquema para el cálculo de $h(x)$

$$h(x) - h_0 = R(1 - \cos \theta) = R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right]; \quad (6.4)$$

es decir,

$$h(x) = h_0 + R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \right]. \quad (6.5)$$

Por conservación de la masa, el caudal que desaloja la esfera al caer, $Q = \pi R^2 V$, es el mismo que pasa a través de la película fluida,

$$Q = V \pi R^2 \simeq 2 \pi R q_x, \quad (6.6)$$

donde q_x es el caudal en la dirección x por unidad de longitud en la dirección transversal al eje x . Dicha aproximación es válida porque $h_0 \ll R$. De la ecuación anterior

$$q_x \simeq \frac{VR}{2}. \quad (6.7)$$

Como las fuerzas viscosas son dominantes, este caudal es igual a [ver, por ejemplo, (MF16.15)]

$$q_x = \frac{h^3 p_x}{12\mu} + \frac{Vh}{2}, \quad (6.8)$$

donde el gradiente de la presión reducida es, despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria,

$$p_x = -\frac{\partial(p + \rho gz)}{\partial x} \simeq -\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.9)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (6.7)-(6.9) se llega a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\mu V}{h^3} \frac{V}{2} (h - R) \simeq -\frac{6\mu VR}{h^3}, \quad (6.10)$$

porque $h \ll R$. Nótese que en la expresión anterior $V = V(t)$ y $h = h(x)$.

Introduciendo la ecuación (6.5) en (6.10) e integrando entre los puntos 1 y 2 (ver figura 6.1), se obtiene la ecuación

$$-\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{x_1}^{x_2} \frac{6\mu VR}{h^3} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{6\mu VR}{\left\{ h_0 + R \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2} \right] \right\}^3} dx. \quad (6.11)$$

Los límites de integración del segundo miembro, $x_1 > 0$ y $x_2 < 0$ no están definidos. Pero teniendo en cuenta que las expresiones anteriores sólo son válidas en una región pequeña donde $x \sim h_0 \ll R$, en la que ocurre

prácticamente toda la caída de presión, en primera aproximación los límites de integración, que son del orden de R ($|x_1|, |x_2| \sim R$), se pueden colocar en $\pm\infty$. Consecuentemente con esta aproximación, $h(x)$ en (6.5) se puede simplificar reteniendo sólo el primer término del desarrollo en serie de Taylor para $x/R \ll 1$ de

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R}\right)^2. \quad (6.12)$$

Es decir,

$$h(x) \simeq h_0 + \frac{x^2}{2R}. \quad (6.13)$$

Sustituyendo en (6.11) y haciendo uso de (6.1), se llega a

$$p_1 - p_2 \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6\mu VR}{\left(h_0 + \frac{x^2}{2R}\right)^3} dx = \frac{9\pi\mu VR\sqrt{2Rh_0}}{4h_0^3}. \quad (6.14)$$

2. Fuerza de resistencia total.

La fuerza de resistencia total es la suma de la fuerza de fricción $[F_f(V)]$ y de la fuerza de presión $[F_p(V)]$. Para calcular la primera es necesario conocer el campo de velocidad u_x [según la expresión (MF16.12), una vez sustituido el valor de $p_x = 6\mu VR/h^3$]

$$u_x = \frac{3VRy(y-h)}{h^3} + \frac{Vy}{h}, \quad (6.15)$$

donde el segundo término del segundo miembro se ha variado con respecto a (MF16.12) porque se ha tomado el eje y a partir de la superficie fija (ver figura 6.2). La fuerza de fricción F_f se escribe, con la misma aproximación aplicada a (6.11) y con la simplificación $h_0 \ll R$, como

$$F_f = 2\pi R \int_{-\infty}^{\infty} \tau_f dx = 2\pi R \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (6.16)$$

Sustituyendo el valor de u_x (6.15) y resolviendo la integral de la misma forma que se hizo en el apartado anterior, se llega al resultado

$$F_f \simeq \frac{6\pi^2 R^2 \mu V \sqrt{2Rh_0}}{h_0^2}. \quad (6.17)$$

Por otro lado, la fuerza de presión es

$$F_p = (p_1 - p_2)\pi R^2 = \frac{9\pi^2 \mu V R^3 \sqrt{2Rh_0}}{4h_0^3}. \quad (6.18)$$

Comparando las expresiones (6.17) y (6.18) se observa que $F_p/F_f \sim R/h_0 \gg 1$, por lo que se puede despreciar la fuerza de fricción viscosa frente a la de presión, en primera aproximación. Además del valor concreto de F_p y F_f , ésta es una diferencia esencial con el problema de la resistencia de una esfera en un medio infinito con viscosidad dominante, en el que F_p y F_f son comparables (concretamente, la fuerza de fricción supone los dos tercios de la fuerza de resistencia total; ver MF §17.2).

3. Ecuación para $V(t)$.

La ecuación diferencial para la velocidad es (MF17.49)

$$\rho_s \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{dV(t)}{dt} = \frac{4}{3} \pi R^3 g(\rho_s - \rho) - F_f - F_p, \quad (6.19)$$

con F_f y F_p definidas por (6.17) y (6.18), respectivamente. La velocidad terminal V_t se obtiene igualando el peso neto a la fuerza de resistencia total [es decir, haciendo $\frac{dV(t)}{dt} = 0$ en (6.19)]. En este caso, despreciando la fuerza de fricción, se llega a

$$V_t = \frac{16g(\rho_s - \rho)h_0^3}{27\pi\mu\sqrt{2Rh_0}}. \quad (6.20)$$

Si la esfera cayera en el mismo líquido pero sin el tubo, en un medio infinito, la velocidad terminal vendría dada por la expresión de Stokes (MF17.50)

$$V_{t,libre} = \frac{2g(\rho_s - \rho)R^2}{9\mu}. \quad (6.21)$$

Por tanto, dividiendo una por la otra queda la relación

$$\frac{V_t}{V_{t,libre}} = \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} \left(\frac{h_0}{R}\right)^{\frac{5}{2}} \ll 1. \quad (6.22)$$

Es decir, la presencia de las paredes del tubo disminuye notablemente la velocidad terminal de la partícula, como era de esperar.

P.6.2 Velocidad terminal con la aproximación de Oseen

Calculen la velocidad terminal de una esfera de radio R y densidad ρ_p que cae en el seno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ suponiendo que $Re \ll 1$ y utilizando la **aproximación de Oseen**. Se valorará la obtención explícita de esta velocidad terminal en función de los datos dados.

Calculen el valor numérico de esta velocidad para una esfera de densidad $\rho_p = 5\rho$, radio 1 mm y un líquido de viscosidad cinemática $\nu = 2 \times 10^{-4}$ m²/s y compárenla con la velocidad terminal obtenida con la ley de Stokes. Comprueben que en ambos casos el número de Reynolds es pequeño.

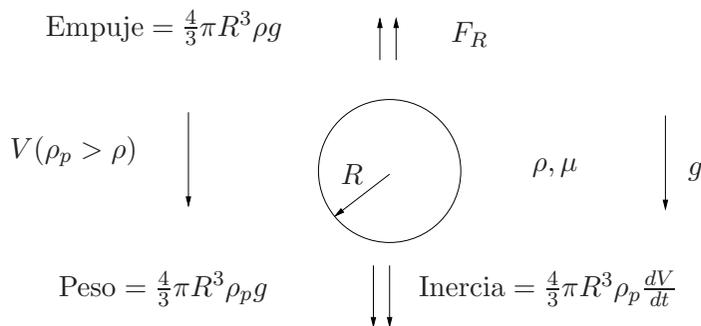


Figura 6.3: Esquema del balance de fuerzas

Solución.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera de radio R y densidad ρ_p se resumen en la figura 6.3. La segunda ley de Newton aplicada a la esfera se escribe (MF17.49):

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_p \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_p - \rho) g - F_R, \quad (6.23)$$

donde se ha tomado como sentido positivo el de la aceleración gravitatoria. Para el caso de la aproximación de Stokes, la fuerza de resistencia F_R viene dada por la ley lineal con la velocidad (MF17.45)

$$F_{R,Stokes} = 6\pi\mu VR, \quad (6.24)$$

donde μ es la viscosidad dinámica del fluido y V la velocidad de caída de la esfera (al ser $\rho_p > \rho$). Si el movimiento de la esfera en el fluido llega al estado estacionario, la velocidad límite alcanzada se denomina terminal y en el límite de Stokes es (MF17.50)

$$V_{t,Stokes} = \frac{2}{9} \frac{R^2 g (\rho_p - \rho)}{\mu}. \quad (6.25)$$

Al sustituir los datos del problema, la velocidad terminal con la aproximación de Stokes resulta $V_{t,Stokes} = 0,0435$ m/s. Del mismo modo, el número de Reynolds se define como (MF17.48)

$$Re = \frac{2RV_t}{\nu}, \quad (6.26)$$

y el resultado para la aproximación de Stokes es $Re_{Stokes} = \frac{2RV_{t,Stokes}}{\nu} = 0,435$.

Si tenemos en cuenta el término de orden V^2 en la fuerza de resistencia (aproximación de Oseen), ésta queda como

$$F_{R,Oseen} = F_{R,Stokes} \left(1 + \frac{3}{16} \frac{2RV\rho}{\mu} \right), \quad (6.27)$$

donde $F_{R,Stokes}$ viene definido por (6.24). A este resultado se llega sin más que aplicar la definición de coeficiente de resistencia C_D (MF17.46),

$$C_D = \frac{F_R}{\frac{1}{2}\rho V^2 \pi R^2}, \quad (6.28)$$

al resultado de Oseen (MF17.62)

$$C_{D,Oseen} = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right), \quad (6.29)$$

siendo Re el número de Reynolds definido en (6.26). Igualando (6.28) y (6.29) se llega a la expresión (6.27). Introduciendo (6.27) en (6.23) e igualando el segundo miembro a cero se llega a una ecuación de segundo grado para la velocidad terminal cuya solución es

$$V_{t,Oseen} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{R^3(\rho_p - \rho)g}{\nu^2 \rho}} - 1}{\frac{3}{4} \frac{R}{\nu}}, \quad (6.30)$$

donde se ha seleccionado el signo positivo de la raíz al ser $\rho_p > \rho$. Si sustituimos de nuevo los datos en esta última expresión, se llega a una velocidad terminal y a un número de Reynolds de $V_{t,Oseen} = 0,0404$ m/s y $Re_{Oseen} = 0,404$, respectivamente. Al ser Re apreciablemente menor que la unidad (aunque no mucho menor), los valores de la velocidad terminal calculados con ambas aproximaciones son muy parecidos (ver figura MF17.2).

P.6.3 Flujo de un gas en un medio poroso entre dos esferas

Un gas de viscosidad μ circula a través de un medio poroso de permeabilidad Π , contenido entre dos esferas concéntricas, impulsado por una diferencia de presión $p_a - p_b > 0$ (ver figura 6.4). Suponiendo que $h \ll R$ y que el gas fluye tan lentamente que se puede suponer que la temperatura T permanece constante, se pide:

1. Distribución de presión en el medio poroso.
2. Gasto másico G que circula.

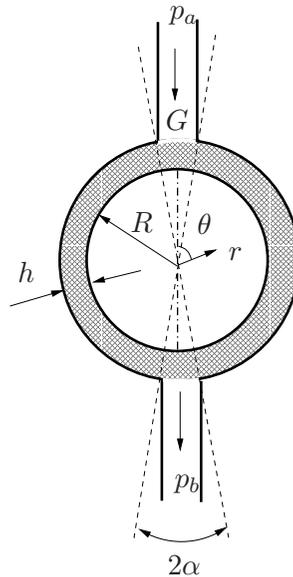


Figura 6.4: Esquema de la geometría del problema con el medio poroso de espesor h entre las dos esferas de radios R y $R + h$

Solución.

1. Las ecuaciones generales que definen el problema son, por un lado, la conservación de la masa en el medio poroso (MF18.9),

$$\frac{\partial(\Upsilon\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0, \quad (6.31)$$

donde Υ es la porosidad del medio. Por otro lado se tiene la ley de Darcy para un medio isotrópico que viene dada por (MF18.14)

$$\vec{v} = -\frac{\Pi}{\mu} (\nabla p + \rho \nabla U), \quad (6.32)$$

donde Π es la permeabilidad del medio poroso, μ es la viscosidad dinámica del gas y U es la función potencial de la cual derivan las fuerzas gravitatorias. Para el caso de un flujo estacionario, la ecuación (6.31) queda

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.33)$$

Por otro lado, si se desprecian las fuerzas másicas por tratarse de un gas, (6.32) queda

$$\vec{v} = -\frac{\Pi \nabla p}{\mu}. \quad (6.34)$$

Por último, la ecuación del gas perfecto que relaciona la presión p , la densidad ρ y la temperatura T es

$$\frac{p}{\rho} = R_g T, \quad (6.35)$$

donde R_g es la constante del gas. Si tenemos en cuenta las expresiones (6.34)-(6.35) y las sustituimos en la ecuación (6.33) queda una ecuación para la presión (MF18.17 en estado estacionario),

$$\nabla \cdot (p \nabla p) = 0, \quad (6.36)$$

donde se ha tenido en cuenta que Π , R_g , T y μ son constantes. Esta ecuación se puede poner en función de las coordenadas esféricas del problema gracias a (MF1.26)-(MF1.27). Si, además, se tiene en cuenta la igualdad

$$\frac{\partial p^2}{\partial r} = 2p \frac{\partial p}{\partial r},$$

la ecuación para la presión en coordenadas esféricas es

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial p^2}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (6.37)$$

Si aplicamos la hipótesis de que el espesor es mucho más pequeño que el radio de la esfera ($h \ll R$) y comparamos los dos términos de la ecuación anterior, se deduce que las variaciones radiales son despreciables frente a las variaciones angulares con errores del orden de $(\frac{h}{R})^2$, quedando, en primera aproximación,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p^2}{\partial \theta} \right) \simeq 0. \quad (6.38)$$

Integrando dos veces, se tiene

$$p^2 = C_1 \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + C_2, \quad (6.39)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Teniendo en cuenta las condiciones de contorno (ver figura 6.4)

$$p = p_a, \theta = \alpha, \quad (6.40)$$

$$p = p_b, \theta = \pi - \alpha, \quad (6.41)$$

resulta

$$p = \sqrt{p_a^2 + \frac{p_a^2 - p_b^2}{2} \left\{ \frac{\ln [\tan (\frac{\theta}{2})]}{\ln [\tan (\frac{\alpha}{2})]} - 1 \right\}}, \quad (6.42)$$

que es la distribución de presión que se pide en el primer apartado.

2. Gasto másico G .

El gasto másico, o flujo convectivo de masa, viene dado por (MF5.1) con $\phi = \rho$,

$$G = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS, \quad (6.43)$$

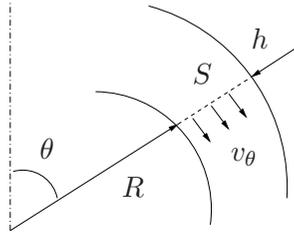


Figura 6.5: Esquema para el cálculo del gasto másico G

donde S es cualquier superficie cónica $\theta = \text{constante}$ que atraviesa el medio poroso, pues el gasto se conserva a lo largo del flujo al ser el proceso estacionario. Suponiendo que la velocidad v_θ del gas es aproximadamente constante en cada sección, se tiene (ver figura 6.5)

$$G = 2\pi R h \rho v_\theta \text{sen } \theta. \quad (6.44)$$

Por otro lado, de (6.34)

$$v_\theta = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \simeq -\frac{\Pi}{\mu R} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \quad (6.45)$$

Haciendo uso de la ecuación de estado (6.35), además de la ecuación (6.38), en la que se tiene que $\partial p^2 / \partial \theta = C_1 / \text{sen } \theta$, con $C_1 = (p_b^2 - p_a^2) / 2 \ln[\tan(\alpha/2)]$, se llega a

$$\rho v_\theta = -\frac{\Pi}{2\mu R_g T R} \frac{p_a^2 - p_b^2}{2 \ln[\tan(\frac{\alpha}{2})]} \frac{1}{\text{sen } \theta}. \quad (6.46)$$

Sustituyendo este valor de v_θ en (6.44) se llega a

$$G = \frac{\pi \Pi h (p_b^2 - p_a^2)}{2\mu R_g T \ln \left[\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]}. \quad (6.47)$$

Téngase en cuenta que la aproximación (6.38) es, obviamente, equivalente a la de flujo casi unidireccional $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$, pues de la ley de Darcy (6.34), junto con la ecuación de estado (6.35), se tiene

$$\rho \vec{v} \simeq \rho v_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\rho}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = -\frac{\Pi}{2\mu R R_g T} \frac{\partial p^2}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \quad (6.48)$$

que sustituido en la ecuación de continuidad (6.33) resulta

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \simeq \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta \rho v_\theta) = 0, \quad (6.49)$$

que es equivalente a (6.38).

P.6.4 Vaciado de una botella porosa esférica

Considérese el depósito esférico de radio R y pared porosa de espesor $e \ll R$ de la figura 6.6. Inicialmente está lleno de agua y se desea analizar el proceso de descarga a la atmósfera bajo la acción de las fuerzas gravitatorias. Suponiendo que tanto la porosidad Υ como la permeabilidad Π son constantes, calculen:

1. Caudal de agua que fluye hacia el exterior en función de la posición H de la superficie libre.
2. Ecuación diferencial que determina $H(t)$.

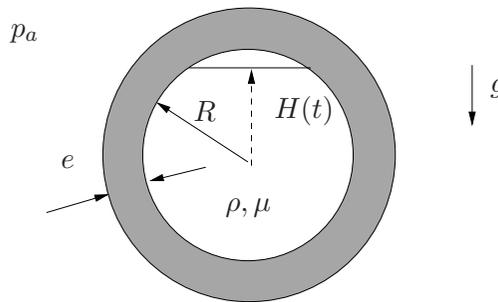


Figura 6.6: Esquema del depósito esférico formado por un medio poroso de espesor e

Solución.

1. La ley de Darcy (MF18.14) para un medio poroso en el que el proceso de descarga sea unidireccional dentro del medio poroso, es decir, suponiendo que sólo se produzca en la dirección radial (campo de velocidad $\vec{v} = v_r \vec{e}_r$), es

$$\vec{v} = -\frac{\Pi}{\mu} \frac{\partial (p + \rho U)}{\partial r} \vec{e}_r, \quad (6.50)$$

donde Π es la permeabilidad del medio poroso, μ es la viscosidad dinámica del agua y U es la función potencial de la cual derivan las fuerzas gravitatorias. Para este problema $U = gz$, con $z = r \cos \theta$, según el sistema de coordenadas

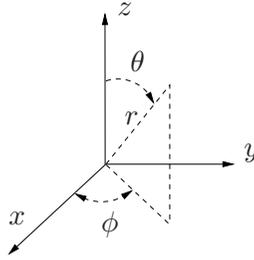


Figura 6.7: Esquema de las coordenadas esféricas

esféricas representado en la figura 6.7. Sustituyendo (6.50) en la ecuación de conservación de la masa de un flujo incompresible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, se tiene

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial (p + \rho g r \cos \theta)}{\partial r} \right] = 0, \quad (6.51)$$

que es la ecuación de Laplace para el campo de presión de un líquido en un medio poroso (MF18.16) aplicada a este movimiento unidireccional en la dirección radial. Integrando la ecuación (6.51) dos veces resulta

$$p + \rho g r \cos \theta = -\frac{C_1(\theta)}{r} + C_2(\theta), \quad (6.52)$$

donde $C_1(\theta)$ y $C_2(\theta)$ se pueden calcular gracias a la condición de contorno de la descarga a la atmósfera,

$$p = p_a \quad \text{en} \quad r = R + e, \quad (6.53)$$

y a la resultante de aplicar la ecuación fluidostática en $r = R$,

$$p + \rho g R \cos \theta = \text{constante} = p_a + \rho g H, \quad (6.54)$$

donde H es la altura del líquido ($-R < H < R$). Esta última condición se puede escribir como

$$p(R, \theta) = p_a + \rho g (H - R \cos \theta) \quad \text{en} \quad r = R. \quad (6.55)$$

De esta forma, al sustituir (6.53) y (6.55) en (6.52), se tiene

$$C_1(\theta) = \frac{R(R+e)}{e} \rho g [(R+e) \cos \theta - H], \quad (6.56)$$

$$C_2(\theta) = p_a + \rho g (R+e) \cos \theta + \frac{R}{e} \rho g [(R+e) \cos \theta - H], \quad (6.57)$$

que sustituidas, en (6.52), y reagrupando términos, proporcionan el siguiente campo de presión $p(r, \theta)$ dentro de la “carcasa” porosa:

$$p = \rho g (R+e)^2 \cos \theta \left[\frac{R+r}{re} - \frac{r}{(R+e)^2} \right] + p_a + \frac{\rho g H R}{e} \left(\frac{R+e-r}{r} \right). \quad (6.58)$$

Aplicando la ley de Darcy (6.50) al campo de presión (6.58) se obtiene la velocidad del flujo unidireccional,

$$\vec{v} \equiv v_r \vec{e}_r = -\frac{\Pi}{\mu} \left\{ \frac{\rho g R (R+e)}{r^2 e} [(R+e) \cos \theta - H] \right\} \vec{e}_r. \quad (6.59)$$

Esta expresión se puede simplificar apreciablemente teniendo en cuenta que $e \ll R$ y $r \simeq R$,

$$v_r \simeq -\frac{\Pi \rho g}{\mu e} (R \cos \theta - H). \quad (6.60)$$

Por último, el caudal de agua $Q(t)$ que sale del depósito esférico es

$$Q = \Upsilon \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0(t)}^{\pi} v_r R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\pi \Upsilon \Pi \rho g R^3}{\mu e} \left(\frac{H}{R} + 1 \right)^2, \quad (6.61)$$

donde Υ es la porosidad del medio, $\theta_0(t)$ es el ángulo entre el eje vertical z y la superficie libre en $r = R$ [ver figura 6.8, donde $\cos \theta_0(t) = \frac{H}{R}$] y se ha hecho uso de la aproximación (6.60). La dependencia temporal de Q se debe a que la altura del líquido es $H = H(t)$.

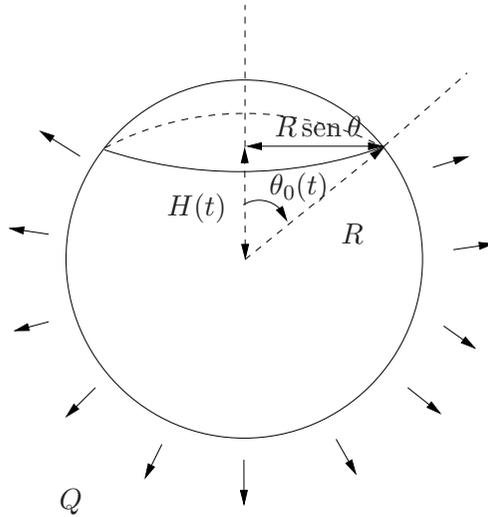


Figura 6.8: Esquema para el cálculo del caudal Q

2. La ecuación diferencial para $H(t)$ se obtiene de la ecuación de conservación de la masa aplicada al volumen de control del líquido representado en la figura 6.8,

$$\frac{dV_{liq}}{dt} + Q = 0, \tag{6.62}$$

donde Q es el caudal (6.61) y el volumen de líquido es

$$V_{liq} = \pi R^3 \left[\frac{2}{3} + \frac{H}{R} - \frac{1}{3} \left(\frac{H}{R} \right)^3 \right]. \tag{6.63}$$

Así, teniendo en cuenta (6.61)-(6.63), la ecuación diferencial ordinaria para $H(t)$ es

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\Upsilon \Pi \rho g R^2}{(R^2 - H^2) \mu e} \left(\frac{H}{R} + 1 \right)^2, \tag{6.64}$$

que debe ser resuelta con la condición inicial $H(0) = R$. Otra forma de calcular la variación del volumen de líquido con respecto al tiempo es mediante el

producto de la variación de la altura con respecto al tiempo por la superficie libre (ver figura 6.8); es decir,

$$\frac{dV_{liq}}{dt} = \pi (R \operatorname{sen} \theta)^2 \frac{dH}{dt} = \pi (R^2 - H^2) \frac{dH}{dt}, \quad (6.65)$$

donde se ha tenido en cuenta la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{H^2}{R^2} = 1. \quad (6.66)$$

En forma adimensional, definiendo

$$\eta = \frac{H}{R}, \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (6.67)$$

siendo t_c el tiempo característico

$$t_c = \frac{\mu e}{\Upsilon \Pi \rho g}, \quad (6.68)$$

el problema a resolver (6.64) queda como

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{1 + \eta}{1 - \eta}, \quad (6.69)$$

con la condición inicial

$$\eta(0) = 1. \quad (6.70)$$

Capítulo 7

Flujos ideales y ondas de choque

P.7.1 Flujo potencial alrededor de un cilindro en presencia de una pared

Un cilindro de radio R se mueve con velocidad V constante en el seno de un líquido de densidad ρ , paralelamente a una superficie sólida situada a una distancia H del eje del cilindro. Suponiendo que el movimiento del fluido es incompresible e ideal y que las fuerzas másicas son despreciables, se pide:

1. Función de corriente y campo de velocidad bidimensional alrededor del cilindro.
2. Punto en el que la presión del líquido es mínima y valor de la presión en ese punto (lejos del cilindro la presión es p_a). ¿A qué velocidad cavitara el líquido?

Solución.

1. Se toma un sistema de referencia con origen en el centro del cilindro, de forma que la corriente viene del infinito con velocidad V según el eje x (ver figura 7.1). Si no existiera la pared, el potencial complejo de un flujo con

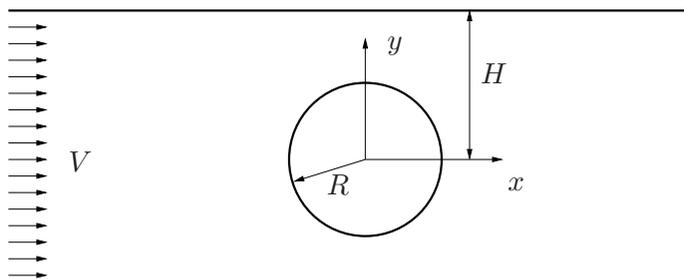


Figura 7.1: Esquema y coordenadas

velocidad V alrededor de un cilindro de radio R vendría dado por (MF21.63) $f(z) = V(z + R^2/z)$, donde $z = x + iy$. Utilizando el método de las imágenes, podemos simular la presencia de la pared mediante la superposición adicional de otro dipolo o doblete (MF21.60) de la misma intensidad $M = 2\pi VR^2$ centrado con simetría especular respecto al plano $y = H$. Es decir, el potencial complejo viene dado por

$$f(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} + \frac{R^2}{z - 2iH} \right), \quad (7.1)$$

que en nuestro problema sería válido para $y \leq H$.

Las función de corriente se obtiene de la parte imaginaria de (7.1),

$$\psi(x, y) = Vy - VR^2 \left[\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y - 2H}{x^2 + y^2 + 4H(H - y)} \right]. \quad (7.2)$$

Claramente, la pared $y = H$ es una línea de corriente correspondiente a $\psi = VH$. En la figura 7.2 se representan algunas líneas de corriente para $V = 1$, $R = 1$ y $H = 2$.

De acuerdo con (MF21.55), el campo de velocidad *conjugado* se obtiene de la derivada de esta función potencial, $df/dz = v_x - iv_y$. Hallando la parte real e imaginaria de la derivada de (7.1), se tiene

$$v_x = V - VR^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - VR^2 \frac{x^2 - (y - 2H)^2}{[x^2 + (y - 2H)^2]^2}, \quad (7.3)$$

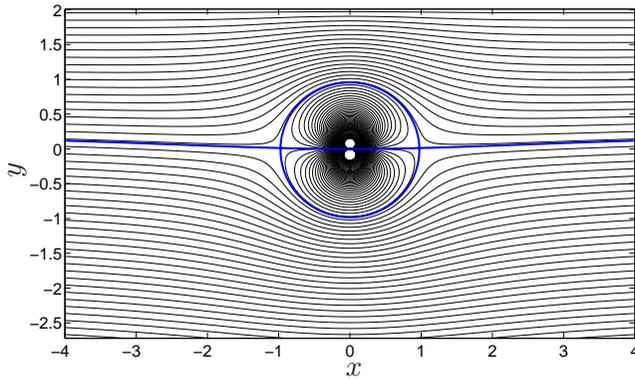


Figura 7.2: Líneas de corriente para $R = 1$ y $H = 2$ con $V = 1$. En trazo grueso se representan las líneas de corriente que se cortan en los dos puntos de remanso.

$$v_y = -2VR^2 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} - 2VR^2 \frac{x(y - 2H)}{[x^2 + (y - 2H)^2]^2}. \quad (7.4)$$

En los puntos de remanso dados por $v_x = v_y = 0$ se cortan las líneas de corriente dibujadas con trazo grueso en la figura 7.2. Estas líneas de corriente no se corresponden exactamente con una circunferencia ni con una recta horizontal debido a la presencia de la pared. Cuanto mayor sea H/R , más se parecerán estas líneas a una circunferencia cortada por una recta horizontal.

2. El campo de presión se obtiene aplicando la ecuación de Bernoulli, que en ausencia de fuerzas másicas se escribe (MF21.45)

$$p + \frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) = p_a + \frac{1}{2}\rho V^2. \quad (7.5)$$

De acuerdo con esta ecuación, la presión mínima se alcanza en el punto donde la velocidad es máxima. Por otro lado, no es necesario hallar el máximo de la velocidad en todo el campo fluido pues, por conservación de la masa, las velocidades máximas se alcanzarán donde más se estrechen las líneas de corriente; es decir, en $x = 0$, $R \leq y \leq H$. En $x = 0$, (7.3) y (7.4) se escriben

$$v_x = V + \frac{VR^2}{y^2} + \frac{VR^2}{(y-2H)^2}, \quad v_y = 0. \quad (7.6)$$

El máximo de la expresión anterior se alcanza en $y = H$, de forma que $v_{x,max} = V(1 + 2R^2/H^2)$, y la presión mínima vale

$$p_{min} = p_a - 2\rho V^2 \frac{R^2}{H^2} \left(1 + \frac{R^2}{H^2} \right). \quad (7.7)$$

El líquido cavitara si en ese punto, donde la presión es mínima, se alcanzase la presión de vapor a la temperatura dada $p_v(T)$. Como $p_v \ll p_a$, en primera aproximación se puede hacer $p_v \simeq 0$ y, de acuerdo con (7.7), el líquido cavitara en $(x = 0, y = H)$ si

$$V > \frac{H}{R} \sqrt{\frac{p_a}{2\rho(1 + R^2/H^2)}}, \quad (7.8)$$

aproximadamente.

P.7.2 Interacción de dos torbellinos potenciales con una pared

Se desea estudiar la interacción de un par de torbellinos potenciales bidimensionales, que giran en sentido opuesto, con una pared paralela al plano que une los ejes de los dos torbellinos. En un instante t arbitrario, los torbellinos están a una distancia a de la pared y separados una distancia b entre sí (ver figura 7.3). Se pide:

1. Utilizando el método de las imágenes, hallar el campo de velocidad en cualquier punto del fluido generado por los dos torbellinos y la pared en el instante t representado en la figura 7.3.
2. Trayectorias que siguen los torbellinos debido a su interacción mutua y con la pared. Inicialmente $a = a_0$ y $b = b_0$.

Solución.

1. Teniendo en cuenta que el campo de velocidad de un torbellino potencial centrado en el origen es, en coordenadas cilíndricas, $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, donde la circulación Γ es positiva si gira en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, aplicando el método de las imágenes, el campo de velocidad solicitado viene dado por (ver figura 7.4):

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\Gamma} v_x = & \frac{y - b/2}{(x - a)^2 + (y - b/2)^2} - \frac{y + b/2}{(x - a)^2 + (y + b/2)^2} \\ & - \frac{y - b/2}{(x + a)^2 + (y - b/2)^2} + \frac{y + b/2}{(x + a)^2 + (y + b/2)^2}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\Gamma} v_y = & -\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b/2)^2} + \frac{x - a}{(x - a)^2 + (y + b/2)^2} \\ & + \frac{x + a}{(x + a)^2 + (y - b/2)^2} - \frac{x + a}{(x + a)^2 + (y + b/2)^2}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

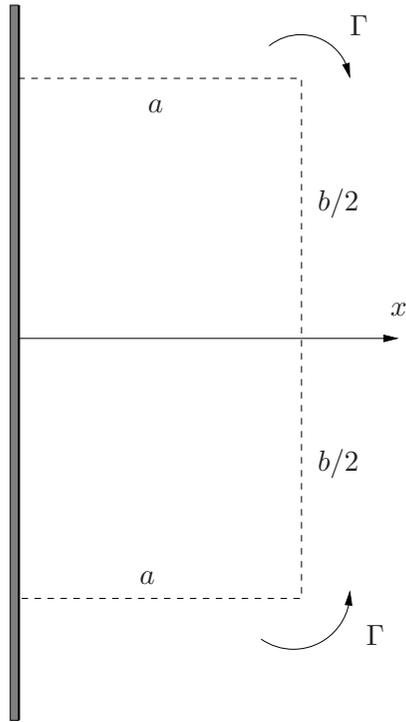


Figura 7.3: Esquema del problema

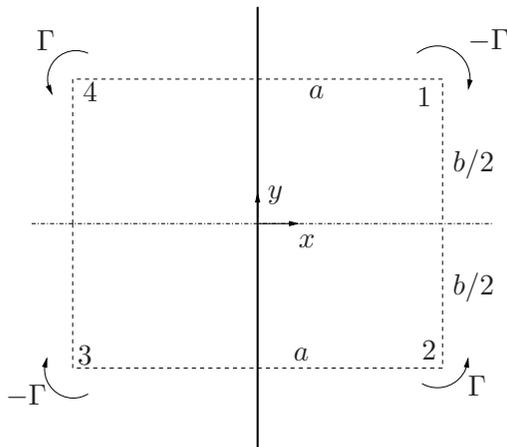


Figura 7.4: Aplicación del método de las imágenes

válido a la derecha de la pared ($x \geq 0$).

2. El centro del torbellino 1, de coordenadas $(a, b/2)$ (ver figura 7.4), se mueve debido a la acción del torbellino 2 y de la pared; es decir, por la acción de los otros tres torbellinos. Por tanto, la velocidad del centro del torbellino 1 viene dada por la suma de las velocidades que los otros tres torbellinos tienen en el punto 1:

$$\frac{2\pi}{\Gamma} v_{1x} \equiv \frac{2\pi}{\Gamma} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{b} + \frac{b}{4a^2 + b^2} = -\frac{4a^2}{b(4a^2 + b^2)}, \quad (7.11)$$

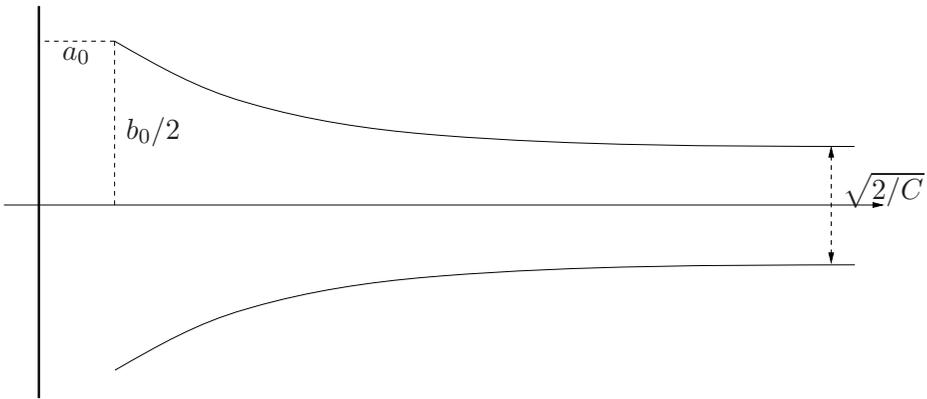


Figura 7.5: Esquema de las trayectorias de los puntos 1 y 2

$$\frac{2\pi}{\Gamma} v_{1y} \equiv \frac{2\pi}{\Gamma} \frac{db/2}{dt} = \frac{1}{2a} - \frac{2a}{4a^2 + b^2} = \frac{b^2}{2a(4a^2 + b^2)}. \quad (7.12)$$

Dividiendo estas dos expresiones se tiene que

$$2 \frac{da}{db} = -\frac{8a^3}{b^3}, \quad (7.13)$$

ecuación que se puede integrar para obtener

$$\frac{2}{b^2} + \frac{1}{2a^2} = \text{constante} = \frac{2}{b_0^2} + \frac{1}{2a_0^2} \equiv C. \quad (7.14)$$

Por tanto, la trayectoria del punto 1 se puede escribir como

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{\sqrt{2Ca^2 - 1}}, \quad (7.15)$$

donde la constante C está definida en (7.14). Esta curva está representada esquemáticamente en la figura 7.5. Para $a \rightarrow \infty$ tiene la asíntota $b/2 \rightarrow 1/\sqrt{2C}$.

La trayectoria del punto 2 se obtiene de forma análoga y es simétrica de la del punto 1 con respecto al eje x (ver figura 7.5).

P.7.3 Fondo de automóvil

Para simular el efecto de succión que genera la corriente de aire que circula por debajo de un automóvil cuando éste viaja a una velocidad V , se utiliza el siguiente modelo muy simplificado. El fondo del automóvil, de longitud $2L$, se supone bidimensional y a una distancia $h(x)$ del suelo (ver figura 7.6). El flujo de aire bajo el automóvil se supone incompresible, casi-unidireccional e ideal (desprecien también las fuerzas másicas). Con estas hipótesis calculen la fuerza vertical por unidad de longitud F_y que el aire ejerce sobre el fondo del coche. Hallen explícitamente F_y cuando

$$\frac{h(x)}{h_0} = 1 + \epsilon \left\{ \cos \left[\pi \left(1 + \frac{x}{L} \right) \right] - 1 \right\}, \quad (7.16)$$

en el límite $\epsilon \ll 1$.

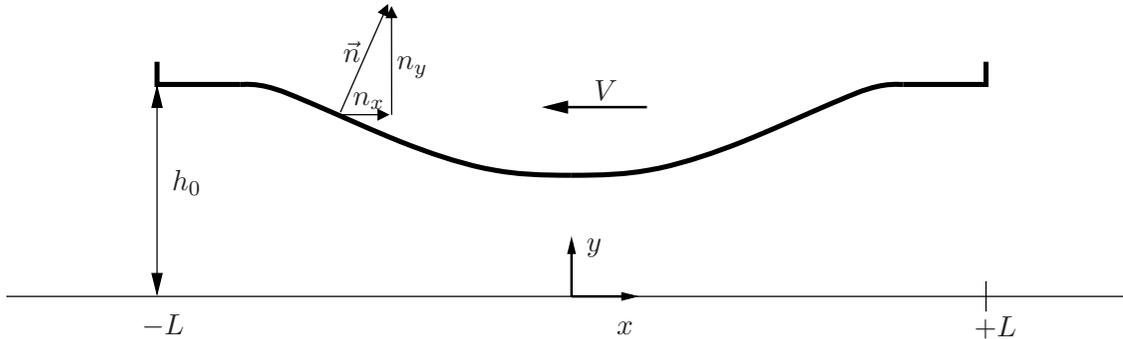


Figura 7.6: Esquema de la parte inferior del automóvil

Solución.

Se resolverá el problema respecto un sistema de referencia móvil, solidario al coche y, por tanto, con velocidad V constante. Como el flujo es ideal, la fuerza que el fluido ejerce sobre la superficie del fondo del coche se debe sólo a la presión. Para obtener la distribución de presión debajo del coche se utilizará la ecuación de conservación de la masa y la ecuación de Bernoulli, pues el flujo es además estacionario.

Teniendo en cuenta que el flujo es casi unidireccional, $\vec{v} = v(x)\vec{e}_x$, e incompresible, la ecuación de conservación de la masa se escribe

$$vh = \text{constante} = Vh_0, \quad (7.17)$$

pues, en el sistema de referencia elegido, el aire llega a la sección de entrada de altura h_0 con la velocidad uniforme V de avance del coche. Por otro lado, la ecuación de Bernoulli (MF19.17), en ausencia de fuerzas másicas, se escribe

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{constante} = p_a + \rho \frac{V^2}{2}, \quad (7.18)$$

donde p_a es la presión atmosférica. Despejando v de (7.17) y sustituyendo en (7.18) se obtiene la distribución de presión en el fondo del coche:

$$p(x) = p_a + \rho \frac{V^2}{2} \left\{ 1 - \left[\frac{h_0}{h(x)} \right]^2 \right\}. \quad (7.19)$$

La fuerza, por unidad de longitud en dirección z , que el aire ejerce sobre el fondo del automóvil es

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \int_{-L}^L [p(x) - p_a] \vec{n} ds, \quad (7.20)$$

donde la normal a la superficie se ha tomado hacia fuera del volumen fluido (ver figura 7.6) y se ha restado la presión atmosférica existente en el exterior. Dado que la superficie viene definida por $y = h(x)$, es decir, $S \equiv y - h(x) = 0$, el vector normal a la misma, $\vec{n} = \nabla S / |\nabla S|$, se escribe

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + h'^2}} \begin{pmatrix} -h' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

donde la prima denota derivación respecto a x . Teniendo en cuenta, además, que el diferencial de longitud sobre S vale $ds = |\nabla S| dx = \sqrt{1 + h'^2} dx$, la componente y de la fuerza (7.20) se escribe

$$F_y = \rho \frac{V^2}{2} \int_{-L}^L \left\{ 1 - \left[\frac{h(x)}{h_0} \right]^{-2} \right\} dx. \quad (7.22)$$

Se va a calcular explícitamente el valor de F_y cuando la forma del fondo viene dada por (7.16) en el límite $\epsilon \ll 1$. Para ello se tendrá en cuenta el siguiente desarrollo (con ϵ es pequeño y a de orden unidad):

$$(1 + \epsilon a)^n = 1 + n\epsilon a + O(\epsilon^2) \approx 1 + n\epsilon a. \quad (7.23)$$

De este modo, el término $[h_0/h(x)]^2$ de (7.22) se puede simplificar como

$$\left[\frac{h(x)}{h_0} \right]^{-2} \approx 1 - 2\epsilon \left\{ \cos \left[\pi \left(1 + \frac{x}{L} \right) \right] - 1 \right\}. \quad (7.24)$$

Introduciendo (7.24) en (7.22) e integrando se obtiene la fuerza buscada:

$$F_y \approx -2\epsilon V^2 L. \quad (7.25)$$

La fuerza va dirigida hacia el suelo, lo cual hace que, con una configuración del fondo del vehículo como la presente, el coche se “agarre” mejor al suelo.

Se deja como ejercicio para el lector que demuestre que $F_x = 0$ en general, si $h(x)$ es simétrica respecto a $x = 0$ y, en particular, cuando $h(x)$ viene dada por (7.16) con $\epsilon \ll 1$.

P.7.4 Tubo de Pitot supersónico

Un tubo de Pitot se utiliza para medir la velocidad de vuelo de un avión supersónico. Delante del tubo de Pitot se forma una onda de choque como se indica en la figura 7.7. En relación a las líneas de corriente que entran en el tubo, la onda de choque se puede considerar como normal al flujo. La presión de remanso medida es $p_0 = 3$ atm, y la estática $p = 2$ atm. Por otro lado, en un termopar adosado al Pitot se mide una temperatura de 10°C . Determinar el número de Mach de vuelo del avión y su velocidad. Supongan que el proceso de frenado en el interior del tubo es isentrópico. Otros datos: $\gamma = 1,4$ y $R_g = 287$ $\text{m}^2/(\text{s}^2 \text{K})$.

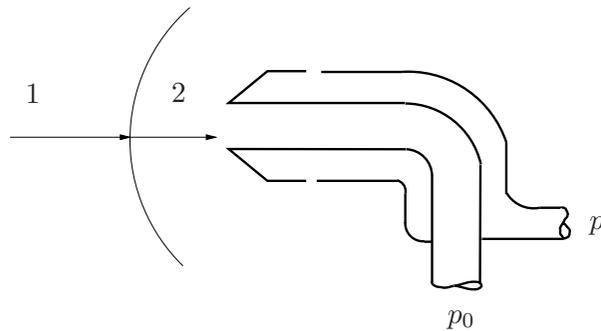


Figura 7.7: Esquema del tubo de Pitot

Solución.

La relación entre la presión de remanso y la estática en el punto 2 es (MF19.29)

$$\frac{p_{02}}{p_2} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (7.26)$$

Sustituyendo los valores del enunciado, $p_{02} = 3$ atm, $p_2 = 2$ atm y $\gamma = 1,4$ se tiene que el Mach en el punto 2 es $M_2 = 0,7836$ (ver también tabla MF §23.4).

La relación de los números de Mach normales entre los puntos 1 y 2, delante y detrás, respectivamente, de la onda de choque normal es (MF22.31)

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma}, \quad (7.27)$$

de donde se obtiene el Mach aguas arriba $M_1 = 1,304$ (ver también tabla MF §22.8).

La relación de temperaturas es (MF22.30)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma)[2 + (\gamma - 1)M_1^2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2}, \quad (7.28)$$

de donde $T_2 = 283$ K. De esta forma, la temperatura aguas arriba es $T_1 = 237,05$ K (ver también tabla MF §22.8).

Tenemos todos los datos para calcular la velocidad aguas arriba haciendo uso de la definición del número de Mach en un gas perfecto (MF22.26),

$$M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\gamma R_g T_1}}, \quad (7.29)$$

resultando una velocidad $V_1 = 402,66$ m/s.

P.7.5 Ala supersónica con perfil romboidal

El ala de un avión supersónico tiene un perfil romboidal como el de la figura 7.8. Para determinar la velocidad de vuelo se inserta en la parte trasera un tubo de Pitot y un medidor de presión estática en el punto a (ver figura 7.8). Si la presión medida con el tubo de Pitot es de 2,596 atm, y la presión medida en el punto a es de 0,1 atm ¿Cuál es el número de Mach M_1 de la corriente incidente? Supongan que la onda de choque justo delante del tubo de Pitot es normal.

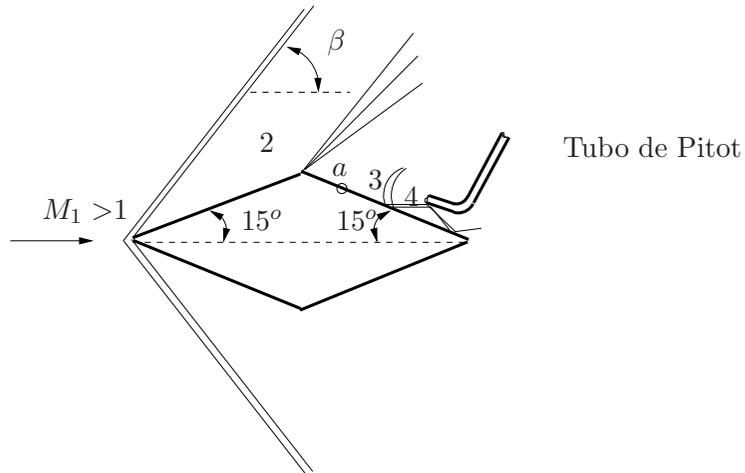


Figura 7.8: Esquema del perfil romboidal, tubo de Pitot y enumeración de las distintas zonas consideradas

Solución.

El flujo es supersónico en 1, permanece supersónico en 2 y se hace aún más supersónico en 3, detrás de la expansión de Prandtl-Meyer. Antes del tubo de Pitot, el flujo pasa bruscamente a subsónico a través de una onda de choque. Como se supone una onda de choque normal justo delante del tubo de Pitot, se puede conocer el número de Mach en la zona 3 de las mediciones realizadas. Así, gracias a la relación de presiones entre los puntos 3 y 4

$$\frac{p_{04}}{p_3} = \frac{2,596}{0,1} = 25,96, \quad (7.30)$$

se conoce, mediante la tabla MF §22.8, que $M_3 = 4,45$. Se puede también llegar al mismo resultado mediante la combinación de ecuaciones (MF19.29) y (MF22.33).

Entre las zonas 2 y 3 tenemos una expansión de Prandtl-Meyer al ser un perfil con forma de rombo, según el esquema del problema. Por tanto, hacemos uso de la expresión (MF22.65),

$$\theta_3 - \theta_2 = 15^\circ - (-15^\circ) = \nu(4,45) - \nu(M_2) \rightarrow \nu(M_2) = 41,27^\circ. \quad (7.31)$$

Con este resultado, y haciendo uso de la tabla MF §22.9, se tiene que $M_2 = 2,6$.

Con los datos facilitados en el enunciado, la única forma de calcular M_1 es a través de un proceso iterativo, ya que se desconoce el ángulo β de la onda de choque oblicua entre las zonas 1 y 2 representadas en el esquema de la figura 7.8. Para ello, se realizan los siguientes pasos hasta conseguir la convergencia del proceso:

1. Suponer un ángulo β de la onda de choque oblicua. Mediante la gráfica de onda de choque oblicua (figura MF22.8) y para $\theta = 15^\circ$, se obtiene M_1 [o bien mediante la ecuación (MF22.41)].
2. Dado que $M_{n1} = M_1 \sin \beta$, se obtiene M_{n1} y de la tabla de onda de choque normal (tabla MF §22.8) se calcula el Mach normal en la zona 2 (M_{n2}). También en este caso se puede hacer un uso alternativo de la ecuación (MF22.31) para llegar al mismo resultado, es decir, conocer M_{n2} por medio de M_{n1} .

3. Conocidos $M_2 = 2,6$ y M_{n2} , se puede aplicar la ecuación (MF22.42) $[\text{sen}(\beta - \theta) = \frac{M_{n2}}{M_2}]$ para calcular un nuevo ángulo de la onda de choque oblicua $\beta = \beta^*$. Si este ángulo no coincide con el supuesto, se empieza de nuevo por el paso número 1 haciendo $\beta = \beta^*$.

Para ilustrar este proceso iterativo, se supone $\beta=20^\circ$. Los pasos anteriores darían lugar a los siguientes valores numéricos:

1. $M_1=10$.
2. $M_{n1} = M_1 \text{sen } \beta = 3,42 \rightarrow M_{n2} \simeq 0,454$.
3. $\text{sen}(\beta^* - 15^\circ) = \frac{0,454}{2,6} \simeq 0,175 \rightarrow \beta^* \simeq 25^\circ$.

El proceso de convergencia se resume en la siguiente tabla:

Iteración	β	M_1	M_{n1}	M_2	β^*
1	20°	10	3,42	0,45	$25,0^\circ$
2	25°	5	2,10	0,56	$27,4^\circ$
3	$27,4^\circ$	4	1,84	0,61	$28,5^\circ$
4	$28,5^\circ$	3,45	1,70	0,65	$29,2^\circ$
5	$29,2^\circ$	3,5	1,71	0,65	$29,2^\circ$

Por tanto, con 5 iteraciones más, el proceso converge en los valores $\beta \simeq 29,2^\circ$ y $M_1 \simeq 3,5$. En definitiva, el número de Mach de la corriente incidente pedido es $M_1 \simeq 3,5$.

P.7.6 Flujo supersónico sobre un perfil plano

Una placa plana de longitud c se mueve con un ángulo de incidencia $\alpha = 5^\circ$ a un número de Mach $M_1 = 2,6$ (ver figura 7.9; la placa se supone infinita en la dirección perpendicular al papel). Teniendo en cuenta que en la parte superior el aire experimenta una expansión del tipo Prandtl-Meyer, y que en la parte inferior se produce una onda de choque oblicua, se pide:

1. Presiones encima y debajo de la placa, p_2 y p_3 .
2. Obtener los coeficientes de sustentación, C_L , y de resistencia, C_D , definidos como las proyecciones de las fuerzas de presión sobre la placa (por unidad de longitud transversal) en las direcciones perpendiculares al movimiento, y del movimiento, respectivamente, adimensionalizadas con la presión dinámica $\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2$ multiplicada por la longitud c . Comparen los dos números resultantes.
3. Suponiendo que, a pesar de que el flujo es compresible, el campo de velocidad en las capas límites encima y debajo de la placa se pueden aproximar por la solución de Blasius, obtener también el coeficiente de resistencia debido a la fricción. Para poder comparar este coeficiente con los del apartado anterior, supongan que la viscosidad varía como la raíz cuadrada de la temperatura: $\mu = k\sqrt{R_g T}$, donde $k \simeq 6 \times 10^{-8}$ kg/m². Supongan además que $c = 1$ m y $\rho = 1$ kg/m³. Hallen además el coeficiente de resistencia en la dirección de la placa, sin proyectarlo en relación al movimiento.

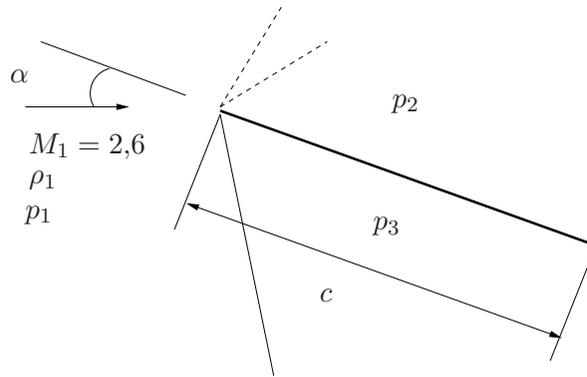


Figura 7.9: Esquema del flujo sobre la placa

Solución.

1. Se define en la figura 7.7 con subíndice 1 la región aguas arriba, mientras que los subíndices 2 y 3 corresponden a las regiones por encima y por debajo de la placa, respectivamente, aguas abajo. Se forma una onda de choque oblicua debajo de la placa y una expansión de Prandtl-Meyer en la parte superior. Analizamos en primer lugar la parte inferior.

Según la expresión (MF22.41) con $M_1 = 2,6$ y $\alpha = \theta = 5^\circ$, se tiene un ángulo de la onda de choque de $\beta \approx 27^\circ$. A este resultado se llega también de forma gráfica con la figura MF22.8. Con este ángulo β se tiene que la componente normal del número de Mach aguas arriba M_{n1} vale (MF22.40)

$$M_{n1} = M_1 \sin \beta = 1,18. \quad (7.32)$$

Con estos valores, de la expresión (MF21.29), se obtiene

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{2\gamma M_{n1}^2 + 1 - \gamma}{\gamma + 1} = 1,458. \quad (7.33)$$

A este resultado también se podía haber llegado interpolando los valores de la tabla MF §22.8.

Analicemos ahora la parte superior de la placa. Para conocer la presión p_2 aplicamos la expresión de la expansión de Prandtl-Meyer (MF22.65),

$$\alpha = 5^\circ = \nu(M_2) - \nu(M_1), \quad (7.34)$$

donde $\nu(M_1) = \nu(2,6) = 41,4147^\circ$ por lo que $\nu(M_2) = 46,4147^\circ$ y en consecuencia $M_2 \simeq 2,82$ [ver tabla MF §22.9, según (MF22.64)].

Con los datos de los números de Mach calculamos la presión p_2 usando (MF22.67),

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0,712, \quad (7.35)$$

pues la presión de remanso se conserva de 1 a 2.

2. La fuerza normal a la placa resulta de la diferencia de presiones $p_3 - p_2$. Proyectando esta fuerza sobre la dirección perpendicular a la corriente v_1 se obtiene la sustentación. Así, el coeficiente de sustentación es [ver también (MF21.105)]

$$C_L = \frac{(p_3 - p_2)c \cos \alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 c} = \frac{(p_3 - p_2) \cos \alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 M_1^2 \gamma \frac{p_1}{\rho_1}} = \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{2 \cos \alpha}{\gamma M_1^2} = 0,141. \quad (7.36)$$

Por otro lado, el coeficiente de resistencia resulta de la proyección en la dirección de v_1 de la fuerza y se define como (MF17.46)

$$C_D = \frac{(p_3 - p_2)c \sen \alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 c} = \frac{(p_3 - p_2) \sen \alpha}{\frac{1}{2}\rho_1 M_1^2 \gamma \frac{p_1}{\rho_1}} = \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{2 \sen \alpha}{\gamma M_1^2} = 0,012. \quad (7.37)$$

La relación entre ambos es

$$\frac{C_L}{C_D} = \frac{1}{\tan 5^\circ} \approx 11,4. \quad (7.38)$$

Se observa que la sustentación es mucho mayor que la resistencia debido a que el ángulo de incidencia $\alpha = 5^\circ$ es muy pequeño. Para tener una referencia con la que comparar, si el flujo fuese subsónico, la teoría ideal proporciona (MF 21.105) $C_L \approx 2\pi\alpha \simeq 0,55$ y $C_D = 0$.

3. El coeficiente de resistencia debido a la fricción C_f se puede escribir como

$$C_f = \frac{F_{f2} + F_{f3}}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 c} = \frac{0,664}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 c} \left[\sqrt{\rho_2 \mu_2 c v_2^3} + \sqrt{\rho_3 \mu_3 c v_3^3} \right], \quad (7.39)$$

donde F_{f2} y F_{f3} son las fuerzas de fricción en las caras superior e inferior, respectivamente, de la placa, y se ha hecho uso de la relación de Blasius (MF27.46) (dividida por 2). Sustituyendo $v_i = M_i \sqrt{\frac{\gamma p_i}{\rho_i}}$, $i = 2, 3$, y usando la dependencia dada en el enunciado de la viscosidad con la temperatura y la ecuación de estado de un gas perfecto se llega a

$$C_f = \frac{1,328\sqrt{k}}{\gamma^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{2}} M_1^2 \rho^{\frac{1}{2}}} \left[M_2^{\frac{3}{2}} \frac{p_2}{p_1} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} + M_3^{\frac{3}{2}} \frac{p_3}{p_1} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_3}} \right] \approx 3,66 \times 10^{-4}. \quad (7.40)$$

Se observa que este coeficiente de fricción es mucho menor que incluso la componente horizontal C_D de las fuerzas de presión.

P.7.7 Cohete

Se desea evaluar las características de un cohete que se utilizará para propulsar un misil. En esencia el cohete consta de un depósito en donde se encuentra un gas a presión p_0 constante y conocida, y de una tobera convergente-divergente de área de salida $A_s = 2A_{min}$. En particular se desea conocer el empuje suministrado por el cohete y la relación de presiones que debe existir entre p_0 y la presión exterior en los siguientes casos:

1. Tobera adaptada.
2. Onda de choque en la sección de salida.
3. Onda de choque en una sección tal que $A/A_{min} = 1,2$.
4. Suponiendo que el depósito posee una tobera convergente de área de salida igual al área mínima de la tobera anterior, calcular de nuevo el empuje para las relaciones de presiones obtenidas en los apartados anteriores.
5. Discutir y comparar los resultados.

Solucion.

Para calcular el empuje se usará la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral aplicada al volumen de control de la figura 7.10. Como el proceso se supone estacionario, despreciando las fuerzas de fricción y las fuerzas másicas, esta ecuación se escribe (MF7.21)

$$\int_{S_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_{S_c} (p - p_a) \vec{n} dS. \quad (7.41)$$

La componente vertical (y) de esta ecuación, teniendo en cuenta que $p = p_s$ y $v = v_s$ en la sección de salida y que ambas magnitudes son uniformes en ella, queda

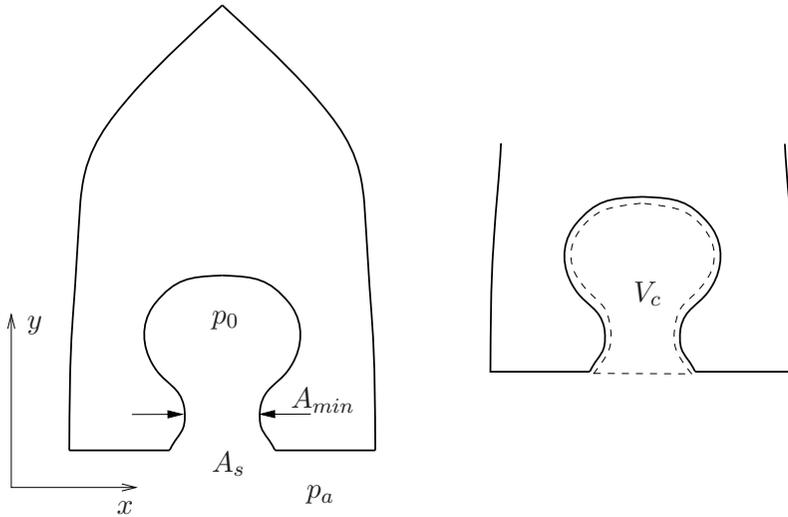


Figura 7.10: Esquema del depósito y tobera convergente-divergente dentro del misil y volumen de control utilizado

$$-\rho v_s^2 A_s = (p_s - p_a) A_s - E. \quad (7.42)$$

En esta expresión E es el empuje que el gas ejerce sobre las paredes sólidas del cohete, que es igual, pero de sentido opuesto, a la integral que aparece en el segundo miembro de (7.41) evaluada sobre la parte sólida de S_c . Este empuje se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E &= A_s \left[\rho v_s^2 + (p_s - p_a) \right], \\ &= A_s \left[\rho v_s^2 \frac{a_s^2}{a_s^2} + (p_s - p_a) \right], \\ &= A_s \left[\rho v_s^2 \frac{a_s^2}{a_s^2} + (p_s - p_a) \right], \\ &= A_s \left[\rho M_s^2 \gamma \frac{p_s}{\rho_s} + (p_s - p_a) \right], \\ &= 2A_{min} p_a \left[\gamma \frac{p_s}{p_a} M_s^2 - \frac{p_s}{p_a} + 1 \right], \end{aligned} \quad (7.43)$$

donde se ha tenido en cuenta que $A_s = 2A_{min}$ y las definiciones del número de Mach y de la velocidad del sonido para un gas perfecto. El empuje quedará determinado, por tanto, a partir del número de Mach en la sección de salida, M_s , y de la relación entre la presión en dicha sección y la atmosférica. A continuación se analiza cada una de las situaciones planteadas.

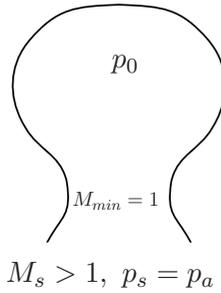


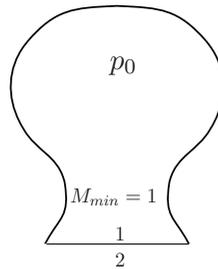
Figura 7.11: Tobera adaptada

1. En el caso de una tobera adaptada, el flujo es isentrópico, subsónico en la parte convergente y supersónico en la divergente, con $M = 1$ en la sección de área mínima, $A_{min} = A^*$, y con $p_s = p_a$ (ver figura 7.11). A partir de la relación de áreas conocida entre la sección de salida y la sección crítica, $\frac{A_s}{A^*} = 2$, y haciendo uso de la tabla MF §23.4 para un flujo isentrópico, se puede conocer el número de Mach, supersónico, en la salida, $M_s = 2,2$, y la relación entre la presión de remanso y la de salida, $\frac{p_0}{p_s} = \frac{p_0}{p_a} = 10,69$. Sustituyendo estos datos en (7.43) se obtiene el empuje. Así, para este caso se tiene

$$E = 13,552p_a A_{min} , \quad (7.44)$$

$$\frac{p_0}{p_a} = 10,69 . \quad (7.45)$$

2. Cuando existe una onda de choque normal en la sección de salida, hasta esa sección el flujo es isentrópico, subsónico de nuevo en la parte convergente y supersónico en la divergente. A través de la onda de choque el flujo se hace



$$M_s = M_2 < 1, \quad p_s = p_2 = p_a$$

Figura 7.12: Onda de choque en la salida

subsónico, de forma que la presión de salida se ajusta a la atmosférica. Se tiene, por tanto, $p_s = p_2 = p_a$ detrás de la onda de choque (ver figura 7.12). La sección mínima es crítica y $M = 1$. Delante de la onda de choque (punto 1 de la figura 7.12), se tiene $M_1 = 2,2$ y $\frac{p_0}{p_1} = 10,69$, igual que en el caso anterior. Las magnitudes al otro lado de la onda de choque se obtienen de las relaciones de Rankine-Hugoniot mediante la tabla MF §22.8, que con $M_1 = 2,2$ proporciona $M_2 = 0,547$ y $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_a}{p_1} = 5,48$. Con estos valores, sustituyendo en (7.43), se obtiene el nuevo empuje. Se tiene pues para este caso

$$E = 0,84A_{min}p_a, \quad (7.46)$$

$$\frac{p_0}{p_a} = \frac{p_0}{p_1} \frac{p_1}{p_a} = \frac{10,69}{5,48} = 1,95. \quad (7.47)$$

3. En el supuesto de que se produzca una onda de choque en una sección tal que $A/A_{min} = 1,2$, el flujo es isentrópico con condiciones críticas en la sección de área mínima y subsónico hasta esa sección, supersónico desde la garganta hasta la onda de choque y subsónico detrás de la onda de choque hasta la salida. Para determinar el número de Mach delante de la onda de choque (sección 1 de la figura 7.13) se utiliza la tabla MF §23.4 sabiendo que $\frac{A}{A^*} = 1,2$, con lo que $M_1 = 1,54$ y $\frac{p_0}{p_1} = 3,891$. Las condiciones al otro lado de la onda de choque (sección 2 de la figura 7.13) se obtienen de las relaciones de

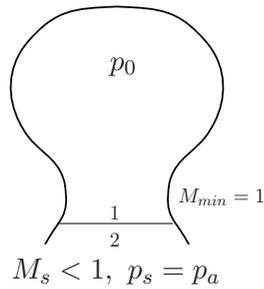


Figura 7.13: Onda de choque en $A/A^* = 1,2$

Rankine-Hugoniot (tabla MF §22.8). Para $M_1 = 1,54$ se obtiene $M_2 = 0,687$, con un salto en la presión de remanso dado por $\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_{o2}}{p_o} = 0,9166$.

Para resolver el tramo final aguas abajo de la onda de choque se considera una nueva tobera “ficticia”, con una nueva presión de remanso p_{o2} y una nueva área crítica $A^{*’}$, en la que el flujo es isentrópico. De esta nueva tobera lo único que se sabe es que en su parte divergente hay una sección en la que el número de Mach vale $M_2 = 0,687$. Si se consulta la tabla MF §23.4, este valor del Mach se obtiene para una relación de áreas $\frac{A}{A^{*’}} = 1,1$. Esto nos permite conocer la relación entre el área de salida y el área crítica en la nueva tobera:

$$\frac{A_s}{A^{*’}} = \frac{A_s}{A^*} \frac{A^*}{A} \frac{A}{A^{*’}} = 2 \frac{1}{1,2} 1,1 = 1,833. \quad (7.48)$$

Usando de nuevo la tabla MF §23.4, se tiene $M_s = 0,34$ y la relación entre presiones $\frac{p_{o2}}{p_s} = \frac{p_{o2}}{p_a} = 1,083$. Finalmente, usando la relación que existe entre las presiones de remanso a un lado y otro de la onda de choque, se obtiene

$$\frac{p_0}{p_a} = \frac{p_0}{p_s} = \frac{p_{o1}}{p_s} = \frac{p_{o1}}{p_{o2}} \frac{p_{o2}}{p_a} = \frac{1,087}{0,92} = 1,18. \quad (7.49)$$

Por tanto, el empuje y la relación de presiones buscada en este caso son

$$E = 0,343A_{min}p_a, \quad (7.50)$$

$$\frac{p_0}{p_a} = 1,18. \quad (7.51)$$

4. Si el cohete estuviera constituido por una tobera simplemente convergente con el mismo área mínima de la tobera anterior como área de salida, el empuje, dado por (7.43), quedaría como

$$E = A_{min}p_a \left[\gamma \frac{p_s}{p_a} M_s^2 - \frac{p_s}{p_a} + 1 \right]. \quad (7.52)$$

En este caso, el valor máximo del número de Mach que se podrá alcanzar a la salida será $M_s = 1$. Esto ocurrirá para $p_0/p_s \geq 1,893$, aproximadamente (ver tabla MF §23.4). Si la presión atmosférica es tal que cumple la igualdad en esa relación, es decir, si $p_s = p_a \simeq 0,528p_0$, $M_s = 1$ y el flujo se adapta perfectamente a la presión exterior, coincidiendo ésta con la presión en la sección de salida. Para valores de $p_a > 0,528p_0$, M_s será menor que la unidad, pudiéndose obtener su valor de la tabla MF §23.4, de nuevo con $p_s = p_a$. Ahora bien, para valores de $p_a < 0,528p_0$, el gas no puede expandirse hasta esa condición de presión y continúa expandiéndose fuera de la tobera. Pasemos, por tanto, a analizar cada una de las relaciones entre presión de remanso y exterior obtenidas en los apartados anteriores.

4 (a). $p_0/p_a = 10,69$. En este caso, $p_a = \frac{p_0}{10,69} = 0,0935p_0 < 0,528p_0$, por lo que $M_s = 1$ y la relación entre la presión en la sección salida y la atmosférica vale

$$\frac{p_s}{p_a} = \frac{p_s p_0}{p_0 p_a} = 0,528 \times 10,69 = 5,64. \quad (7.53)$$

Sustituyendo en (7.52) se obtiene un empuje de

$$E = 3,256p_a A_{min} . \quad (7.54)$$

4 (b). $p_0/p_a = 1,95$. De nuevo se cumple que $p_a = \frac{p_0}{1,95} = 0,512p_0 < 0,528p_0$ por lo que $M_s = 1$ y el gas terminará de expandirse hasta la presión atmosférica fuera de la tobera. Entre la presión en la sección de salida y la atmosférica existe la relación

$$\frac{p_s}{p_a} = \frac{p_s p_0}{p_0 p_a} = 0,528 \times 1,95 = 1,0296 , \quad (7.55)$$

y el empuje dado por (7.52) vale

$$E = 1,41p_a A_{min} . \quad (7.56)$$

4 (c). $p_0/p_a = 1,18$. En este caso $p_a = 0,847p_0 > 0,528p_0$, por lo que $M_s < 1$ y $p_s = p_a$, siendo el flujo subsónico en toda la tobera. Consultando la tabla MF §23.4 con esta relación entre presiones de remanso y exterior, se obtiene un valor para el número de Mach a la salida de $M_s = 0,49$, que sustituido en (7.52) proporciona el empuje,

$$E = 0,336p_a A_{min} . \quad (7.57)$$

5. Los resultados anteriores muestran que el empuje cae muy fuertemente en cuanto el flujo en la tobera deja de ser isentrópico, es decir, cuando se produce una onda de choque en su interior, tanto más cuanto más intensa sea la onda de choque, resaltando, por tanto, la importancia de que la tobera esté “adaptada” a las condiciones exteriores. Por otro lado, para la misma relación entre la presión en el depósito y la presión exterior, una tobera convergente–divergente producirá un empuje mayor (como mínimo igual), pues permite una expansión isentrópica mucho más amplia. En una tobera sólo convergente, la expansión

isentrópica máxima (para $\gamma = 1,4$) es de $p_0/p_s \simeq 1,893$; el resto de la expansión se tiene que producir fuera de la tobera si $p_0/p_a > 1,893$. En una tobera convergente-divergente, la expansión isentrópica, que genera el empuje, puede ser mucho mayor.

P.7.8 Descarga de un depósito con la ayuda de un compresor

Para acelerar el proceso de descarga de un líquido de densidad ρ contenido en un depósito (de sección A y volumen $V = AH$) a través de un orificio de sección A_s situado en su fondo se utiliza un compresor colocado en la parte superior del depósito. Este compresor comunica una potencia W (constante y conocida) al aire, que es forzado hacia la parte superior del depósito para aumentar la presión encima de la superficie libre del líquido, fomentando su descarga (ver figura 7.14). Sabiendo que todo el sistema está aislado térmicamente del aire circundante, que el número de Mach al cuadrado del aire que sale del compresor es muy pequeño, que la altura inicial del líquido es h_0 y que las condiciones iniciales del aire en el depósito son las atmosféricas, escriba el conjunto de ecuaciones que permitan obtener las evoluciones con el tiempo de $h(t)$, $p_d(t)$, $\rho_d(t)$ y $v_s(t)$. Intente escribir estas ecuaciones en forma adimensional, dando el orden de magnitud del tiempo que tarda en descargarse el depósito.

Simplifique las expresiones anteriores para considerar el caso en el que el compresor no se activara, bloqueando, por tanto, la entrada de aire al depósito. ¿Quedaría líquido en él? En caso afirmativo, obtenga los valores finales de h , p_d y ρ_d .

Solución.

Se escriben a continuación las ecuaciones del compresor, parte del depósito con aire y parte del depósito con líquido para obtener una relación entre la potencia del compresor W y la velocidad de salida del chorro del fondo del depósito $v_s(t)$, junto con relaciones para $h(t)$, $p_d(t)$ y $\rho_d(t)$.

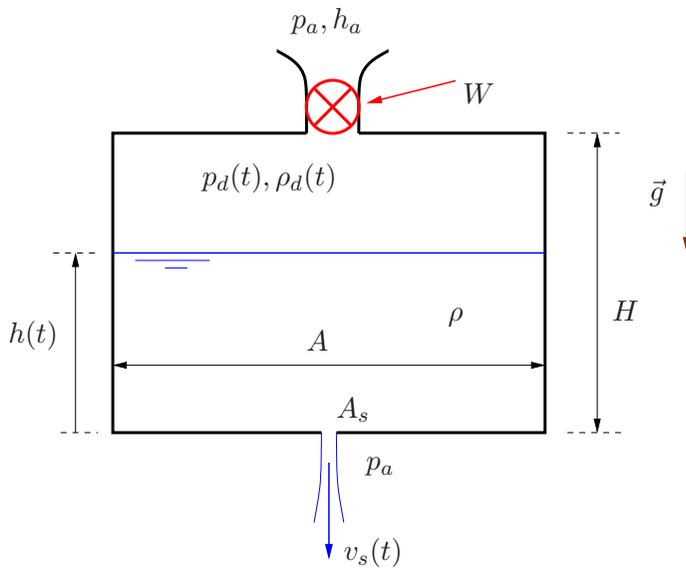


Figura 7.14

La potencia W que el compresor comunica al aire se traduce en un aumento de su entalpía de remanso de acuerdo con (MF23.34)

$$W = G (h_{0e} - h_a) , \quad (7.58)$$

donde G es el gasto másico de aire que entra en el depósito, con una entalpía de remanso h_{0e} , y se ha tenido en cuenta que el difusor de entrada del compresor está bien diseñado para que la entalpía de remanso permanezca constante e igual a la entalpía ambiente h_a . Por supuesto, se han despreciado las fuerzas másicas. Como el número de Mach al cuadrado a la entrada es muy pequeño, $M_e^2 \ll 1$, se tiene que $h_{0e} \simeq h_e$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $h_e = [\gamma/(\gamma - 1)]p_e/\rho_e$ para un gas perfecto, que el proceso en el compresor se puede suponer aproximadamente isentrópico, $p_e/\rho_e^\gamma = p_a/\rho_a^\gamma$, y que $p_e = p_d$, se llega a [comparar con (MF23.36)]

$$W = Gh_a \left[\left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] . \quad (7.59)$$

Las ecuaciones de conservación de la masa (MF23.42) y de la energía (MF23.43) del aire dentro del depósito se escriben,

$$A \frac{d}{dt} [\rho_d (H - h)] = G, \quad \frac{p_d}{\rho_d^\gamma} = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \quad (7.60)$$

respectivamente, donde se ha tenido en cuenta que la ecuación de la energía se puede sustituir por una relación isentrópica dado que el depósito está aislado térmicamente y la energía cinética del gas a la entrada es despreciable frente a la térmica al ser $M_e^2 \ll 1$.

La ecuación de conservación de la masa del líquido contenido en el depósito nos dice, en forma integral, que la disminución del volumen de líquido es igual al caudal que sale por el orificio de sección A_s . Si la velocidad se supone uniforme en este orificio, y de valor v_s , se tiene

$$-A \frac{dh}{dt} = A_s v_s. \quad (7.61)$$

Por otro lado, si se desprecia la fricción viscosa del líquido al salir por el orificio, se puede aplicar la ecuación de Bernoulli (MF19.17) a una línea de corriente entre un punto cercano al orificio donde la velocidad es mucho menor que v_s y su presión (hidrostática) $p_d + \rho gh$, aproximadamente, y un punto en la sección A_s donde la presión es la atmosférica y la velocidad v_s :

$$p_d + \rho gh = p_a + \frac{1}{2} \rho v_s^2. \quad (7.62)$$

Se ha tenido en cuenta también que la diferencia de altura entre estos dos puntos es muy pequeña comparada con h y que el proceso es casi estacionario por la misma razón de proximidad entre estos dos puntos en relación a h . De esta ecuación se obtiene

$$v_s = \sqrt{2 \frac{p_d - p_a}{\rho} + 2gh}. \quad (7.63)$$

El primer término dentro de la raíz cuadrada aumenta la velocidad de salida del chorro en relación a la ley de Torricelli (2.9), $v_s = \sqrt{2gh}$, que se tendría si el depósito estuviera abierto a la atmósfera por su parte superior.

Despejando G de (7.59) y sustituyendo en (7.60), y juntando (7.61) con (7.63), se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias en las que solo intervienen $p_d(t)$ y $h(t)$:

$$A\rho_a \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{1/\gamma} (H - h) \right] = \frac{W}{h_a \left[\left(\frac{p_d}{p_a} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]}, \quad (7.64)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_s}{A} \sqrt{2 \frac{p_d - p_a}{\rho} + 2gh}, \quad (7.65)$$

que se tendrían que resolver con las condiciones iniciales

$$p_d = p_a, \quad h = h_0 \quad \text{en} \quad t = 0. \quad (7.66)$$

Una vez resueltas, v_s saldría de (7.63) y ρ_d de la segunda de las expresiones en (7.60).

Pero es conveniente escribir estas ecuaciones en forma adimensional para simplificarlas antes de intentar resolverlas numéricamente y, sobre todo, para estimar el orden de magnitud del tiempo que tarda el líquido en salir del depósito. Definiendo las variables adimensionales

$$\xi = \frac{h}{H}, \quad \eta = \frac{p_d}{p_a}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (7.67)$$

donde t_c es un tiempo característico, de momento desconocido, (7.64)-(7.65) se escriben

$$\left(\eta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) \frac{d}{d\tau} \left[\eta^{1/\gamma} (1 - \xi) \right] = \frac{(\gamma - 1)Wt_c}{\gamma A p_a H}, \quad (7.68)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{A_s t_c}{AH} \sqrt{\frac{2p_a}{\rho} \sqrt{\eta - 1} + \alpha \xi}, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\rho g H}{p_a}. \quad (7.69)$$

En (7.69) se ha factorizado el primer término de la raíz cuadrada de (7.65) para poner de manifiesto que la descarga está principalmente controlada por el compresor (por p_d), y no por la gravedad (por h). Por tanto, el factor que multiplica la última raíz cuadrada de (7.69) debe ser de orden unidad, proporcionando el orden de magnitud del tiempo de descarga t_c . Para simplificar la ecuación se toma

$$t_c = \frac{HA}{A_s} \sqrt{\frac{\rho}{2p_a}}, \quad (7.70)$$

por lo que (7.64)-(7.66) finalmente se escriben

$$\left(\eta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) \frac{d}{d\tau} \left[\eta^{1/\gamma} (1 - \xi) \right] = \beta, \quad (7.71)$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\sqrt{\eta - 1 + \alpha\xi}, \quad (7.72)$$

$$\eta = 1, \quad \xi = h_0/H \quad \text{en} \quad \tau = 0, \quad (7.73)$$

donde

$$\beta = \frac{(\gamma - 1)W}{\gamma A_s} \sqrt{\frac{\rho}{2p_a^3}}, \quad (7.74)$$

que junto con h_0/H y α definido en (7.69) son los únicos parámetros que gobiernan el problema. Se podría haber adimensionalizado h con h_0 en vez de H , pero con ξ tal como se ha definido en (7.67) el parámetro h_0/H solo aparece en la condición inicial. El parámetro β proporciona la potencia del compresor convenientemente adimensionalizada, h_0/H puede ser prácticamente la unidad y por tanto irrelevante, y α es la relación entre el efecto de la gravedad y de p_d en la descarga. Si α es de orden unidad (o menor), tal como se está suponiendo, el orden de magnitud del tiempo de descarga es el que se ha definido en (7.70). Sin embargo, si α fuese mucho mayor que la unidad, la descarga no estaría controlada por el compresor, sino por la gravedad, y habría que cambiar el tiempo característico de descarga por $t_c/\sqrt{\alpha}$ en las ecuaciones anteriores.

Una vez integradas numéricamente estas dos ecuaciones diferenciales ordinarias, que proporcionarían $p_d(t)$ y $h(t)$ de acuerdo con (7.67), la densidad del aire en el depósito y la velocidad de salida del chorro se obtendrían de

$$\frac{\rho_d}{\rho_a} = \eta^{1/\gamma} \quad \text{y} \quad v_s = \sqrt{\frac{2p_a}{\rho}} \sqrt{\eta - 1 + \alpha\xi}. \quad (7.75)$$

Si el compresor no existiera o estuviese bloqueado, de manera que el depósito estuviera cerrado por arriba, tendríamos $G = 0$, que sería equivalente a hacer $\beta = 0$ en las ecuaciones adimensionales anteriores. Por tanto, la ecuación diferencial (7.71) se podría integrar para proporcionar una relación algebraica entre ξ y η :

$$\eta^{1/\gamma}(1 - \xi) = 1 - \lambda, \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{h_0}{H}, \quad (7.76)$$

donde se ha hecho uso también de la condición inicial (7.73). Esta ecuación nos dice que la masa de aire en el depósito permanece constante, disminuyendo por tanto la presión (y la densidad) a medida que se descarga el líquido. Introduciendo esta relación en (7.72) se tendría una ecuación diferencial que solo involucra a $\xi(t)$.

El líquido saldría por el orificio hasta que $d\xi/d\tau = 0$, proporcionando la siguiente relación algebraica entre los valores finales de η y ξ :

$$\eta_f = 1 - \alpha\xi_f, \quad (7.77)$$

o, en forma dimensional,

$$p_{d_f} = p_a - \rho g h_f. \quad (7.78)$$

Es decir, el líquido descarga hasta que la presión en depósito ha bajado tanto que sumada a la presión hidrostática del líquido en el orificio, $\rho g h$, iguala a la presión atmosférica de salida. La otra relación algebraica entre los valores finales η_f y ξ_f se obtiene de (7.76):

$$\eta_f = \left(\frac{1 - \lambda}{1 - \xi_f} \right)^\gamma. \quad (7.79)$$

Igualando con (7.77) se tiene la siguiente relación algebraica para $\xi_f = h_f/H$:

$$\left(\frac{1-\lambda}{1-\xi_f}\right)^\gamma = 1 - \alpha\xi_f. \quad (7.80)$$

Si esta ecuación tiene solución real positiva, $\xi_f > 0$, el líquido no descarga completamente del depósito, quedando una altura final h_f en equilibrio con una presión p_{d_f} .

Solución.

La perturbación de la presión producida por la onda monocromática incidente es, según el enunciado,

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \Re \left\{ I e^{i\omega(t - \frac{x}{a_0})} \right\}, \quad (8.1)$$

donde I es la amplitud conocida de la onda incidente. Distinguiamos dos regiones: zona 1, para $x < 0$, donde la perturbación de la presión vale

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = I e^{i\omega(t - \frac{x}{a_0})} + R e^{i\omega(t + \frac{x}{a_0})}, \quad (8.2)$$

con R la amplitud de la onda reflejada, y una zona 2, $x > 0$, con presión

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = T e^{i\omega(t - \frac{x}{a_0})}, \quad (8.3)$$

en la que T es la amplitud de la onda transmitida. Se han escrito las expresiones complejas, de las que habrá que tomar la parte real para obtener las perturbaciones de la presión.

Para hallar las constantes R y T aplicamos las condiciones de contorno en la pared $x = x_p(t) \simeq 0$:

$$u_p \equiv \frac{dx_p}{dt} = u_1 = u_2, \quad (8.4)$$

$$m \frac{du_p}{dt} = p_1 - p_2. \quad (8.5)$$

Haciendo uso de las expresiones (MF25.24) y (MF25.25) que relacionan el campo de velocidad y la presión para ondas planas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente, y teniendo en cuenta (8.2)-(8.3), las expresiones anteriores quedan

$$I - R = T, \quad (8.6)$$

$$I + R - T = mTi\omega. \quad (8.7)$$

Despejando R y T , se tiene

$$R = \frac{mi\omega I}{2 + mi\omega}, \quad (8.8)$$

para la amplitud de la onda reflejada y

$$T = \frac{2I}{2 + mi\omega}, \quad (8.9)$$

para la amplitud de la onda transmitida.

De las ecuaciones anteriores se deduce que si $m \rightarrow \infty$ la amplitud de la onda transmitida sería obviamente nula. Del mismo modo, la amplitud de la onda reflejada sería igual a la incidente.

En la región 1 ($x < 0$), sustituyendo (8.8) y (8.9) en (8.3) se tiene que

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \Re \left[I e^{i\omega(t - \frac{x}{a_0})} + \frac{mi\omega I}{2 + mi\omega} e^{i\omega(t + \frac{x}{a_0})} \right] \text{ para } x < 0. \quad (8.10)$$

Desarrollando el cociente de números complejos,

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \Re \left[I e^{i\omega(t - \frac{x}{a_0})} + \frac{m\omega I(m\omega + 2i)}{4 + m^2\omega^2} e^{i\omega(t + \frac{x}{a_0})} \right] \text{ para } x < 0. \quad (8.11)$$

Teniendo en cuenta el módulo que queda en el denominador de la onda reflejada, podemos definir

$$z \equiv m\omega + 2i, \quad (8.12)$$

o lo que es lo mismo

$$z = re^{i\beta}, \quad r = \sqrt{m^2\omega^2 + 4}, \quad \tan \beta = \frac{2}{m\omega}, \quad (8.13)$$

quedando finalmente la expresión anterior como

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = I \left\{ \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{a_0} \right) \right] + \frac{m\omega}{\sqrt{4 + m^2\omega^2}} \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{a_0} \right) + \beta \right] \right\} \text{ para } x < 0. \quad (8.14)$$

Operando de la misma forma para la región 2 ($x > 0$) queda

$$\frac{p'}{\rho_0 a_0} = \frac{2I}{\sqrt{4 + m^2\omega^2}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{a_0} \right) - \alpha \right] \text{ para } x > 0, \quad (8.15)$$

siendo $\tan \alpha = \frac{m\omega}{2}$. Los campos de velocidad y densidad en $x < 0$ y $x > 0$ se obtendrían de (8.14) y de (8.15), respectivamente, haciendo uso de (MF25.24) y (MF25.25).

P.8.2 Estallido de un globo

Se desea estudiar la onda sonora provocada por el estallido de un globo. Para ello se supone que el globo es una esfera de radio R y que contiene aire con una densidad ligeramente superior a la atmosférica: $\rho = \rho_a + \Delta = \rho_0 + \Delta$, con $\Delta \ll \rho_a$. En $t = 0$ estalla el globo, produciéndose una onda que se propaga hacia el exterior y otra hacia el interior. Considerar sólo la onda que se propaga hacia el exterior ($r > R$), hallando el campo de densidad y de presión. Comenten físicamente los resultados.

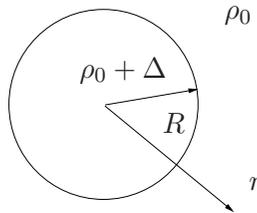


Figura 8.2: Esquema y coordenadas del problema

Solución.

Se supone que las ondas sonoras producidas por el estallido del globo tienen simetría esférica, por lo que se utilizará la ecuación (MF25.74) para el cálculo del potencial de velocidad,

$$\phi = \frac{F(r - a_0 t)}{r} + \frac{G(r + a_0 t)}{r}, \quad (8.16)$$

donde F y G son funciones arbitrarias de sus argumentos y a_0 es la velocidad de propagación del sonido en un gas perfecto en las condiciones ρ_0 y p_0 , es decir, $a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$.

La perturbación de la velocidad es (MF25.75)

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (8.17)$$

que en el instante inicial es idénticamente nula. Así, en $t = 0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \rightarrow \phi = \text{constante} = 0, \quad (8.18)$$

donde la constante de integración se toma igual a cero para que la presión y la densidad no diverjan cuando $r \rightarrow \infty$. Haciendo $t = 0$ en (8.16), esta ecuación queda como

$$F(r) + G(r) = 0. \quad (8.19)$$

Luego, para cualquier instante t se tiene

$$\phi = \frac{F(r - a_0 t)}{r} - \frac{F(r + a_0 t)}{r}. \quad (8.20)$$

Para hallar F hay que aplicar la condición inicial, relacionada con la perturbación Δ de la densidad. Las variaciones temporales de la función potencial de velocidad ϕ son, de acuerdo con (8.20),

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_0 \frac{F'(r - a_0 t)}{r} - a_0 \frac{F'(r + a_0 t)}{r}, \quad (8.21)$$

de donde se deduce que la perturbación de la densidad viene dada por (MF25.15)

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{1}{a_0} \frac{F'(r - a_0 t)}{r} + \frac{1}{a_0} \frac{F'(r + a_0 t)}{r}. \quad (8.22)$$

En el instante inicial $t = 0$ hay que distinguir dos regiones, una dentro y otra fuera del globo. Para $r > R$ se cumple

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = 0, \quad (8.23)$$

y, por tanto, según (8.22), $F'(r) = 0$ para $r > R$. Para $r < R$ se tiene

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{\Delta}{\rho_0}, \quad (8.24)$$

de donde

$$F' = \frac{a_0 \Delta r}{2\rho_0} \quad \text{si } r < R. \quad (8.25)$$

Es decir, la función F satisface

$$F'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi > R \\ \frac{a_0 \Delta \xi}{2\rho_0} & \text{si } \xi < R, \end{cases} \quad (8.26)$$

válida sólo para $\xi > 0$ ($r > 0$). Para obtener la expresión para $\xi < 0$, definimos $x = -r$ y volvemos a aplicar (8.23)-(8.24) en $t = 0$. Para $-x > R$,

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = 0 = F'(-x); \quad (8.27)$$

para $-x < R$,

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{\Delta}{\rho_0}, \quad (8.28)$$

de donde

$$F'(-x) = -\frac{a_0 \Delta x}{2\rho_0} = -F'(x). \quad (8.29)$$

Combinando todos los resultados anteriores, la función $F'(\xi)$ viene dada por

$$F'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| > R \\ \frac{a_0 \Delta \xi}{2\rho_0} & \text{si } |\xi| < R. \end{cases} \quad (8.30)$$

De esta forma, para $r > R$ la función $F'(r - a_0 t)$ vale

$$F'(r - a_0 t) = \begin{cases} 0 & \text{si } r - a_0 t > R \quad r > R + a_0 t \\ 0 & \text{si } r - a_0 t < -R \quad r < a_0 t - R \\ \frac{a_0 \Delta (r - a_0 t)}{2\rho_0} & \text{si } a_0 t - R < r < R + a_0 t. \end{cases} \quad (8.31)$$

El campo de densidad (8.22), según la ecuación anterior, queda

$$\rho' = \begin{cases} 0 & \text{si } r > R + a_0 t \\ 0 & \text{si } r < a_0 t - R \\ \frac{\Delta(r-a_0 t)}{2r} & \text{si } a_0 t - R < r < R + a_0 t. \end{cases} \quad (8.32)$$

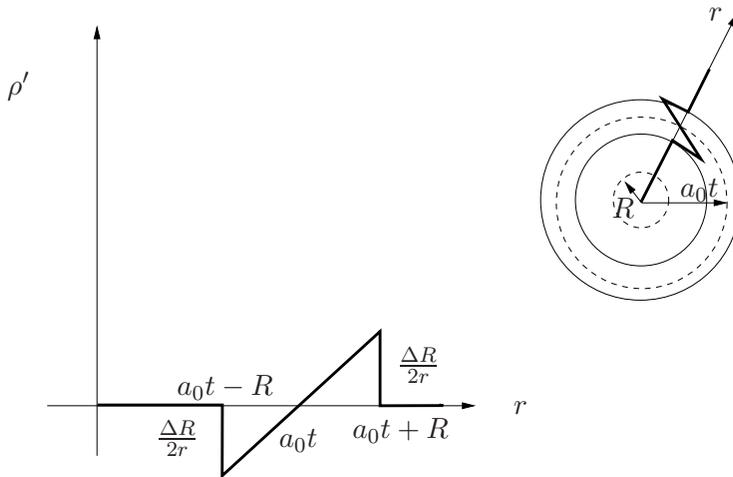


Figura 8.3: Perfil radial de la perturbación de la densidad para un instante t

Físicamente, para un instante $t > 0$, se tiene una onda esférica de espesor $2R$ en la que existe un cambio de densidad lineal en la dirección radial y que viaja a la velocidad del sonido a_0 (ver figura 8.3). La intensidad de la onda decae como $1/r$ a medida que se aleja de la fuente situada en $r = R$.

La presión varía de la forma (MF25.7) $p = p_0 + p' = p_a + a_0^2 \rho'$, por lo que la onda de presión también es lineal. Este ligero cambio de presión ($\Delta \ll \rho_0$) es lo que percibimos como el estallido del globo cuando la onda llega al oído.

Capítulo 9

Capa límite laminar

P.9.1 Velocidad terminal de una placa plana

Una placa plana rectangular de área $a \times b$, grosor despreciable y masa M cae verticalmente en el interior de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ . Se desea estimar la velocidad *terminal* de caída suponiendo que el flujo alrededor de la placa puede aproximarse por el perfil de velocidad de Blasius y que este flujo no se hace turbulento. En particular, hallen la velocidad terminal para los siguientes datos: $a = 1$ m, $b = 2$ m, $\rho = 815$ kg/m³, $\nu = 10^{-6}$ m²/s, $M = 2$ kg. Comprueben si el resultado es coherente con la aproximación tomada para el perfil de velocidad.

Solución.

La velocidad terminal U se alcanza cuando el peso de la placa equilibra la fuerza de resistencia (la fuerza de flotabilidad es nula debido a que el espesor de la placa es despreciable):

$$Mg = F_R. \quad (9.1)$$

Suponiendo que el perfil de velocidad de la componente vertical de la velocidad (paralela a la placa) viene dado por la expresión de Blasius (MF27.31), la fuerza de resistencia puede expresarse como (MF27.46):

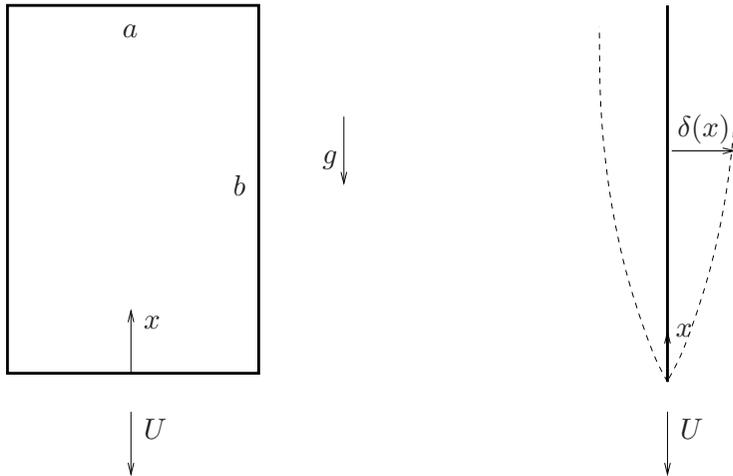


Figura 9.1: Esquema y coordenadas. A la izquierda, vista frontal de la placa. A la derecha, vista lateral mostrando el espesor de la capa límite

$$F_R = a \times 1,328 \sqrt{\rho \mu b U^3}. \quad (9.2)$$

Sustituyendo en (9.1) y despejando U se obtiene la velocidad terminal

$$U = \left(\frac{Mg}{1,328 a} \right)^{2/3} \frac{1}{(\rho \mu b)^{1/3}} \simeq 5,47 \text{ m/s}, \quad (9.3)$$

donde se han sustituido los valores numéricos del enunciado en la última igualdad.

Para que la expresión anterior de la velocidad terminal sea válida, se tiene que cumplir, en primer lugar, la hipótesis de validez de capa límite

$$Re = \frac{bU}{\nu} \gg 1, \quad (9.4)$$

que se cumple holgadamente, pues con los datos numéricos suministrados $Re \simeq 1,09 \times 10^7$. De forma más precisa, para que la solución sea válida el espesor de la capa límite en $x = b$, que usando (MF27.36) se puede escribir como $\delta_b \simeq 4,95 \sqrt{\nu b / U} \simeq 3 \times 10^{-3} \text{ m}$, tiene que ser mucho menor que la

longitud $b = 2$ m de la placa. En este sentido, por tanto, la expresión (9.3) es válida con bastante precisión.

Por otro lado, el flujo de capa límite tiene que permanecer laminar para que el resultado (9.3) sea válido. Teniendo en cuenta que el perfil de velocidad de Blasius se hace inestable a una distancia del orden de $3 \times 10^6 \nu / U$ del borde de ataque (ver MF §30.1), dado que esta distancia es aproximadamente 0,54 m en nuestro caso, el perfil de velocidad se hace turbulento después de haber recorrido algo más de la cuarta parte de la longitud b , y la expresión (9.2) para la fuerza de fricción que se ha usado para calcular la velocidad terminal ya no es válida a partir de esa distancia del borde de ataque.

P.9.2 Resistencia de la orza de un barco de vela

Para calcular la resistencia hidrodinámica de una orza, o timón fijo a la quilla de un barco de vela, se supone que ésta consiste en una placa plana de forma trapezoidal con las dimensiones que se dan en la figura 9.2 y que el movimiento del agua alrededor de ella viene descrito por la solución de Blasius para la capa límite laminar sobre una placa plana infinita. Calcular la fuerza de resistencia que ofrece la orza al movimiento del barco cuando avanza a una velocidad U . Calculen también el valor máximo de la longitud b para que la capa límite permanezca laminar con esa velocidad U .

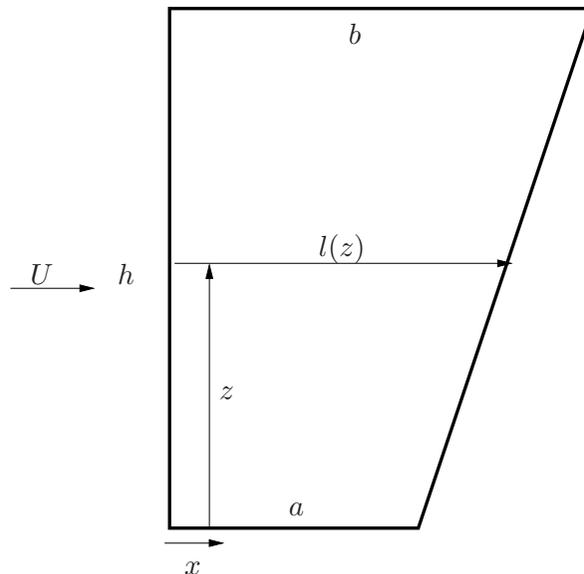


Figura 9.2: Esquema y coordenadas

Solución.

Para calcular la fuerza de resistencia se utiliza el esfuerzo de fricción de Blasius (MF27.45),

$$\tau_f(x) = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu U^3}{x}}, \quad (9.5)$$

integrado sobre toda la superficie de la orza. Los límites de integración serían $0 \leq z \leq h$ y $0 \leq x \leq l(z)$, donde $l(z)$ viene dado por (ver figura 9.2):

$$l(z) = a + \frac{b-a}{h} z. \quad (9.6)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} F_R &= 2 \int_0^h dz \int_0^{l(z)} dx \tau_f(x) = 1,328 \sqrt{\rho \mu U^{3/2}} \int_0^h dz \left(a + \frac{b-a}{h} z \right)^{1/2} \\ &= 0,885 \sqrt{\rho \mu U^{3/2}} \frac{h}{b-a} (b^{3/2} - a^{3/2}). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Si b fuese igual a a , la expresión anterior seguiría siendo válida, pero habría que obtener el límite de $(b^{3/2} - a^{3/2})/(b - a)$ cuando $b \rightarrow a$. Para ello, se hace $b = a + \epsilon$, $\epsilon \ll 1$, se desarrolla en serie de Taylor, $b^{3/2} = (a + \epsilon)^{3/2} \simeq a^{3/2}[1 + 3\epsilon/(2a)]$ y se obtiene $(b^{3/2} - a^{3/2})/(b - a) \rightarrow 3a^{1/2}/2$, que sustituido en (9.7) obviamente proporciona la expresión (MF27.46), pero con L sustituido por a y multiplicado por h .

La expresión (9.7) es (aproximadamente) válida siempre que el flujo en la capa límite permanezca laminar. Es decir, si $b < 3 \times 10^6 \nu/U$, aproximadamente (ver MF §30.1).

Capítulo 10

Flujo turbulento de líquidos en conductos

P.10.1 Descarga de un depósito

Un depósito que contiene un líquido de viscosidad cinemática ν y densidad ρ descarga a través de un conducto horizontal, hidráulicamente liso, de longitud L y diámetro D . Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento, que el nivel H de líquido en el depósito permanece prácticamente constante y que los valores numéricos de las diferentes magnitudes son $L = 100$ m, $D = 10$ cm, $H = 10$ m y $\nu = 10^{-6}$ m²/s, calculen en caudal Q . ¿Es razonable suponer que el flujo es turbulento?

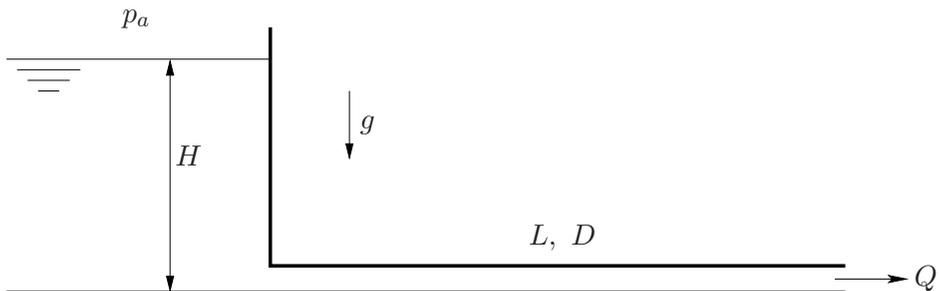


Figura 10.1: Esquema de la descarga de un depósito a través de un conducto horizontal

Solución.

Para que el flujo en el conducto se pueda suponer turbulento se debe cumplir la condición

$$Re > Re_c \approx 2300, \quad (10.1)$$

que se comprobará una vez resuelto el problema, pues necesitamos conocer Q para calcular el número de Reynolds Re .

Respecto al tubo, se dice que se puede considerar hidráulicamente liso, por lo que el coeficiente de fricción λ será función sólo del número de Reynolds del movimiento, $\lambda = \lambda(Re)$. Además, dado que la altura del nivel del líquido del depósito permanece casi constante, se estudiará el problema estacionario. Se tiene, por tanto, el movimiento turbulento y estacionario de un líquido en un conducto con la fricción función del número de Reynolds. Las ecuaciones de conservación de la masa y la cantidad de movimiento (MF33.27) y (MF33.28) en este caso se escriben

$$v \frac{\pi D^2}{4} = Q, \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad (10.3)$$

donde se ha tenido en cuenta que el conducto es de sección circular con diámetro D y que las únicas fuerzas másicas presentes son las gravitatorias. De hecho, como el conducto es horizontal, el término gz de (10.3) desaparece al no variar con la coordenada x a lo largo del conducto. Asimismo, el término $v^2/2$ en (10.3) también es despreciable pues v no depende de x de acuerdo con (10.2) (Q y D no dependen de x). Por tanto, la integración de (10.3) entre la entrada ($x=0$) y la salida ($x=L$) del conducto, proporciona

$$p(0) - p(L) = -\rho \frac{\lambda v^2}{2D} L = -\frac{8\lambda L \rho Q^2}{\pi^2 D^5}, \quad (10.4)$$

donde se ha tenido en cuenta que v no depende de x y, en consecuencia, tampoco Re ni λ . Esta ecuación proporciona el caudal

$$Q = \sqrt{\frac{\pi^2 D^5}{8\lambda L \rho} [p(0) - p(L)]}. \quad (10.5)$$

Al ser λ función del número de Reynolds y, por tanto, de Q , la ecuación anterior se ha de resolver de forma iterativa con el diagrama de la figura MF32.4, o la ecuación (MF32.67) con $\epsilon/D = 0$, previo cálculo de los valores de $p(0)$ y $p(L)$.

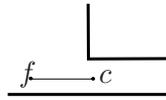


Figura 10.2: Detalle de la entrada

Para determinar la presión a la entrada del conducto se tendrá en cuenta la conservación de la presión de remanso desde el fondo del depósito p_{0f} (con velocidad prácticamente nula y distribución de presión hidrostática), hasta la entrada al conducto p_{0c} (se supone que no existen pérdidas localizadas en la unión depósito-conducto):

$$p_{0f} = p_a + \rho g H = p_{0c} = p(0) + \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (10.6)$$

Despejando la presión a la entrada del conducto, se obtiene

$$p(0) = p_a + \rho g H - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_a + \rho g H - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^2. \quad (10.7)$$

En la sección de salida, el conducto está descargando a la atmósfera, por lo que $p(L) = p_a$. Por tanto, la ecuación (10.5) para el caudal Q se escribe

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{\left(1 + \frac{\lambda L}{D}\right)}}. \quad (10.8)$$

Establecida la ecuación para Q , el proceso iterativo comenzará por suponer un valor del caudal, con el que se calculará el número de Reynolds. Con éste y

con la figura MF32.4 (rama correspondiente a un tubo hidráulicamente liso) se obtendrá un valor de λ , el cual, introducido en (10.8), nos dará un nuevo valor para el caudal que permitirá corregir el número de Reynolds, repitiéndose de nuevo el proceso hasta obtener el caudal con la precisión deseada. Sólo queda por establecer la relación entre el caudal y el número de Reynolds:

$$Re = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu}. \quad (10.9)$$

Con los datos del problema, suponemos inicialmente $Q = 0,31416 \text{ m}^3/\text{s}$ ($Re = 4 \times 10^6$) y procedemos iterativamente como se acaba de describir. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Iteración	$Q \text{ (m}^3/\text{s)}$	Re	λ
1	0,3141	$4,00 \times 10^6$	0,0095
2	0,0339	$4,31 \times 10^5$	0,0136
3	0,0294	$3,74 \times 10^5$	0,0135
4	0,0289	$3,68 \times 10^5$	0,0137
5	0,0287	$3,65 \times 10^5$	

Después de 5 iteraciones podríamos dar por concluido el proceso iterativo,¹ teniendo finalmente el caudal buscado un valor de $Q \simeq 0,0287 \text{ m}^3/\text{s}$.

De la tabla anterior también se deduce que el número de Reynolds es apreciablemente mayor que el valor crítico ($Re \approx 2300$), por lo que es perfectamente válida la hipótesis de flujo turbulento completamente desarrollado.

¹El lector puede hacer alguna iteración más para conseguir un resultado más exacto.

P.10.2 Fuente

El chorro de una fuente pública es impulsado por una bomba a través de un conducto de longitud L y sección circular de diámetro D . La potencia que la bomba le suministra al fluido, de densidad ρ , es W_0 veces el caudal que circula por ella, $W = W_0 Q$, donde W_0 es una constante conocida. Suponiendo que el flujo en el conducto es siempre turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente del número de Reynolds, y que la pérdida de presión de remanso en el codo del conducto es K_c veces la energía cinética por unidad de volumen que circula por el mismo, se pide:

1. Evolución de la altura del chorro en función del tiempo suponiendo que en $t = 0$ se pone en funcionamiento la bomba con el conducto completamente lleno de líquido. En particular, hallen la ecuación diferencial que gobierna $h(t)$ suponiendo que fuera del conducto el flujo es casi estacionario y con fricción aire-líquido despreciable. (Por supuesto, el flujo dentro del conducto no es estacionario.)
2. Valor estacionario h_e de la altura del chorro.
3. ¿Qué condición tiene que cumplir h_e para que la hipótesis de chorro casi estacionario del apartado primero sea válida?

Solución.

1. El único elemento donde el flujo no es casi estacionario es el conducto, por lo que se empezará escribiendo las ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento e incompresible en él [(MF33.27), (MF33.8)]:

$$v \frac{\pi D^2}{4} = Q, \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad (10.11)$$

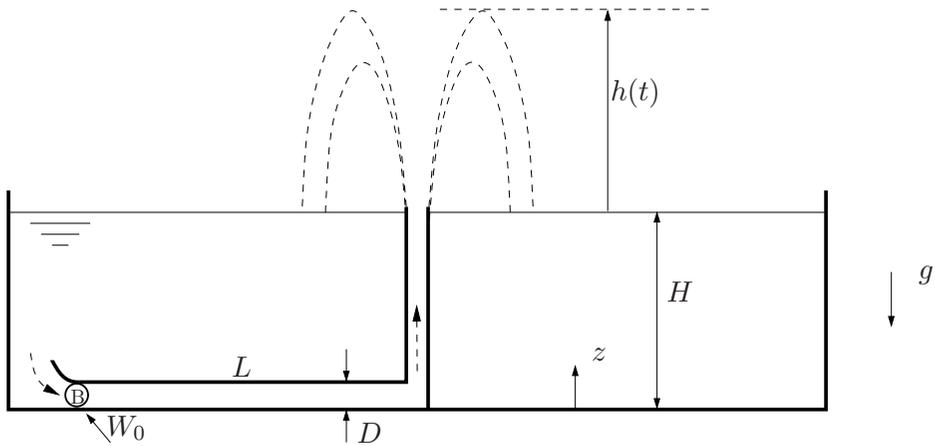


Figura 10.3: Esquema de la fuente

donde x es la coordenada a lo largo del conducto, comenzando desde justo detrás de la bomba y llegando hasta la salida del chorro, z es la coordenada vertical (medida a partir del fondo del depósito, por ejemplo; ver figura 10.3) y Q es el caudal que circula por el conducto, que no depende de x . Como el diámetro del conducto es constante a lo largo de x , también lo será la velocidad v de acuerdo con (10.10), siendo así nulo el término de variación de $v^2/2$ en (10.11). Integrando esta ecuación respecto a x , se tiene

$$\frac{dv}{dt} x + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{\lambda v^2}{2D} x = C, \quad (10.12)$$

donde C es una constante de integración que se eliminará en cada tramo del conducto en función de las respectivas condiciones de contorno.

En el tramo horizontal, $z = 0$ y se tienen las condiciones de contorno para la presión (ver figura 10.4) siguientes:

$$2 \overline{\overline{\hspace{10em}}} 3 \quad p = p_2 \text{ en } x = 0 \text{ y } p = p_3 \text{ en } x = L - H, \quad (10.13)$$

Figura 10.4: Tramo horizontal

donde tanto p_2 como p_3 son de momento desconocidas. Sustituyendo estas condiciones de contorno en (10.12) y restando las ecuaciones resultantes para eliminar la constante C , se tiene

$$\frac{dv}{dt} (L - H) + \frac{p_3 - p_2}{\rho} + \frac{\lambda v^2}{2D} (L - H) = 0. \quad (10.14)$$

En el tramo vertical (4-5 en la figura 10.5), se tienen las condiciones de contorno



$$p = p_4 \text{ y } z = 0 \text{ en } x = L - H, \quad (10.15)$$

$$p = p_a \text{ y } z = H \text{ en } x = L, \quad (10.16)$$

Figura 10.5: Tramo vertical

que substituidas en (10.12) proporciona

$$\frac{dv}{dt} H + \frac{p_a}{\rho} + gH - \frac{p_4}{\rho} + \frac{\lambda v^2}{2D} H = 0. \quad (10.17)$$

Sumando (10.14) y (10.17) se tiene

$$\frac{dv}{dt} L + \frac{p_3 + p_a - p_2 - p_4}{\rho} + gH + \frac{\lambda v^2}{2D} L = 0. \quad (10.18)$$

Por otro lado, en el codo (tramo 3-4 en la figura 10.6), donde hay una pérdida localizada de presión de remanso, se verifica (MF §33.5)



$$p_3 + \rho \frac{v^2}{2} = p_4 + \rho \frac{v^2}{2} + K_c \rho \frac{v^2}{2}; \quad (10.19)$$

Figura 10.6: Codo

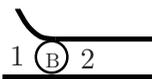
es decir,

$$p_3 - p_4 = K_c \rho \frac{v^2}{2}. \quad (10.20)$$

Sustituyendo en (10.18),

$$\frac{dv}{dt} L + \frac{p_a - p_2}{\rho} + gH + \frac{v^2}{2} \left(\frac{\lambda L}{D} + K_c \right) = 0. \quad (10.21)$$

Para completar la ecuación en el conducto se necesita calcular p_2 . Para ello se hace uso de la ecuación característica de la bomba, dada en el enunciado del problema, $W = W_0 Q$, donde W_0 es una constante conocida, y de la ecuación de la energía en forma integral (MF23.37) aplicada a la bomba (ver figura 10.7)



$$W = Q \left(p_2 + \rho \frac{v^2}{2} - p_a - \rho gH \right) = W_0 Q, \quad (10.22)$$

Figura 10.7: Bomba

donde se ha tenido en cuenta que la presión de remanso a la entrada de la bomba es aproximadamente igual a la presión estática en el fondo del depósito, $p_{01} = p_a + \rho gH$, pues en el depósito la velocidad del agua es prácticamente nula (al menos despreciable en relación a la velocidad v en el conducto) y la presión

de remanso se conserva (aproximadamente) en el difusor de entrada a la bomba si éste está bien diseñado. Despejando $p_2 - p_a$ de (10.22) y sustituyendo en (10.21) se tiene al fin la ecuación que gobierna el flujo en el conducto,

$$\frac{dv}{dt} L + \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_c \right) = \frac{W_0}{\rho}, \quad (10.23)$$

que se ha escrito de tal manera que en el lado derecho está la potencia comunicada por la bomba al fluido (en unidades de energía por unidad de masa) y en el lado izquierdo están todos los términos en los que se invierte esta potencia. Esta manera de escribir la ecuación es conveniente para poder detectar si se nos ha olvidado algún elemento del conducto. Obsérvese que no hay ningún término con la aceleración de la gravedad, pues el chorro sale del conducto a la misma altura H que la superficie libre del estanque de donde se toma el agua.

En el chorro se va a suponer que el proceso es casi estacionario (ver apartado 3 más abajo). Como también se va a suponer que la fricción entre el aire y el chorro es despreciable, se verifica la ecuación de Bernoulli (MF19.17). Teniendo en cuenta, además, que la presión en cada sección del chorro es constante e igual a la atmosférica p_a , esta ecuación entre las secciones de salida del chorro, $z = H$, y la altura final del mismo, $z = H + h$ (ver figura 10.8), se escribe

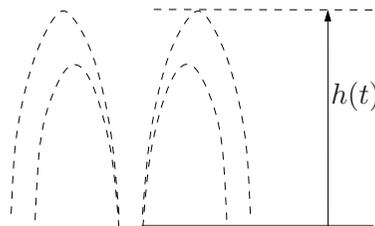


Figura 10.8: Chorro

$$gH + \frac{v^2}{2} = g(H + h), \quad (10.24)$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad en $z = H$ es la del conducto, mientras que en $z = H + h$ la velocidad del fluido es prácticamente nula. Por tanto, se tiene la siguiente relación entre la velocidad v y la altura del chorro:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (10.25)$$

Sustituyendo esta velocidad y su derivada temporal en (10.23), se llega finalmente a la ecuación diferencial solicitada, que gobierna la evolución temporal de la altura del chorro:

$$\sqrt{\frac{g}{2h}} \frac{dh}{dt} L + gh \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_c \right) = \frac{W_0}{\rho}, \quad (10.26)$$

que se ha de resolver con la condición inicial

$$h(t = 0) = 0. \quad (10.27)$$

2. La anterior es una ecuación no lineal para $h(t)$ que no es fácil de resolver analíticamente. Sin embargo, sí que es fácil obtener el valor estacionario final que alcanza la altura del chorro. Para ello no hay más que anular el primer término de (10.26), resultando

$$h_e = \frac{W_0}{\rho g \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_c \right)}. \quad (10.28)$$

También se puede estimar el orden de magnitud del tiempo necesario para que se llegue a esta altura estacionaria final. Comparando el primer y último término de (10.26), teniendo en cuenta que $h \sim h_e$,

$$\left(\frac{g}{h_e} \right)^{1/2} \frac{h_e}{t_c} L \sim \frac{W_0}{\rho}, \quad (10.29)$$

donde t_c es el tiempo característico buscado. Despejando t_c y sustituyendo h_e de (10.28), se tiene

$$t_c \sim L \sqrt{\frac{\rho}{W_0 \left(1 + \frac{\lambda L}{D} + K_c\right)}}. \quad (10.30)$$

3. Si el movimiento del chorro no fuese casi estacionario, la ecuación de cantidad de movimiento sería, en vez de la ecuación de Bernoulli (10.24),

$$\frac{\partial v_c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{v_c^2}{2} + gz \right) = 0, \quad (10.31)$$

donde v_c es la velocidad en cada sección del chorro definida por la coordenada x' a lo largo del mismo. Esta ecuación es análoga a (10.11), pero sin fricción y sin el término de presión, pues $p \simeq p_a$ en todo el chorro. En el apartado primero se ha despreciado el primer término de la ecuación anterior; es decir, se ha supuesto que

$$\frac{v_c}{t_c} \ll g, \quad (10.32)$$

donde t_c es el tiempo característico del proceso, estimado anteriormente (10.30), y se ha tenido en cuenta que las variaciones de x' y z son las mismas. La velocidad característica del chorro se puede tomar del orden de v , $v_c \sim \sqrt{gh_e}$, que es lo mismo que decir que los dos términos entre paréntesis en (10.31) son del mismo orden. Teniendo en cuenta (10.28) y (10.30), la condición que se ha de verificar para que el movimiento en el chorro se pueda considerar casi estacionario es

$$\frac{W_0}{\rho g L} \ll 1. \quad (10.33)$$

Si la fricción no fuese importante en el conducto, es decir, si $\lambda L/D \ll 1$ y $K_c \ll 1$, se tendría que $h_e \sim W_0/(\rho g)$ y $t_c \sim L \sqrt{\rho/W_0}$, y la condición

anterior se podría escribir como $h_e/L \ll 1$, que es una condición bastante evidente, pues sólo si la altura del chorro es mucho menor que la longitud del conducto puede ocurrir que el proceso sea casi estacionario en el chorro y no estacionario en el conducto. Sin embargo, la fricción puede modificar sustancialmente esta simple condición basada en el cociente entre la longitud del chorro y del conducto, si es lo suficientemente importante.

P.10.3 Tubo de Pitot

Un tubo de Pitot como el representado en la figura 10.9 se utiliza para medir la velocidad de un vehículo acuático. Se pide:

1. Si el vehículo lleva moviéndose un cierto tiempo con velocidad V , de forma que se ha alcanzado el estado estacionario, calcular el nivel del agua en el tubo, h_f , como función de V .
2. Escriban la ecuación y las condiciones iniciales que describen la evolución del nivel de líquido $h(t)$ desde su valor inicial $h = 0$ hasta su valor final h_f . Supongan que el movimiento del líquido en el conducto es turbulento, con factor de fricción λ independiente del número de Reynolds. Desprecien la longitud del tramo horizontal frente al vertical, que, por supuesto, es mayor que $H + h_f$.
3. Escriban una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden y lineal, para v^2 (v es la velocidad del agua en el conducto) en función de h . Resuélvanla en el límite $\lambda h_f/D \simeq 0$. Discutan los resultados.

Solución.

Para la resolución del problema se va a elegir un sistema de referencia móvil, fijo sobre el vehículo, y respecto al cual el fluido del medio en el que se desplaza el vehículo se moverá hacia el tubo con una velocidad $V\vec{e}_x$. Al ser un sistema de referencia en general no inercial, en el potencial de fuerzas másicas dado en (MF12.8) aparecerá un término de fuerza asociado a la aceleración del sistema de referencia, además del gravitatorio. Pero dado que la velocidad del vehículo acuático se va suponer constante, la aceleración del sistema de referencia va a ser cero, con lo que el potencial de fuerzas másica se escribe

$$U = \vec{g} \cdot \vec{x}. \quad (10.34)$$

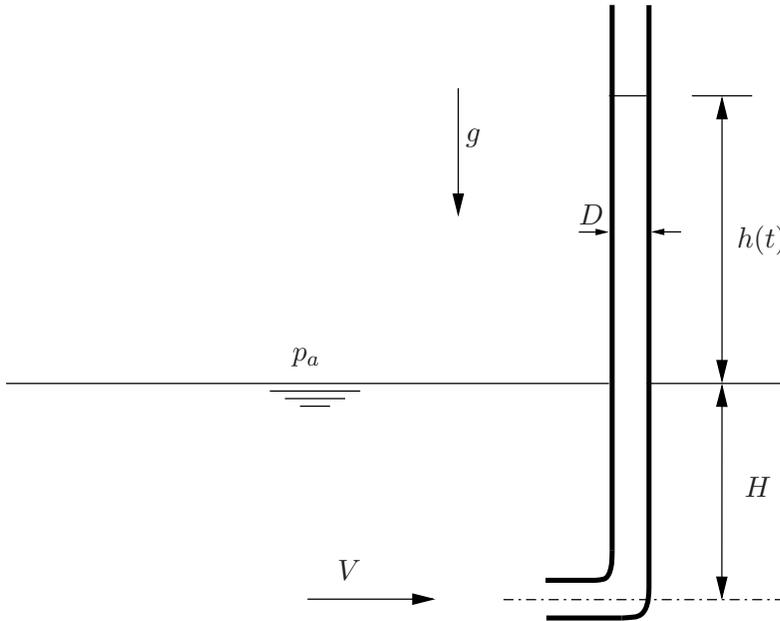


Figura 10.9: Esquema del sistema a estudiar

1. Una vez alcanzado el sistema un estado estacionario, la altura $h(t)$ en el tubo de Pitot no varía con el tiempo. La velocidad en el mismo es cero y la distribución de presión en su interior vendrá dada por fluidostática. Al ser el potencial de fuerzas másicas el dado en (10.34), para el líquido en el tubo se tiene

$$p + \rho U = p + \rho g z = \text{constante} . \quad (10.35)$$

La constante se obtiene en función de la altura final del líquido en el tubo sabiendo que en $z = h_f$, $p = p_a$ (si se desprecia el efecto de la tensión superficial),

$$p + \rho g z = p_a + \rho g h_f . \quad (10.36)$$

Por otro lado la presión en la base del tubo de Pitot se puede obtener en función de V teniendo en cuenta que la presión de remanso se conserva en la línea $f-e$ de la figura 10.10, con $p_f = p_a + \rho g H$:

$$p_a + \rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_e. \quad (10.37)$$

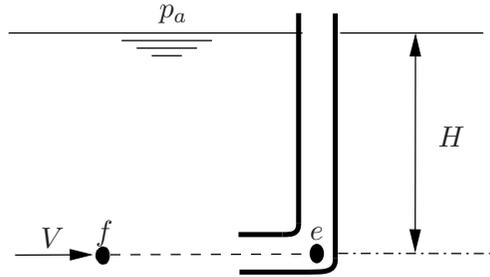


Figura 10.10: Detalle de la entrada al tubo de Pitot

Sustituyendo esta presión en (10.36) para $z = -H$,

$$p_e - \rho gH = p_a + \rho gH + \frac{1}{2}\rho V^2 - \rho gH = p_a + \rho gh_f, \quad (10.38)$$

se obtiene h_f en función de V ,

$$h_f = \frac{V^2}{2g}. \quad (10.39)$$

2. Para obtener la ecuación que gobierna la evolución de $h(t)$, hasta llegar al valor h_f calculado en 1, se tendrá en cuenta que el movimiento en el conducto, de sección constante, es turbulento, con factor de fricción λ independiente del número de Reynolds. Las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad (MF33.8) y (MF33.27), se escriben

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{-\lambda v^2}{2D}, \quad (10.40)$$

$$Q = v \frac{\pi D^2}{4}, \quad (10.41)$$

donde el caudal Q no depende de la coordenada x a lo largo del conducto y λ es constante. El término con $v^2/2$ en (10.40) se puede quitar pues, de acuerdo

²Esta expresión es la base del tubo de Pitot, ingeniero francés (1695-1771), que permite obtener V midiendo h_f .

con (10.41), v no depende de x al ser D constante. Por tanto, el primer término de (10.40) es en realidad una derivada total. La integración de (10.40) respecto a x proporciona

$$\frac{dv}{dt}x + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{\lambda v^2}{2D}x = \text{constante}. \quad (10.42)$$

Para eliminar la constante se tiene en cuenta que en $x=0$, por aplicación de la conservación de la presión de remanso entre los puntos f y e de la figura 10.2, la presión vale

$$p_e = p_a + \rho gH + \frac{1}{2}\rho (V^2 - v^2) \quad \text{en } x = 0, \quad (10.43)$$

mientras que en $x = H + h(t)$, $p = p_a$. Sustituyendo estos valores en (10.42), junto con $z = -h$ y $z = h$, respectivamente, se llega a la siguiente ecuación diferencial para v

$$\frac{dv}{dt}(H + h) + gh + \frac{1}{2}v^2 \left[1 + \frac{\lambda(H + h)}{D} \right] - \frac{1}{2}V^2 = 0. \quad (10.44)$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas v y h , por lo que falta otra ecuación que cierre el problema. Ésta se puede obtener teniendo en cuenta que v no depende de x y, por tanto, coincide con la velocidad de la superficie libre,

$$v = \frac{dh}{dt}. \quad (10.45)$$

Sustituyendo este valor en (10.44) se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para h :

$$\frac{d^2h}{dt^2}(H + h) + gh + \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left(1 + \frac{\lambda(H + h)}{D} \right) - \frac{1}{2}V^2 = 0, \quad (10.46)$$

que se debe resolver con la condición inicial

$$h = 0 \quad \text{en} \quad t = 0. \quad (10.47)$$

La otra condición inicial necesaria para resolver esta ecuación es de momento desconocida pues cuando $h = 0$ la velocidad $v = dh/dt$ no se conoce (no tiene porqué ser nula, ver apartado 3).

3. Teniendo en cuenta que, aplicando la regla de la cadena y (10.45),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{dv}{dh} v = \frac{d(v^2/2)}{dh} = \frac{dy}{dh} \quad \text{con} \quad y \equiv \frac{v^2}{2}, \quad (10.48)$$

y despreciando el término de fricción en el límite $\lambda h_f/D \simeq 0$, la ecuación (10.44) se escribe

$$\frac{dy}{dh} (H + h) + gh + y - \frac{V^2}{2} = 0. \quad (10.49)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden, no homogénea, se puede hacer homogénea teniendo en cuenta que

$$\frac{d[y(H + h)]}{dh} = \frac{dy}{dh} (H + h) + y, \quad (10.50)$$

de manera que (10.49) se escribe

$$\frac{d[y(H + h)]}{dh} = \frac{V^2}{2} - gh. \quad (10.51)$$

Obviamente, esta ecuación es compatible con la condición estacionaria final (10.39), en la que $y \rightarrow 0$ y, en consecuencia, el segundo miembro se anula, dando lugar a (10.39). Su solución es

$$y \equiv \frac{v^2}{2} = \frac{\frac{V^2}{2}h - g\frac{h^2}{2} + K}{H + h}, \quad (10.52)$$

donde K es una constante de integración desconocida (pues se desconoce la velocidad inicial para $h=0$), pero que se puede obtener teniendo en cuenta la solución estacionaria final, $h = h_f = \frac{V^2}{2g}$ a la que se llega cuando $v = 0$. Por tanto, $K = -\frac{V^4}{8g}$, de manera que

$$v = \sqrt{\frac{V^2h - gh^2 - \frac{V^4}{4g}}{H + h}}. \quad (10.53)$$

Una vez que se conoce $v(h)$, $h(t)$ se puede obtener mediante (10.45) por integración numérica:

$$\int_0^h \frac{dh}{v(h)} = t. \quad (10.54)$$

P.10.4 Turbina hidráulica

Una miniturbina extrae potencia del agua contenida en un pequeño embalse, que se supone rectangular y de sección A . La conducción que va del fondo del embalse a la turbina tiene una longitud L y diámetro D . Inicialmente, la válvula que hay justo delante de la turbina está cerrada y la altura del nivel de agua, respecto a la turbina, es H_0 . Se desea conocer la evolución de la potencia suministrada por la turbina en función del nivel $H(t)$ del embalse una vez que se ha abierto la válvula. Para ello supongan que el flujo en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción independiente del número de Reynolds; que la potencia extraída por la turbina es una función lineal del caudal Q de agua que circula por ella, $W = QP_0$, donde P_0 es una constante conocida; que las pérdidas localizadas a la entrada del conducto y en la válvula (una vez abierta) son K_s y K_v veces, respectivamente, la energía cinética por unidad de volumen que circula por el conducto, y, finalmente, que el difusor a la salida de la turbina no tiene pérdidas. Con estas hipótesis, se pide:

1. Ecuación que gobierna la altura $H(t)$.
2. Integren esta ecuación una vez y hallen la potencia W en función de la altura H .

Solución.

1. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento turbulento en el conducto (*conducción forzada* en el argot de las turbinas hidráulicas) son [(MF33.27) y (MF33.8)]:

$$v \frac{\pi D^2}{4} = Q, \quad (10.55)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{-\lambda v^2}{2D}, \quad (10.56)$$

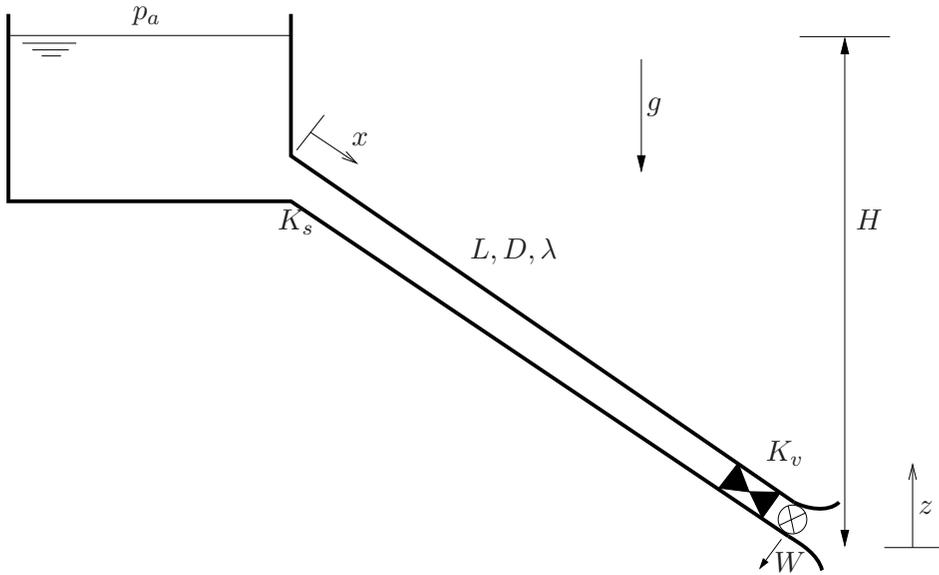


Figura 10.11: Esquema de la instalación a estudiar

donde x es la coordenada a lo largo del conducto, comenzando desde su salida del embalse y llegando hasta la válvula, z es la coordenada vertical (medida desde la turbina; ver figura 10.11)³ y Q es el caudal que circula por el conducto, que no depende de x . Como el diámetro del conducto es constante a lo largo de x , también lo será la velocidad de acuerdo con (10.55), siendo así nulo el término de variación de $v^2/2$ en (10.56). Con estas consideraciones, integrando (10.56) respecto a x , se tiene

$$\frac{dv}{dt}x + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{\lambda v^2}{2D}x = C, \quad (10.57)$$

donde C es una “constante” de integración que depende del tiempo.

En $x = 0$, $z = H - h$, donde se ha introducido la altura h desde el fondo del depósito hasta la superficie libre, que es una altura intermedia que no

³Los elementos válvula, miniturbina y difusor se consideran elementos puntuales situados al final del conducto, es decir, de tamaño despreciable en comparación con la longitud del conducto.

aparecerá en la solución final, y $p = p_1$. Para obtener esta presión al comienzo del conducto se tiene en cuenta que la presión en el fondo del depósito es, aproximadamente, $p_a + \rho gh$, pues se puede suponer que la velocidad en él es prácticamente nula (al menos muy pequeña en relación a la velocidad v en el conducto), y que la pérdida localizada en la unión estanque-conducto es $K_s \rho v^2 / 2$. Es decir,

$$p_a + \rho gh = p_1 + \rho \frac{v^2}{2} + K_s \rho \frac{v^2}{2}, \quad (10.58)$$

$$p_1 = p_a + \rho gh - \rho \frac{v^2}{2} (1 + K_s). \quad (10.59)$$

Al final del conducto, $x = L$, se tiene que $z \simeq 0$ y $p = p_2$, donde p_2 se determinará más abajo. Por tanto, sustituyendo estas dos condiciones de contorno en (10.57) y restando para eliminar la constante C , se tiene

$$\frac{dv}{dt} L + \frac{p_2 - p_a}{\rho} + \frac{v^2}{2} \left(1 + K_s + \frac{\lambda L}{D} \right) = gH. \quad (10.60)$$

En la válvula al final del conducto, justo antes de la turbina, existe una pérdida localizada de constante K_v , por lo que (ver figura 10.12)

$$p_2 + \rho \frac{v^2}{2} = p_3 + \rho \frac{v^2}{2} + K_v \rho \frac{v^2}{2}. \quad (10.61)$$

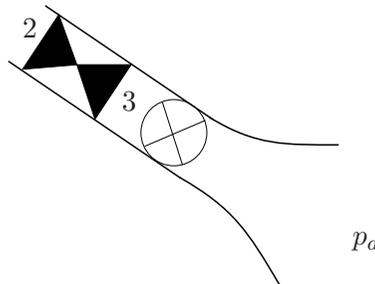


Figura 10.12: Sistema válvula-miniturbina-difusor

En la turbina, teniendo en cuenta su ecuación característica, dada en el enunciado del problema, $W = P_0Q$, donde P_0 es una constante conocida, y la ecuación de la energía en forma integral (MF23.37) aplicada a la turbina (ver figura 10.12), se tiene

$$W = Q \left(p_3 + \frac{1}{2} \rho v^2 - p_a \right) = P_0Q, \quad (10.62)$$

de donde,

$$p_3 = P_0 + p_a - \rho \frac{v^2}{2}. \quad (10.63)$$

En la expresión (10.62) se ha tenido en cuenta que detrás de la turbina existe un difusor que, si está bien diseñado, frena al líquido de forma isentrópica (sin fricción) desde la velocidad de salida en la turbina hasta pararlo, de manera que la presión de remanso a la salida de la turbina es, aproximadamente, la presión ambiente p_a . Un buen difusor es un elemento esencial en las instalaciones hidráulicas como la que se está considerando en este ejercicio, pues permite recuperar como potencia en la turbina toda la energía cinética del fluido a la salida de ésta, que puede ser una fracción muy importante de la energía total, sobre todo en las turbinas axiales. Si no existiera este difusor (o si estuviera mal diseñado y tuviese pérdidas importantes) se malgastaría toda (o parte de) la energía cinética a la salida de la turbina.

Sustituyendo, p_3 de (10.63) en (10.61),

$$p_2 = P_0 + p_a - \rho \frac{v^2}{2} + K_v \rho \frac{v^2}{2}, \quad (10.64)$$

y sustituyendo esta presión p_2 en (10.60), se llega a la siguiente ecuación para la velocidad en el conducto:

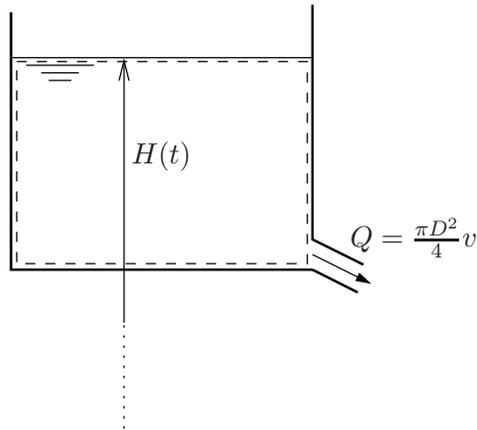


Figura 10.13: Volumen de control

$$\frac{dv}{dt}L + \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \left(K_s + K_v + \frac{\lambda L}{D} \right) = gH. \quad (10.65)$$

Esta ecuación se ha escrito con el término gravitatorio en el segundo miembro para que quede de manifiesto cómo se invierte la energía potencial (por unidad de masa) gH : una fracción se recoge como potencia en la turbina (P_0/ρ) y el resto se gasta en transitorios, o se pierde en fricción en el conducto o en pérdidas localizadas.

Para terminar de escribir una ecuación en la que sólo aparezca $H(t)$ como variable dependiente, hay que relacionar la velocidad en el conducto v con la altura H . Para ello se tiene en cuenta la ecuación de conservación de la masa en forma integral en el embalse (ve figura 10.13):

$$-A \frac{dH}{dt} = Q = v \frac{\pi D^2}{4}. \quad (10.66)$$

Es decir,

$$v = -\frac{4A}{\pi D^2} \frac{dH}{dt}. \quad (10.67)$$

Sustituyendo (10.67) en (10.66) se tiene una ecuación diferencial no lineal, de segundo orden, para $H(t)$. Sin embargo, es preferible escribir el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dv}{dt}L + \frac{P_0}{\rho} + \frac{v^2}{2} \left(K_s + K_v + \frac{\lambda L}{D} \right) - gH = 0, \quad (10.68)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\pi D^2}{4A}v, \quad (10.69)$$

que se ha de resolver con las condiciones iniciales

$$H = H_0 \quad y \quad v = 0 \quad \left(\frac{dH}{dt} = 0 \right) \quad \text{en} \quad t = 0. \quad (10.70)$$

Antes de intentar resolver estas ecuaciones es conveniente adimensionalizar. Como altura característica se toma H_0 , como velocidad característica la estacionaria en el caso de que no existiera turbina y con $H = H_0$,

$$v_c = \sqrt{\frac{2gH_0}{K_s + K_v + \frac{\lambda L}{D}}}, \quad (10.71)$$

y como tiempo característico el que resulta de la conservación de la masa (10.69). Así, definiendo las variables adimensionales

$$\eta = \frac{H}{H_0}, \quad u = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{t}{t_c}, \quad (10.72)$$

el sistema (10.68)-(10.70) se escribe

$$\alpha \frac{du}{d\tau} + \beta + u^2 - \eta = 0, \quad (10.73)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -u, \quad (10.74)$$

$$\eta = 1 \quad y \quad u = 0 \quad \text{en} \quad \tau = 0, \quad (10.75)$$

donde se ha definido el tiempo característico

$$t_c = \frac{4AH_0}{\pi D^2 v_c}, \quad (10.76)$$

con v_c dado por (10.71), y los dos únicos parámetros adimensionales de los que depende el problema son

$$\alpha = \frac{Lv_c}{t_c g H_0} = \frac{\pi D^2 L}{2AH_0 \left(K_s + K_v + \frac{\lambda L}{D}\right)}, \quad \beta = \frac{P_0}{\rho g H_0}. \quad (10.77)$$

El parámetro β es siempre menor que la unidad pues $\rho g H_0 Q$ es la máxima potencia (inalcanzable) que se podría extraer con la turbina.

2. El sistema de ecuaciones anterior se puede reducir a una sola ecuación para $u(\eta)$ haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{du}{d\eta} u = -\frac{d(u^2/2)}{d\eta}, \quad (10.78)$$

donde se ha utilizado (10.74). Definiendo

$$y = \frac{u^2}{2} \quad (10.79)$$

y sustituyendo en (10.73) y en (10.75) se obtiene la siguiente ecuación y condición inicial para $y(\eta)$:

$$\alpha \frac{dy}{d\eta} - 2y = \eta + \beta, \quad (10.80)$$

$$y(1) = 0. \quad (10.81)$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden no homogénea, que se puede obtener como la solución general de la homogénea más una solución particular, que debe ser lineal en η . Teniendo en cuenta la condición inicial, se llega a

$$y = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\beta - 1 - \frac{\alpha}{2} \right) e^{2(\eta-1)/\alpha} + \eta + \frac{\alpha}{2} - \beta \right], \quad (10.82)$$

que proporciona la velocidad en función de la altura en forma adimensional.

Para obtener la velocidad y la altura en función del tiempo habría que obtener $\eta(\tau)$ sustituyendo $u(\eta)$ de (10.82) en (10.74) y hacer la integral

numéricamente. Pero para obtener el caudal Q en función de la altura H y, por tanto, la potencia de la turbina W en función de la altura, es suficiente con la solución analítica (10.82):

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v = \frac{\pi D^2}{4} v_c \left[\left(\beta - 1 - \frac{\alpha}{2} \right) e^{2(\eta-1)/\alpha} + \eta + \frac{\alpha}{2} - \beta \right]^{1/2}, \quad (10.83)$$

con v_c dado por (10.71), α y β por (10.77), y $\eta = H/H_0$;

$$W = P_0 Q(H). \quad (10.84)$$

P.10.5 Conducto de sección variable

De un depósito de sección A se descarga un líquido de densidad ρ a través de un conducto de longitud L y sección circular lentamente variable, cuyo diámetro viene dado por $D(x) = D_0 e^{-x/L}$, $D_0 \ll L$ (ver figura 10.14). Suponiendo que el movimiento en el conducto es turbulento, con coeficiente de fricción λ independiente de la viscosidad, hallen las ecuaciones diferenciales que determinan la evolución temporal del caudal de descarga $Q(t)$ y de la altura $H(t)$. Integren una vez estas ecuaciones para hallar $Q(H)$.

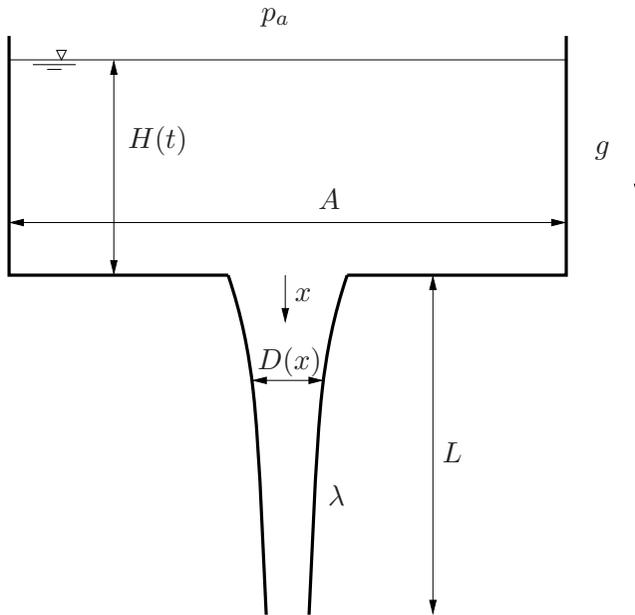


Figura 10.14: Esquema del depósito y del conducto

Solución.

Las ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento e incompresible en el conducto son [(MF33.27), (MF33.8)]:

$$v \frac{\pi D^2}{4} = Q, \quad (10.85)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad (10.86)$$

donde x es la coordenada a lo largo del conducto (ver figura 10.14), z es la coordenada vertical (medida desde el fondo del depósito, por ejemplo) y Q es el caudal que circula por el conducto, que no depende de x . Como en este ejemplo el diámetro del conducto varía con x , también lo hará la velocidad v de acuerdo con (10.85). Por este motivo, es necesario escribir la ecuación (10.86) en términos de Q , en vez de v , para que se pueda integrar con respecto a x . Sustituyendo (10.85) y su derivada temporal en (10.86), se llega a

$$\frac{4}{\pi D^2} \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4} + gz \right) = -\frac{8\lambda Q^2}{\pi^2 D^5}. \quad (10.87)$$

Integrando entre $x = 0$ y $x = L$, previa sustitución de $D(x) = D_0 e^{-x/L}$ y teniendo en cuenta que λ es constante (no depende del número de Reynolds), se tiene

$$\frac{4}{\pi D_0^2} \frac{dQ}{dt} \int_0^L e^{2x/L} dx + \left[\frac{p}{\rho} + \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4} + gz \right]_{x=0}^{x=L} + \frac{8\lambda Q^2}{\pi^2 D_0^5} \int_0^L e^{5x/L} dx = 0. \quad (10.88)$$

A la entrada del conducto, $x = 0$, z también vale cero y p viene dada por la conservación de la presión de remanso en el depósito, desde la superficie libre hasta la sección de entrada del conducto, suponiendo que son despreciables las pérdidas localizadas en la unión depósito-conducto; es decir, $p = p_a + \rho g H - \rho v_0^2/2 = p_a + \rho g H - \rho 8Q^2/(\pi^2 D_0^4)$, donde también se ha supuesto despreciable la velocidad en el depósito ($A \gg D_0^2$). A la salida de conducto, $x = L$, $z = -L$ y $p = p_a$. Sustituyendo estas condiciones de contorno

y realizando las integrales en (10.88), se llega a la siguiente ecuación diferencial para el caudal Q ,

$$\frac{2(e^2 - 1)L}{\pi D_0^2} \frac{dQ}{dt} + \frac{8Q^2}{\pi^2 D_0^4} \left[e^4 + \frac{\lambda L}{5D_0} (e^5 - 1) \right] = g(L + H). \quad (10.89)$$

Esta ecuación se ha de resolver conjuntamente con la ecuación de conservación de la masa en el depósito en forma integral, que relaciona Q con H (ver figura 10.14),

$$-A \frac{dH}{dt} = Q, \quad (10.90)$$

y con las condiciones iniciales

$$H(t = 0) = H_0, \quad Q(t = 0) = 0. \quad (10.91)$$

Como siempre, es conveniente adimensionalizar el problema. Para ello se definen las siguientes variables adimensionales de orden unidad:

$$\eta \equiv \frac{H}{H_0}, \quad \Lambda \equiv \frac{Q}{Q_c}, \quad \tau \equiv \frac{t}{t_c}, \quad (10.92)$$

$$t_c \equiv \frac{AH_0}{Q_c}, \quad Q_c \equiv \sqrt{\frac{2gH_0}{e^4 + \frac{\lambda L}{5D_0} (e^5 - 1)}} \frac{\pi D_0^2}{4}, \quad (10.93)$$

donde la altura característica H_0 proviene, evidentemente, de la condición inicial (10.91); el tiempo característico t_c de la ecuación de conservación de la masa (10.90), y el caudal característico Q_c , que en (10.93) se ha escrito como el producto de una velocidad característica y una sección característica del conducto, proviene de la ecuación de cantidad de movimiento (10.89) y representa, en orden de magnitud, el caudal estacionario que saldría por el

conducto cuando el primer término de (10.89) fuese nulo. Con estas nuevas variables, el problema (10.89)-(10.91) se escribe

$$\alpha \frac{d\Lambda}{d\tau} + \Lambda^2 = \beta + \eta, \quad (10.94)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\Lambda, \quad (10.95)$$

$$\eta(0) = 1, \quad \Lambda(0) = 0, \quad (10.96)$$

donde sólo aparecen dos parámetros adimensionales,

$$\alpha \equiv \frac{2(e^2 - 1)LQ_c}{\pi D_0^2 g H_0 t_c} = \frac{\pi D_0^2 L}{4AH_0} \frac{e^2 - 1}{e^4 + \frac{\lambda L}{5D_0} (e^5 - 1)} \quad \text{y} \quad \beta \equiv \frac{L}{H_0}. \quad (10.97)$$

El parámetro β es puramente geométrico, mientras que α está relacionado con el cociente entre el volumen del conducto y el volumen del depósito, de manera que cuando $\alpha \ll 1$ la descarga del conducto es casi estacionaria, pudiéndose despreciar en ese límite el primer término de (10.94), en primera aproximación, resultando $\Lambda \simeq \sqrt{\beta + \eta}$.

El sistema (10.94)-(10.96) es no lineal y no se puede integrar de forma analítica para obtener el caudal y la altura como funciones explícitas del tiempo. Sin embargo, es posible obtener en general (no sólo en el límite casi estacionario) el caudal en función de la altura, $\Lambda = \Lambda(\eta)$. Para ello se hace uso de la regla de la cadena y de (10.95) para escribir

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{d\Lambda}{d\eta} \frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{d\Lambda}{d\eta} \Lambda = -\frac{1}{2} \frac{dy}{d\eta}, \quad y \equiv \Lambda^2, \quad (10.98)$$

de manera que (10.94) se convierte en una ecuación lineal para $y(\eta)$,

$$-\frac{\alpha}{2} \frac{dy}{d\eta} + y = \beta + \eta. \quad (10.99)$$

La solución de esta ecuación con la condición inicial $y(1) = 0$ [ver (10.96)] se escribe

$$y = \eta + \beta + \frac{\alpha}{2} - \left(1 + \beta + \frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{2}{\alpha}(1-\eta)}, \quad (10.100)$$

o, en términos del caudal,

$$\Lambda = \frac{Q}{Q_c} = \left[\eta + \beta + \frac{\alpha}{2} - \left(1 + \beta + \frac{\alpha}{2}\right) e^{-\frac{2}{\alpha}(1-\eta)} \right]^{1/2}, \quad \eta = \frac{H}{H_0}. \quad (10.101)$$

Una vez conocido el caudal en función de la altura del líquido en el depósito, ésta se puede obtener en función del tiempo (y, por tanto, también el caudal en función del tiempo) de forma implícita mediante integración de (10.95),

$$\int_{\eta}^1 \frac{d\eta}{\Lambda(\eta)} = \tau, \quad (10.102)$$

con $\Lambda(\eta)$ dado por (10.101).

Capítulo 11

Flujo compresible y turbulento en conductos

P.11.1 Descarga de un depósito

Un depósito contiene aire ($R_g = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$, $\gamma = 1,4$) a una presión $p_0 = 10 \text{ atm}$ ($1 \text{ atm} = 1.033 \times 10^5 \text{ Pa}$) y una temperatura $T_0 = 25^\circ\text{C}$. Se quiere extraer de él un gasto $G = 0,5 \text{ kg/s}$ mediante un tubo de longitud $L = 100 \text{ m}$ que está aislado térmicamente. Suponiendo que el movimiento del aire en el tubo es turbulento, con coeficiente de fricción independiente del número de Reynolds e igual a $\lambda = 0,01$, calcular el diámetro D que debe tener el conducto. Calcular también el número de Mach a la salida del conducto, $M(L)$.

Repetir los cálculos y hallar D [y $M(L)$] para que el gasto sea $G = 0,05 \text{ kg/s}$.

Solución.

El gasto que circula por el conducto viene dado por (MF33.60)-(MF33.61)

$$\frac{G}{G^*} = \frac{G}{\rho_0 a_0 \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)}} =$$

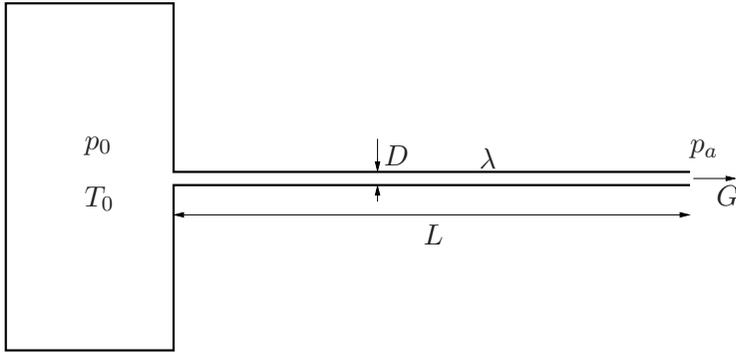


Figura 11.1: Esquema del depósito y del tubo

$$\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} M(0) \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2(0)\right]^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)} \equiv F[M(0), \gamma], \quad (11.1)$$

donde la función adimensional F está representada en función del número de Mach a la entrada del conducto, $M(0)$, para $\gamma = 1,4$ en la figura MF33.4. Despejando D^2 se tiene

$$D^2 = \frac{G}{\rho_0 a_0 \frac{\pi}{4} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{(\gamma+1)/2(1-\gamma)} F[M(0), \gamma]}. \quad (11.2)$$

Teniendo en cuenta que $\gamma = 1,4$, que, de la ecuación de estado, $\rho_0 = p_0/(R_g T_0) \simeq 12,08 \text{ kg/m}^3$, y que $a_0 = \sqrt{\gamma R_g T_0} \simeq 346,03 \text{ m/s}$, la expresión anterior se escribe

$$D(\text{m}) \simeq 0,023 \sqrt{\frac{G(\text{kg/s})}{F[M(0), 1,4]}}. \quad (11.3)$$

Como conocemos G , el diámetro quedaría fijado una vez que tuviésemos $M(0)$. Pero $M(0)$ es función de $p_0/p_a = 10$ y de $\lambda L/D$, que depende de la incógnita D ($\lambda L = 1 \text{ m}$). Por ello, procedemos de un modo iterativo: Fijado un diámetro D , se calcularía $\lambda L/D$; haciendo uso de la figura MF33.3 [o,

alternativamente, de las ecuaciones (MF33.57)-(MF33.58)], se calcularía $M(0)$ (y también el número de Mach a la salida del conducto $M(L)$); con $M(0)$ se calcularía la función F [mediante la expresión (11.1) o la figura MF33.4] que, sustituida en (11.3), nos daría un valor corregido del diámetro D . El proceso se repetiría hasta que la diferencia de los valores del diámetro obtenidos en dos iteraciones sucesivas fuese tan pequeña como el error que estemos dispuestos a aceptar. Como subproducto se obtendría $M(L)$. El proceso iterativo se realiza a continuación para $G = 0,5 \text{ kg/s}$ y $G = 0,05 \text{ kg/s}$.

1. Las sucesivas iteraciones para $G = 0,5 \text{ kg/s}$, empezando con $D = 0,01 \text{ m}$, están registradas en la tabla siguiente (dada la poca resolución de la figura MF33.3, los valores son aproximados).

Iteración	$D(\text{m})$	$\lambda L/D$	$M(0)$	$M(L)$	F
1	0,010	100	0,08	0,75	0,14
2	0,044	22,7	0,17	1	0,29
3	0,030	33,3	0,14	1	0,24
4	0,033	30,3	0,145	1	0,247
5	0,033				

El resultado final es que el diámetro del tubo debe ser de 3,3 cm y el gas sale en condiciones sónicas, $M(L) = 1$.

2. Las iteraciones para $G = 0,05 \text{ kg/s}$, empezando también con $D = 0,01 \text{ m}$, están registradas en la tabla siguiente.

Iteración	$D(\text{m})$	$\lambda L/D$	$M(0)$	$M(L)$	F
1	0,010	100	0,08	0,75	0,14
2	0,014	71,4	0,095	0,88	0,163
3	0,013	76,9	0,093	0,88	0,160
4	0,013				

Por tanto, $D \simeq 1,3 \text{ cm}$ y $M(L) \simeq 0,88$.

P.11.2 Flujo con fricción dominante

Considérese el movimiento turbulento y estacionario de un gas en un conducto de sección circular con diámetro D y longitud L . Se verifica que $\lambda L/D \gg 1$, donde λ es el coeficiente de fricción que se supone constante, de forma que el flujo puede considerarse isoterma. Se pide:

1. Escriban una ecuación donde sólo aparezca como variable dependiente el número de Mach e intégrenla para hallar $M(x)$.
2. Hallen una relación entre $M(L)$ y $M(0)$ y, a la vista de ella, escriban la condición que debe satisfacer $M^2(0) \frac{\lambda L}{D}$ para que la condición de isothermicidad sea válida.

Solución.

1. Como la fricción domina sobre la convección de cantidad de movimiento ($\lambda L/D \gg 1$), la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección axial x se escribe

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda v^2}{2D}. \quad (11.4)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de conservación de la masa y de estado,

$$\rho v = \frac{4G}{\pi D^2} = \text{constante}, \quad \frac{p}{\rho} = R_g T = \text{constante}, \quad (11.5)$$

donde se ha tenido en cuenta que tanto el gasto G como la temperatura T son constantes, y derivándolas con respecto a x , se llega a

$$\rho \frac{dv}{dx} + v \frac{d\rho}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = R_g T \frac{d\rho}{dx}. \quad (11.6)$$

Eliminando las derivadas de p y de ρ entre (11.4) y (11.6), queda la siguiente ecuación para la velocidad v

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\lambda v^3}{2R_g T D}. \quad (11.7)$$

Ahora bien, haciendo uso de la definición del número de Mach al cuadrado y de su derivada,

$$M^2 = \frac{v^2}{\gamma R_g T}, \quad \frac{dM^2}{dx} = \frac{2v}{\gamma R_g T} \frac{dv}{dx}, \quad (11.8)$$

y sustituyendo (11.7), se llega a la ecuación para el número de Mach (al cuadrado) solicitada,

$$\frac{dM^2}{dx} = \frac{\gamma \lambda}{D} (M^2)^2. \quad (11.9)$$

Integrando esta ecuación entre $x = 0$ y una posición x genérica, se tiene

$$-\frac{1}{M^2} + \frac{1}{M^2(0)} = \frac{\gamma \lambda x}{D} \quad (11.10)$$

o

$$M^2 = \frac{M^2(0)}{1 - \gamma M^2(0) \frac{\lambda x}{D}}, \quad (11.11)$$

que proporciona el número de Mach en cualquier sección x del conducto conocido su valor a la entrada. Claramente, M crece a lo largo del conducto.

2. Sustituyendo $x = L$ en (11.11),

$$M^2(L) = \frac{M^2(0)}{1 - \gamma M^2(0) \frac{\lambda L}{D}}. \quad (11.12)$$

La hipótesis de isothermicidad se basa en que el número de Mach al cuadrado sea muy pequeño a lo largo del conducto. Como el valor mayor se alcanza al

final del conducto, el flujo se puede considerar isoterma si $M^2(L) \ll 1$, que usando (11.12) se escribe

$$\frac{M^2(0)}{1 - \gamma M^2(0) \frac{\lambda L}{D}} \ll 1 \quad \text{o} \quad M^2(0) \left(1 + \gamma \frac{\lambda L}{D} \right) \ll 1. \quad (11.13)$$

Como $\lambda L/D \gg 1$ y γ es siempre de orden unidad, la condición solicitada se puede escribir como

$$M^2(0) \frac{\lambda L}{D} \ll 1. \quad (11.14)$$

Es decir, si el número de Mach al cuadrado en la entrada es lo suficientemente pequeño como para que su producto con $\lambda L/D \gg 1$ siga siendo pequeño, el número de Mach al cuadrado en la salida se mantiene pequeño y el flujo se puede considerar isoterma a lo largo del conducto (compare con MF §33.3.1).

P.11.3 Flujo supersónico

Un depósito que se puede considerar ilimitado contiene aire a 5 atm de presión y 100°C. El depósito descarga a través de una tobera convergente-divergente unida a un conducto de 10 cm de diámetro en donde se pretende que el flujo sea supersónico. La garganta de la tobera tiene un diámetro de 5 cm, el conducto está aislado térmicamente y el coeficiente de fricción en el conducto es constante y vale $\lambda = 0,05$. Se pide:

1. Número de Mach, presión y temperatura a la entrada del conducto.
2. Longitud máxima del conducto para que no se produzca una onda de choque en su interior.
3. Presión y temperatura del aire a la salida del conducto con la longitud del apartado anterior. Hallen también el gasto másico que sale por el conducto [$R_g = 287 \text{ J}/(\text{kg K})$, $1 \text{ atm} = 1,033 \times 10^5 \text{ Pa}$].

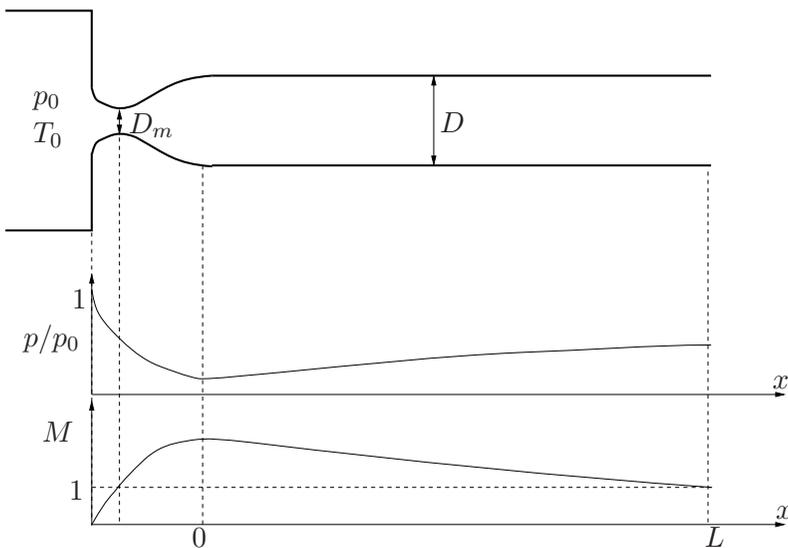


Figura 11.2: Esquemas de la instalación y de las evoluciones de la presión y del número de Mach a lo largo de la coordenada axial x

Solución.

1. En la tobera se conservan las magnitudes de remanso, pues está aislada térmicamente y suponemos despreciable la fricción al ser muy corta. Como, además, en la garganta, o sección mínima, las condiciones deben ser sónicas, pues queremos que el flujo sea supersónico en el conducto posterior, las propiedades a la salida de la sección divergente, o entrada del conducto, se pueden conocer a partir del valor de la relación entre la sección del conducto y la sección mínima,

$$\frac{A}{A_m} = \frac{D^2}{D_m^2} = 4. \quad (11.15)$$

Haciendo uso de este valor y suponiendo $\gamma = 1,4$, de la tabla MF §23.4 [o, alternativamente, de la ecuación (MF23.30)], se tiene que el número de Mach a la entrada del conducto (salida de la tobera convergente-divergente) vale

$$M(0) \simeq 2,9.$$

Por supuesto, se ha tomado la solución supersónica de las dos posibles. Con este valor, de la misma tabla [o de las ecuaciones (MF23.25) y (MF23.26)] se tiene

$$\frac{p_0}{p(0)} \simeq 34, \quad \frac{T_0}{T(0)} \simeq 2,7, \quad (11.16)$$

donde p_0 y T_0 son la presión y la temperatura de remanso, que coinciden con las del depósito pues se conservan a lo largo de la tobera. Así, con los datos del enunciado,

$$p(0) \simeq 0,147 \text{ atm}, \quad T(0) \simeq 138 \text{ K} \simeq -135^\circ\text{C}.$$

2. En un flujo supersónico con fricción en un conducto de sección constante y aislado térmicamente, el número de Mach decrece y la presión aumenta (véase el esquema en la figura 11.3). Lo máximo que puede descender el número de Mach sin que se produzca una onda de choque en el interior del conducto es hasta la unidad. Luego la longitud máxima del conducto solicitada se obtiene de la condición $M(L) = 1$. Haciendo uso de la ecuación (MF33.58),

$$\frac{\lambda L}{D} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(0)} \frac{M^2(0)}{M^2(L)} \right] + \frac{1}{\gamma M^2(0)} - \frac{1}{\gamma M^2(L)}, \quad (11.17)$$

y sustituyendo los valores de γ , $M(0)$ y $M(L)$, se obtiene

$$\frac{\lambda L}{D} \simeq 0,5,$$

que con los valores dados de λ y D proporciona la longitud máxima

$$L \simeq 1 \text{ m.}$$

3. Las relaciones entre las temperaturas a la entrada y salida del conducto y entre las presiones a la entrada y a la salida del conducto son (MF33.54)-(MF33.55):

$$\frac{T(0)}{T(L)} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(0)}, \quad (11.18)$$

$$\frac{p(0)}{p(L)} = \frac{M(L)}{M(0)} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(L)}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2(0)}}. \quad (11.19)$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente, se obtiene

$$\frac{T(0)}{T(L)} \simeq 0,45, \quad \frac{p(0)}{p(L)} \simeq 0,23;$$

es decir,

$$T(L) \simeq 307\text{K} \simeq 34^\circ\text{C}, \quad p(L) \simeq 0,64 \text{ atm}.$$

El gasto es constante a lo largo de la tobera y del conducto y viene controlado por las condiciones críticas en la garganta de la tobera. Como conocemos las condiciones a la salida del conducto, es más fácil calcularlo a partir de ellas:

$$G = \rho(L)v(L)\frac{\pi D^2}{4} = \frac{p(L)}{R_g T(L)}M(L)\sqrt{\gamma R_g T(L)}\frac{\pi D^2}{4} \simeq 2 \text{ kg/s}. \quad (11.20)$$

P.11.4 Conducción de una instalación calefactora

Para una instalación calefactora se desea disponer de una corriente de aire de gasto G y temperatura T_s constantes y conocidas. Para ello se toma aire de la atmósfera (T_a, p_a) mediante un compresor de potencia W que lo impulsa a lo largo de un conducto de longitud L y diámetro D ; se supone que el movimiento del aire en el conducto es turbulento sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga, con un coeficiente de fricción λ tal que $\lambda L/D \gg 1$. A través de la pared del conducto se intercambia un calor por unidad de área y tiempo q constante entre el exterior y el aire que circula por el conducto, de forma que la temperatura a la salida sea la T_s deseada. Se pide:

1. Distribuciones de temperatura y presión a lo largo del conducto.
2. Potencia del compresor.
3. Calor q intercambiado a través de la pared del conducto.

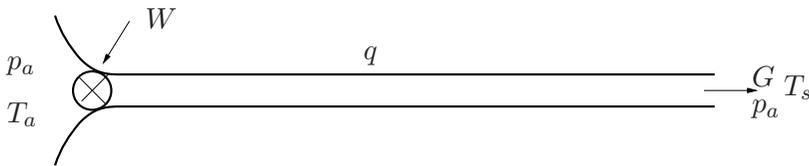


Figura 11.3: Esquema de la instalación

Solución.

1. Las ecuaciones que gobiernan el flujo turbulento y estacionario en el conducto de sección constante son:

$$\rho v \frac{\pi D^2}{4} = G, \tag{11.21}$$

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \quad (11.22)$$

$$\rho v \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{4q}{D}, \quad (11.23)$$

donde, como dice el enunciado, q es un flujo de calor constante, con unidades de energía por unidad de superficie y tiempo. Como la fricción es dominante, $\lambda L/D \gg 1$, la ecuación de cantidad de movimiento (11.22) se simplifica a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{2D}. \quad (11.24)$$

Por otro lado, como de esta ecuación se tiene que el número de Mach es del orden de (ver también MF §33.3.1),

$$M^2 \sim \frac{\Delta p}{p} \left(\frac{\lambda L}{D} \right)^{-1}, \quad (11.25)$$

se puede suponer que $M^2 \ll 1$, y la ecuación de la energía (11.23) queda

$$\rho v \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{4q}{D}. \quad (11.26)$$

Al ser $\rho v = 4G/(\pi D^2) = \text{constante}$ por la ecuación de continuidad (11.21) y teniendo en cuenta que $h = c_p T$, esta ecuación se escribe

$$\frac{G c_p}{\pi D} \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad (11.27)$$

que se puede integrar directamente, con la condición de contorno $T(x = L) = T_s$, proporcionando la distribución de temperatura a lo largo del conducto en función de q y de datos conocidos:

$$T = T_s + \frac{\pi D q}{c_p G} (x - L). \quad (11.28)$$

Para hallar la distribución de presión, sustituimos la ecuación de continuidad (11.21) y la ecuación de estado $p/\rho = R_g T$ en la ecuación de cantidad de movimiento (11.24), obteniendo

$$p \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{8\lambda G^2 R_g T}{\pi^2 D^5}. \quad (11.29)$$

Sustituyendo la distribución de temperatura (11.28) e integrando con la condición de contorno $p(x = L) = p_a$, se llega a la siguiente distribución de presión (al cuadrado) a lo largo del conducto:

$$p^2 = p_a^2 + \frac{16\lambda R_g G^2}{\pi^2 D^5} (L - x) \left[T_s - \frac{\pi D q}{2c_p G} (L - x) \right]. \quad (11.30)$$

2. La potencia que el compresor suministra al gas se puede escribir como (MF23.34)

$$W = G(h_{0s} - h_{0e}). \quad (11.31)$$

Teniendo en cuenta que la entalpía de remanso a la entrada del compresor es la atmosférica, $h_{0e} = h_a$, y que la entalpía de remanso a la salida del compresor coincide con la entalpía a la entrada del conducto,

$$h_{0s} \simeq h(0) = c_p T(0),$$

pues el número de Mach al cuadrado es pequeño en todo el conducto (y en particular a la entrada), sustituyendo en (11.31) se tiene

$$W = G c_p (T(0) - T_a) = G c_p (T_s - T_a) - \pi D L q, \quad (11.32)$$

donde se ha sustituido $T(0)$ de (11.28) con $x = 0$.

3. Una vez que tenemos las distribuciones de presión y temperatura en el conducto y la potencia del compresor, todo ello en función de q , sólo necesitamos una ecuación adicional que nos permita obtener q . Para ello tenemos en cuenta que la evolución del gas en el compresor se puede suponer isentrópica, de manera que $p(0)/\rho(0)^\gamma = p_a/\rho_a^\gamma$, o

$$\frac{T(0)^\gamma}{p(0)^{\gamma-1}} = \frac{T_a^\gamma}{p_a^{\gamma-1}}. \quad (11.33)$$

Sustituyendo $T(0)$ y $p(0)$ de (11.28) y (11.30) con $x = 0$, se llega a una ecuación donde la única incógnita es q :

$$\frac{\left(T_s - \frac{\pi DLq}{c_p G}\right)^\gamma}{\left[p_a^2 + \frac{16\lambda R_g G^2 L}{\pi^2 D^5} \left(T_s - \frac{\pi DLq}{2c_p G}\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{2}}} = \frac{T_a^\gamma}{p_a^{\gamma-1}}. \quad (11.34)$$

El signo de q que se obtenga de la solución de esta ecuación nos indicará si hay que añadir o extraer calor del tubo para conseguir la temperatura de salida deseada T_s con el gasto G .

P.11.5 Propulsor

En un propulsor como el esquematizado en la figura 11.1, se inyecta un gasto G de una mezcla de aire y combustible en condiciones de presión y temperatura conocidas (p_1, T_1) . En una cámara de combustión de sección constante A , el combustible se quema liberando una cantidad de calor total por unidad de tiempo Q ; se desprecian las pérdidas por fricción y el calor perdido por conducción a través de las paredes. Los productos resultantes de la combustión se expanden posteriormente a través de una tobera convergente-divergente de área mínima tal que $A/A_{min} = 1,3$ y área de salida A_s . Suponiendo que $\gamma = 1,4$ constante a través de todo el proceso, se pide:

1. Ecuaciones que determinan el movimiento del gas en la cámara de combustión. Relacionar, en particular, las condiciones en la sección 2 con las existentes en la entrada.
2. Suponiendo que $M_1 \ll 1$ y $Q/Gh_1 \sim (M_2/M_1)^2 \gg 1$, simplificar las relaciones anteriores.
3. Sabiendo que en la garganta se alcanzan condiciones sónicas, calcular el número de Mach de inyección M_1 para que se verifiquen las hipótesis efectuadas en el apartado anterior. Calcular también el gasto másico y las condiciones estáticas y de remanso a la entrada de la tobera (sección 2).
4. Sabiendo que la tobera descarga a una atmósfera cuya presión es $0,3p_1$, calcular:
 - (a) Área de salida para que la tobera esté adaptada.
 - (b) Área de salida para que exista una onda de choque normal a la salida.

5. Empuje del propulsor en los casos (a) y (b); comente los resultados obtenidos.

Datos:

$$\frac{Q}{\rho_1 a_1 h_1 A} = 2, \quad \rho_1 = 1,2 \text{ kg/m}^3, \quad a_1 = 340 \text{ m/s}, \quad A = 0,2 \text{ m}^2$$

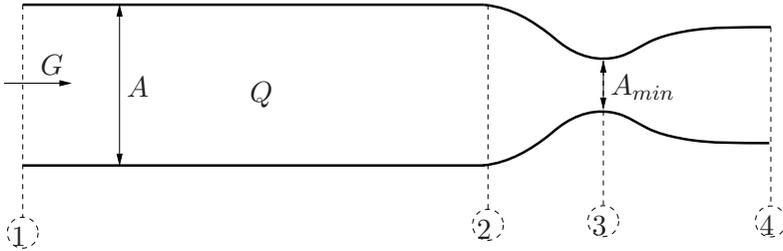


Figura 11.4: Esquema del propulsor indicando las distintas secciones

Solución.

1. Las ecuaciones que relacionan las magnitudes fluidas a la salida de la cámara de combustión (2) con las magnitudes a la entrada (1) son (MF33.72)-(MF33.74):

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 = G/A, \quad (11.35)$$

$$\rho_2 v_2^2 + p_2 = \rho_1 v_1^2 + p_1, \quad (11.36)$$

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{Q}{G}, \quad (11.37)$$

donde Q es el calor total producido por la reacción química por unidad de tiempo. Estas ecuaciones, junto con la ecuación de estado $p_2/(\rho_2 T_2) = p_1/(\rho_1 T_1)$ se pueden escribir en términos del número de Mach (MF33.75)-(MF33.79):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}, \quad (11.38)$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 + \frac{Q}{Gh_1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}, \quad (11.39)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2}, \quad (11.40)$$

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{(1 + \gamma M_2^2)^2} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} = 1 + \frac{\frac{Q}{Gh_1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}. \quad (11.41)$$

2. Teniendo en cuenta las condiciones $M_1 \ll 1$ y $Q/Gh_1 \sim (M_2/M_1)^2 \gg 1$, las ecuaciones (11.38)-(11.41) se pueden escribir, en primera aproximación, como

$$\frac{p_2}{p_1} \simeq \frac{1}{1 + \gamma M_2^2}, \quad (11.42)$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} \simeq \frac{\frac{Q}{Gh_1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}, \quad (11.43)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} \simeq \frac{M_1^2}{M_2^2} (1 + \gamma M_2^2), \quad (11.44)$$

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{1}{(1 + \gamma M_2^2)^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right) \simeq \frac{Q}{Gh_1}. \quad (11.45)$$

De esta última se tiene que

$$M_1 \simeq \frac{M_2}{1 + \gamma M_2^2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{\frac{Q}{Gh_1}}}. \quad (11.46)$$

3. Como las condiciones en la garganta son sónicas, $M_3 = 1$, de la relación de áreas $A/A_{min} = 1,3$ se puede obtener el número de Mach a la salida de

la cámara de combustión haciendo uso de la tabla MF §23.4 (suponiendo que $\gamma = 1,4$ y tomando la solución subsónica),

$$M_2 \simeq 0,52, \quad (11.47)$$

así como las relaciones entre las magnitudes fluidas en (2) y sus correspondientes magnitudes de remanso,

$$\frac{p_2}{p_{02}} \simeq 0,832, \quad \frac{\rho_2}{\rho_{02}} \simeq 0,877, \quad \frac{T_2}{T_{20}} \simeq 0,949. \quad (11.48)$$

Sabiendo que $Q/(\rho_1 a_1 h_1 A) = 2$ y teniendo en cuenta que el gasto viene dado por $G = \rho_1 v_1 A = \rho_1 a_1 M_1 A$, se puede calcular el flujo de calor adimensional $Q/(Gh_1)$ en función de M_1 ,

$$\frac{Q}{Gh_1} = \frac{Q}{\rho_1 a_1 h_1 A M_1} = \frac{2}{M_1}, \quad (11.49)$$

que sustituido en (11.46), junto con (11.47), proporciona M_1 :

$$\sqrt{M_1} \simeq \frac{M_2}{1 + \gamma M_2^2} \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}; \quad M_1 \simeq 0,075. \quad (11.50)$$

Se comprueba, por tanto, la validez de las hipótesis de partida $M_1 \ll 1$ y $Q/(Gh_1) = 2/M_1 \gg 1$.

Una vez conocido M_1 , el gasto másico se puede calcular a partir de las condiciones a la entrada (1),

$$G = \rho_1 v_1 A = \rho_1 a_1 M_1 A \simeq 6,12 \text{ kg/s}. \quad (11.51)$$

Es decir, dado un calor de reacción y las condiciones del gas a la entrada del propulsor, para que se alcancen condiciones sónicas en la garganta el número de Mach a la entrada y, por tanto, el gasto másico, están fijados. Aquí se

han realizado cálculos haciendo uso de hipótesis simplificativas que se han corroborado *a posteriori*.

Las propiedades del gas a la salida de la cámara de combustión (entrada de la tobera) se calculan en función de las respectivas propiedades a la entrada del propulsor haciendo uso de (11.42)-(11.44) y de los valores obtenidos:

$$p_2 \simeq 0,73 p_1, \quad \rho_2 \simeq 0,0287 \rho_1, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \simeq 24,15. \quad (11.52)$$

Por último, las condiciones de remanso a la entrada de la tobera se obtienen de (11.48) y (11.52):

$$p_{02} \simeq 0,872 p_1, \quad \rho_{02} \simeq 0,033 \rho_1, \quad \frac{h_{02}}{h_1} = \frac{T_{02}}{T_1} = \frac{a_{02}^2}{a_1^2} \simeq 26,67. \quad (11.53)$$

4 (a). Si la tobera está adaptada a la presión atmosférica, $p_4 = 0,3p_1$, como la presión de remanso se conserva a lo largo de la tobera,

$$\frac{p_{04}}{p_4} = \frac{p_{02}}{p_4} = \frac{0,872p_1}{0,3p_1} = 2,9, \quad (11.54)$$

se puede obtener la relación entre el área de salida y el área mínima haciendo uso de la tabla MF §23.4,

$$\frac{A_s}{A_{min}} \simeq 1,08 \quad \text{o} \quad A_s \simeq 0,83 A \simeq 0,166 \text{ m}^2. \quad (11.55)$$

donde se ha tenido en cuenta que $A/A_{min} = 1,3$. De la misma tabla se obtiene

$$M_4 \simeq 1,34. \quad (11.56)$$

4 (b). Para que exista una onda de choque normal a la salida de la tobera, el área de salida A_s debe ser tal que la presión p_4 en esa sección, obtenida

con las relaciones isentrópicas a lo largo de la tobera, coincide con la que se obtiene de las relaciones de Rankine-Hugoniot a través de la onda de choque, teniendo en cuenta que la presión detrás de la misma es igual a la presión atmosférica $0,3p_1$ y el número de Mach delante de la onda de choque coincide con el valor isentrópico M_4 en A_s . Para obtener A_s , junto con p_4 y M_4 , hay que resolver conjuntamente tres ecuaciones: las dos relaciones isentrópicas en la tobera crítica (MF23.30) y (MF23.26), junto con la relación de Rankine-Hugoniot para la presión (MF22.29). Alternativamente, uno puede proceder de forma iterativa haciendo uso de las tablas MF §22.8 y MF §23.4 como se describe a continuación. En cualquier caso, la resolución de las tres ecuaciones algebraicas no lineales citadas anteriormente requeriría el uso de un procedimiento iterativo.

Se supone de partida un valor de la sección de salida, por ejemplo $A_s/A_{min} = 1,5$. De la tabla MF §23.4 para el flujo isentrópico en la tobera se tiene que $M_4 \simeq 1,86$. Usando este valor en la tabla MF §22.8 se obtiene la relación de presión a través de la onda de choque normal, $0,3p_1/p_4 \simeq 3,87$, de donde $p_4 \simeq 0,0775p_1$. Con este valor se puede calcular $p_{02}/p_4 = 0,872p_1/0,0775p_1 \simeq 11,25$ y, de la tabla MF §23.4, un nuevo valor de la sección de salida y del número de Mach delante de la onda de choque, $A_s/A_{min} = 2,08$ y $M_4 \simeq 2,24$. Así se proseguiría hasta que los valores obtenidos convergieran con la exactitud requerida. Tras un par de iteraciones más se llega a los siguientes valores:

$$\frac{A_s}{A_{min}} \simeq 4 \quad \text{o} \quad A_s \simeq 3,08 A \simeq 0,66 \text{ m}^2 \quad (11.57)$$

$$M_4 \simeq 2,94, \quad p_4 \simeq 0,03 p_1. \quad (11.58)$$

5. Para hallar el empuje se utiliza la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral, proyectada en la dirección del movimiento del fluido x , en

un volumen de control constituido por la sección de entrada (1), la sección de salida (4) y las paredes sólidas del propulsor. Teniendo en cuenta que el proceso es estacionario, que todas las magnitudes fluidas son uniformes en cada sección y que el flujo es sin fricción, esta ecuación se puede escribir como

$$-\rho_1 v_1^2 A + \rho_4 v_4^2 A_s = (p_1 - p_1)A - (p_4 - p_1)A_s - E, \quad (11.59)$$

donde los dos primeros términos son los flujos de cantidad de movimiento en la dirección x en las secciones de entrada y salida, respectivamente, el tercer y el cuarto término son las fuerzas de presión, contra la presión frontal p_1 , en las secciones de entrada y salida, respectivamente, y el último término es el empuje. Físicamente, E es la resultante según el eje x de las fuerzas de presión, respecto a la presión p_1 , que el gas ejerce sobre las paredes sólidas del propulsor:

$$-E = - \int_{S_{\text{paredes}}} (p - p_1) n_x ds, \quad (11.60)$$

donde n_x es la componente x del vector unitario normal a la superficie (dirigido hacia afuera del volumen de control), y el signo menos en el primer miembro se debe a que el segundo miembro representa la fuerza de presión que las paredes sólidas ejercen sobre el gas, que es igual, pero de sentido opuesto, a la que el gas ejerce sobre las paredes sólidas, o empuje.

Despejando E en (11.59), teniendo en cuenta (11.51), se tiene

$$E = Gv_1 \left(1 - \frac{v_4}{v_1}\right) + Ap_1 \left(1 - \frac{p_4}{p_1}\right) \frac{A_s}{A}. \quad (11.61)$$

Los valores comunes de las magnitudes en (11.61) para los dos casos en los que se quiere calcular el empuje son:

$$G \simeq 6,12 \text{ kg/s}, \quad A = 0,2 \text{ m}^2,$$

$$p_1 = a_1^2 \rho_1 / \gamma \simeq 9,9 \times 10^4 \text{ Pa}, \quad v_1 = a_1 M_1 \simeq 25,5 \text{ m/s}.$$

Los valores de las restantes magnitudes dependen de cada caso.

5 (a). Según se ha visto en 4(a), en el caso de tobera adaptada se tiene que

$$\frac{p_4}{p_1} \simeq 0,3, \quad \frac{A_s}{A} \simeq 0,83, \quad \frac{v_4}{v_1} = \frac{M_4 a_4}{M_1 a_1} = \frac{M_4}{M_1} \sqrt{\frac{T_4}{T_{02}}} \frac{a_{02}}{a_1} \simeq 79,16,$$

donde se ha hecho uso de la tabla MF §23.4. El empuje resultante es

$$E \simeq 689 \text{ N}.$$

5 (b). En el caso de tener una onda de choque normal a la salida,

$$\frac{p_4}{p_1} \simeq 0,03, \quad \frac{A_s}{A} \simeq 3,08, \quad \frac{v_4}{v_1} \simeq 122,5,$$

y el empuje resultante es

$$E \simeq 40170 \text{ N}.$$

Se observa que el empuje es en ambos casos positivo, es decir, en la dirección del movimiento del fluido x , lo cual significa que las fuerzas de presión sobre las paredes del propulsor no son capaces de impulsarlo hacia *adelante* (hacia $x < 0$). A pesar de que el primer término del empuje en (11.61) es negativo y bastante importante, pues $v_4 \gg v_1$ en ambos casos, la presión a la entrada es lo suficientemente grande como para que su efecto, contrario al empuje, supere la reacción producida por la cantidad de movimiento a la salida, $\rho_4 v_4$,

generadora del empuje. Para hallar un empuje más significativo físicamente habría que considerar lo que hay delante de la sección de entrada (1).

En cualquier caso, la comparación entre los casos (a) y (b) muestra que el empuje es mucho más adverso cuando se produce una onda de choque a la salida, pues parte de la energía térmica generada por el calor de combustión Q se pierde también como calor en la onda de choque, perdiéndose por tanto parte del trabajo de expansión.

P.11.6 Reactor *ram jet*

La figura 11.5 muestra un esquema muy básico de un reactor del tipo “ram jet” de un avión supersónico. Cuando el avión vuela a una velocidad supersónica ($M_1 > 1$), delante del reactor se forma una onda de choque que se considerará normal. Tras atravesar la onda de choque, el aire llega al reactor, donde se produce la combustión y posterior expansión del gas. Se supone que la cámara de combustión es un cilindro de sección constante A donde, debido a un proceso de combustión, se le añade una cantidad de calor Q al gas, que alcanza condiciones sónicas a la salida ($M_3 = 1$). Posteriormente, el gas se expande en una tobera divergente de forma que a la salida se alcanza de nuevo la presión del aire ambiente ($p_4 = p_1$; éstas son las condiciones ideales de funcionamiento del reactor, cuando trabaja en las condiciones de diseño). Se desea conocer la cantidad de calor que hay que añadir al gas y el empuje del reactor. En particular, suponiendo fricción despreciable, se pide:

1. Condiciones del gas detrás de la onda de choque (a la entrada del reactor): p_2 , T_2 , M_2 , ρ_2 y v_2 .
2. Gasto G .
3. Condiciones del gas a la salida del reactor: M_4 , T_4 , ρ_4 y v_4 .
4. Condiciones del gas a la salida de la cámara de combustión: p_3 , T_3 , ρ_3 y v_3 .
5. Calor añadido Q en unidades de energía por unidad de tiempo.
6. Empuje del reactor.

Datos:

$M_1 = 2$, $p_1 = p_4 = 3 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, $T_1 = 250 \text{ K}$, $A_2 = A_3 = A = 0,4 \text{ m}^2$,
 $A_4 = 0,56 \text{ m}^2$, $\gamma = 1,4$, $R_g = 287 \text{ J/(kg K)}$, $c_p = 1000 \text{ J/(kg K)}$.

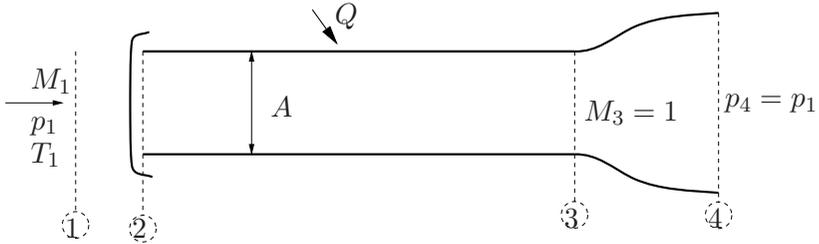


Figura 11.5: Esquema del propulsor tipo ram jet

Solución.

1. Teniendo en cuenta que la onda de choque a la entrada del reactor se considera normal, haciendo uso de la tabla MF §22.8, o de las expresiones (MF22.28)-(MF22.31), se tiene

$$\frac{p_2}{p_1} \simeq 4,5, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2} \simeq 1,687, \quad M_2 \simeq 0,5774, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \simeq 2,667, \quad (11.62)$$

por lo que

$$p_2 \simeq 1,35 \times 10^5 \text{ N/m}^2, \quad T_2 \simeq 422 \text{ K}, \quad \rho_2 \simeq 1,1 \text{ kg/m}^3, \\ v_2 = a_2 M_2 \simeq 238 \text{ m/s}, \quad (11.63)$$

en donde se ha hecho uso, además de los datos, de $a_1 = \sqrt{\gamma R_g T_1} \simeq 317 \text{ m/s}$.

2. Al ser un proceso estacionario, el gasto másico se conserva a lo largo de todo el reactor. Como acabamos de calcular las propiedades del flujo en la

sección 2, de la que también conocemos su área, se puede calcular el gasto en esa sección:

$$G = \rho_2 v_2 A_2 \simeq 106 \text{ kg/s} . \quad (11.64)$$

3. Dado que las condiciones son críticas (sónicas) en la sección 3 y el proceso en la región de expansión 3-4 es isentrópico, conservándose las magnitudes de remanso (en todo el reactor no hay fricción y está aislado térmicamente, y en 3-4 no hay generación de calor por reacción química como ocurre en 2-3), el número de Mach en la sección de salida 4 depende sólo de la relación de áreas $A_4/A_3 = 0,56/0,4 = 1,4$. De la tabla MF §23.4, o de la expresión (MF23.30), tomando la solución supersónica, resulta

$$M_4 \simeq 1,76 . \quad (11.65)$$

Por otro lado, de la misma tabla MF §23.4, o de las ecuaciones (MF23.26), (MF23.25) y (MF23, 23.22), se tiene

$$\frac{p_{04}}{p_4} \simeq 5,4 , \quad \frac{T_{04}}{T_4} \simeq 1,62 , \quad \frac{\rho_{02}}{\rho_4} \simeq 3,34 . \quad (11.66)$$

Además, se dice en el enunciado que, en las condiciones de diseño del reactor, la presión p_4 coincide con la atmosférica p_1 , por lo que de la primera de las relaciones anteriores se puede conocer la presión de remanso en la sección 4, que coincide con la presión de remanso en la sección 3:

$$p_{04} = p_{03} \simeq 1,6 \times 10^5 \text{ N/m}^2 . \quad (11.67)$$

Esta presión de remanso va a servir para calcular las otras condiciones de remanso en la sección 4, que permitirán a su vez calcular las propiedades en esa sección mediante (11.66). Para ello se tiene en cuenta que $T_{04} = T_{03}$ y

que $\rho_{04} = \rho_{03}$. Como el gasto másico en la sección crítica 3 depende sólo de estas magnitudes de remanso y de la sección A_3 (MF23.31), y el gasto ya es conocido (11.64), se puede despejar ρ_{03} :

$$G = G_3^* = \sqrt{\gamma p_{03} \rho_{03}} A_3 \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}} \simeq 106 \text{ kg/s};$$

$$\rho_{03} = \rho_{04} \simeq 0,936 \text{ kg/m}^3. \quad (11.68)$$

La temperatura de remanso en la sección 4 se calcula de la ecuación de estado, conociendo las correspondientes presión y densidad,

$$T_{04} = T_{03} = \frac{p_{03}}{R_g \rho_{03}} \simeq 595,5 \text{ K}. \quad (11.69)$$

Por tanto, haciendo uso de (11.66),

$$\rho_3 \simeq 0,28 \text{ kg/m}^3 \quad \text{y} \quad T_4 \simeq 368 \text{ K}. \quad (11.70)$$

Por último, la velocidad a la salida vale

$$v_4 = M_4 a_4 = M_4 \sqrt{\gamma R_g T_4} \simeq 677 \text{ m/s}. \quad (11.71)$$

4. Las condiciones en la sección 3 son las críticas, que se obtienen directamente de las correspondientes de remanso (MF23.28)-(MF23.29):

$$T_3 = T_{03} \frac{2}{\gamma + 1} \simeq 497 \text{ K}, \quad (11.72)$$

$$p_3 = p_{03} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \simeq 8,4 \times 10^4 \text{ N/m}^2, \quad (11.73)$$

$$\rho_3 = \rho_{03} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \simeq 0,593 \text{ kg/m}^3, \quad (11.74)$$

$$v_3 = a_3 = \sqrt{\gamma R_g T_3} \simeq 447 \text{ m/s}. \quad (11.75)$$

5. Toda la configuración anterior, con las condiciones sónicas en la sección 3, depende de que se añada al gas la cantidad justa de calor en la cámara de combustión 2-3. Como ya se conocen todas las propiedades en las secciones 2 y 3, esta cantidad de calor se calcula fácilmente de (MF33.74). En unidades de energía por unidad de tiempo, se tiene

$$Q = G(h_{03} - h_{02}) = G \left(c_p T_3 + \frac{1}{2} v_3^2 - c_p T_2 - \frac{1}{2} v_4^2 \right) \simeq 1,6 \times 10^4 \text{ kJ/s}, \quad (11.76)$$

donde se ha hecho uso de las magnitudes calculadas anteriormente y de los datos.

6. Como se hizo en (11.59), para hallar el empuje se utiliza la ecuación de cantidad de movimiento en forma integral, proyectada en la dirección del movimiento del fluido x , en un volumen de control constituido por la sección de entrada 2, la sección de salida 4 y las paredes sólidas del reactor. Teniendo en cuenta que el proceso es estacionario, que todas las magnitudes fluidas son uniformes en cada sección y que el flujo es sin fricción, esta ecuación se puede escribir como

$$-\rho_2 v_2^2 A_2 + \rho_4 v_4^2 A_4 = (p_2 - p_1) A_2 - (p_4 - p_1) A_4 - E, \quad (11.77)$$

donde los dos primeros términos son los flujos de cantidad de movimiento en la dirección x en las secciones de entrada y salida, respectivamente, el tercer y el cuarto término son las fuerzas de presión, contra la presión atmosférica p_1 , en las secciones de entrada y salida, respectivamente, y el último término es el empuje. Físicamente, E es la resultante según el eje x de las fuerzas de presión, respecto a la presión p_1 , que el gas ejerce sobre las paredes sólidas del propulsor:

$$-E = - \int_{S_{\text{paredes}}} (p - p_1) n_x ds, \quad (11.78)$$

donde n_x es la componente x del vector unitario normal a la superficie (dirigido hacia afuera del volumen de control), y el signo menos en el primer miembro se debe a que el segundo miembro representa la fuerza de presión que las paredes sólidas ejercen sobre el gas, que es igual, pero de sentido opuesto, a la que el gas ejerce sobre las paredes sólidas, o empuje.

De forma alternativa, como la cantidad $p + \rho v^2$ se conserva a través de una onda de choque normal (MF22.10), uno puede usar la sección 1 en vez de la sección 2 en la ecuación (11.77), manteniendo la misma sección $A_2 = A$,

$$-\rho_1 v_1^2 A + \rho_4 v_4^2 A_4 = (p_1 - p_1)A - (p_4 - p_1)A_4 - E. \quad (11.79)$$

Esta expresión tiene la ventaja de que los dos términos de fuerzas de presión se anulan, pues $p_4 = p_1$. Teniendo en cuenta, además, que $G = \rho_1 v_1 A = \rho_4 v_4 A_4$ y las magnitudes calculadas anteriormente, se tiene

$$E = G(v_1 - v_4) \simeq -5945 \text{ N}. \quad (11.80)$$

Obviamente, el empuje es negativo, pues va en sentido opuesto al del flujo dentro del reactor. Se deja como ejercicio para el lector comprobar que el empuje calculado a partir de (11.77) es el mismo (ésta es una forma de comprobar si uno se ha equivocado en los cálculos numéricos).

P.11.7 Flujo supersónico con intercambio de calor

Un depósito de volumen V aislado térmicamente, que contiene aire inicialmente a presión p_{0i} y densidad ρ_{0i} , descarga al vacío a través de una tobera convergente-divergente conectada a un conducto de longitud L y diámetro D (ver figura 11.6). A través de las paredes del conducto se extrae un calor Q por unidad de masa de modo que la velocidad del aire permanece constante a lo largo del conducto. El movimiento del aire en el conducto es turbulento sin influencia de la viscosidad en la pérdida de carga. Se pide:

1. Ecuaciones que determinan el movimiento del aire en el conducto. El volumen del conducto-tobera es mucho menor que el del depósito y, por tanto, el movimiento es, en primera aproximación, casi estacionario.
2. Distribución de temperatura, presión y densidad a lo largo del conducto en función de la velocidad, densidad y condiciones de contorno a la entrada.
3. Calcular, a partir de estos resultados, el número de Mach a la entrada si el movimiento en el conducto fuese subsónico.
4. Sabiendo que $A/A_g = 2$ (A_g es el área de la garganta), calcular el máximo número de Mach que puede haber en la entrada del conducto, suponiendo que la solución es subsónica en la tobera. ¿Cuál es el valor límite de $\lambda L/D$ para que la solución sea subsónica?
5. Calcular el gasto, el calor Q extraído, la velocidad y la densidad en el conducto.
6. Suponiendo que $\lambda L/D$ es menor que el límite calculado en el apartado 4 y, por tanto, el movimiento es supersónico, calcular:

- (a) Número de Mach, presión, densidad y velocidad a la entrada del conducto.
- (b) Gasto que circula y calor añadido al conducto.
- (c) Condiciones del gas a la salida.

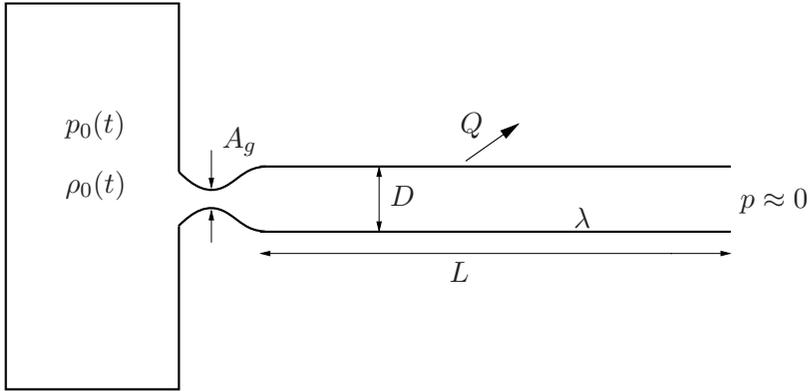


Figura 11.6: Esquema de la instalación

Solución.

1. El movimiento en el conducto viene gobernado por la ecuación de continuidad, que al ser estacionario y el conducto de sección constante, se escribe (MF33.37)

$$\rho v = \text{constante} = \frac{G}{A}, \tag{11.81}$$

donde $A = \pi D^2/4$ es la sección del conducto y G el gasto másico; por la ecuación de cantidad de movimiento (MF33.38),

$$\frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda v^2}{2D}, \tag{11.82}$$

donde λ es el coeficiente de fricción y x es la coordenada a lo largo del conducto, comenzando al final de la tobera convergente-divergente, y por la ecuación de la energía (MF33.70),

$$\frac{\partial(h + v^2/2)}{\partial x} = -Q_x, \quad (11.83)$$

donde Q_x es el calor que se elimina a través de las paredes del conducto por unidad de longitud, con unidades de energía por unidad de masa y longitud. A estas ecuaciones hay que añadirles las ecuaciones de estado $p/\rho = R_g T$ y $h = c_p T$.

2. Como la velocidad del gas es constante a lo largo del conducto, la ecuación de continuidad (11.81) nos dice que también lo es la densidad. Por tanto, ρ y v en el conducto vienen dadas por sus respectivos valores a la entrada $x = 0$ del conducto:

$$\rho = \rho(0), \quad v = v(0). \quad (11.84)$$

El primer término de la ecuación de cantidad de movimiento (11.82) se anula por ser v constante. Como también lo son el segundo miembro de la ecuación y la densidad ρ , se puede integrar fácilmente, proporcionando una distribución lineal para la presión a lo largo del conducto:

$$p = p(0) - \frac{\lambda \rho v^2}{2D} x. \quad (11.85)$$

Por último, la distribución de temperatura en el conducto se obtiene de la ecuación de estado y (11.85), teniendo en cuenta que la densidad es constante:

$$T = \frac{p}{R_g \rho} = T(0) - \frac{\lambda v^2}{2D R_g} x. \quad (11.86)$$

Se tienen por tanto las distribuciones de todas las magnitudes fluidas a lo largo del conducto en función de sus respectivos valores en $x = 0$.

3. La condición de contorno a la salida, $x = L$, del conducto permite obtener el valor de al menos una de las magnitudes fluidas a la entrada del conducto. Como éste descarga al vacío, y como la presión del conducto jamás se podría ajustar a la condición de salida $p(L) = 0$, en su lugar, si el flujo es subsónico en el conducto, se tiene la condición de contorno $M(L) = 1$. Esta condición, junto con las soluciones obtenidas en el apartado anterior, permiten obtener el número de Mach a la entrada del conducto $M(0)$. Para ello, se utiliza la definición del número de Mach para un gas perfecto [$M^2 = v^2/(\gamma p/\rho)$] y se hace uso de (11.84)-(11.85),

$$\begin{aligned}
 1 = M^2(L) &= \frac{v^2(L)}{\gamma \frac{p(L)}{\rho(L)}} = \frac{\rho(0)v^2(0)}{\gamma \left(p(0) - \frac{\lambda \rho(0)v^2(0)}{2D} L \right)} \\
 &= \frac{\rho(0)v^2(0)}{\gamma p(0) \left(1 - \frac{\gamma \lambda L}{2D} \frac{\rho(0)v^2(0)}{\gamma p(0)} \right)} = \frac{M^2(0)}{1 - \frac{\gamma \lambda L}{2D} M^2(0)}. \tag{11.87}
 \end{aligned}$$

Despejando se obtiene

$$M(0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma \lambda L}{2D}}}. \tag{11.88}$$

4. El número de Mach anterior a la entrada del conducto, que es siempre menor que la unidad por la condición de contorno que se ha impuesto a la salida, tiene un máximo dado por la condición de que el número de Mach en la garganta de la tobera nunca puede superar la unidad. Este máximo se obtiene de la relación entre el área del conducto y el área de la garganta. Sabiendo que $A/A_g = 2$, de la tabla MF §23.4, tomando la solución subsónica, se tiene que

$$M_{max}(0) \simeq 0,306. \tag{11.89}$$

Este límite impone una restricción sobre el parámetro $\lambda L/D$ del conducto:

$$M_{max}(0) \simeq 0,306 \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma \lambda L}{2D}}}, \quad \frac{\lambda L}{D} \geq \frac{2}{\gamma} \frac{1 - M_{max}^2(0)}{M_{max}^2(0)} \simeq 13,8, \quad (11.90)$$

donde se ha usado $\gamma = 1,4$. Si $\lambda L/D < 13,8$, aproximadamente, el flujo en el conducto no puede ser subsónico, sino que será supersónico, y la condición de contorno $M(L) = 1$ deja de ser válida (ver apartado 6 más abajo).

5. El gasto másico se puede obtener de las condiciones del gas a la entrada del conducto, teniendo en cuenta que las magnitudes de remanso se conservan a lo largo de la tobera y son iguales a las condiciones que existen en el depósito. Haciendo uso de (MF23.24), se tiene

$$G = \rho(0)v(0)A = \sqrt{\gamma \rho_0 p_0} AM(0) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0)\right)^{\frac{\gamma+1}{2(1-\gamma)}}, \quad (11.91)$$

donde $M(0)$ viene dado por (11.88), mientras que p_0 y ρ_0 son la presión y la densidad en el depósito, respectivamente.

El calor que se ha de eliminar del conducto se obtiene de la ecuación (11.83). Quitando el término de variación de la energía cinética, pues v es constante a lo largo del conducto, y utilizando la ecuación de estado para la entalpía en términos de la presión y la densidad, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\lambda v^2}{2D} = -Q_x, \quad (11.92)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de cantidad de movimiento (11.82) con ρ y v constantes. La ecuación anterior nos dice que el calor eliminado por unidad de longitud Q_x es también constante a lo largo del conducto, luego $Q = Q_x L$. Es decir,

$$Q = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\lambda L v^2}{2D}. \quad (11.93)$$

Para terminar de obtener Q , se ha de calcular también $v = v(0)$. Esta velocidad se puede obtener, junto con $\rho = \rho(0)$, haciendo uso de la conservación de las magnitudes de remanso en la tobera,

$$\frac{\rho_0}{\rho(0)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0)\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad (11.94)$$

junto con la expresión del gasto (11.91). De la misma manera, se puede obtener $p(0)$:

$$\frac{p_0}{p(0)} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2(0)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (11.95)$$

Todas las magnitudes anteriores son funciones del tiempo a través de las condiciones en el depósito, $p_0(t)$ y $\rho_0(t)$. Para obtener esta evolución temporal hay que resolver las ecuaciones que gobiernan la descarga del depósito, que es isentrópica al estar el depósito aislado térmicamente [ecuaciones (MF23.42) y (MF23.45)]:

$$V \frac{d\rho_0}{dt} = -G, \quad (11.96)$$

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_{0i}}{\rho_{0i}^\gamma}, \quad (11.97)$$

$$p_0(t = 0) = p_{0i}, \quad \rho_0(t = 0) = \rho_{0i}, \quad (11.98)$$

donde G viene dado por (11.91) y (11.88).

6 (a). Si no se cumple la condición (11.90), es decir, si $\lambda L/D < 13,8$, el flujo en el conducto es supersónico. Esto quiere decir que el flujo en la garganta

de la tobera es necesariamente sónico y el número de Mach a la entrada del conducto vale (teniendo en cuenta que $A/A_g = 2$ y tomando la correspondiente solución supersónica de la tabla MF §23.4)

$$M(0) \simeq 2,2. \quad (11.99)$$

De la misma tabla se obtienen las magnitudes fluidas a la entrada del conducto en función de las correspondientes magnitudes de remanso, que coinciden con las condiciones en el depósito:

$$\frac{p(0)}{p_0} \simeq 0,0935, \quad \frac{\rho(0)}{\rho_0} \simeq 0,184, \quad (11.100)$$

$$v^2(0) = v^2 = M^2(0)\gamma \frac{p(0)}{\rho(0)} \simeq 1,57 \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (11.101)$$

6 (b). El gasto es el crítico (MF23.27):

$$G = G^* = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} A_g \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(1 - \gamma)}} \simeq 0,57 \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} A_g. \quad (11.102)$$

Como la solución para el flujo en el conducto dada en los apartados 1 y 2 es independiente de que el flujo sea subsónico o supersónico, el calor a eliminar coincide con (11.93), pero ahora con v dado por (11.101).

6 (c). Las condiciones del gas a la salida del conducto se obtienen de la solución dada en el apartado 2:

$$\rho(L) = \rho(0), \quad p(L) = p(0) - \frac{\lambda \rho(0) v^2(0)}{2D} L, \quad (11.103)$$

$$T(L) = \frac{p(0)}{R_g \rho(0)} - \frac{\lambda v^2(0)}{2DR_g} L, \quad v(L) = v(0), \quad (11.104)$$

con las condiciones a la entrada dadas por (11.100)-(11.101). Por último, el número de Mach a la salida vale [ver (11.87)]

$$M^2(L) = \frac{v^2(L)}{\gamma \frac{p(L)}{\rho(L)}} = \frac{\rho(0)v^2(0)}{\gamma \left(p(0) - \frac{\lambda \rho(0)v^2(0)}{2D} L \right)} \simeq \frac{1,426}{0,647 - \frac{\lambda L}{D}}. \quad (11.105)$$

Este número de Mach tiene que ser mayor que la unidad para que la presente solución sea válida. Esto limita la validez de la solución anterior a $\lambda L/D < 0,647$, aproximadamente, pues en caso contrario $M(L)$ no sólo sería menor que la unidad, sino que no tendría sentido al ser imaginario. Si $0,647 < \lambda L/D < 13,8$, aproximadamente, el flujo sería supersónico detrás de la garganta de la tobera pero en alguna sección del conducto, o de la parte divergente de la tobera, se produciría una onda de choque normal. La nueva solución para estas características del conducto se obtendría ajustando la posición de la onda de choque mediante las relaciones de Rankine-Hugoniot junto con la condición a la salida del conducto $M(L) = 1$.

