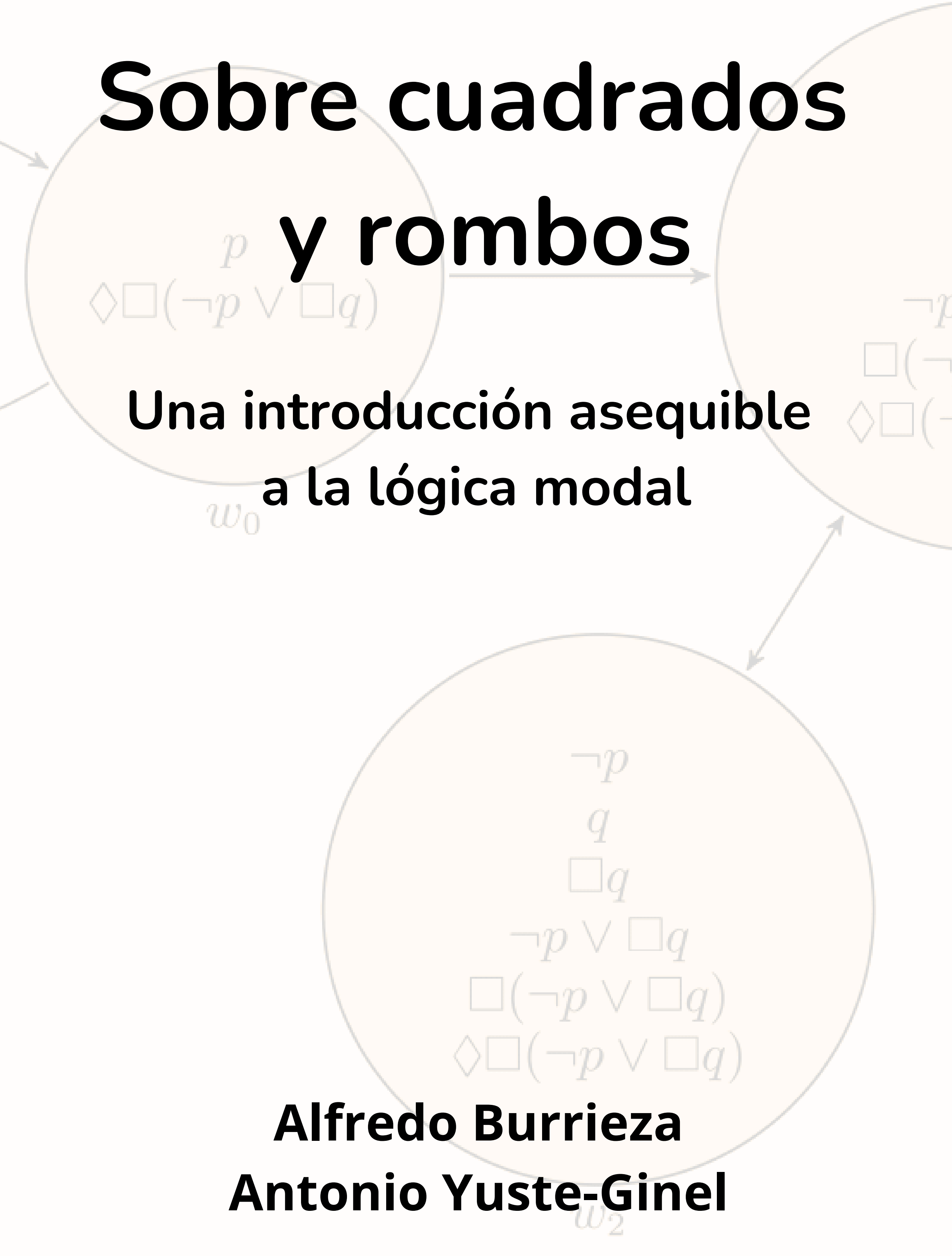
Sobre cuadrados y rombos

Una introducción asequible a la lógica modal



Alfredo Burrieza
Antonio Yuste-Ginel

Sobre cuadrados y rombos

Una introducción asequible a la lógica modal

Noviembre de 2024

Alfredo Burrieza (Universidad de Málaga)

Antonio Yuste-Ginel (Universidad Complutense de Madrid)

Para la comunicación de cualquier errata, error o comentario, no dude en escribirnos a burrieza@uma.es y antoyust@ucm.es.

© UMA Editorial. Universidad de Málaga
Bulevar Louis Pasteur, 30 (Campus de Teatinos) - 29071 Málaga
www.umaeditorial.uma.es

Diseño y maquetación: Los autores

ISBN: 978-84-1335-389-0

Índice general

PRÓLOGO

PRESENTACIÓN

Este libro nace de una pasión y una creencia. La pasión es la que nos une al tema sobre el que versa el libro: la lógica modal. La creencia consiste en que, a pesar de contar con excelentes tratados sobre el tema en nuestra lengua (véase, por ejemplo la obra de Hughes y Cresswell, 1973, traducción del original inglés (Hughes y Cresswell, 1968), o la de Jansana, 1990), nos parece que el público puede beneficiarse de un libro de texto que reúna las siguientes características (además de la ya mencionada del idioma):

(i) estar disponible en acceso abierto,

(ii) ser introductorio, en el sentido de comprensible para cualquier persona con un trasfondo mínimo en lógica,

(iii) ser didáctico,

(iv) cubrir diversos métodos de demostración y

(v) ser breve.

Los tres primeros aspectos justifican doblemente la elección del término 'asequible' en el subtítulo: pretendemos que la obra resulte asequible tanto económica como intelectualmente.

Además, el libro aspira a dar una visión interdisciplinar sobre el tema. Para ello, hemos intentado no descuidar ninguno de los dos pilares que consideramos que hacen de la lógica modal una tentación intelectual: su rigurosidad técnica (matemática) y su motivación teórica (tanto filosófica-lingüística como computacional).

ESTRUCTURA Y CONTENIDO

Ahora bien, ¿qué incluye este libro específicamente? En pocas palabras, podemos decir que se trata de un manual introductorio sobre *lógica modal básica* entendiendo por esta la extensión de la lógica proposicional clásica con un operador de necesidad (el cuadrado, $\Box$) y uno de posibilidad (el rombo, $\Diamond$)[1]. En lo que respecta a la semántica, nos centramos exclusivamente en la *semántica relacional* o *semántica de mundos posibles*, atribuida a Kripke y Hintikka, dejando de lado otras menos populares como las de vecindades (*neighborhood semantics*) o la algebraica. La sintaxis y la semántica de la lógica modal básica se exponen en el capítulo 2. Además, ofrecemos una panorámica de tres métodos de demostración distintos para la lógica modal básica: el método axiomático (capítulo 3), los *tableaux* (capítulo 4) y la deducción natural (capítulo 5). Todos estos capítulos están escritos con una intención didáctica e introductoria. Están pensados para un usuario que no conozca la lógica modal antes de estudiarlos y que, después de hacerlo, haya interiorizado el lenguaje y la semántica modal básica y sea competente en la aplicación de al menos uno de los tres métodos propuestos para estudiar la validez de argumentos modales. Al final del libro podrá encontrarse un apéndice con las soluciones a los ejercicios propuestos de cara a fomentar el aprendizaje autónomo.

Cabe mencionar aquí que existe una relativa independencia entre algunas partes de este manual que pueden orientar tanto a las personas que se acerquen a él con fines autodidácticos como a aquellas que pretendan usarlo como material de clase. La dependencia temática entre capítulos está representada en la figura 1, donde línea discontinua expresa una dependencia meramente conceptual, mientras que la línea continua es conceptual y técnica.

¿QUÉ NECESITAS SABER ANTES DE EMPEZAR?

El libro está razonablemente autocontenido. No obstante, creemos que las personas familiarizadas con las siguientes nociones podrán avanzar con mucha mayor facilidad en su lectura, además de beneficiarse más de la misma:

- Conjuntos, relaciones y funciones (véase por ejemplo la Primera Parte de Badesa et al., 2019, el libro de de Lorenzo, 1972 o el de Lipschutz, 1991).
- Lenguaje y semántica de la lógica proposicional (véanse, por ejemplo el capítulo II de Deaño, 1975 o la Segunda Parte de Badesa et al., 2019).

[1] Aprovechamos para notar que nuestro título está inspirado en del libro de Zach, 2019 (en inglés).

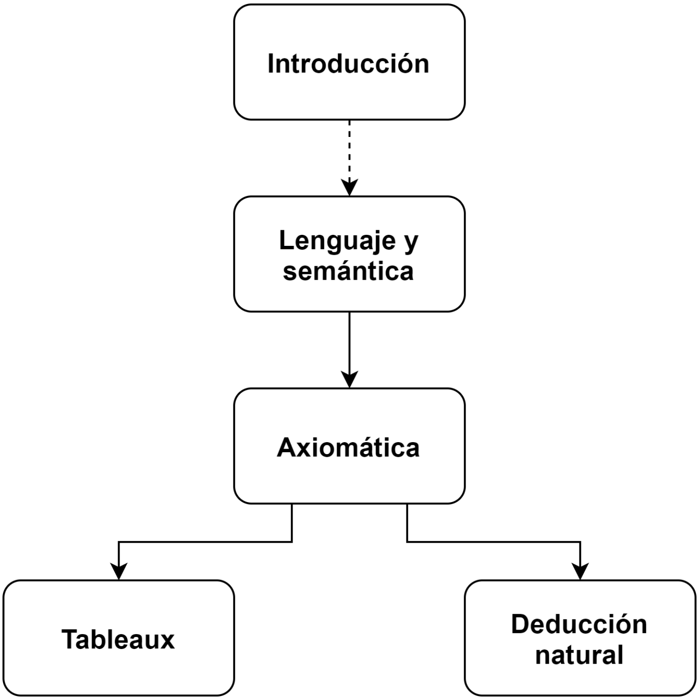


Figura 1: Diagrama de dependencia entre los capítulos del libro. La línea discontinua representa dependencia conceptual, mientras que la línea continua es conceptual y técnica.

Cualquier curso introductorio sobre lógica formal cubre normalmente con creces estos contenidos. En la siguiente sección revisamos brevemente ambos puntos. Áunque tampoco sea indispensable, la lectura de los capítulos 4 (sobre tableaux) y 5 (sobre deducción natural) se sustentarían mejor en el conocimiento de ambas técnicas de cálculo a nivel proposicional (véanse, por ejemplo, el capítulo VI de Garrido, 2001 para tableaux proposicionales y el capítulo II.3 de Deaño, 1975 para deducción natural proposicional).

PRELIMINARES FORMALES

Una convención importante, a lo largo del manual, es que los conceptos que vamos a introducir aparecerán en negrita.

Conjuntos y operaciones

Intuitivamente, **un conjunto** es una colección cualquiera de objetos. Por ejemplo, $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{2, 3'56, 3\}$, $\{\Box, \Diamond, \triangle\}$ y $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ son conjuntos. Una característica esencial de los conjuntos es que tanto las repeticiones de elementos como el orden de los mismos son irrelevantes a la hora de identificarlos. Así, $\{a, b\} = \{a, b, a\} = \{b, a, b\}$. Usamos el símbolo de **pertenencia** '$\in$' para indicar que un objeto pertenece a un conjunto, por ejemplo $a \in \{a, b, c, ..., z\}$ y $45 \in \mathbb{N}$. Abreviaremos $a_1 \in A, ..., a_n \in A$ como $a_1, ..., a_n \in A$. Por lo general, tachamos un símbolo cuando queremos afirmar la negación de su significado. Así, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ significa que $\frac{1}{2}$ no pertenece al conjunto de los números naturales. Decimos que un conjunto A **es subconjunto de un conjunto** B (en símbolos $A \subseteq B$) si y solo si (**sii**, de ahora en adelante) para cualquier objeto x, $x \in A$ implica $x \in B$. Además, decimos que A **es subconjunto propio de un conjunto** B (en símbolos $A \subset B$) sii $A \subseteq B$ pero $B \nsubseteq A$.

Un conjunto A se puede definir por **extensión**, es decir, enumerando sus elementos como hemos hecho hasta ahora, por ejemplo $A = \{a, b, c, d\}$, o por **intensión**, es decir, tomando un conjunto de referencia más grande C y señalando una propiedad que todos y sólo los elementos de A cumplen. Por ejemplo, si C es el alfabeto latino y queremos declarar que V es el conjunto de todas las vocales escribiríamos: $V = \{x \in C \mid \text{x es una vocal}\}$ (leído "V es igual al conjunto de todas las x en C tales que x es una vocal").

Dados $A, B \subseteq C$, usaremos las siguientes operaciones entre conjuntos, con su definición habitual:

- $A \cup B = \{x \in C \mid x \in A$ o bien $x \in B\}$ (**unión**).
- $A \cap B = \{x \in C \mid x \in A$ y además $x \in B\}$ (**intersección**).
- $A \setminus B = \{x \in C \mid x \in A$ pero $x \notin B\}$ (**diferencia**).
- $\wp(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ (**conjunto potencia**).

Nótese que los conjuntos pueden ser **finitos o infinitos**. Decimos que un conjunto infinito es **numerable** sii sus elementos pueden ponerse en correspondencia uno-a-uno con los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Además del propio $\mathbb{N}$, otro conjunto numerable que usaremos de forma frecuente en este libro es el de los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Tuplas y relaciones

Aunque los conjuntos sean una estructura de datos donde el orden es irrelevante, podemos jugar con el hecho de que son iterables (es decir, el hecho de que podemos formar conjuntos de conjuntos) para modelar orden. Así, dados dos objetos a y b, el **par ordenado** $\langle a, b\rangle$ se define como $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Generalizamos esta definición y definimos la n-**tupla ordenada** de los elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ como el par $\langle a_1, \langle a_2, ...\langle a_{n-1}, a_n\rangle\rangle\rangle$. Dados dos conjuntos $A, B \subseteq C$ definimos su **producto cartesiano**, denotado mediante $A \times B$, como el conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer elemento está en A y su segundo elemento está en B, formalmente:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \in B\}.$$

A veces nos será útil iterar un número determinado de veces la operación que acabamos de definir. Dado un conjunto A, denotamos mediante A^n su producto cartesiano repetido n veces, es decir

$$A^n = A \overbrace{\times ... \times}^{\text{n veces}} A.$$

Una **relación binaria** R **de** A **en** B es cualquier conjunto de pares ordenados cuyos primeros elementos pertenecen a A y cuyo segundos elementos pertenecen a

B. Equivalentemente, una relación binaria R de A en B es cualquier subconjunto del producto cartesiano de A y B (en símbolos, $R \subseteq A \times B$). En ocasiones abreviamos $\langle x, y \rangle \in R$ como xRy (**notación infija**).

Funciones

Una **función** es cualquier relación R tal que no contiene dos pares distintos con su primer elemento repetido. Más formalmente, una relación $R \subseteq A \times B$ es una función sii para cualesquiera $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ tenemos que $\langle x, y_1 \rangle \in R$ y $\langle x, y_2 \rangle \in R$ implica que $y_1 = y_2$. Sea $f \subseteq A \times B$ una función, definimos su **rango** y su **dominio** como sigue:

- $Dom(f) = \{x \in A \mid$ existe un $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in R\}$.
- $Rg(f) = \{y \in B \mid$ existe un $x \in A$ tal que $\langle x, y \rangle \in R\}$.

Decimos que **una función va de A a B**, en símbolos $f : A \longrightarrow B$ sii $Dom(f) = A$ y $Rg(f) \subseteq B$.

Lógica clásica proposicional

La lógica proposicional clásica estará en la base de todas las lógicas modales que estudiaremos. Definimos aquí los aspectos fundamentales de su sintaxis y su semántica.

Lenguaje proposicional

El **lenguaje proposicional**, denotado mediante $\mathcal{L}_P$, se construye como sigue. Como es habitual, separamos la definición del lenguaje en dos partes: su alfabeto (los ladrillos básicos) y su gramática (las instrucciones para formar expresiones en dicho lenguaje):

Alfabeto de $\mathcal{L}_P$

1. Un conjunto infinito numerable

$$\mathsf{At} = \{p, q, r, s, \ldots p_1, q_1, r_1, s_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, s_n, \ldots\}$$

de **variables proposicionales** o **átomos**.

2. Los **operadores booleanos** clásicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ (la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional).

3. Los **símbolos auxiliares**: (,).

Fórmulas de $\mathcal{L}_P$

Una fórmula de $\mathcal{L}_P$ (o **fórmula proposicional**) es una sucesión finita de elementos del alfabeto de $\mathcal{L}_P$ generada exclusivamente por aplicaciones de las siguientes reglas:

1. Todo elemento de At es una fórmula proposicional.

2. Si A es una fórmula proposicional, entonces $\neg A$ es una fórmula proposicional.

3. Si A y B son fórmulas proposicionales, entonces $(A \circ B)$ es una fórmula proposicional (siendo $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$).

Ejemplo 1 *Son fórmulas de $\mathcal{L}_P$: $\neg\neg p$, $(p \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p))$ y $((p \wedge q) \vee p)$.*
No son fórmulas de $\mathcal{L}_P$: $(A \wedge p)$ (porque A no es una fórmula véase la observación 1), $p \rightarrow p$ (porque faltan paréntesis) y $(p \leftrightarrow (q \wedge))$ (porque debería haber una fórmula a la derecha de $\wedge$ pero no la hay).

De forma equivalente, el lenguaje proposicional puede definirse de manera más sucinta usando la extendida **notación de Backus-Naur**[2]:

$$A ::= p \mid \neg A \mid (A \wedge A) \mid (A \vee A) \mid (A \rightarrow A) \mid (A \leftrightarrow A)$$

donde $p \in$ At.

Usaremos **convenciones habituales sobre la eliminación de paréntesis** al escribir las fórmulas, como:

- la omisión de paréntesis externos. Escribiremos $p \rightarrow (q \wedge r)$ y no $(p \rightarrow (q \wedge r))$, por ejemplo.

- eliminación de paréntesis en cadenas conjuntivas y en cadenas disyuntivas. Así, anotaremos $p \wedge q \wedge r$, $p \vee q \vee r \vee \neg q$, etc.[3]

[2]Esta notación fue introducida por Backus et al., 1960 y refinada más tarde por Naur, 1961. Véase Wikipedia, 2023 para una explicación en castellano sobre la misma.

[3]Nótese que esta convención introduce cierta ambigüedad sintáctica (e.g., la cadena $p \wedge q \wedge r$ puede denotar a la fórmula $((p \wedge q) \wedge r)$ o bien a la fórmula $(p \wedge (q \wedge r))$. Sin embargo, esta ambigüedad es inofensiva porque ambas fórmulas se mostrarán equivalentes desde un punto de vista semántico.

Observación 1 (Fórmulas vs. esquemas) *Como es bastante habitual, estamos usando letras mayúsculas del alfabeto latino (A, B, C, etc.) para referirnos a fórmulas cualesquiera, pero tales expresiones no son fórmulas; no están definidas en el alfabeto de $\mathcal{L}_P$. Estamos hablando en un metalenguaje. Esas letras mayúsculas son* ***metavariables*** *y, al igual que las expresiones construidas a partir de ellas con ayuda de los operadores lógicos, se denominan* ***esquemas de fórmulas.*** *Un esquema tal representa el conjunto infinito (numerable) de fórmulas que comparten la forma indicada por el esquema. Así, $A \to (A \wedge B)$ representa fórmulas como $p \to (p \wedge q)$, $\neg p \to (\neg p \wedge (q \wedge r))$, e incluso fórmulas como $p \to (p \wedge p)$, etc. Estos casos concretos de fórmulas son las* ***instancias*** *del esquema. Como podemos comprobar en nuestro ejemplo, no se requiere que las metavariables como A y B se refieran necesariamente a fórmulas distintas. Lo que sí se requiere para crear instancias de un esquema es que una misma metavariable se sustituya por la misma fórmula en todas las apariciones de la metavariable en el esquema. Esto es lo que se llama* ***sustitución uniforme****. Advirtamos que, excepcionalmente, en la notación de Backus-Naur no se usa el concepto de sustitución uniforme; es por ello que hemos usado una sola metavariable, como A, la cual no tiene por qué sustituirse por la misma fórmula en todas sus apariciones en un esquema.*

Semántica proposicional

Con respecto a la semántica, las fórmulas proposicionales se interpretan usando **funciones de interpretación**, también llamadas **funciones de valoración**, es decir, funciones del tipo:

$$I : \mathsf{At} \longrightarrow \{0, 1\}$$

que intuitivamente representan qué átomos son verdaderos (los $p \in \mathsf{At}$ tales que $I(p) = 1$) y cuáles son falsos (los $p \in \mathsf{At}$ tales que $I(p) = 0$). Una manera de entender estas funciones es como descripciones exhaustivas del mundo: para cada hecho simple p (e.g., "llueve en Bilbao" o "hace sol en Málaga"), una interpretación I nos indica si p es el caso o no.

¿Qué ocurre con el resto de fórmulas (aquellas que no son átomos)? Podemos interpretar cada fórmula $A \in \mathcal{L}_P$ en una interpretación dada $I : \mathsf{At} \longrightarrow \{0, 1\}$ usando las siguientes cláusulas generales basadas en los operadores que intervienen en la fórmula. Para ello, definimos la **relación de verdad** $\models$, que formalmente es la menor relación binaria entre interpretaciones y fórmulas que satisface las siguientes cláusulas (donde $I \models A$ significa que A es verdadera en I):

$I \models p$	sii	$I(p) = 1$ (para cualquier $p \in$ At)
$I \models \neg A$	sii	$I \not\models A$
$I \models A \wedge B$	sii	$I \models A$ y $I \models B$
$I \models A \vee B$	sii	$I \models A$ o $I \models B$
$I \models A \to B$	sii	$I \not\models A$ o $I \models B$
$I \models A \leftrightarrow B$	sii	$I \models A$ sii $I \models B$

Además, decimos que una fórmula $A \in \mathcal{L}_P$ es proposicionalmente **satisfacible** sii existe al menos una interpretación I tal que $I \models A$. Dualmente, decimos que A es proposicionalmente **válida** (también llamada **tautología**) sii cualquier interpretación I es tal que $I \models A$. Cuando A es una tautología, anotamos simplemente $\models A$.

A es **consecuencia tautológica** de un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ (con $n \geq 0$) de $\mathcal{L}_P$ (en símbolos: $\Gamma \models A$) sii para toda interpretación I en la que todas las fórmulas de Γ son verdaderas en I, A es verdadera en I; equivalentemente, $\Gamma \models A$ sii $\models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$.

Rudimentos de la lógica clásica de primer orden

Aunque *no es estrictamente necesaria para entender la mayoría de este libro*, la lógica clásica de primer orden está presente de una u otra forma a lo largo de todo el recorrido. Procedemos a exponer los aspectos básicos de una versión reducida su sintaxis y su semántica. En particular, nos restringiremos a lenguajes que no contienen functores (símbolos usados para denotar funciones) ni el símbolo de identidad (=). Para una presentación más detallada e inclusiva, recomendamos la lectura de Badesa et al., 2019, (capítulos del 12 al 15) y Garrido, 2001, capítulo 8.

Lenguajes de primer orden sin functores ni identidad

El **lenguaje de primer orden** que vamos a usar, denotado mediante $\mathcal{L}_{PO}$, se construye como sigue:

Alfabeto de $\mathcal{L}_{PO}$

1. Un conjunto infinito numerable de **variables individuales**,

$$\text{Var} = \{x, y, z, ..., x_1, y_1, z_1, ...\}.$$

2. Un conjunto (finito o infinito numerable) de **constantes individuales**.

$$\text{Con} = \{a, b, c, ...\}.$$

3. Un conjunto (finito o infinito numerable) de **símbolos de relación**, también llamados **relatores**

$$\text{Rel} = \{R, S, ...\}.$$

   Asumimos que cada relator $R \in$ Rel viene acompañado de su **aridad**, denotada mediante ar(R), que es el número de argumentos que acepta. Es decir, para cada $R \in$ Rel, ar$(R) \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

4. Los **operadores booleanos** clásicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ (la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional).

5. Los **cuantificadores** $\forall$ (cuantificador universal) y $\exists$ (cuantificador existencial o particular).

6. Los **símbolos auxiliares**: (,).

Intuitivamente, este lenguaje de primer orden se usa para hablar sobre un conjunto de objetos (el dominio de discurso) y las relaciones que se dan entre ellos. A modo de ejemplo, imaginemos que nuestro dominio es $\mathbb{N}$. Las variables denotan objetos de manera indeterminada. En el lenguaje formal, el papel de la variable individual es similar al del pronombre en el lenguaje coloquial. Por ejemplo, en la expresión "ese (número) es par", la partícula "ese" puede referirse a diferentes objetos del dominio según el contexto. Las constantes, en cambio, sirven para denotar a los objetos del dominio de manera concreta o específica. Por ejemplo, la constante a puede usarse para denotar al número natural 1 y la constante b para denotar al 2. Los relatores o símbolos de relación n-arios codifican relaciones n-arias entre individuos del dominio. Por ejemplo, si P denota la relación monaria (i.e., de aridad 1) de "ser par", entonces la fórmula (que definiremos formalmente en seguida) $P(a)$ significará "el 1 es par". Para un ejemplo con un relator de aridad 2 (binario), podemos usar R para denotar la relación "ser menor o igual que", así $R(a, a)$ significará "el 1 es menor o igual que el 1". Por último, los cuantificadores se usan para enunciar propiedades que cumplen todos los objetos ($\forall$) o que cumplen al menos un objeto ($\exists$).

Fórmulas de $\mathcal{L}_{PO}$

Una fórmula de $\mathcal{L}_{PO}$ (o **fórmula de primer orden**) es una sucesión finita de elementos del alfabeto de $\mathcal{L}_{PO}$ generada exclusivamente por aplicaciones de las siguientes reglas:

1. Si $\tau_1, ..., \tau_n \in$ Con $\cup$ Var ($\tau_1, ..., \tau_n$ son constantes o variables) y $R \in$ Rel con $ar(R) = n$ (R es un relator de aridad n), entonces $R(\tau_1, ..., \tau_n)$ es una fórmula.
2. Si A es una fórmula de primer orden, entonces $\neg A$ es una fórmula de primer orden.
3. Si A y B son fórmulas de primer orden, entonces $(A \circ B)$ es una fórmula de primer orden (siendo $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$).
4. Si A es una fórmula de primer orden y $x \in$ Var, entonces $\forall x A$ y $\exists x A$ son fórmulas de primer orden.

Equivalentemente, podemos definir el **lenguaje $\mathcal{L}_{PO}$ en notación Backus-Naur**:

$$A ::= R(\tau_1, ..., \tau_n) \mid \neg A \mid (A \circ A) \mid \forall x A \mid \exists x A$$

donde $R \in$ Rel con $ar(R) = n$, $\tau_1, ..., \tau_n \in$ Var $\cup$ Con, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y $x \in$ Var.

Lectura de las nuevas fórmulas y convenciones. $R(\tau_1, .., \tau_n)$ se lee "los objetos $\tau_1, ..., \tau_n$ están relacionados (mediante R)". Para el caso especial ar$(R) = 2$ usamos a menudo $\tau_1 R \tau_2$ en vez de $R(\tau_1, \tau_2)$; en cualquier caso la lectura es "τ_1 se relaciona con τ_2". Por su parte, $\forall x A$ se lee "para todo objeto x es cierto que A" y $\exists x A$ se lee "hay al menos un objeto x tal que A". Si adoptamos la lectura de a, b, P y R que vimos más arriba, podemos formar fórmulas como:

- $\forall x R(x, x)$ "todo número es mayor o igual que sí mismo".
- $P(b) \wedge \exists x \neg P(x)$ "el 2 es par y hay un número que no lo es".
- $\forall x \exists y R(x, y)$ "para todo número hay un número que es menor o igual que sí mismo".

Variables ligadas y libres. Una variable puede tener distintas *apariciones* en una fórmula. En lo que sigue tendremos en cuenta esto. Usaremos como convención el símbolo $\mathbf{C}$ para denotar a cualquiera de los dos cuantificadores y usaremos letras minúsculas griegas para denotar genéricamente a los elemento de Var. Entonces:

- Una **aparición** de una variable ν está **ligada** por un cuantificador $\mathbf{C}$ en una fórmula A sii dicha aparición se produce en una subfórmula de A de la forma $\mathbf{C}\nu B$ (nótese que puede ser la propia A). Si dicha aparición de ν no está ligada en A se dice **libre** en A. Por ejemplo, en la fórmula

$$\forall x(\exists y(P(x) \wedge Q(y)) \rightarrow R(y, y) \vee Q(x)$$

  las dos primeras apariciones de x están ligadas y la tercera libre; por su parte, las dos primera apariciones de y están igualmente ligadas, pero la tercera y cuarta están libres.

- Una variable ν está **ligada** en A sii existe al menos una aparición ligada de ν en A. En cambio, ν está **libre** en A sii existe al menos una aparición libre de ν en A. De estas definiciones se desprende que una misma variable puede estar libre y ligada a la vez en una misma fórmula. Es el caso de x e y en la fórmula anterior.

- Una fórmula donde no hay variables libres se llama **cerrada**. Si las hay, la fórmula se denomina **abierta**. Por ejemplo, $\forall x P(x)$, $P(a)$ y $\exists x \exists y R(x, y)$ son fórmulas cerradas, pero $P(x)$ y $\exists y R(x, y)$ son abiertas.

Semántica de primer orden

Antes de comenzar con la semántica de primer orden, nos gustaría hacer una advertencia al lector: si encuentra las siguientes líneas excesivamente densas a nivel técnico, le recomendamos que continúe con la lectura del manual saltándose esta sección y, en caso de considerarlo necesario, vuelva a ella.

Una **interpretación de primer orden** (también llamada **evaluación**) es una par ordenado $\mathcal{V} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$, donde:

- $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío ($\mathcal{U} \neq \emptyset$) denominado **dominio** o **universo (del discurso)**.

- $\mathcal{I}$ es una **función de interpretación** que asigna un significado en $\mathcal{U}$ a cada constante y cada relator. Formalmente:

– Para cada $a \in$ Con, $\mathcal{I}(a) \in \mathcal{U}$.

– Para cada $R \in$ Rel, si ar$(R) = n$, entonces $\mathcal{I}(R) \subseteq \mathcal{U}^n$.

Necesitamos evaluar variables también; por ello definimos la función g : Var $\longrightarrow \mathcal{U}$, o función de **asignación en** $\mathcal{V}$, que otorga un individuo a cada variable. Nótese que mientras que la interpretación de las constantes pertenece a la interpretación y su valor es fijo, el valor de las variables no depende de la misma sino de funciones asociadas a la interpretación y podemos definir para cada variable una multiplicidad de asignaciones dependiendo del tamaño de dominio. No obstante, tanto constantes como variables son **términos**, es decir, expresiones que denotan objetos del dominio, y tiene sentido por tanto dar una notación unificada para evaluarlos. Así pues, dados $\tau \in$ Con $\cup$ Var, $\mathcal{V} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ y la asignación g en $\mathcal{V}$, definimos la función: ref$_g^{\mathcal{V}}$: (Con $\cup$ Var) $\longrightarrow \mathcal{U}$, que asigna a cada término individual (constante o variable) su **referencia** en $\mathcal{U}$:

$$\mathsf{ref}_g^{\mathcal{V}}(\tau) = \begin{cases} \mathcal{I}(\tau), & \text{si } \tau \in \mathsf{Con} \\ g(\tau), & \text{si } \tau \in \mathsf{Var} \end{cases}$$

Dada una asignación g : Var $\longrightarrow \mathcal{U}$ y una variable $x \in$ Var, denotamos mediante $\mathbf{g}^x$ el conjunto de todas las **asignaciones x-variantes con respecto a** g, es decir, el conjunto de todas las asignaciones que solo difieren (si es que difieren) de g en el valor otorgado a x. Más formalmente,

$$\mathbf{g}^x = \{f : \mathsf{Var} \longrightarrow \mathcal{U} \mid f(y) = g(y) \text{ para cada } y \in \mathsf{Var} \setminus \{x\}\}.$$

Finalmente, dada una interpretación de primer orden $\mathcal{V} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ y una asignación g en $\mathcal{V}$, vamos a definir inductivamente lo que significa que una fórmula $A \in \mathcal{L}_{PO}$ **sea satisfacible en** $\mathcal{V}$ **con** g (abreviado como $\mathcal{V}_g \models A$). Diremos también en este caso que $\mathcal{V}$ **satisface** A **con** g. En concreto, $\models$ es la relación más pequeña (con respecto a $\subseteq$) que satisface las siguientes condiciones:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{V}_g \models R(\tau_1, ..., \tau_n) & \text{sii} & \langle \mathsf{ref}_g^{\mathcal{V}}(\tau_1), ..., \mathsf{ref}_g^{\mathcal{V}}(\tau_n)\rangle \in \mathcal{V}(R) \\
\mathcal{V}_g \models \neg A & \text{sii} & \mathcal{V} \not\models A \\
\mathcal{V}_g \models A \wedge B & \text{sii} & \mathcal{V} \models A \text{ y } \mathcal{V} \models B \\
\mathcal{V}_g \models A \vee B & \text{sii} & \mathcal{V} \models A \text{ o } \mathcal{V} \models B \\
\mathcal{V}_g \models A \rightarrow B & \text{sii} & \mathcal{V} \not\models A \text{ o } \mathcal{V} \models B \\
\mathcal{V}_g \models A \leftrightarrow B & \text{sii} & \mathcal{V} \models A \text{ sii } \mathcal{V}_g \models B \\
\mathcal{V}_g \models \forall x A & \text{sii} & \mathcal{V}_{g'} \models A \text{ para toda asignación } g' \in \mathbf{g}^x. \\
\mathcal{V}_g \models \exists x A & \text{sii} & \mathcal{V}_{g'} \models A \text{ para al menos una asignación } g' \in \mathbf{g}^x.
\end{array}
$$

Un concepto más fuerte que el de satisfacción es el de verdad. Diremos que una fórmula A es **verdadera en una interpretación** $\mathcal{V}$ si A es satisfacible en $\mathcal{V}$ con toda asignación g en $\mathcal{V}$. Este concepto nos retrotrae a la noción de verdad en la lógica proposicional. En esta lógica una fórmula solo puede ser verdadera o falsa en una interpretación. En cambio, en la lógica cuantificacional nos encontramos con fórmulas abiertas, que en algunas interpretaciones no son ni verdaderas ni falsas, sino simplemente satisfacibles con algunas asignaciones y no satisfacibles con otras. Son justamente las fórmulas cerradas las que -al igual que las fórmulas proposicionales- son o verdaderas o falsas en cualquier interpretación.

Ejemplo 2 *Veamos un par de ejemplos sencillos que nos puedan aclarar estos conceptos. Consideremos la fórmula xRy y la interpretación $\mathcal{V} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$, donde*

$\mathcal{U} = \{1, A\}$,
$\mathcal{I}(R) = \{\langle 1, A\rangle, \langle A, 1\rangle\}$.

Queremos evaluar la fórmula xRy en la interpretación definida. Consideremos primero todas las asignaciones posibles atendiendo únicamente a las variables que aparecen en la fórmula a evaluar. Entonces tenemos:

$g_1(x) = g_1(y) = 1$
$g_2(x) = g_2(y) = A$
$g_3(x) = 1$ *y* $g_3(y) = A$
$g_4(x) = A$ *y* $g_4(y) = 1$

La fórmula xRy es satisfacible con alguna asignación en $\mathcal{V}$, pero no es verdadera en dicha interpretación; es satisfacible con g_3 y g_4, pero no con g_1 ni con g_2. Veamos esto:

$\langle g_1(x), g_1(y)\rangle = \langle 1, 1\rangle \notin \mathcal{I}(R)$ *luego* $\mathcal{V}_{g_1} \not\models xRy$
$\langle g_2(x), g_2(y)\rangle = \langle \mathsf{A}, \mathsf{A}\rangle \notin \mathcal{I}(R)$ *luego* $\mathcal{V}_{g_2} \not\models xRy$
$\langle g_3(x), g_3(y)\rangle = \langle 1, \mathsf{A}\rangle \in \mathcal{I}(R)$ *luego* $\mathcal{V}_{g_3} \models xRy$
$\langle g_4(x), g_4(y)\rangle = \langle \mathsf{A}, 1\rangle \in \mathcal{I}(R)$ *luego* $\mathcal{V}_{g_4} \models xRy$

Consideremos ahora la fórmula cuantificada $\forall x \exists y xRy$*. Veamos si es verdadera en la interpretación. Tenemos que comprobar si es satisfacible con todas las asignaciones:*

Veamos si $\mathcal{V}_{g_1} \models \forall x \exists y xRy$*.*

Como g_1 *y* g_4 *son todas las asignaciones* x*-variantes de* g_1 *, tenemos que comprobar si* $\mathcal{V}_{g_k} \models \exists y xRy$*, para* $k = 1, 4$*. Para esto último tenemos que ver si para cada uno de estos valores de* k *existe alguna asignación que sea* y*-variante de* g_k *que satisfaga* xRy*:*

(1) Para $k =$ *1:* g_3 *es una* y*-variante de* g_1 *(es decir,* $g_2 \in \mathbf{g}_1^y$*) y sabemos que* $\mathcal{V}_{g_3} \models xRy$*, luego resulta* $\mathcal{V}_{g_1} \models \exists y xRy$*.*

(2) Para $k = 4$*:* $g_4 \in \mathbf{g}_4^y$ *y además sabemos que* $\mathcal{V}_{g_4} \models xRy$*; así que* $\mathcal{V}_{g_4} \models \exists y xRy$*.*

De manera similar podemos probar que $\mathcal{V}_{g_k} \models \forall x \exists y xRy$ *(para* $k = 2, 3, 4$*). Dado, entonces, que la fórmula* $\forall x \exists y xRy$ *es satisfacible con toda asignación en la interpretación* $\mathcal{V}$ *concluimos que la fórmula en cuestión es verdadera en dicha interpretación.*

1. INTRODUCCIÓN

La lógica modal se define, en un sentido restrictivo, como un estudio *lógico* (esto es, centrado en el razonamiento) de las *nociones modales aléticas*, es decir, de las nociones de *necesidad*, *posibilidad*, *contingencia* e *imposibilidad*. Su comienzo se remonta, al menos, a Aristóteles (*Sobre la interpretación* y *Primeros analíticos*). En cuanto a su desarrollo moderno suele citarse la obra de Lewis y Langford, 1932. Sin embargo, existen trabajos anteriores de Lewis en solitario, así como de algebristas del siglo anterior en el que ya elaboran un acercamiento formal a las nociones modales[1]. En un sentido amplio, la lógica modal es el estudio de ciertos lenguajes, resultado de extender el lenguaje de la lógica clásica con nuevos operadores para tratar diversas nociones modales (aléticas, epistémicas, temporales, etc.), de las semánticas de estos lenguajes y de posibles aplicaciones de los mismos. Todos estos desarrollos han nacido siguiendo el estilo del planteamiento modal alético pero tratando con nuevos modos (por ejemplos, modos temporales o epistémicos). En este libro, nos centramos en el sentido restrictivo, pero teniendo el sentido amplio en mente.

1.1. SOBRE LA NOCIÓN DE MODO

En sintonía con Aristóteles, los lógicos medievales consideraban que en las *proposiciones modales* no solo se atribuía un sujeto a un predicado, sino que había una manera o modo de atribuirlo expresado en la proposición[2]. Los modos son expresiones que:

(i) afectan al sujeto de un enunciado, e.g.; "*El hombre paciente es el rey del mundo*", o

[1] Para ahondar en esta, así como en otras cuestiones históricas en las que no nos detendremos, puede consultarse el capítulo 1.7 de Blackburn et al., 2002.

[2] Usaremos de manera indistinta los términos *proposición* y *enunciado* a lo largo del texto, aunque en otros contextos no sean intercambiables.

(ii) afectan al predicado de un enunciado, e.g., "*Alejandro conduce deprisa*", o

(iii) afectan al resto del enunciado, e.g., "*Es improbable que Marta esté en su casa*".

Nos centraremos en la postura (iii). Siguiendo la tradición de la lógica medieval, un "modo" es la manera en que una proposición es verdadera o falsa. De acuerdo con esto, afirmar la verdad de (iii) equivale a afirmar que la simple proposición "Marta está en casa" es improbable que sea verdadera. Igualmente, podemos afirmar, por ejemplo, la proposición "es posible que el gato esté en el tejado", la cual equivale a decir que "el gato está en el tejado" es posiblemente verdadera. La lógica modal moderna considera los modos como operadores que forman nuevas proposiciones a partir de proposiciones, de la misma manera que los operadores booleanos clásicos.

1.2. MODOS ALÉTICOS

Los modos **aléticos** son los siguientes:

necesario	**imposible**
posible	**contingente**

1.3. CONCEPCIONES ACERCA DE LOS MODOS ALÉTICOS

Hay varias *concepciones* acerca de estos modos. Por ejemplo, podemos distinguir entre posibilidad tecnológica, física (o natural) y lógica. Lo mismo podemos decir respecto del resto de los modos. Centrándonos en la posibilidad a modo de ejemplo, podemos decir que algo es:

- *tecnológicamente posible* cuando hay una manera de obtenerlo dado el estado actual de la técnica (e.g., es actualmente posible colocar bases lunares, pero no fuera del sistema solar).
- *físicamente posible* cuando es compatible con las leyes (ideales) de la naturaleza (e.g., viajar a la velocidad de la luz, pero no lo es viajar más allá de la velocidad de la luz).
- *lógicamente posible* cuando es compatible con las leyes de la lógica (en sentido general). O también podemos decir que algo es lógicamente posible

cuando al presuponer su verdad no se sigue lógicamente de ello contradicción alguna (e.g., se puede afirmar sin contradicción lógica que se puede superar la velocidad de la luz; pero no lo sería afirmar que Napoleón fue y no fue, a la par, emperador de los franceses).

1.4. DEFINICIÓN INFORMAL DE LAS MODALIDADES

Atenderemos en lo sucesivo a la concepción lógica de las modalidades. De modo informal, entendemos:

- La **necesidad** expresa que el enunciado tiene que ser forzosamente verdadero. Es decir, independientemente de las circunstancias o de cómo sea el mundo no puede dejar de ser verdadero (e.g., dos y dos son cuatro, la gente soltera no está casada, ...).
- La **imposibilidad** expresa que el enunciado tiene que ser forzosamente falso. O sea, independientemente de cómo sea el mundo no puede dejar de ser falso (e.g., dos y dos son cinco, lo que existe no existe, ...).
- La **posibilidad** posee dos acepciones de acuerdo con Aristóteles. Lo posible es lo que no es imposible y, por tanto, expresa que el enunciado simplemente puede ser verdadero (e.g. lloverá mañana). En este sentido de "posible" los enunciados necesarios también son posibles. En un sentido más estricto, lo posible no solo no es imposible sino que además no es necesario. Reservaremos el nombre de **contingente** para esta segunda acepción.

1.5. INTERDEFINIBILIDAD DE LOS MODOS ALÉTICOS

Podemos reducir todos los modos aléticos a uno solo, tomándolo como primitivo con ayuda de la negación. La contingencia la hemos reducido a lo que no es imposible ni necesario. Procedemos seguidamente a tratar la interdefinibilidad de los otros tres modos:

En términos de necesidad

Es posible que A	$=$	No es necesario que no-A
Es imposible que A	$=$	Es necesario que no-A

En términos de posibilidad

Es necesario que A	$=$	No es posible que no-A
Es imposible que A	$=$	No es posible que A

En términos de imposibilidad

Es necesario que A	$=$	Es imposible que no-A
Es posible que A	$=$	No es imposible que A

Lo usual en la lógica modal es usar los modos necesario y posible como primitivos, o bien uno solo de ellos y el otro introducirlo en el lenguaje por definición.

2. LENGUAJE Y SEMÁNTICA

La lógica modal básica, a la que se limita este libro, *añade* a los operadores de la lógica proposicional clásica dos nuevas conectivas monarias para tratar la necesidad y la posibilidad de una proposición. Estas conectivas son $\Box$ ("es necesario que") y $\Diamond$ ("es posible que"), denominadas **conectivas modales**. Así, *"es necesario que A"* se simboliza $\Box A$ y *"es posible que A"* se simboliza $\Diamond A$. A este tipo de proposiciones, formadas con ayuda de las conectivas modales, las llamaremos **proposiciones modales**. La lectura que acabamos de dar de $\Box$ y $\Diamond$ corresponde a los modos aléticos. Sin embargo, entendido de una manera más abstracta, las conectivas $\Box$ y $\Diamond$ admiten diferentes lecturas intuitivas dependiendo de los modos utilizados, lo que da pie a la construcción de diferentes tipos de lógicas modales. Algunas de las lecturas más usuales se reflejan en la siguiente tabla:

$\Box A$	$\Diamond A$	**Lectura**
Es necesario que A	*Es posible que A*	Alética
Es obligatorio que A	*Está permitido que A*	Deóntica
Siempre será el caso que A	*Alguna vez será el caso que A*	Temporal
El agente sabe que A	*Es compatible con lo que el agente sabe que A*	Epistémica
El agente cree que A	*Es compatible con lo que el agente cree que A*	Doxástica
Toda ejecución del programa finaliza afirmando que A	*Alguna una ejecución del programa finaliza afirmando que A*	Dinámica

2.1. SINTAXIS: EL LENGUAJE PROPOSICIONAL MODAL $\mathcal{L}_M$

Alfabeto de $\mathcal{L}_M$

1. Un conjunto infinito numerable

$$\text{At} = \{p, q, r, s, \ldots p_1, q_1, r_1, s_1, \ldots, p_n, q_n, r_n, s_n, \ldots\}$$

   de variables proposicionales o átomos.

2. Los operadores booleanos clásicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
3. Los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$.
4. Los símbolos auxiliares: (,).

Fórmulas de $\mathcal{L}_M$

Una **fórmula de** $\mathcal{L}_M$ (o simplemente una **fórmula**) es una sucesión finita de elementos del alfabeto de $\mathcal{L}_M$ generada exclusivamente por aplicaciones de las siguientes reglas:

1. Todo elemento de At es una fórmula.
2. Si A es una fórmula, entonces $\neg A$, $\Box A$ y $\Diamond A$ son fórmulas.
3. Si A y B son fórmulas, entonces $(A \circ B)$ es una fórmula
   (siendo $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$).

De forma equivalente, en la notación de **Backus-Naur** (véanse los preliminares formales de este libro), una fórmula A de $\mathcal{L}_M$ se define:

$$A ::= p \mid \neg A \mid (A \circ A) \mid \Box A \mid \Diamond A$$

donde $p \in$ At y $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Como es usual identificaremos un lenguaje formal, como $\mathcal{L}_M$, con el conjunto de sus fórmulas.

Ejemplo 3 *Las siguientes expresiones son fórmulas:*

$$(p \to \Box(\Diamond p \land q)) \quad \Diamond(p \to \Box\Diamond\neg q) \quad (p \lor \Box\neg q)$$

Las siguientes expresiones no son fórmulas:

$$(p \to \Box) \qquad (p \land \Diamond() \qquad \Diamond p\, \Diamond q \qquad (p\,\Box \to p)$$

Ejercicio 1 *Determine cuáles de las siguientes sucesiones de símbolos son fórmulas:*

(1) $(p \to \Box\Box qq)$.

(2) $(\Diamond\Box(p \land q) \leftrightarrow \Box\Diamond r)$.

(3) $p\Diamond$.

(4) $\to (p \land \Box r)$.

(5) $(p \lor (q \lor \Diamond(p \lor q)))$.

(6) $r\neg(\Box\Diamond\Diamond(p \land s) \lor q)$.

Una fórmula de $\mathcal{L}_M$ se puede descomponer en nuevas fórmulas llamadas **subfórmulas** (de esa fórmula). Definamos la función sub: $\mathcal{L}_M \longrightarrow \wp(\mathcal{L}_M)$ tal que a cada fórmula A le corresponde el conjunto de todas sus subfórmulas, sub(A), como sigue:

$$\mathsf{sub}(A) = \begin{cases} \{A\}, & \text{si } A \in \mathsf{At} \\ \{A\} \cup \mathsf{sub}(*B), & \text{si } A \text{ es de la forma } *B \\ \{A\} \cup \mathsf{sub}(B) \cup \mathsf{sub}(C), & \text{si A es de la forma } (B \circ C) \end{cases}$$

(donde $* \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$ y $\circ \in \{\land, \lor, \to, \leftrightarrow\}$).

Ejemplo 4 *Sea* A *la fórmula* $(\Box\Diamond\neg p \lor \Diamond(p \to q))$. *Entonces:*

$$\begin{aligned}
\mathsf{sub}(A) &= \{(\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond(p \to q))\} \cup \mathsf{sub}(\Box\Diamond\neg p) \cup \mathsf{sub}(\Diamond(p \to q)) \\
&= \{(\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond(p \to q)), \Box\Diamond\neg p, \Diamond(p \to q)\} \cup \mathsf{sub}(\Diamond\neg p) \cup \\
&\quad \mathsf{sub}((p \to q)) \\
&= \{(\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond(p \to q)), \Box\Diamond\neg p, \Diamond(p \to q), \Diamond\neg p, (p \to q)\} \cup \\
&\quad \mathsf{sub}(\neg p) \cup \mathsf{sub}(p) \cup \mathsf{sub}(q) \\
&= \{(\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond(p \to q)), \Box\Diamond\neg p, \Diamond(p \to q), \Diamond\neg p, (p \to q), \neg p, p, q\}
\end{aligned}$$

Usaremos las mismas convenciones sobre la eliminación de paréntesis que vimos en los preliminares formales.

Ejercicio 2 *Sea A la fórmula* $\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow (p \vee (\Box\neg q \to \Diamond r))$. *Calcule* $\mathsf{sub}(A)$.

2.2. SEMÁNTICA DE $\mathcal{L}_M$

Los operadores modales no son *veritativo-funcionales*. Es decir, el valor de verdad de una fórmula compleja no puede determinarse atendiendo únicamente al valor de verdad de sus componentes y al significado de los operadores. Por ejemplo, de la verdad del átomo p no podemos concluir si p es necesario o no. Necesitamos otro tipo de semántica que no consista en realizar meramente asignaciones veritativas. Usaremos la semántica de *mundos posibles* de Kripke, 1959, 1963, también conocida como *semántica relacional*.

2.2.1. Semántica de mundos posibles: exposición informal

Para empezar, daremos una visión intuitiva de lo que entenderemos por "mundo posible". Supongamos que Sócrates hubiese sido carpintero en vez de filósofo, que la Tierra contara con dos satélites en vez de uno, que no existieran los trenes o que otro líquido sustituyera al agua en la composición química de los seres vivos, etc. Podemos imaginar un mundo semejante. Impondremos, no obstante, una restricción fundamental a nuestra capacidad de concebir o imaginar, a saber, que:

lo supuesto o imaginado no implique contradicción lógica.

Tenemos, entonces, lo que denominaremos "un mundo posible". Un mundo posible es, pues, *un "estado de cosas" cuya supuesta existencia es compatible con las* *leyes de la lógica*. Desde este punto de vista, el *mundo real*, el mundo en el que habitamos, es uno más entre los mundos posibles que podemos postular.

La concepción de mundo posible que acabamos de exponer es, como adelantamos en la introducción, una concepción lógica; al decir "mundo posible" queremos decir "mundo *lógicamente* posible"; pero podemos igualmente formular una concepción *física*, *ética*, etc. de mundo posible. Por ejemplo, un mundo *físicamente* posible sería aquél cuya supuesta existencia es compatible con las leyes de la física, o lo que es igual, un mundo en el cual valen las mismas leyes físicas que en el nuestro, aun cuando pueda diferir en otros aspectos. Por su parte, un mundo *éticamente* posible sería aquél en el cual valiesen las mismas normas éticas que en el nuestro y, por supuesto, diferir en otros aspectos distintos. Para una exposición detallada de la idea de mundo posible y su influjo en la filosofía analítica contemporánea puede consultarse el trabajo de Menzel, 2023.

2.2.2. Definición de los conceptos modales en términos de los mundos posibles

En primer lugar, podemos establecer una concepción *absoluta* de los conceptos modales. Dado un enunciado A, diremos:

- "Es necesario que A" es verdadero sii A es verdadero en todo mundo posible.
- "Es posible que A" es verdadero sii A es verdadero en algún mundo posible.

Con esta concepción, los modos son cuantificadores sobre mundos posibles[1].

Una opción más refinada consiste en *relativizar* estas nociones. Así, hablaremos de la verdad o falsedad de un enunciado necesario (o posible) *respecto de un mundo posible dado* w[2] y, para determinar su valor de verdad *en* w solo tendremos en cuenta los mundos posibles "accesibles desde" w. La accesibilidad es una noción abstracta y se puede interpretar de muy diversas formas, conectadas a la noción de modo que se haya adoptado. Veamos dos ejemplos. Primero, desde una perspectiva con carácter epistémico siguiendo la exposición de Hughes y Cresswell, 1973, puede entenderse que accesible significa concebible o imaginable por sujetos abstractos y que la capacidad para concebir o imaginar diferentes mundos posibles desde el mundo en el que vivamos depende del lenguaje que usemos, de las capacidades humanas, los idiomas existentes y otros muchos factores. Por su parte,

[1]Véase el trabajo de Carnap, 1946 para una de las primeras propuestas consolidadas de esta idea.

[2]Denotaremos mundos posibles usando minúsculas latinas comenzando por la w (a veces con subíndices u otros elementos, por ejemplo w'). Seguimos la convención de la bibliografía en inglés sobre el tema (que usa la primera letra de la palabra 'world').

Fagin et al., 1995 ahondan aún más en esta dirección. En este caso, el contexto tratado es propiamente la lógica epistémica, donde la accesibilidad es relativa a cada agente concreto que es especificado en la semántica, el cual postula estados de cosas o situaciones diferentes teniendo en cuenta la información de que dispone. La creación de situaciones distintas responde a las dudas que el agente tiene sobre cuál es el estado o situación real en la que vive. Segundo, en lógica dinámica los mundos posibles representan posibles estados en los que se encuentra una máquina (i.e., un computador) y la accesibilidad representa la transición de un estado a otro mediante la ejecución de un programa (véase Harel et al., 2000).

La accesibilidad entre mundos es una relación binaria. Conforme a lo expuesto por Hughes y Cresswell, 1973, diremos que un mundo w' es accesible a un mundo w si w' es *concebible* por alguien que viva en w. La noción de "concebible" es variada y consecuentemente posee propiedades diversas. Si admitimos que la capacidad de concebir puede aumentar o menguar al pasar de un mundo a otro, entonces "concebible" es una relación de accesibilidad *no simétrica*, pongamos por caso. Podemos, por ejemplo, concebir un mundo sin ordenadores a partir de un mundo con ordenadores, pero no hay garantías de que suceda al revés.

En cambio, si por "concebible" entendemos *conocido de modo absoluto por alguien*, entonces la relación de accesibilidad es *transitiva*. Concretamente, la transitividad se aprecia al considerar que si tuviéramos un conocimiento absoluto de un mundo w' desde un mundo w, poseeríamos también en w la capacidad de concebir de que se dispone en w'; por lo cual, cualquier mundo w'' que fuera concebible desde w' también lo sería desde w.

Dicho esto, podemos reformular nuestros conceptos acerca de la verdad de un enunciado modal en un mundo posible como sigue. Sea A un enunciado, entonces:

- "Es necesario que A" es verdadero en w sii A es verdadero en todo mundo w' accesible desde w.
- "Es posible que A" es verdadero en w sii A es verdadero en algún mundo w' accesible desde w.

Algunas consecuencias son:

(i) Los mundos inaccesibles a un mundo en el que se evalúa un enunciado necesario o posible se tornan irrelevantes para determinar su verdad o falsedad en dicho mundo.

(ii) La relación de accesibilidad puede poseer diferentes propiedades (tales como reflexividad, transitividad, etc.).

Pasamos a ver cómo pueden matematizarse las ideas que acabamos de exponer.

2.2.3. Semántica formal de los mundos posibles

Marco y modelo

Un **marco** [3] es un par ordenado $\langle W, R\rangle$, donde:

1. $W \neq \varnothing$ (conjunto de **mundos posibles**) y
2. $R \subseteq W \times W$ (relación de **accesibilidad**).

wRw' se lee informalmente:

w *accede a* w' o bien w' *es accesible desde* w.

Un **modelo** es un triple ordenado $\langle W, R, V\rangle$, donde $\langle W, R\rangle$ es un marco y V es una **función de valoración**:

$$V\colon \mathsf{At} \longrightarrow \wp(W)$$

de modo que a cada átomo se le asigna un conjunto de mundos; intuitivamente, el conjunto de mundos de W donde el átomo es verdadero. Se dice que el modelo $\langle W, R, V\rangle$ está **basado (o se basa) sobre** el marco $\langle W, R\rangle$. Definimos, además, la relación de **satisfacción** $\models$ entre mundos (de un modelo) y fórmulas. Para indicar que se da dicha relación entre un mundo w de un modelo $\mathcal{M}$ y una fórmula A, usaremos la expresión $\mathcal{M}, w \models A$ (leída: "A es **verdadera en el mundo** w del modelo $\mathcal{M}$" o bien "w **satisface** A en $\mathcal{M}$"). Si no se cumple que A sea verdadera en w (en $\mathcal{M}$) expresamos este hecho mediante $\mathcal{M}, w \not\models A$. Ahora definimos la relación $\models$ inductivamente de la siguiente manera:

[3] En la terminología en lengua inglesa suele usarse la expresión 'frame'.

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models p & \text{sii} & w \in V(p) \quad (\text{para cualquier } p \in \mathsf{At}) \\
\mathcal{M}, w \models \neg A & \text{sii} & \mathcal{M}, w \not\models A \\
\mathcal{M}, w \models A \wedge B & \text{sii} & \mathcal{M}, w \models A \text{ y } \mathcal{M}, w \models B \\
\mathcal{M}, w \models A \vee B & \text{sii} & \mathcal{M}, w \models A \text{ o } \mathcal{M}, w \models B \\
\mathcal{M}, w \models A \rightarrow B & \text{sii} & \mathcal{M}, w \not\models A \text{ o } \mathcal{M}, w \models B \\
\mathcal{M}, w \models A \leftrightarrow B & \text{sii} & \mathcal{M}, w \models A \text{ sii } \mathcal{M}, w \models B \\
\mathcal{M}, w \models \Box A & \text{sii} & \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw',\ \mathcal{M}, w' \models A \\
\mathcal{M}, w \models \Diamond A & \text{sii} & \text{para algún } w' \in W \text{ tal que } wRw',\ \mathcal{M}, w' \models A
\end{array}
$$

Observación 2 (Valoraciones parciales) *Para evaluar una fórmula o un conjunto de fórmulas no requerimos definir todos los valores de los átomos del lenguaje en cada mundo del modelo, sino solamente los átomos que intervienen en la fórmula o fórmulas a evaluar. Por ejemplo, para evaluar $\Box p \rightarrow \Diamond q$ en los mundos de un modelo, es totalmente irrelevante qué dice la evaluación de ese modelo acerca de los átomos r, s, etc.*

Ejemplo 5 (Ilustración del concepto de verdad) *Consideremos el conjunto de fórmulas*

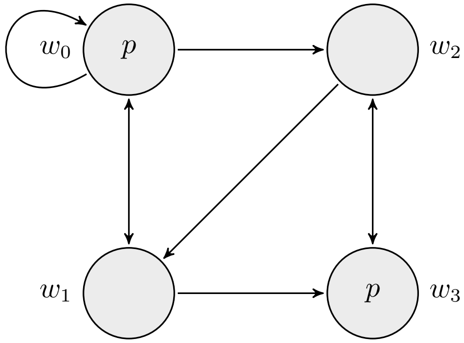
$$\{\Box p, \Diamond p, \Box\Box p, \Box\Diamond p, \Diamond\Box p, \Diamond\Diamond p\}$$

y el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde:

$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$.
$R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_0\rangle, \langle w_0, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_3\rangle, \langle w_3, w_3\rangle\}$.
$V(p) = \{w_0, w_3\}$.

El modelo se puede representar mediante un grafo como sigue [4]:

[4] Un grafo es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* (o *puntos* o *nodos*) y una familia de pares no ordenados de esos elementos llamados *aristas* (o *líneas*). La representación gráfica de un grafo consiste en dibujar puntos o círculos para los vértices y líneas para las aristas. Cada línea une los vértices del par que define la arista. En caso de que las aristas sean pares ordenados se denominan *arcos* (*aristas dirigidas*). Gráficamente se representa el orden de los vértices en los arcos mediante una flecha que va del primer al segundo componente del par. Un grafo cuyas aristas sean arcos se llama *dirigido*; en caso contrario, es *no dirigido*. Se llama *grafo etiquetado* a un grafo cuyos vértices tienen nombres o etiquetas. Usualmente cada vértice posee una etiqueta distinta. A veces se etiquetan también las aristas (consúltese Wilson, 1983 y West, 2001 para una exposición detallada de estos conceptos). La



Como puede observarse usamos círculos para representar los mundos y flechas para indicar la relación de accesibilidad entre los mundos. Una flecha de un mundo w a un mundo w' indica que w accede a w'. Además, hemos anotado p en los mundos donde el átomo p es verdadero (w_0) y donde es falso no hemos anotado nada. Bien podríamos haber puesto en este último caso $\neg p$. No obstante, ***convenimos de ahora en adelante lo siguiente: cuando un átomo sea falso en un mundo no lo representaremos****.*

Acto seguido evaluamos las fórmulas del conjunto en cada uno de los mundos del modelo:

Fórmula	Verdadera en
$\Box p$	w_1
$\Diamond p$	w_0, w_1, w_2
$\Box\Box p$	- - -
$\Box\Diamond p$	w_0, w_3
$\Diamond\Box p$	w_0, w_2
$\Diamond\Diamond p$	w_0, w_2, w_3

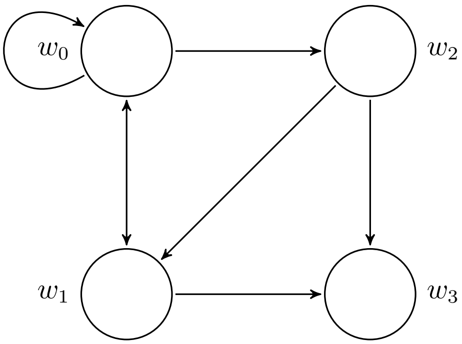
Observación 3 (Representación gráfica de marcos vs. modelos) *La convención que hemos adoptado un poco más arriba, véase, que no representaremos los*

representación gráfica de los modelos en lógica modal suele utilizar grafos dirigidos etiquetados, donde -aparte de usar etiquetas para nombrar los vértices (los mundos)- utiliza fórmulas como etiquetas. Veremos enseguida con detalle el papel de estas fórmulas.

átomos que sean falsos dentro de cada mundo cuando representamos gráficamente un modelo, crea una pequeña ambigüedad. Esta es, la representación gráfica de un marco $\langle W, R\rangle$ coincide con aquella del modelo basado en el mismo $\langle W, R, V\rangle$ donde V hace falsos a todos los átomos considerados en todos los mundos. Para resolver esta ambigüedad, quitamos el color de relleno de los mundos cuando representamos un marco. De esta forma, recuperando el ejemplo de antes, el marco $\langle W, R\rangle$, donde:

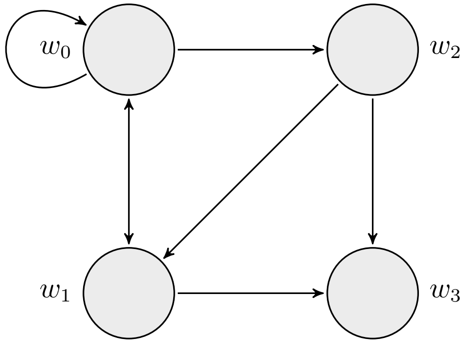
$$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\},$$
$$R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_0\rangle, \langle w_0, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_3\rangle\},$$

se representa mediante [5]:



mientras que el modelo $\langle W, R, V\rangle$, donde V da el valor falso a todos los átomos de la fórmula o fórmulas a evaluar, se representa mediante:

[5] En lugar de dos flechas entre w_0 y w_1 dibujamos -por simplicidad en la representación- una sola línea con dos puntas, que indica doble dirección.



2.3. DEFINICIONES SEMÁNTICAS BÁSICAS

Sea $A \in \mathcal{L}_M$. Entonces:

- A es **válida en un modelo** $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ sii, para todo $w \in W$, $\mathcal{M}, w \models A$. Se anota $\mathcal{M} \models A$.
- A es **válida en un marco** $\langle W, R \rangle$ sii A es válida en todo modelo basado sobre $\langle W, R \rangle$. Se anota $\langle W, R \rangle \models A$.
- A es **válida en una clase** $\mathcal{C}$ **de modelos (marcos)** sii A es válida en todo modelo (marco) de $\mathcal{C}$. Se anota $\models_{\mathcal{C}} A$. Si $\mathcal{C}$ es la clase de todos los marcos (modelos), anotamos simplemente $\models A$ y decimos que A es (modalmente) **válida**.
- A es **satisfacible en un modelo** $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ sii existe $w \in W$ tal que $\mathcal{M}, w \models A$. Se dice entonces que $\mathcal{M}$ es un modelo **verificador** de A.
- A es **satisfacible en un marco** $\langle W, R \rangle$ sii existe un modelo $\mathcal{M}$ basado sobre $\langle W, R \rangle$ tal que A es satisfacible en $\mathcal{M}$.
- A es **satisfacible en una clase** $\mathcal{C}$ **de modelos** sii existe un modelo $\langle W, R, V \rangle \in \mathcal{C}$ donde hay un mundo $w \in W$ tal que A es verdadera en w.
- A es **satisfacible en una clase** $\mathcal{C}$ **de marcos** sii existe un modelo $\mathcal{M}$ basado sobre algún marco $\langle W, R \rangle \in \mathcal{C}$ tal que A es satisfacible en $\mathcal{M}$.

Además, sea Γ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_M$. Entonces:

- Γ es **satisfacible en un modelo** $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle \in \mathcal{C}$ sii existe un mundo $w \in W$ donde toda fórmula de Γ es verdadera en w. Diremos entonces que $\mathcal{M}$ es un modelo **verificador** de Γ.

- Γ es **satisfacible en un marco** $\langle W, R \rangle$ sii existe un modelo $\mathcal{M}$ basado sobre $\langle W, R \rangle$ donde Γ es satisfacible.

- Γ es **satisfacible en una clase** $\mathcal{C}$ **de modelos** sii existe un modelo $\langle W, R, V \rangle \in \mathcal{C}$ donde hay un mundo $w \in W$ tal que toda fórmula de Γ es verdadera en w.

- Γ es **satisfacible en una clase** $\mathcal{C}$ **de marcos** sii existe un modelo $\mathcal{M}$ basado sobre algún marco en $\mathcal{C}$ tal que Γ es satisfacible en $\mathcal{M}$.

- A es **consecuencia semántica** de Γ en una clase $\mathcal{C}$ de modelos (en símbolos, $\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$) sii para todo modelo $\langle W, R, V \rangle \in \mathcal{C}$ y para todo mundo $w \in W$ tenemos que si todas las fórmulas de Γ son verdaderas en w, entonces A también es verdadera en w. Más formalmente, podemos expresar esto en la forma:

$$\langle W, R, V \rangle, w \models B \text{ para toda } B \in \Gamma \quad \text{implica} \quad \langle W, R, V \rangle, w \models A$$

  En el caso de que $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ (para algún $n \geq 0$), también decimos que el argumento $\langle \Gamma, A \rangle$ es **válido en la clase** $\mathcal{C}$ (si $\mathcal{C}$ es la clase de todos los marcos (modelos), decimos simplemente que el argumento es **válido**).

- El modelo $\langle W, R, V \rangle$ es un **contra-modelo a la validez de** A (o simplemente, un **contra-modelo de** A), sii A es falsa en algún mundo $w \in W$. Asimismo, siendo Γ finito, $\langle W, R, V \rangle$ es un **contra-modelo** del argumento $\langle \Gamma, A \rangle$ sii existe $w \in W$ donde toda fórmula de Γ es verdadera, pero A es falsa.

Seguidamente daremos una serie de ejemplos que ilustrarán ciertos detalles de las definiciones semánticas que acabamos de ver.

Satisfacibilidad de fórmulas vs. satisfacibilidad de conjuntos de fórmulas

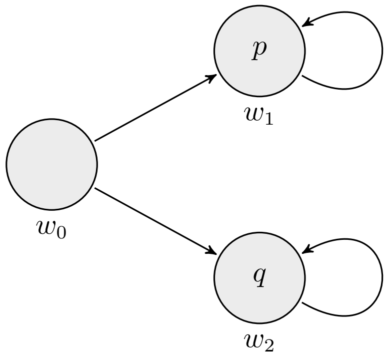
Ejemplo 6 *Sea Γ el conjunto de fórmulas $\{\Box\Diamond\neg p, q, \Diamond q\}$ y sea $\langle W, R, V \rangle$ un modelo donde*

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$;

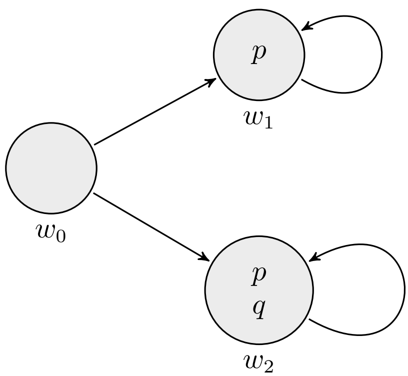
$R = \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_0, w_2 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle\}$;

$V(p) = \{w_1\}, V(q) = \{w_2\}.$

El diagrama del modelo es:



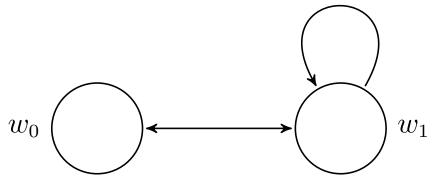
Γ es satisfacible en este modelo, concretamente todas sus fórmulas son simultáneamente verdaderas en w_2. Obviamente, cada una de las fórmulas de Γ es satisfacible en el modelo. En cambio, en el siguiente modelo $\mathcal{M}' = \langle W, R, V' \rangle$ (basado sobre el mismo marco que $\mathcal{M}$) con $V'(p) = \{w_1, w_2\}$ y $V'(q) = \{w_2\}$:



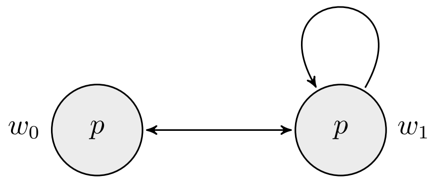
resulta que todas las fórmulas de Γ son satisfacibles, pero esto no garantiza la satisfacibilidad de Γ en $\mathcal{M}'$; de hecho no lo es. En cada uno de los mundos del modelo es falsa al menos una fórmula de Γ. Concretamente, $\Box\Diamond\neg p$ es falsa en w_1 y w_2; q es falsa en w_0 y w_1; $\Diamond q$ es falsa en w_1.

Validez en modelos vs. validez en marcos

Ejemplo 7 *En este ejemplo mostraremos claramente la diferencia entre la validez en un marco y la validez en un modelo. Sea el marco $\langle W, R\rangle$, donde $W = \{w_0, w_1\}$ y $R = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_0\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$. Su diagrama es:*

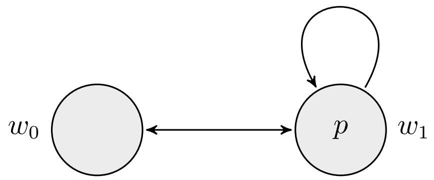


Consideremos únicamente la fórmula $\Box p$ y definamos sobre dicho marco el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde $V(p) = W$. Gráficamente:



Claramente, $\Box p$ es válida en dicho modelo, esto es, $\Box p$ es verdadera en todos sus mundos (w_0 y w_1). Para comprobarlo observemos que $V(p) = W$; así que en cualquier mundo accesible desde w_0 y en cualquier mundo accesible desde w_1 se tiene que p es verdadera. La definición semántica de $\Box$ hace el resto.

Ahora bien, $\Box p$ no es válida en el marco $\langle W, R\rangle$. Basta con definir otro modelo diferente de $\mathcal{M}$ (basado igualmente sobre $\langle W, R\rangle$) donde haya un mundo en el que $\Box p$ sea falsa. Definamos el modelo $\mathcal{M}' = \langle W, R, V'\rangle$, donde $V'(p) = \{w_1\}$. Gráficamente, el modelo es como sigue:



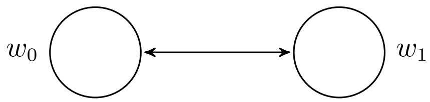
Puede comprobarse que $\Box p$ es falsa en w_1, pues $w_1 R w_0$ y $\mathcal{M}', w_0 \not\models p$. Así que $\Box p$ es inválida en $\mathcal{M}'$ y, por la definición de validez en un marco, es igualmente inválida en $\langle W, R \rangle$.

El ejemplo anterior muestra algo que expresan las definiciones, la exigencia para la validez en un marco es mucho mayor que la exigencia para la validez en un simple modelo.

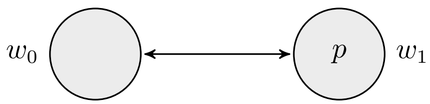
Ejercicio 3 *Defina otros modelos basados sobre el mismo marco del ejemplo 7 que constituyan contra-modelos de $\Box p$.*

Satisfacibilidad en modelos vs. satisfacibilidad en marcos

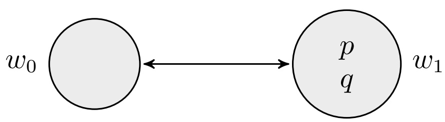
Ejemplo 8 *Sea el marco $\langle W, R \rangle$, donde $W = \{w_0, w_1\}$ y $R = \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_0 \rangle\}$. Representamos este marco así:*



Consideremos además la fórmula $\Diamond(p \wedge q)$ y el modelo $\langle W, R, V \rangle$, donde $V(p) = \{w_1\}$ y $V(q) = \emptyset$. Representamos el modelo así:



Se puede apreciar que $\Diamond(p \wedge q)$ es insatisfacible en este modelo (es falsa en ambos mundos); pero no en el marco. Basta con que cambiemos la función V para verlo. Definamos el nuevo modelo $\langle W, R, V' \rangle$, donde $V'(p) = V'(q) = \{w_1\}$:

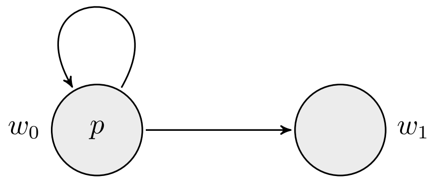


Ahora $\Diamond(p \wedge q)$ es satisfacible en este modelo (es verdadera en w_0); así que es satisfacible en el marco.

La lección del ejemplo anterior es clara. Generalizando el ejemplo, la satisfacibilidad de una fórmula A (o conjunto de fórmulas Γ) en un modelo $\mathcal{M}$ implica la satisfacibilidad de A (o Γ) en el marco sobre el que se basa $\mathcal{M}$; pero la insatisfacibilidad de A (o Γ) en $\mathcal{M}$ no nos dice nada acerca de su insatisfacibilidad en el marco sobre el que se basa $\mathcal{M}$.

Invalidez de argumentos

Ejemplo 9 *Sea el argumento $\langle\{\Diamond(p \to q), \Diamond p\}, \Diamond q\rangle$. Mostraremos que es inválido (en la clase de todos los modelos). Nos limitaremos a presentar el grafo del modelo:*



El argumento propuesto falla en w_0. El lector puede comprobar que las premisas $\Diamond(p \to q)$ y $\Diamond p$ son ambas verdaderas en w_0; mientras que la conclusión $\Diamond q$ es falsa en w_0.

Mundos finales

Hay marcos donde aparecen ciertos mundos especiales. Son mundos que no acceden a ningún mundo, ni siquiera a sí mismos. Los llamaremos *mundos finales*. Más formalmente, dado un marco $\langle W, R\rangle$ y un mundo $w \in W$, diremos que w es **final** (en $\langle W, R\rangle$) si para cualquier $w' \in W$ no es cierto que wRw'. Esta definición tiene consecuencias notables a la hora de evaluar las fórmulas modales en este tipo de mundos. Si w es final en un modelo $\mathcal{M}$, entonces para toda fórmula $A \in \mathcal{L}_M$ se cumple:

$$\mathcal{M}, w \models \Box A \text{ y } \mathcal{M}, w \not\models \Diamond A$$

Nótese que A es una fórmula cualquiera, luego, en particular, en un mundo final sería necesaria cualquier contradicción, por ejemplo, $p \wedge \neg p$. Obviamente, esta no es verdadera en el mundo final, lo es su necesidad $\Box(p \wedge \neg p)$. Asimismo, en tal mundo sería falsa la posibilidad de cualquier fórmula, incluidas las tautologías, como es el caso de $\Diamond(p \vee \neg p)$. A pesar de la extrañeza que esto pueda causar, se comprende perfectamente si atendemos a la semántica de los operadores modales.

Expresaremos sus cláusulas de satisfacción en la siguiente forma para entender mejor el asunto:

$$\mathcal{M}, w \models \Box A \quad \text{sii} \quad \forall w' \in W(wRw' \text{ implica } \mathcal{M}, w' \models A)$$
$$\mathcal{M}, w \models \Diamond A \quad \text{sii} \quad \exists w' \in W(wRw' \text{ y } \mathcal{M}, w' \models A)$$

(donde "implica" significa "implica materialmente", es decir, es la contrapartida en el metalenguaje de operador booleano "$\rightarrow$"). Advirtamos que si w es final, entonces el antecedente de la implicación material

$$wRw' \text{ implica } \mathcal{M}, w' \models A$$

es falso para cualquier mundo w', por lo cual dicha implicación será verdadera para todo w'. Luego será verdadera la fórmula universalmente cuantificada. En cambio, no podemos encontrar un mundo w' que satisfaga la conjunción

$$wRw' \text{ y } \mathcal{M}, w' \models A$$

ya que el miembro de la conjunción wRw' es falso para cualquier elección de w'. Esto hace que la fórmula existencialmente cuantificada sea falsa.

Validez de fórmulas vs. validez de esquemas

Es hora de que veamos cuál es la diferencia a la hora de evaluar semánticamente esquemas y sus instancias. Un **esquema es válido** en una clase de marcos (o modelos) sii lo son todas y cada una de sus instancias en dicha clase; **es inválido** en caso contrario; es decir, si lo es al menos una de sus instancias (no necesariamente todas). Por ejemplo, para refutar la validez de $A \rightarrow \Box A$ en la clase de todos los modelos, nos basta con refutar la validez de una instancia como $p \rightarrow \Box p$. En cambio, a la hora de probar la validez de un esquema en una clase de marcos (o modelos) procedemos como si se tratara de una fórmula.

Ejemplo 10 *Veamos la validez del esquema* $(\Box(A \rightarrow B) \wedge \Box A) \rightarrow \Box B$ *en la clase de todos los marcos.*

Sea $\langle W, R\rangle$ *un marco cualquiera,* $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ *un modelo cualquiera basado sobre dicho marco y* $w \in W$ *un mundo arbitrariamente elegido. Si probamos que el esquema es verdadero en* w *es suficiente para tener el resultado (en la siguiente observación veremos la justificación de este proceder). Para ello supongamos, además que*

$\mathcal{M}, w \models \Box(A \to B) \wedge \Box A \quad [1].$

Entonces, de [1] por la definición semántica de $\wedge$ *tenemos que:*

$\mathcal{M}, w \models \Box(A \to B) \quad$ [2] *y*
$\mathcal{M}, w \models \Box A \quad$ [3]

De [2] *y* [3] *respectivamente, por la definición semántica de* $\Box$ *tenemos:*

- para cualquier mundo $w' \in W$*:* wRw' *implica* $\mathcal{M}, w' \models A \to B \quad$ [4] *y*
- para cualquier mundo $w' \in W$*:* wRw' *implica* $\mathcal{M}, w' \models A \quad$ [5].

Podemos obtener de [4] *y* [5] *que*

- para cualquier mundo $w' \in W$*:* wRw' *implica* $\mathcal{M}, w' \models B \quad$ [6]

Por tanto, $\mathcal{M}, w \models \Box B \quad$ [7]

Dado que del supuesto [1] *hemos llegado a* [7], *por la definición semántica de* $\to$ *obtenemos:*

$$\mathcal{M}, w \models (\Box(A \to B) \wedge \Box A) \to \Box B$$

que es lo que queríamos probar.

Observación 4 *Para aclarar el resultado de la prueba de validez del esquema del ejemplo 10 hay que tener en cuenta una serie de generalizaciones implícitas y el uso que hemos hecho de las definiciones de validez en modelos, marcos y clases de marcos sin mencionarlas. En general, cuando pretendemos generalizar una propiedad de un objeto del dominio al resto de objetos de ese dominio, no consideramos ninguna característica especial del objeto elegido; en su lugar podríamos haber elegido cualquier otro. Por ello, lo que probemos acerca de dicho objeto en tanto que "cualquiera" lo podemos generalizar a todo objeto del dominio. Así, llegados al punto en que se ha mostrado que el esquema del ejemplo 10 es verdadero en un mundo* w *elegido arbitrariamente (sin mencionar, por tanto, ninguna característica especial de dicho mundo) viene una cadena de generalizaciones. Primero, como* w *es un mundo cualquiera del modelo* $\mathcal{M}$*, dicho esquema es verdadero en todo mundo de* $\mathcal{M}$*, por tanto, es válido en* $\mathcal{M}$ *(por la definición de validez en un modelo). Ahora, dado que* $\mathcal{M}$ *es un modelo cualquiera basado sobre el marco* $\langle W, R\rangle$*, resulta que el esquema es válido en todo modelo basado sobre dicho marco y, por tanto, es válido en* $\langle W, R\rangle$ *igualmente (por la definición de validez en un marco). Por último, dado que* $\langle W, R\rangle$ *es un marco cualquiera de la clase de todos los marcos, resulta finalmente que el esquema es válido en todo marco y, por ello,* *es válido en la clase de todos los marcos (por la definición de validez en una clase de marcos).*

2.3.1. Otras notaciones para la semántica

Otras formas de presentar la semántica de los operadores son las siguientes.

Notación alternativa 1. Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ tal y como hemos definido antes, variaremos la definición de valoración como sigue:

$$V : \mathsf{At} \times W \longrightarrow \{0, 1\},$$

que indica, para cada par de la forma (átomo, mundo), si ese átomo es verdadero o falso en ese mundo.

La valoración V puede extenderse para evaluar toda fórmula de $\mathcal{L}_M$ en cualquier elemento de W (seguimos usando la notación V). Para fórmulas cualesquiera $A, B \in \mathcal{L}_M$ y cualquier mundo $w \in W$, se satisface:

$$\begin{array}{lll}
V(\neg A, w) = 1 & \text{sii} & V(A, w) = 0 \\
V(A \wedge B, w) = 1 & \text{sii} & V(A, w) = V(B, w) = 1 \\
V(A \vee B, w) = 1 & \text{sii} & V(A, w) = 1 \text{ ó } V(B, w) = 1 \\
V(A \to B, w) = 1 & \text{sii} & V(A, w) = 0 \text{ ó } V(B, w) = 1 \\
V(A \leftrightarrow B, w) = 1 & \text{sii} & V(A, w) = V(B, w) \\
V(\Box A, w) = 1 & \text{sii} & \text{para todo } w' \in W \text{ tal que } wRw',\ V(A, w') = 1 \\
V(\Diamond A, w) = 1 & \text{sii} & \text{para algún } w' \in W \text{ tal que } wRw',\ V(A, w') = 1
\end{array}$$

Para cualquier fórmula $A \in \mathcal{L}_M$: A es **verdadera en** w, si $V(A, w) = 1$; A es **falsa en** w, si $V(A, w) = 0$.

Notación alternativa 2. Dado un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ y una fórmula $A \in \mathcal{L}_M$, mediante $|| \ A \ ||^{\mathcal{M}}$ denotamos el conjunto de mundos del modelo $\mathcal{M}$ donde A es verdadera, es decir,

$$|| \ A \ ||^{\mathcal{M}} = \{w \in W \mid V(A, w) = 1\}.$$

Sea $w \in W$. Definamos $\mathcal{R}(w) = \{w' \in W \mid wRw'\}$ (el conjunto de mundos accesibles desde w). Para cualesquiera $A, B \in \mathcal{L}_M$ tenemos entonces:

$$
\begin{array}{lcl}
\| \neg A \|^{\mathcal{M}} & = & W \setminus \| A \|^{\mathcal{M}} \\
\| A \wedge B \|^{\mathcal{M}} & = & \| A \|^{\mathcal{M}} \cap \| B \|^{\mathcal{M}} \\
\| A \vee B \|^{\mathcal{M}} & = & \| A \|^{\mathcal{M}} \cup \| B \|^{\mathcal{M}} \\
\| A \to B \|^{\mathcal{M}} & = & (W \setminus \| A \|^{\mathcal{M}}) \cup \| B \|^{\mathcal{M}} \\
\| A \leftrightarrow B \|^{\mathcal{M}} & = & (\| A \|^{\mathcal{M}} \cap \| B \|^{\mathcal{M}}) \cup ((W \setminus \| A \|^{\mathcal{M}}) \cap (W \setminus \| B \|^{\mathcal{M}})) \\
\| \Box A \|^{\mathcal{M}} & = & \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \subseteq \| A \|^{\mathcal{M}}\} \\
\| \Diamond A \|^{\mathcal{M}} & = & \{w \in W \mid \mathcal{R}(w) \cap (\| A \|^{\mathcal{M}}) \neq \varnothing\}
\end{array}
$$

Para cualquier fórmula $A \in \mathcal{L}_M$: A es **verdadera en** w, si $w \in \| A \|^{\mathcal{M}}$; A es **falsa en** w, si $w \notin \| A \|^{\mathcal{M}}$.

2.4. EVALUACIÓN DE FÓRMULAS EN MODELOS FINITOS

Los problemas algorítimos que plantean la evaluación de fórmulas en modelos finitos se conocen como la **verificación (o evaluación) de modelos** (*model checking*). Estos problemas presentan dos vertientes. Sea una fórmula A y un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ (con W finito). Entonces nos planteamos lo siguiente:

1. Sea un mundo $w \in W$ previamente elegido:

   ¿Es A es verdadera en w?

2. Otro problema es calcular $\{w \in W \mid \mathcal{M}, w \models A\}$ (el conjunto de mundos de W en los que A es verdadera).

Algoritmo de etiquetado

Presentamos a continuación un algoritmo de *etiquetado* muy simple que responde a este tipo de cuestiones. Para comprobar la verdad de una fórmula A en un mundo w, el algoritmo procede por etapas, etiquetando en cada etapa los distintos mundos del modelo con subfórmulas de A, que se van añadiendo a las ya incluidas en los mundos. Para cada mundo w, el conjunto de sus etiquetas lo denotaremos mediante ETIQUETAS(w). Recuérdese, además, que el conjunto de fórmulas de una fórmula A lo hemos denotado mediante sub(A),

A cada paso, procedemos aumentando el conjunto ETIQUETAS(w) para cada mundo w, considerando los elementos de sub(A) ordenadamente, de menor a mayor longitud y terminando con A. Por la **longitud** de una fórmula entenderemos el número de símbolos no auxiliares (es decir, sin contar paréntesis) que intervienen en la misma. Por ejemplo, la longitud de $p \to \Box(q \wedge \Diamond\neg p)$ es 8.

Sea A una fórmula, $B \in$ sub(A) y w' un mundo del modelo finito $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde V se restringe a los átomos de A. Si B es:

(a)	un átomo p, etiquetamos w con p si p es verdadero en w.
(b)	$\neg B_1$, etiquetamos w con B_1 si w no está etiquetado previamente con B_1.
(c)	$B_1 \wedge B_2$, etiquetamos w con $B_1 \wedge B_2$ si w está previamente etiquetado con B_1 y con B_2.
(d)	$B_1 \vee B_2$, etiquetamos w con $B_1 \vee B_2$ si w está previamente etiquetado con B_1 o con B_2.
(e)	$\Box B_1$, etiquetamos w con $\Box B_1$ si todo $w' \in W$ tal que wRw' está ya etiquetado con B_1.
(f)	$\Diamond B_1$, etiquetamos w con $\Diamond B_1$ si algún $w' \in W$ tal que wRw' está ya etiquetado con B_1.

Las conectivas $\to$ y $\leftrightarrow$ se eliminan por definición en términos de $\neg, \wedge, \vee$.

Ejemplo 11 *Consideremos la fórmula $A = \Diamond\Box(p \to \Box q)$ y el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ siguiente:*

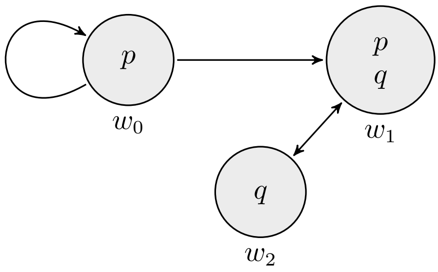
$W = \{w_0, w_1, w_2\}$;
$R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_1\rangle\}$;
$V(p) = \{w_0, w_1\}; V(q) = \{w_1, w_2\}$.

A es equivalente a $\Diamond\Box(\neg p \vee \Box q)$. Tomemos esta última fórmula como A y consideremos todos los mundos en los que es verdadera.

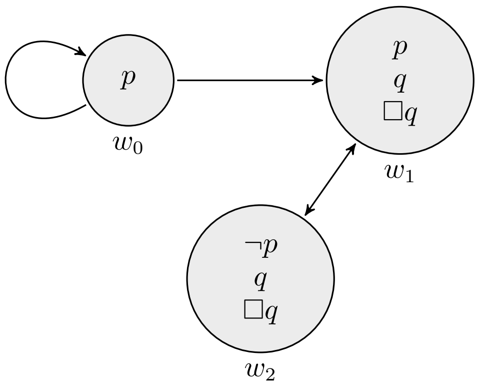
sub(A) $= \{\Diamond\Box(\neg p \vee \Box q), \Box(\neg p \vee \Box q), \neg p \vee \Box q, \neg p, \Box q, p, q\}$

Pasos del algoritmo:

- *Para las subfórmulas de A de longitud 1:* p, q.

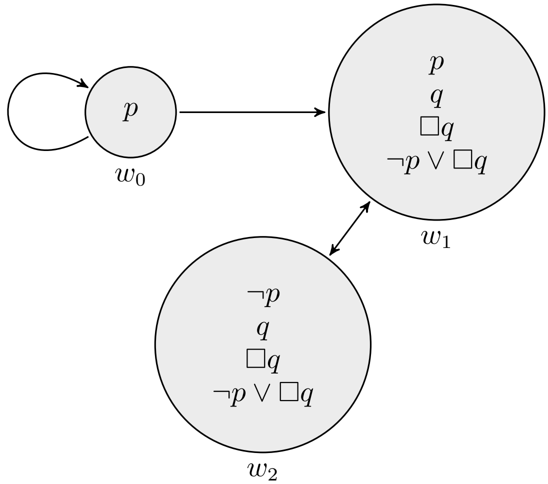


- *Para las subfórmulas de A de longitud 2:* $\neg p, \Box q$.

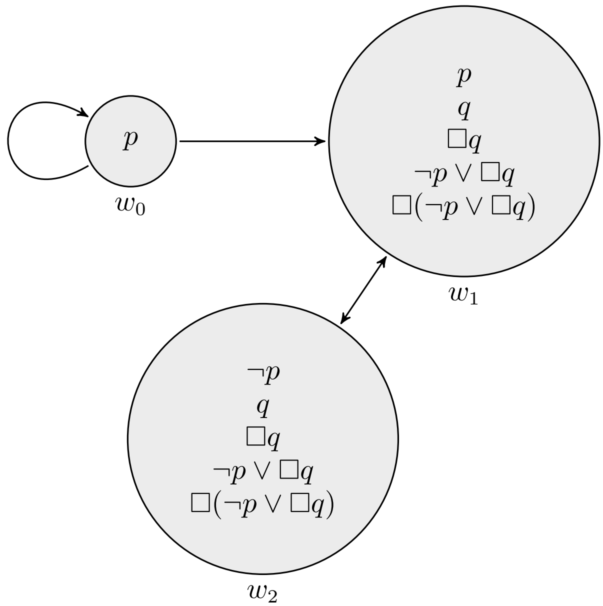


- *No hay subfórmulas de A de longitud 3 ni 4.*

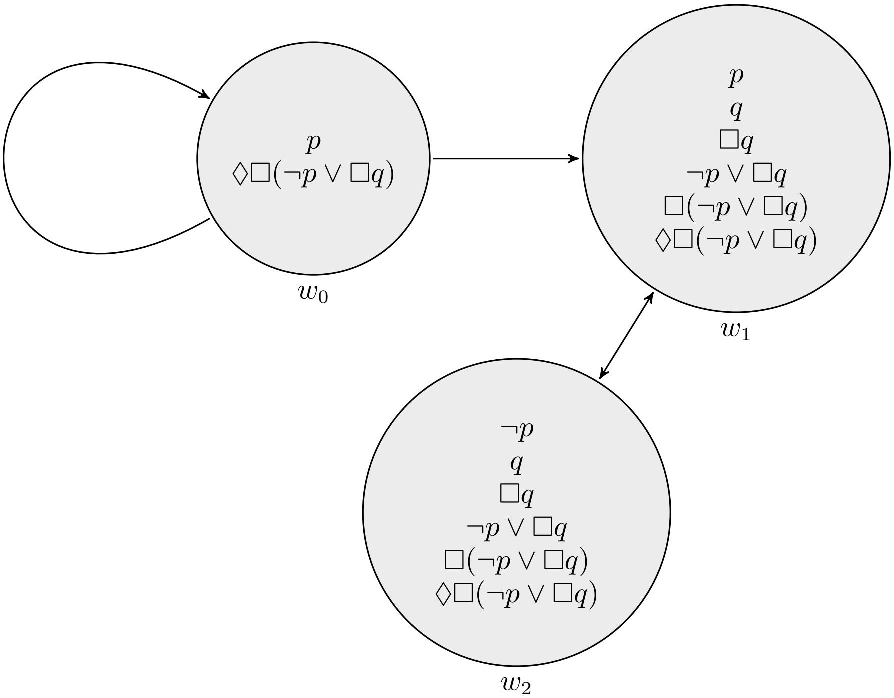
- *Para las subfórmulas de A de longitud 5:* $\neg p \vee \Box q$.



- *Para las subfórmulas de A de longitud 6:* $\Box(\neg p \vee \Box q)$.



- *Para las subfórmulas de A de longitud 7:* $\Diamond\Box(\neg p \vee \Box q)$ $(= A)$.



La fórmula $\Diamond\Box(\neg p \vee \Box q)$ etiqueta todos los mundos del modelo. Eso significa que es verdadera en todos los mundos (en este caso es válida en el modelo).

Ejercicio 4 *Consideremos únicamente el conjunto de átomos $\{p, q\}$. Sea el modelo $\langle W, R, V\rangle$, donde:*

$W = \{w_0, w_1, w_2\}$;
$R = \{\langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_0\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}$;
$V(p) = \{w_0, w_2\}$, $V(q) = \{w_1, w_2\}$.

Determine lo siguiente usando el algoritmo de etiquetado:

1. *Los mundos en los que la fórmula $\Diamond\Box p$ es verdadera.*

2. *El valor de* $\Box(p \vee \Box q)$ *en* w_0.
3. *El valor de* $\Box(\neg p \vee \Box\Diamond q)$ *en* w_1.

Un evaluador de fórmulas en modelos finitos en línea

El siguiente enlace contiene un evaluador de fórmulas en modelos finitos, denominado *Modal Logic Playground*, desarrollado por Ross Kirsling: https://rkirsling.github.io/modallogic/. La aplicación es totalmente gratuita y se ejecuta directamente en un navegador web sin necesidad de instalar ningún programa. El funcionamiento de la misma, así como la sintaxis utilizada para introducir fórmulas y editar los modelos, están explicados en la propia web y son muy intuitivos. Creemos que el software resulta de gran utilidad a la hora de practicar la comprensión del significado formal de los operadores modales básicos mediante la evaluación de fórmulas en modelos finitos. A modo de ejemplo, proponemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio 5 *Compruebe, usando Modal Logic Playground, que el ejemplo 11 está correctamente desarrollado.*

Ejercicio 6 *Valide su solución al ejercicio 4 usando Modal Logic Playground.*

Ejercicio 7 *Cree el enunciado de un ejercicio de evaluación de fórmulas en modelos finitos y valide sus soluciones usando Modal Logic Playground.*

2.5. PROPIEDADES DE LA RELACIÓN DE ACCESIBILIDAD

Pasamos ahora a definir algunas propiedades corrientes que una relación de accesibilidad puede cumplir.

Serialidad	$\forall x \exists y(xRy)$
Reflexividad	$\forall x(xRx)$
Simetría	$\forall x \forall y(xRy \to yRx)$
Transitividad	$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge yRz) \to xRz)$
Euclidianeidad	$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \to yRz)$

Observación 5 *Para el lector poco habituado a los lenguajes de primer orden, la formulación de estas propiedades puede resultar algo opaca a primera vista. Una forma de superar este escollo es pensar en la contrapartida gráfica de cada propiedad. Si entendemos que una relación binaria es un conjunto de puntos y flechas (como venimos haciendo en la representación gráfica de nuestros modelos), entonces:*

- R *es serial sii de cada punto sale una flecha.*
- R *es reflexiva sii de cada punto sale una flecha hacia sí mismo (i.e., un bucle).*
- R *es simétrica sii todas las flechas son de ida y vuelta.*
- R *es transitiva sii todo par de puntos conectados por un camino están conectados en un solo paso.*
- R *es euclideana sii siempre que de un punto salgan una o más flechas, cada destino de una de esas flechas está conectado consigo mismo y con el resto de destinos*[6]*.*

Estas propiedades se relacionan entre sí como sigue:

(a) Si R es reflexiva, entonces es serial.

(b) R es simétrica y transitiva sii R es simétrica y euclídea.

(c) R es reflexiva, simétrica y transitiva sii R es reflexiva y euclídea [7].

Ejercicio 8 *Pruebe las afirmaciones* $(a), (b)$ *y* (c) *anteriores sobre las propiedades de* R*.*

Observación 6 *La propiedad de euclidianeidad (o propiedad euclídea) tiene algunos aspectos "ocultos" en su formulación. Uno de ellos es la propiedad*

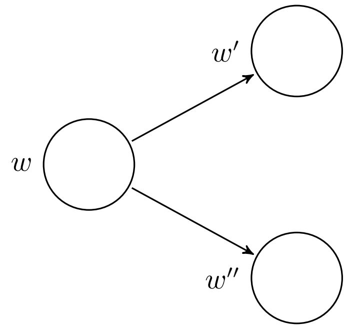
$$\forall x \forall y (xRy \to yRy)$$

conocida como **reflexividad secundaria***, que se puede deducir de la euclidianeidad.*

[6] Somos conscientes de que esta formulación puede resultar sorprendente mirando la fórmula de primer orden. No obstante, aclararemos algunos aspectos de la euclidaneidad enseguida.

[7] A una relación con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se le llama de **equivalencia**. Como puede apreciarse, la relación de equivalencia se puede definir alternativamente con las propiedades reflexiva y euclídea.

Para más detalles veamos un ejemplo que muestra cómo funciona una relación euclídea. Supongamos que tenemos el conjunto de puntos $\{w, w', w''\}$ y definimos sobre él la relación $R = \{\langle w, w'\rangle, \langle w, w''\rangle\}$; es decir, tenemos wRw' y wRw'', lo que refleja el siguiente diagrama:

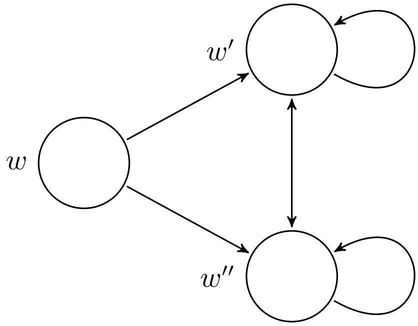


*Queremos ahora completar la relación R de manera que la relación resultante sea euclídea (nos basta con la mínima relación que cumpla esta propiedad, llamada **clausura euclídea** o **cierre euclídeo**)[8]. La euclidianeidad no solo obliga a introducir una flecha desde w' hasta w'' ($w'Rw''$) sino también una flecha desde w'' hasta w' ($w''Rw'$). Para comprobar esto basta con observar la fórmula de primer orden $\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \rightarrow yRz)$. Usemos w' y w'' como constantes y eliminemos cuantificadores, tenemos, entre otras, las dos posibles asignaciones:*

$$(wRw' \wedge wRw'') \rightarrow w'Rw'' \quad \text{y} \quad (wRw'' \wedge wRw') \rightarrow w''Rw'$$

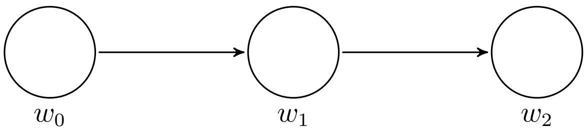
Dada nuestra hipótesis o diagrama inicial ($wRw' \wedge wRw''$), obtenemos $w'Rw''$ y $w''Rw'$, lo cual nos daría una doble flecha en el diagrama entre los puntos w' y w''. Por otro lado, la relación euclídea es reflexiva secundaria, así que estamos obligados a introducir las flechas reflexivas que representen $w'Rw'$ y $w''Rw''$. El resultado final lo refleja siguiente diagrama:

[8]Esto quiere decir que tendríamos que añadir, a la relación original reflejada en el diagrama, el menor conjunto de pares de mundos que nos permita construir una relación euclídea.



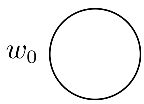
Más aún, observemos que el conjunto de puntos del diagrama $\{w', w''\}$ *define una relación* universal *en dicho conjunto (expresado en primer orden:* $\forall x \forall y\, xRy$*). Esto se denomina "racimo"*[9]*. Cualquier otro punto al que se pudiera acceder desde* w *nos obligaría a formar un racimo de nuevo con* w' *y* w'' *si queremos preservar la euclidianeidad. Todavía más, cualquier nuevo punto* w''' *al que se accediera desde* w' *(o* w''*) formaría también un racimo con los puntos* w' *y* w'' *y así sucesivamente.*

Ejercicio 9 *Realice el cierre euclídeo de la relación expresada por el siguiente diagrama:*



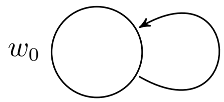
Ejercicio 10 *Defina formalmente los siguientes marcos y diga qué propiedades tiene en cada caso la relación de accesibilidad (serial, reflexiva, simétrica, transitiva, euclídea):*

Marco 1:

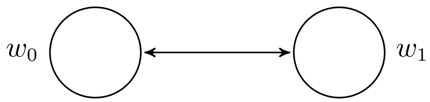


[9]En la bibliografía en lengua inglesa se denomina *cluster*.

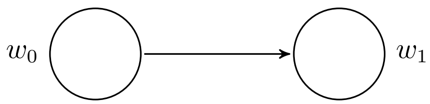
Marco 2:



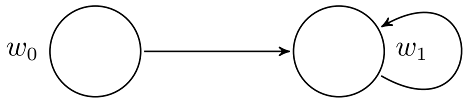
Marco 3:



Marco 4:



Marco 5:



Ejercicio 11 *Encuentre contra-modelos para las siguientes fórmulas dentro de las clases que se indican en cada caso (***recomendación***: no es necesario que use más de dos mundos en ningún item):*

(1)	$p \to \Diamond p$	*(clase: modelos seriales).*
(2)	$\Box\Diamond p$	*(clase: modelos reflexivos).*
(3)	$\Diamond p \to \Box p$	*(clase: modelos simétricos).*
(4)	$\Diamond p \to \Box\Box p$	*(clase: modelos seriales y simétricos).*
(5)	$\Box p \to p$	*(clase: modelos transitivos).*
(6)	$\Diamond p \to \Box\Diamond\Box p$	*(clase: modelos reflexivos y transitivos).*
(7)	$p \to \Diamond\Box p$	*(clase: modelos euclídeos).*
(8)	$\Diamond\Box p \to p$	*(clase: modelos transitivos y euclídeos).*

2.6. DEFINIBILIDAD EN $\mathcal{L}_M$

Cada uno de los esquemas siguientes es **válido** *exclusivamente* en la clase de marcos donde la relación de accesibilidad posee la propiedad indicada en cada caso:

D: $\Box A \to \Diamond A$	serialidad
T: $\Box A \to A$	reflexividad
B: $A \to \Box\Diamond A$	simetría
4: $\Box A \to \Box\Box A$	transitividad
5: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$	euclidianeidad

Decimos en este caso que esos esquemas *definen* ciertas propiedades de la relación de accesibilidad o también que definen las clases de marcos que satisfacen dichas propiedades. Más generalmente diremos que un esquema de fórmula A **define** una clase de marcos $\mathcal{C}$ sii se cumple que para todo marco $\langle W, R\rangle$:

(1) Si $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}$, entonces A es válida en $\langle W, R\rangle$ y

(2) Si $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}$, entonces A es inválida en $\langle W, R\rangle$.

Si $\mathcal{C}$ es la clase de todos los marcos que satisfacen una determinada propiedad $\mathcal{P}$ (reflexividad, transitividad, etc.), entonces decimos que A **define** $\mathcal{P}$.

Lo usual es definir las clases de marcos o modelos por alguna característica de la relación de accesibilidad, característica que es común a todos ellos. Así hablaremos de marcos (modelos) *seriales*, marcos (modelos) *reflexivos y simétricos*, etc. En estos casos, lo que queremos decir, en realidad, es que la relación de accesibilidad de esos marcos (o modelos) posee dichas propiedades.

Demostremos, a modo de ejemplo, que el esquema **D** define serialidad y el esquema **5** define euclidianeidad.

- ***Definibilidad de la serialidad***

Sea $\mathcal{C}_{ser}$ la clase de todos los marcos seriales. Probaremos que **D** es exclusivamente válido en la clase $\mathcal{C}_{ser}$ demostrando lo siguiente:

1. El esquema **D** (i.e. $\Box A \rightarrow \Diamond A$) es válido en todo marco $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{ser}$.
2. El esquema **D** es inválido en todo marco $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{ser}$.

Prueba de 1.

Sea $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{ser}$. Consideremos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ basado sobre $\langle W, R\rangle$. Sea $w \in W$ un mundo arbitrariamente elegido y sea $\mathcal{M}, w \models \Box A$. Como R es serial, entonces existe $w' \in W$ tal que wRw'. Por tanto, tenemos que $\mathcal{M}, w' \models A$ y, por la definición semántica de $\Diamond$, que $\mathcal{M}, w \models \Diamond A$. Así pues, $\mathcal{M}, w \models \mathbf{D}$ (por definición semántica de $\rightarrow$). Con esto es suficiente para probar la validez de **D** en $\mathcal{C}_{ser}$.

Prueba de 2.

Sea $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{ser}$. Entonces existe al menos un mundo $w \in W$ tal que w es final en W (ver la sección 2.3). Definamos un modelo basado sobre dicho marco, $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde V se puede definir arbitrariamente. Esto hace que $\mathcal{M}, w \models \Box A$ y $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond A$ y, por tanto, $\mathcal{M}, w \not\models \mathbf{D}$. Esto significa que **D** es inválido en $\mathcal{M}$; a partir de aquí el lector puede completar el razonamiento y comprobar que hemos probado, finalmente, la invalidez de **D** en todo marco de la clase complementaria de $\mathcal{C}_{ser}$; es decir, fuera de $\mathcal{C}_{ser}$.

Observación 7 *Debemos advertir que la prueba de invalidez que hemos dado es un caso especial. Lo usual es utilizar solamente una instancia del esquema para invalidarlo. Lo que ocurre es que hemos aprovechado que el mundo en el que queríamos refutar el esquema* **D** *es un mundo final, en el cual, por su singularidad semántica, podemos refutar directamente el esquema.*

- ***Definibilidad de la euclidianeidad***

Sea $\mathcal{C}_{euc}$ la clase de todos los marcos euclídeos. Probaremos lo siguiente:

1. El esquema **5** es válido en todo marco $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{euc}$.
2. El esquema **5** es inválido en todo marco $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{euc}$.

Prueba de 1.

Sea $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{euc}$. Consideremos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ basado sobre $\langle W, R\rangle$ y elijamos arbitrariamente un elemento $w \in W$. Probaremos ahora, por reducción al absurdo, que **5** es verdadero en w, es decir, supongamos lo contrario (que $\mathcal{M}, w \not\models \mathbf{5}$) para llegar a una contradicción. Entonces, por la cláusula de la relación $\models$ para $\rightarrow$, tenemos:

$$\mathcal{M}, w \models \Diamond A \quad \text{pero} \quad \mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond A$$

entonces, por las cláusulas de satisfacción para $\Diamond$ y $\Box$:

existe $w' \in W$: wRw' y $\mathcal{M}, w' \models A$ y [1]

existe $w'' \in W$: wRw'' y $\mathcal{M}, w'' \not\models \Diamond A$ [2]

Dado que R es euclídea, de [1] y [2], tenemos que existen $w', w'' \in W$ tales que

$w''Rw'$ [3]

Luego, de [1], [2] y [3], usando la cláusula de satisfacción de $\Diamond$, llegamos a que

existe $w' \in W$: wRw', $\mathcal{M}, w' \models A$ y $\mathcal{M}, w' \not\models A$ [4]

incurriendo en una contradicción.

Así pues, concluimos que $\mathcal{M}, w \models \mathbf{5}$. Con haber probado esto es suficiente.

Prueba de 2.

Sea $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{euc}$. Entonces:

existen $w, w', w'' \in W$ tales que wRw', wRw'', pero $w'Rw''$ no se da.

El modelo sobre dicho marco, $\langle W, R, V \rangle$, en el cual se define

$$V(p) = \{w''\}$$

refuta **5**, pues la instancia $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ es falsa en w. Nótese que $\mathcal{M}, w \models \Diamond p$, pues wRw' y $w' \in V(p)$. Por otro lado, $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$, ya que wRw' y $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond p$; pues el único mundo donde p es verdadero es w'' y no se da que $w'Rw''$.

Con esto damos por terminada la prueba.

Ejercicio 12 *Probar la definibilidad de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

Advirtamos que hay propiedades de la relación de accesibilidad que no pueden ser definidas en $\mathcal{L}_M$ y que, en cambio, pueden ser expresadas en la lógica de primer orden. Algunas de ellas son las siguientes:

Irreflexividad	$\forall x \neg xRx$
Asimetría	$\forall x \forall y(xRy \to yRx)$
Antisimetría	$\exists x \exists y(xRy \wedge yRx) \wedge \exists x \exists y(xRy \wedge \neg yRx)$
Intransitividad	$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \to \neg xRz)$

Esto quiere decir, intuitivamente, que no tenemos capacidad expresiva en el lenguaje $\mathcal{L}_M$ (con la semántica que hemos definido para este lenguaje) para decir "lo mismo" que las fórmulas correspondientes de primer orden de la tabla anterior. En este punto la lógica modal queda coja en cuanto a hablar de propiedades de relaciones.

No obstante, ello no quiere decir que la lógica de primer orden sea estrictamente más expresiva que la lógica modal en este sentido, pues hay propiedades de segundo orden que sí puede expresar la lógica modal y no la lógica de primer orden. Un ejemplo de esto es la propiedad de una relación de ser *inversamente bien fundada*: dado un conjunto A sobre el que se ha definido una relación binaria R se dice que R es inversamente bien fundada si cualquier subconjunto de A que no sea vacío tiene un elemento *maximal* respecto a R. Un elemento $a \in A$ es maximal respecto a R si cumple que para todo elemento b de A, distinto de a, no ocurre que aRb.

Esta propiedad equivale a decir que no hay una secuencia infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de elementos de A tales que $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$. No hay una fórmula en la lógica modal que defina semejante propiedad de segundo orden, pero sí que se puede recoger bajo la hipótesis de que R sea transitiva (una propiedad de primer orden). En este caso, contamos en la lógica modal con el esquema de fórmula $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$, que define ambas propiedades conjuntamente.

3. AXIOMÁTICA

3.1. PRELIMINARES

A lo largo de este capítulo, contemplaremos distintas lógicas desde un punto de vista axiomático. Desde esta perspectiva, una lógica L será un conjunto de fórmulas, donde hay un subconjunto específico de fórmulas llamadas **axiomas** y está *cerrado* bajo un conjunto dado $\mathcal{R}$ de *reglas de inferencia*.

Una **regla de inferencia** es un par ordenado $\langle \{A_1, ..., A_n\}, A \rangle$ (con $n \geq 0$) donde estamos usando $A_1, ..., A_n, A$ para referirnos a esquemas de fórmulas, no a fórmulas[1]. Los esquemas $A_1, \ldots, A_n$ se denominan **hipótesis** o **premisas** de la regla y el esquema A es la **conclusión** de la misma. Por ejemplo, el *Modus Ponens* se define por el par de la forma $\langle \{A \to B, A\}, B \rangle$. Una **instancia** de una regla $\mathbf{R}$ es el resultado de sustituir uniformemente las metavariables que aparecen a lo largo de las premisas (si las hay) y la conclusión de $\mathbf{R}$ por fórmulas. Por ejemplo, dos instancias de la regla *Modus Ponens* son

$$\langle \{p \to q, p\}, q \rangle \quad \text{y} \quad \langle \{\Box p \to \Diamond \neg q, \Box p\}, \Diamond \neg q \rangle.$$

Decimos que un conjunto de fórmulas Γ está **cerrado** bajo una regla de inferencia $\mathbf{R}$ cuando para cualquier instancia de $\mathbf{R}$ ocurre que si Γ contiene las premisas de dicha instancia, entonces Γ contiene también su conclusión. Por ejemplo, si $\mathbf{R}$ es el *Modus Ponens*, Γ está cerrado bajo esta regla y $p \to q, p \in \Gamma$, entonces $q \in \Gamma$.

Especificar un conjunto de axiomas y un conjunto de reglas de inferencia para definir una lógica L es un paso para su axiomatización, la cual requiere, además, al menos otras dos condiciones: (1) que el conjunto de axiomas sea *decidible* [2],

[1] El hecho de que en una regla se utilicen esquemas y no fórmulas diferencia a las reglas de inferencia de los argumentos. Es decir, los componentes de una regla son elementos del metalenguaje, mientras que los componentes de un argumento son elementos del lenguaje objeto.

[2] Un ejemplo típico de lógica no axiomatizable cuando falta esta característica es la lógica

esto es, que haya un *método efectivo* que determine si una fórmula es un axioma y (2) para cada regla debe haber un método efectivo para determinar si, dado un conjunto de fórmulas y una fórmula cualquiera, pueden constituirse respectivamente como premisas y conclusión de la regla. Suponiendo que se cumplan (1) y (2), podemos decir que la lógica L está **axiomatizada** [3] por los axiomas y las reglas. La axiomatización nos permite introducir el concepto de *demostración* o *prueba*, que genera, de forma constructiva, precisamente todos los elementos de L. Una **demostración en** L de una fórmula A es una secuencia finita de fórmulas, $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 1)$, tal que cada $A_i(1 \geq i \geq n)$ satisface lo siguiente:

- A_i es un axioma de L; o bien
- A_i procede por aplicación de una regla de inferencia de $\mathcal{R}$ a una o más fórmulas anteriores en la secuencia.
- $A_n = A$.

Si hay una demostración en L de una fórmula A se dice que A es un **teorema de** L y se representa mediante $\vdash_{\mathsf{L}} A$. En realidad, los teoremas de L son justamente las fórmulas de L; así que identificamos una lógica con el conjunto de sus teoremas (que incluye, claro está, sus axiomas).

Dado un par de lógicas L y L', si L $\subseteq$ L' diremos que L' **extiende** L o que L' es una **extensión de** L. Dada una lógica L y un conjunto de fórmulas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ que no se hallan en L, usaremos la notación L $+ \{A_1, \ldots, A_n\}$ para indicar la extensión de L que resulta de añadir a la axiomatización de L los nuevos axiomas $A_1, \ldots, A_n$. Si extendemos L merced a la adición de un solo axioma, sea A, anotaremos simplemente L $+ A$ en lugar de L $+ \{A\}$. En muchas ocasiones, y en este libro seguiremos esta costumbre, en vez de axiomas se usan **esquemas de axioma**. Al introducir esquemas de axioma lo que estamos haciendo es incluir como axiomas todas las instancias de los esquemas.

En una demostración no hay hipótesis o premisas. Esto queda recogido por la noción de *deducibilidad* o *derivabilidad*, que no trataremos en detalle en el caso

$$\{A \mid \mathcal{M}, w \models A\} \text{ (para cualquier modelo } \mathcal{M} \text{ y mundo } w \text{ en } \mathcal{M})$$

que es cerrada bajo la regla de reiteración $\langle \{A\}, A \rangle$; ya que no podemos decidir, en general, si una fórmula pertenece a dicho conjunto o no. Es decir, hay mundos de ciertos modelos tales que el conjunto de fórmulas verdaderas en ellos no es decidible. Así que no podemos especificar axiomas que generen esta lógica.

[3] Hay autores, por ejemplo Chellas, 1980, que exigen una tercera condición para la axiomatización de una lógica y es que que el número de reglas con el que cuente sea finito.

axiomático, y que nos permite deducir una fórmula a partir de un conjunto de supuestos. Se puede definir la noción de deducibilidad (o derivabilidad) de la siguiente manera: Una fórmula A es **deducible** (o **derivable**) **de** un conjunto de fórmulas Γ en L (en símbolos: $\Gamma \vdash_{\mathsf{L}} A$) sii existen fórmulas $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$ $(n \geq 0)$ tales que $\vdash_{\mathsf{L}} (A_1 \wedge \ldots A_n) \rightarrow A$.

3.2. LÓGICAS MODALES NORMALES

En esta sección haremos una presentación axiomática de lógicas proposicionales modales llamadas *normales*. Una lógica modal L es **normal** cuando satisface lo siguiente:

(1) L es un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_M$ que contiene:

(1.1) Todas las tautologías de la lógica proposicional clásica[4].

(1.2) Todas las instancias del esquema modal **K**:

$$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B).$$

(1.3) Todas las instancias del esquema modal **Def** $\Diamond$:

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A.$$

(2) L está cerrado bajo las siguientes reglas de inferencia:

(2.1) *Modus Ponens* (MP), es decir: Si $A \rightarrow B, A \in$ L, entonces $B \in$ L.

(2.2) *Necesidad* (N), es decir: Si $A \in$ L, entonces $\Box A \in$ L.

La **mínima lógica modal normal** se denomina K[5]En honor de Saul Aaron Kripke. es decir, K es el *menor* conjunto de fórmulas (respecto de la relación $\subseteq$) que satisface las condiciones (1) y (2) anteriores; pues, podemos tener nuevas lógicas que satisfagan esas mismas condiciones y, además, cumplan otras. Estas lógicas serían diferentes extensiones de K. Decimos también que K está **axiomatizada** (o

[4]Las tautologías están constituidas por fórmulas de $\mathcal{L}_M$ cuya forma es tautológica es decir, por todas las instancias en $\mathcal{L}_M$ de todos esquemas válidos de la lógica proposicional. Por ejemplo, tanto $p \rightarrow p$ como $\Box p \rightarrow \Box p$ son tautologías.

[5],

que está **generada**) por las tautologías, los esquemas de axioma $\mathbf{K}$ y **Def**$\Diamond$, y las reglas de inferencia *MP* y *N*.

Como ya hemos advertido, hemos hecho una presentación axiomática usando esquemas de axioma y no axiomas propiamente dichos. Si hubiéramos optado por usar axiomas y no esquemas de axioma tendríamos que haber incorporado la regla de sustitución uniforme. Una lógica L está cerrada bajo **sustitución uniforme** sii se cumple lo siguiente: si $A \in$ L, entonces para todo átomo $p \in$ At y toda fórmula $B \in \mathcal{L}_M$, $A[p/B] \in$ L. La expresión "$A[p/B]$" significa la fórmula resultante de sustituir cada aparición de p en A por B. Por ejemplo, sea $A = p \to \Box(p \wedge q)$ y $B = \Diamond p$, entonces $A[p/B] = \Diamond p \to \Box(\Diamond p \wedge q)$ [6].

Por otro lado, también podríamos haber optado por introducir $\Diamond$ como abreviatura de $\neg\Box\neg$ por definición en vez de usar el esquema **Def**$\Diamond$ [7].

Definimos a continuación algunas normales extensiones de K muy conocidas:

D:	K + $\Box A \to \Diamond A$
T:	K + $\Box A \to A$
B:	T + $A \to \Box\Diamond A$
S4:	T + $\Box A \to \Box\Box A$
S5:	T + $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

Tabla 3.1

[6]Podemos obtener una versión generalizada muy útil de la regla de sustitución uniforme, como la siguiente. si $A \in$ L, entonces para átomos cualesquiera $p_1, \ldots, p_n \in$ At y fórmulas cualesquiera $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, se tiene que $A[p_1/B_1, \ldots, p_n/B_n] \in$ L; donde la expresión "$A[p_1/B_1, \ldots, p_n/B_n]$" significa la fórmula resultante de sustituir cada aparición de p_i en la fórmula A por B_i.

[7]Curiosamente, esta opción solo es posible si se considera $\Box$ como el operador modal primitivo. Si, por el contrario, optamos por usar $\Diamond$ como primitivo, entonces la inclusión del esquema de axioma que introduce $\Box$, es decir, del esquema $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ es necesaria para obtener una axiomatización de K. En otras palabras, si usamos $\Diamond$ como primitivo y definimos $\Box$ como una abreviatura de $\neg\Diamond\neg$, no obtenemos K (véase Wen, 2020 para un argumento detallado al respecto).

3.2.1. Ejemplos de demostraciones

En la práctica de la demostración conviene utilizar teoremas previamente demostrados a modo de axiomas así como reglas de inferencia ya obtenidas. Debemos advertir, además, que será frecuente que digamos que determinado esquema es un teorema de L; lo que en realidad significamos con esto es que cualquier instancia del esquema es un teorema de L.

Cualquier lógica modal normal L está cerrada bajo las siguientes reglas de inferencia:

(LP) Si A es *consecuencia tautológica* de $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 0)$ [8] y $A_1, \ldots, A_n \in$ L, entonces $A \in$ L[9].

$(R\,\Box_1)$ Si $A \to B \in$ L, entonces $\Box A \to \Box B \in$ L.

$(R\,\Box_2)$ Si $A \leftrightarrow B \in$ L, entonces $\Box A \leftrightarrow \Box B \in$ L.

$(R\,\Diamond_1)$ Si $A \to B \in$ L, entonces $\Diamond A \to \Diamond B \in$ L.

$(R\,\Diamond_2)$ Si $A \leftrightarrow B \in$ L, entonces $\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B \in$ L.

Para justificar el uso general de todas estas reglas emplearemos la base de K, que es común a toda lógica normal. Suele llamarse **reglas derivadas** a las reglas que se obtienen a partir de la axiomatización de una lógica.

La regla (LP) es una regla especial, pues apela a la semántica. Si A es *consecuencia tautológica* de $A_1, \ldots, A_n$, entonces $A_1 \to (\ldots (A_n \to A) \ldots)$ es una tautología y, por la condición (1.1) de la axiomatización de K, es un teorema de K; por tanto, de cualquier lógica normal L. Si, además, $A_1, \ldots, A_n$ son teoremas de L, entonces por n aplicaciones de (MP) tendremos que A es también un teorema de L.

La aplicación de la regla (LP) subsume, como puede apreciarse, la introducción de tautologías y el *Modus Ponens*.

Probemos que $(R\,\Box_1)$ es una regla derivada como sigue:

[8] Es decir, cuando todas las instancias en $\mathcal{L}_M$ de $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A$ son tautologías (véanse los preliminares formales). Adviértase, además, que cuando $n = 0$, entonces A es consecuencia lógica del conjunto vacío; esto equivale a afirmar que se trata de una tautología de la lógica proposicional.

[9] (LP) es una abreviatura de "Lógica Proposicional"

1. $A \to B$ hipótesis (teorema de K)
2. $\Box(A \to B)$ de 1 por (N)
3. $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ **K**
4. $\Box A \to \Box B$ de 2 y 3 por (LP)

Probemos ahora que $(R\Diamond_1)$ es una regla derivada:

1. $A \to B$ hipótesis (teorema de K)
2. $\neg B \to \neg A$ de 1 por (LP)
3. $\Box\neg B \to \Box\neg A$ de 2 por $R\Box_1$
4. $\neg\Box\neg A \to \neg\Box\neg B$ de 3 por (LP)
5. $\Diamond A \to \Diamond B$ de 4 por **Def** $\Diamond$ y (LP)

Ejercicio 13 *Demuestre que K está cerrada bajo las reglas* $(R\Box_2)$ *y* $(R\Diamond_2)$.

Los siguientes teoremas nos permiten intercambiar operadores modales en cualquier lógica normal L:

Def $\Box$. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

Neg $\Box$. $\neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$

Neg $\Diamond$. $\neg\Diamond A \leftrightarrow \Box\neg A$

Prueba de **Def** $\Box$:

1. $\Diamond\neg A \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg A$ **Def** $\Diamond$ (sustituyendo A por $\neg A$)
2. $A \leftrightarrow \neg\neg A$ (LP)
3. $\Box A \leftrightarrow \Box\neg\neg A$ de 2 por $R\Box_2$
4. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ de 1 y 3 por (LP)

Observación 8 (El principio de sustitución uniforme en el metalenguaje) *En la prueba anterior (de* **Def** $\Box$*) hemos indicado en la línea 1, entre paréntesis, la sustitución de* A *por* $\neg A$ *efectuada en el esquema* **Def** $\Diamond$*. En este punto subyace un mecanismo de* sustitución uniforme *a nivel metalingüístico (usando esquemas de* *fórmulas). Ya comentamos en la axiomatización de K que no necesitábamos esta regla en el lenguaje objeto ($\mathcal{L}_M$), ya que en la axiomatización presente utilizamos esquemas de axioma que nos permiten contar con todas las instancias que nos proporcionaría la aplicación de la regla de sustitución uniforme. Sin embargo, en las pruebas metalingüísticas la costumbre es usar dicho mecanismo intuitivamente. El hecho de indicar cómo hacemos las sustituciones de esquemas por esquemas efectuadas en cada caso es para proporcionar mayor claridad y seguiremos esta práctica en lo sucesivo.*

Ejercicio 14 *Pruebe que* **Neg** $\Box$ *y* **Neg** $\Diamond$ *son teoremas de K.*

Ejemplo 12 *Probaremos que* $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ *es un teorema de K.*

1. $\Box(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box\neg q)$	*instancia de* **K**
2. $(\Box p \wedge \neg\Box\neg q) \rightarrow \neg\Box(p \rightarrow \neg q)$	*de 1 por* (LP)
3. $\Diamond q \leftrightarrow \neg\Box\neg q$	*instancia de* **Def** $\Diamond$
4. $(\Box p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \neg\Box\neg q)$	*de 3 por* (LP)
5. $\neg\Box(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \Diamond\neg(p \rightarrow \neg q)$	*instancia de* **Neg** $\Box$
6. $\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$	(LP)
7. $\Diamond\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow \Diamond(p \wedge q)$	*de 6 por* $R\Diamond_2$
8. $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$	*de 2, 4, 5 y 7 por* (LP)

Merece la pena que comentemos un par de cuestiones relativas a esta demostración.

- *Por un lado, se muestra el uso de esquemas para instanciar fórmulas con la forma debida, evitando así la regla de sustitución uniforme ya comentada en la axiomatización de K.*
- *Por otro lado, se puede comprobar la utilidad de* (LP)*. La última línea (8) es consecuencia tautológica de las líneas que se indican en la línea 8 (a saber: 2, 4, 5, 7). Estas líneas tienen la forma proposicional* $A \rightarrow B$ *(2),* $C \leftrightarrow A$ *(4),* $B \leftrightarrow D$ *(5) y* $D \leftrightarrow E$ *(7). Nótese que* $C \rightarrow E$ *(8) es consecuencia tautológica de dichas líneas, pues*

$$\Big((A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow A) \wedge (B \leftrightarrow D) \wedge (D \leftrightarrow E)\Big) \rightarrow (C \rightarrow E)$$

es fácilmente reconocible como una tautología. No obstante, en la práctica no economizaremos pasos en exceso usando la regla (LP) para dotar de mayor claridad a las demostraciones.

Ejercicio 15 *Demuestre lo siguiente:*

(1) $\vdash_K \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

(2) $\vdash_K \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

Los siguientes esquemas podrían usarse en lugar de **T**, **B**, **4** y **5** para axiomatizar las lógicas T, B, S4 y S5 respectivamente:

T$\Diamond$. $A \to \Diamond A$ (teorema de T).

B$\Diamond$. $\Diamond\Box A \to A$ (teorema de B).

4$\Diamond$. $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ (teorema de S4).

5$\Diamond$. $\Diamond\Box A \to \Box A$ (teorema de S5).

Probemos que **T**$\Diamond$ es un teorema de T:

1. $\Box\neg A \to \neg A$	**T** (sustituyendo A por $\neg A$)
2. $A \to \neg\Box\neg A$	de 1 por (LP)
3. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$	**Def**$\Diamond$
4. $A \to \Diamond A$	de 2 y 3 por (LP)

Probemos que **B**$\Diamond$ es un teorema de B:

1. $\neg A \to \Box\Diamond\neg A$	**B** (sustituyendo A por $\neg A$)
2. $\neg\Box\Diamond\neg A \leftrightarrow \Diamond\neg\Diamond\neg A$	**Neg**$\Box$ (sustituyendo A por $\Diamond\neg A$)
3. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	**Def**$\Box$
4. $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg\Diamond\neg A$	de 3 por $R\Diamond_2$
5. $\Diamond\Box A \to A$	de 1, 2 y 4 por (LP)

Ejercicio 16 *Demuestre que* **4**$\Diamond$ *es un teorema de S4 y* **5**$\Diamond$ *es un teorema de S5.*

Las siguientes demostraciones muestran que ciertos esquemas de axioma de algunas lógicas son teoremas de otras. Esto es importante y usaremos estos resultados más adelante.

T1. $\Box A \to \Diamond A$ (**D**) es un teorema de T:

1. $\Box A \to A$ **T**
2. $A \to \Diamond A$ **T**$\Diamond$ (teorema de T)
3. $\Box A \to \Diamond A$ de 1 y 2 por (LP)

T2. $A \to \Box\Diamond A$ (**B**) es un teorema de S5:

1. $A \to \Diamond A$ **T**$\Diamond$ (teorema de S5 [10])
2. $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ **5**
3. $A \to \Box\Diamond A$ de 1 y 2 por (LP)

T3. $\Box A \to \Box\Box A$ (**4**) es un teorema de S5:

1. $\Diamond\Box A \to \Box A$ **5**$\Diamond$ (teorema de S5)
2. $\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$ de 2 por $R\Box_1$
3. $\Box A \to \Box\Diamond\Box A$ **B** (sustituyendo A por $\Box A$[11])
4. $\Box A \to \Box\Box A$ de 2 y 3 por (LP)

Ejercicio 17 *Pruebe lo siguiente:*

(1) $\vdash_D \Diamond p \lor \Diamond\neg p$

(2) $\vdash_D \Box(p \lor \Box q) \to (\Diamond p \lor \Diamond\Diamond q)$

(3) $\vdash_T \Box\Box p \to \Diamond\Box\Diamond p$

(4) $\vdash_T (\Diamond p \to \Box q) \to (\Box p \to \Diamond q)$

(5) $\vdash_B \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

(6) $\vdash_B \Diamond(\Box p \lor q) \to (p \lor \Diamond p)$

[10] Nótese que la prueba de **T**$\Diamond$ en T es también una prueba en S5.
[11] Pues **B** está en S5 por T2.

(7) $\vdash_{S4} \Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$

(8) $\vdash_{S4} \big((p \to \Box\Diamond\Diamond q) \wedge \Box p\big) \to \Diamond q$

(9) $\vdash_{S5} \Diamond\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$

(10) $\vdash_{S5} \Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$

3.3. CARACTERIZACIÓN DE LAS LÓGICAS MODALES NORMALES

Hemos presentado una visión sintáctica de lo que es una lógica en el apartado 3.1. Otra forma de considerar una lógica es desde el punto de vista semántico. Siguiendo esta perspectiva, dada una clase $\mathcal{C}$ de marcos (o modelos), al conjunto de fórmulas válidas en $\mathcal{C}$ le llamaremos **la lógica de** $\mathcal{C}$ y la denotaremos $log(\mathcal{C})$. En esta sección correlacionaremos ambas nociones (la sintáctica y la semántica) y presentaremos varias propiedades que las relacionan. Lo que queremos saber finalmente es si una lógica dada L, definida axiomáticamente como hemos hecho hasta ahora, es justamente la lógica de alguna clase $\mathcal{C}$ de marcos (o modelos). Tenemos a este respecto las siguientes definiciones:

Sea L una lógica modal normal y $\mathcal{C}$ una clase de marcos (o modelos). Entonces:

- L es **correcta** respecto de $\mathcal{C}$ sii L $\subseteq log(\mathcal{C})$.
  Es decir, todo teorema de L es válido en $\mathcal{C}$.
  O lo que es igual: Si $\vdash_{\mathsf{L}} A$, entonces $\models_{\mathcal{C}} A$.
- L es **completa** respecto de $\mathcal{C}$ sii $log(\mathcal{C}) \subseteq$ L.
  Es decir, toda fórmula válida en $\mathcal{C}$ es un teorema de L.
  O lo que es igual: Si $\models_{\mathcal{C}} A$, entonces $\vdash_{\mathsf{L}} A$.
- L está **caracterizada** por la clase $\mathcal{C}$ sii L $= log(\mathcal{C})$.
  Es decir, L es correcta y completa respecto de $\mathcal{C}$.
  O lo que es igual: $\vdash_{\mathsf{L}} A$ sii $\models_{\mathcal{C}} A$.

Teorema 1 *(**Caracterización**) Las siguientes lógicas están caracterizadas por las clases de marcos (modelos) que se indican en cada caso.*

CARACTERIZACIÓN	
LÓGICA	**CLASE $\mathcal{C}$ DE MARCOS (MODELOS)**
K	*todos*
D	*seriales*
T	*reflexivos*
B	*reflexivos y simétricos*
S*4*	*reflexivos y transitivos*
S*5*	*reflexivos y euclídeos* [12]

La técnica para demostrar estos resultados supuso una de las grandes revoluciones en la historia moderna de la lógica modal, pero desafortunadamente queda fuera del alcance de este libro. El lector interesado puede encontrar las demostraciones, por ejemplo, en el libro de Chellas, 1980, quien llama "determinación" a la caracterización. También puede consultarse Hughes y Cresswell, 1984, van Benthem, 2010 o Blackburn et al., 2002, entre muchos otros.

3.4. RELACIÓN DE FUERZA ENTRE LAS LÓGICAS MODALES NORMALES

Consideremos un par de lógicas distintas L y L' (i.e., L $\neq$ L'). Diremos que: L es **más débil** que L' cuando L $\subset$ L'; es decir, cuando todo teorema de L es un teorema de L' y, además, al menos un teorema de L' no lo es de L. También se dice en este caso que L' es **más fuerte** que L. Si ninguna de las lógicas, L y L', es más fuerte que la otra, decimos entonces que L y L' son **independientes**.

La relación de fuerza entre las lógicas normales que hemos venido estudiando se puede representar como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{S4} \arrow[dr] & \\
\mathrm{K} \arrow[r] & \mathrm{D} \arrow[r] & \mathrm{T} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathrm{S5} \\
 & & & \mathrm{B} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

[12] Recuérdese que esta clase es la misma que la clase de marcos (modelos) reflexivos, simétricos y transitivos o clase de marcos (modelos) de equivalencia.

En el diagrama la flecha representa la relación de fuerza. Si una flecha parte de una lógica L y llega a una lógica L', entonces L' es más fuerte que L. Dicha relación es de *orden parcial estricto* (irreflexiva, antisimétrica y transitiva)[13]. Así, para justificar el diagrama basta con que probemos lo siguiente:

- D es *más fuerte* que K.
- T es *más fuerte* que D.
- B y S4 son *más fuertes* que T.
- B y S4 son *independientes*.
- S5 es la lógica *más fuerte*.

Justifiquemos que la lógica D, tal y como ha sido definida, es realmente más fuerte que K. D es una extensión de K, es decir, K $\subseteq$ D, por definición de D. Sin embargo, veamos que no todo teorema de D lo es de K y, por tanto, K $\subset$ D. Para ello es suficiente con probar que la instancia del esquema **D**, $\Box p \rightarrow \Diamond p$, que sí es un teorema de D obviamente, no es un teorema de K. Recordemos el teorema de corrección de K (usando modelos):

$$(*_{\mathsf{K}}) \qquad \text{Si } A \in \mathsf{K}, \text{ entonces } A \in log(\mathcal{C})$$

(siendo $\mathcal{C}$ la clase de todos los modelos). Si probamos entonces que

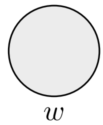
$$\Box p \rightarrow \Diamond p \notin log(\mathcal{C})$$

se sigue que $\Box p \rightarrow \Diamond p \notin$ K (es decir, $\Box p \rightarrow \Diamond p$ no es un teorema de K). Ahora definamos un modelo, $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, que invalide $\Box p \rightarrow \Diamond p$ como exponemos a continuación:

$$W = \{w\}; R = \varnothing; V(p) = \varnothing.$$

Nótese que hemos elegido un modelo no serial, porque no nos serviría uno serial para la refutación que pretendemos (tengamos en cuenta que $\Box p \rightarrow \Diamond p$ es válida en todo modelo serial). Gráficamente, el modelo anterior puede representarse así:

[13] Véanse las secciones 2.5 y 2.6 para la definición de estas propiedades.



En realidad, el valor de p en w es irrelevante, pues w es un mundo final, donde se cumple entonces que $\mathcal{M}, w \models \Box p$ y $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond p$; esto hace que $\Box p \to \Diamond p$ sea falsa en w y, por tanto, que sea inválida en el modelo propuesto. Así pues, la fórmula $\Box p \to \Diamond p$ no es válida en la clase $\mathcal{C}$ de todos los modelos, es decir, $\Box p \to \Diamond p \notin log(\mathcal{C})$, luego $\Box p \to \Diamond p \notin$ K como pretendíamos mostrar.

Comprobemos ahora que T es más fuerte que D. Tenemos que D $\subseteq$ T, pues por el teorema T1 de la sección 3.2.1 el esquema **D** es un teorema de T. Por tanto, todo lo generado por la axiomatización de D, que es la lógica D, se genera también por la axiomatización de T. Veamos que, sin embargo, algún miembro de T no está en D, por lo que la relación de inclusión es estricta, es decir, D $\subset$ T. Al igual que hemos hecho en el caso anterior, hemos de encontrar al menos una fórmula de T que no pertenezca a D.

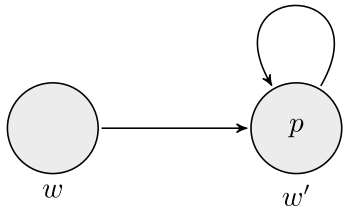
Para ello aprovechemos la corrección de D respecto a la clase de modelos seriales ($\mathcal{C}_{ser}$)

$$(*_{\mathsf{D}}) \qquad \text{Si } A \in \mathsf{D}, \text{ entonces } A \in log(\mathcal{C}_{ser})$$

y mostremos un modelo serial que invalide una instancia del esquema **T** como $\Box p \to p$ (que sí es un miembro de T). Con esto probaríamos que $\Box p \to p \notin log(\mathcal{C}_{ser})$ y, por consiguiente, $\Box p \to p \notin$ D. Definamos entonces el siguiente modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$, donde:

$$W = \{w, w'\}; R = \{\langle w, w' \rangle, \langle w', w' \rangle\}; V(p) = \{w'\}.$$

Gráficamente:



Nótese que este modelo es serial, pero no reflexivo (en un modelo reflexivo no habría modo de refutar $\Box p \to p$). En este modelo tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Box p$ (ya que el único mundo al que accede w es w' y $\mathcal{M}, w' \models p$); pero $\mathcal{M}, w \not\models p$; por tanto $\Box p \to p$ es falsa en w y ello invalida dicha instancia de **T** en el modelo. Por lo que ya hemos dicho anteriormente con esto es suficiente.

Ejercicio 18 *Probar que tanto* B *como* S4 *son más fuertes que* T.

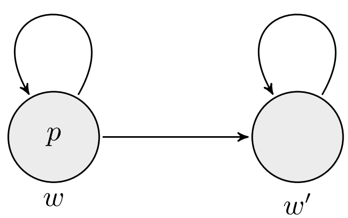
Para demostrar la independencia de B y S4 es suficiente con que mostremos que

(a) hay al menos un teorema de B que no lo es de S4 (luego B $\not\subseteq$ S4);

(b) hay al menos un teorema de S4 que no lo es de B (luego S4 $\not\subseteq$ B).

Probado (a) y (b), obtendríamos que B y S4 son dos lógicas distintas donde una no es más fuerte que la otra.

Prueba de (a): Consideremos la instancia de **B**: $p \to \Box\Diamond p$ (teorema de B). El siguiente modelo pertenece a la clase de modelos reflexivos y transitivos (que denotaremos $\mathcal{C}_{ref \cap tran}$) e invalida dicha instancia (que es falsa en w). Nótese que hemos tenido la precaución de que el modelo no sea simétrico.



El modelo del diagrama anterior muestra que $p \to \Box\Diamond p \notin log(\mathcal{C}_{ref\cap tran})$. Luego, por el teorema de corrección de S4 respecto de $\mathcal{C}_{ref\cap tran}$, obtenemos que $p \to \Box\Diamond p \notin \mathrm{S4}$. Así que B $\not\subseteq$ S4.

Ejercicio 19 *Para terminar de probar que* B *y* S4 *son independientes, demuestre* (b)*: S4 $\not\subseteq$ B.*

Veamos, por último, que S5 es la lógica modal normal más fuerte. Para ello, hemos de comprobar simplemente dos cosas:

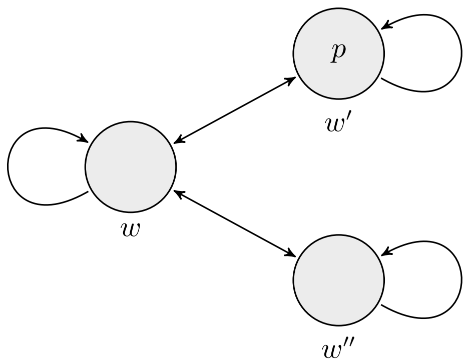
(i) S5 es más fuerte que B.

(ii) S5 es más fuerte que S4.

Prueba de (i): La diferencia entre B y S5 respecto de sus axiomatizaciones reside en que la axiomatización de B contiene el esquema **B** mientras que la de S5 contiene el esquema **5**. Sin embargo, **B** es un teorema de S5 (teorema T2, apartado 3.2.1): luego lo que genera la axiomatización de B lo genera igualmente la de S5; así que todo teorema de B lo es de S5, es decir, B $\subseteq$ S5. Sin embargo, no todo teorema de S5 lo es de B (Luego B $\subset$ S5), como podemos comprobar a continuación. Consideremos la instancia de **5**: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ (que es un teorema de S5). Conforme a la corrección de B respecto a la clase de modelos reflexivos y simétricos ($\mathcal{C}_{ref\cap sim}$) tenemos:

$$(*_{\mathrm{B}}) \qquad \text{Si } A \in \mathrm{B}, \text{ entonces } A \in log(\mathcal{C}_{ref\cap sim}).$$

El siguiente modelo (que expresamos gráficamente) es reflexivo y simétrico e invalida $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ (esta fórmula es falsa en w), por tanto, $\Diamond p \to \Box\Diamond p \notin log(\mathcal{C}_{ref\cap sim})$; así que $\Diamond p \to \Box\Diamond p \notin$ B.



Nótese que el modelo es reflexivo y simétrico, pero no euclídeo (esto es importante, pues un modelo euclídeo validaría $\Diamond p \to \Box\Diamond p$).

Ejercicio 20 *Pruebe la condición* (ii)*:* S5 *es más fuerte que* S4*.*

3.5. MARCOS-L Y MODELOS-L

Consideremos una lógica L cualquiera. Un **marco-L** es un marco donde todas los teoremas de L son válidos. Por ejemplo, cualquier marco reflexivo (esto es, donde la relación de accesibilidad cumple la propiedad reflexiva) es un marco-T. Lo mismo podemos decir respecto de los modelos; esto es, un **modelo–L** es un modelo donde son válidos todos los teoremas de L. Claramente, si un marco es un marco-L, entonces todos los modelos basados sobre dicho marco son modelos-L. Esto quiere decir que una clase de marcos (modelos)-L es una clase con respecto a la cual L es correcta. Ahora podemos enunciar lo siguiente:

Teorema 2 *Si L y L' son lógicas tales que L $\subseteq$ L', entonces la clase de marcos-L' está incluida en la clase de marcos-L.*

Este resultado es claro porque si $\langle W, R\rangle$ es un marco-L', entonces todos los teoremas de L' son válidos en $\langle W, R\rangle$ y como L $\subseteq$ L', todos los teoremas de L también lo son de L$'$. Así que $\langle W, R\rangle$ sería igualmente un marco-L. Se da, pues, una relación inversa entre el "tamaño" de una lógica L y la clase de marcos respecto a la cual L es correcta, es decir, a medida que se extiende L la clase de marcos va siendo "más pequeña" (respecto de $\subseteq$). Esto mismo puede enunciarse acerca de los modelos. Este efecto se explica porque a medida que añadimos nuevos axiomas tenemos que satisfacer en la semántica nuevas propiedades definibles por los nuevos axiomas, así que la clase de marcos (y consecuentemente de modelos) tiene cada vez más exigencias que cumplir y se va reduciendo. Nótese, por ejemplo, lo que pasa con las diferentes lógicas normales expuestas: K es la lógica más débil de todas las lógicas normales, pero la clase de marcos (modelos)-K es la más amplia de todas; en cambio, S5, la más fuerte de las lógicas modales normales, cuenta con la clase de marcos (modelos) más pequeña.

Ahora, podemos mostrar que la dirección de derecha a izquierda del teorema anterior también se cumple bajo ciertas condiciones, véase:

Teorema 3 *Sean L y L$'$ dos lógicas tales que L esta caracterizada por la clase de marcos $\mathcal{C}$ y L$'$ por la clase de marcos $\mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C}'$ está incluida en $\mathcal{C}$. Entonces L $\subseteq$ L$'$.*

Veamos una demostración de lo anterior. Sean L y L$'$ dos lógicas tales que L esta caracterizada por la clase de marcos $\mathcal{C}$ y L$'$ por la clase de marcos $\mathcal{C}'$, donde $\mathcal{C}'$ está incluida en $\mathcal{C}$. Supongamos que $A \in$ L, entonces $A \in log(\mathcal{C})$ (por la corrección de L respecto de $\mathcal{C}$), entonces $A \in log(\mathcal{C}')$ (pues $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$); entonces $A \in$ L$'$ (por la completud de L$'$ respecto de $\mathcal{C}'$). Luego L $\subseteq$ L$'$.

Veamos una aplicación de este teorema a las demostraciones de las relaciones de fuerza que analizamos anteriormente:

Ejemplo 13 *Para mostrar que* D $\subseteq$ T *de forma alternativa a como lo hicimos antes (en la prueba de la relación de fuerza entre lógicas) basta con percatarse de que todo marco reflexivo es también un modelo serial y aplicar los teoremas 1 y 3.*

4. TABLEAUX

En este capítulo, expondremos un método algorítmico, los tableaux modales, que pertenece al campo de la lógica conocido como “demostración automática de teoremas”. Los métodos desarrollados se llaman “demostradores automáticos de teoremas” (*Automated Theorem Provers*). En relación con la lógica modal, nos plantearemos lo siguiente:

- Dada una fórmula A y una clase de marcos (o modelos) $\mathcal{C}$, determinar si A es **válida/satisfacible** en $\mathcal{C}$.
- Dada una fórmula A, un conjunto finito de fórmulas Γ y una clase de marcos (o modelos) $\mathcal{C}$, determinar la **validez** del argumento $\langle \Gamma, A \rangle$ en $\mathcal{C}$ o bien la **satisfacibilidad** de Γ en $\mathcal{C}$.

Ambos problemas son **decidibles** para las clases de marcos (modelos) de las que hemos hablado hasta ahora, es decir, disponemos de algoritmos para resolverlos, a los que podemos llamar también **métodos de decisión**. A lo largo del capítulo, nos centraremos en el tratamiento algorítmico de la satisfacibilidad/validez en clases de modelos, aunque los resultados valen para marcos igualmente.

4.1. PRELIMINARES SOBRE ÁRBOLES

Usaremos un método de decisión basado en la noción de **árbol con raíz**. Una árbol con raíz es una tupla $\langle N, S, n \rangle$ donde:

- N es un conjunto (cuyos elementos denominamos **nodos** o **puntos**);

- $S \subseteq N \times N$ es una relación binaria en N. Si un par de nodos $x, y \in N$ verifican xSy decimos que x es **padre de** y o que y es **hijo de** x;

- n es una función $n\colon N \longrightarrow \mathbb{N}$ que asigna a cada nodo $x \in N$ un número natural, $n(x)$, llamado **nivel de** x.

Cualquier árbol con raíz satisface, además, lo siguiente:

(a) hay un único nodo de nivel 0;

(b) para todo nodo y de nivel distinto de 0, hay un único padre $x \in N$;

(c) para nodos cualesquiera $x, y \in N$, si xSy, entonces $n(y) = n(x) + 1$ (es decir, el nivel de un hijo es el valor de su padre más uno).

Definimos, además, distintos **elementos de un árbol**:

Nodo raíz o **nodo origen**: es de nivel 0 y es único.

Nodo hoja: no tiene hijos.

Nodo interno: tiene hijos.

Nodo simple: nodo interno con un solo hijo.

Nodo de ramificación (o bifurcación): nodo interno con más de un hijo.

Camino en un árbol: sucesión finita o numerable de nodos que comienza en la raíz y todo nodo de dicha sucesión -excepto el primero- va precedido de su padre.

Rama de un árbol: camino *maximal*, es decir, no puede prolongarse a otro camino más largo.

Árbol k-ario: cada nodo del árbol tiene a lo sumo k hijos.

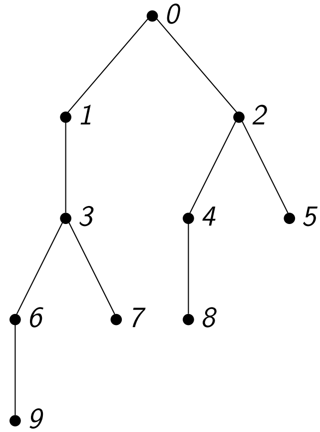
Árbol ordenado: los hijos de cada nodo interno están linealmente ordenados, por ejemplo, de izquierda a derecha.

Árbol finito: el conjunto de nodos del árbol es finito.

Árbol infinito: el conjunto de nodos del árbol es infinito.

De manera análoga podemos hablar de **camino finito (infinito)**.

Ejemplo 14 *La siguiente figura representa un árbol finito, binario y ordenado:*



Hemos numerado los nodos. Podemos distinguir los siguientes elementos:

- nodo inicial u origen o raíz del árbol: es el nodo etiquetado con 0.

- nodos finales u hojas: 5, 7, 8, 9.

- nodos internos 0, 1, 2, 3, 4, 6.

- nodos simples: 1, 4, 6.

- nodos de ramificación: 0, 2, 3.

- ramas: A = $\langle 0,1,3,6,9\rangle$*; B =* $\langle 0,1,3,7\rangle$*; C=* $\langle 0,2,4,8\rangle$*; D =* $\langle 0,2,5\rangle$*.*

Nuestra intención es asociar los nodos de un árbol a fórmulas para crear un método de decisión de la validez de fórmulas en clases de modelos previamente especificadas. Los árboles que construiremos se denominan **tableaux**. También se conocen como **tablas semánticas** (Garrido, 2001) o **árboles veritativos**[1].

4.2. PRELIMINARES SOBRE TABLEAUX

Usaremos el estilo de Fitting, 1983 de *tableaux modales*, llamados **tableaux etiquetados** (o simplemente **tableaux**, por comodidad), donde cada fórmula de $\mathcal{L}_M$ que aparece en el árbol posee un prefijo que representa intuitivamente un mundo posible de un pretendido modelo, mundo en el que la fórmula sería verdadera. Llamaremos *etiqueta* a dicho prefijo. A continuación definimos recursivamente una **etiqueta** como una cadena que satisface las siguientes condiciones:

[1] Del inglés 'truth trees' Jeffrey y Burgess, 2006.

(a) 1 es una etiqueta;

(b) Si σ es una etiqueta, $\sigma.n$ es una etiqueta (para $n \geq 1$).

Como puede apreciarse, si la etiqueta es distinta de 1, cada entero positivo está separado por un punto del entero que le antecede y por otro punto del siguiente entero en la cadena. Intuitivamente, una etiqueta $\sigma = 1.n_1.n_2 \ldots n_k$ significa que el mundo $1.n_1$ es accesible desde 1, el mundo $1.n_1.n_2$ es accesible desde $1.n_1$, etc. Así, la etiqueta σ es el nombre de un mundo, pero al mismo tiempo el nombre nos da el "historial de accesibilidad" para alcanzar ese nombre.

Para cada par de etiquetas σ, σ', diremos que σ' es una **extensión** de σ justo en el caso de que σ' sea un segmento inicial (no necesariamente propio) de σ, más concretamente:

1. σ' es una **extensión no propia** de σ, si $\sigma' = \sigma$;
2. σ' es una **extensión propia** de σ, si $\sigma' = \sigma.n_1.n_2 \ldots n_k \quad$ (para $k \geq 1$).

Diremos que σ' es una **extensión simple** de σ si $\sigma' = \sigma.n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Por ejemplo, 1.1.1.2 es una extensión propia de 1 y es una extensión simple de 1.1.1. Nótese, además, que si una etiqueta σ' es una extensión simple de otra etiqueta σ, entonces σ' también es una extensión propia de σ (claramente, no sucede al revés).

4.2.1. Definiciones básicas sobre sobre tableaux etiquetados

- Una **fórmula etiquetada** es una expresión de la forma $\sigma\colon A$, donde σ es una etiqueta y A es una fórmula de $\mathcal{L}_M$ llamada **fórmula base (asociada a** σ**)**.
- Una etiqueta está **usada** en una rama si existe una fórmula etiquetada $\sigma\colon A$ en esa rama; en caso contrario, es **nueva** en la rama.
- Un **tableau para un conjunto de fórmulas** $\{A_1, \ldots, A_n\}$ $(n \geq 1)$ es un árbol donde cada nodo es una fórmula etiquetada que ha construido mediante algún *procedimiento sistemático* (como el que definiremos más adelante). Un **tableau para una fórmula** A es una tableau para $\{A\}$.
- Una rama está **cerrada** si contiene un par de fórmulas etiquetadas de la forma $\sigma\colon A$ y $\sigma\colon \neg A$ (indicaremos este hecho poniendo el símbolo $\otimes$ debajo de la hoja de dicha rama); la rama está **abierta**, en caso contrario.

- Un tableau está **cerrado** si toda rama en él está cerrada; en caso contrario, está **abierto**.

4.3. ¿CÓMO RESPONDE UN TABLEAU?

Un tableau responde directamente a la satisfacibilidad de una fórmula o de un conjunto finito de fórmulas en una determinada clase de modelos. Gracias a la relación que hay entre satisfacibilidad y validez, responde también, en segunda instancia, a la validez de una fórmula (o de un argumento) en una clase de modelos dada. Nótese que una fórmula A es válida en una clase de modelos $\mathcal{C}$ sii su negación $\neg A$ es insatisfacible en dicha clase. Asimismo, un argumento $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, A\rangle$ $(n \geq 0)$ es válido en una clase de modelos $\mathcal{C}$ sii el conjunto $\{A_1, \ldots, A_n, \neg A\}$ es insatisfacible en $\mathcal{C}$.

Para testar la satisfacibilidad de una fórmula A asociamos $1\colon A$ a la raíz de un árbol (tableau) que se va construyendo mediante reglas, llamadas de *reglas de expansión*. La intención es comprobar si podemos crear un modelo donde la fórmula A sería verdadera en el mundo representado por la etiqueta 1; un modelo que, en caso de existir, vendría proporcionado por el tableau ya desarrollado. Como la satisfacibilidad se testa dentro de una clase de modelos dada, queremos que el posible modelo caiga en esa clase. Para ello, son el tipo de reglas de expansión usadas las que se encargan de respetar las propiedades de la relación de accesibilidad de la clase de modelos elegida a medida que avanza el desarrollo del tableau. Una vez acabado este tras un número finito de pasos, podemos determinar si la fórmula A es o no satisfacible en la clase de modelos considerada dependiendo de si hay una rama abierta en el tableau o no. En caso de que haya una rama abierta, la información proporcionada por la rama es la que nos permite describir al menos un modelo verificador de A.

Para testar la validez de una fórmula testamos la satisfacibilidad de su negación. Más concretamente, si A es la fórmula cuya validez se pretende testar (dentro de una clase dada de modelos $\mathcal{C}$), el tableau comienza con $1\colon \neg A$ y procedemos como antes. Si tras acabar el tableau hemos concluido que $\neg A$ es insatisfacible en $\mathcal{C}$ (no hemos encontrado un modelo de la clase $\mathcal{C}$ verificador de $\neg A$), entonces A es válida en $\mathcal{C}$; por el contrario, si $\neg A$ resultara satisfacible en $\mathcal{C}$ tras terminar el proceso, concluiremos que A es inválida en $\mathcal{C}$. Así, el test de la validez de A es un test de satisfacibilidad de $\neg A$.

Comprobación de la satisfacibilidad de conjuntos finitos de fórmulas/ validez de argumentos. Podemos tratar igualmente la satisfacibilidad de conjuntos finitos de fórmulas o bien comprobar la **validez de argumentos** en clases de modelos. La diferencia respecto al tratamiento de una simple fórmula reside únicamente en el encabezado del tableau. Dado el conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$ $(n \geq 1)$ su satisfacibilidad se comprueba construyendo un tableau que arranca con $1\colon A_1, \ldots, 1\colon A_n$. Si se trata de comprobar la validez de un argumento con premisas $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 0)$ y conclusión A, el tableau comienza con $1\colon A_1, \ldots, 1\colon A_n, 1\colon \neg A$. Con esto el tableau pretende testar la satisfacibilidad del conjunto $\{A_1, \ldots, A_n, \neg A\}$. Todas estas cuestiones se tratan en el ámbito de clases de modelos previamente elegidas.

El método de tableaux como método de refutación. Hemos visto que al tratar la validez de una fórmula (o de un argumento) partimos de la suposición de que la negación de la fórmula en cuestión es verdadera (o que las premisas y la negación de la conclusión del argumento son verdaderas) en un mundo dado de un hipotético modelo a construir. Si podemos construir el modelo con el tableau, rechazamos la validez de la fórmula (o argumento); pero, si no podemos construir el modelo, entonces *refutamos* la suposición de la invalidez la fórmula (o argumento). Por esta razón se conoce al método de tableau como un método de **refutación** para tratar la validez.

Observación 9 *El lector habrá observado que al definir la satisfacibilidad de un conjunto* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ $(n \geq 1)$ *cubrimos igualmente el caso de la satisfacibilidad de una fórmula cuando* $n = 1$ *y en el caso de la validez de un argumento* $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, A\rangle$ $(n \geq 0)$*, cubrimos igualmente la validez de una fórmula cuando* $n = 0$*. Si hemos separado estas cuestiones para formulas y conjuntos de fórmulas (respectivamente, argumentos) es por claridad en la exposición. Sin embargo, daremos un tratamiento unificado de las mismas cuando sea conveniente.*

4.4. REGLAS DE EXPANSIÓN

Una **regla de expansión** para tableaux tiene una **premisa** y una o dos **conclusiones** (veánse las tablas 4.1-4.6), donde premisa y conclusiones representan fórmulas etiquetadas. Nótese que las conclusiones pueden estar separadas por una **barra vertical** "|", indicando que la aplicación de dicha regla provoca la bifurcación del tableau. Asimismo, puede haber **restricciones** impuestas sobre la aplicación de una regla. Estas restricciones afectan a las etiquetas que aparecen en la regla y recogen las propiedades de la relación de accesibilidad de los modelos.

Presentamos primero las **reglas para las conectivas booleanas clásicas** (tabla 4.1). Tras esto, introducimos las **reglas modales**. Por un lado, contamos con las **reglas de intercambio de modalidades**, que capturan cómo interactúan las modalidades y la negación (tabla 4.3). Estas reglas pueden combinarse y generalizarse en la **regla de intercambio generalizada** (tabla 4.4), que es la que usaremos en lo sucesivo por comodidad. Por otro lado, tenemos reglas de **expansión modales** (tabla 4.5) que realmente diferencian los cálculos de tableaux. Por último, introducimos algunas **reglas derivadas** (tabla 4.6).

Observación 10 (Reglas para el bicondicional) *Nótese que hemos decidido excluir el bicondicional de la tabla 4.1. Recordemos que $A \leftrightarrow B$ se puede definir como una abreviatura de $(A \to B) \wedge (B \to A)$, tal y como haremos aquí. No obstante, si quisiera recuperarse este operador como primitivo, basta con usar las reglas de la tabla 4.2.*

$$(\neg\neg):\quad \frac{\sigma\colon \neg\neg A}{\sigma\colon A}$$

$$(\wedge):\quad \frac{\sigma\colon A \wedge B}{\begin{array}{c}\sigma\colon A\\ \sigma\colon B\end{array}} \qquad\qquad (\vee):\quad \frac{\sigma\colon A \vee B}{\sigma\colon A \mid \sigma\colon B}$$

$$(\neg\wedge):\quad \frac{\sigma\colon \neg(A \wedge B)}{\sigma\colon \neg A \mid \sigma\colon \neg B}$$

$$(\neg\vee):\quad \frac{\sigma\colon \neg(A \vee B)}{\begin{array}{c}\sigma\colon \neg A\\ \sigma\colon \neg B\end{array}} \qquad\qquad (\to):\quad \frac{\sigma\colon A \to B}{\sigma\colon \neg A \mid \sigma\colon B}$$

$$(\neg\to):\quad \frac{\sigma\colon \neg(A \to B)}{\begin{array}{c}\sigma\colon A\\ \sigma\colon \neg B\end{array}}$$

Tabla 4.1: Reglas de expansión para el cálculo de tableaux proposicional clásico.

4.5. CÁLCULOS DE TABLEAUX

Un **cálculo de tableaux** es un conjunto de reglas de expansión. Presentaremos cálculos de tableaux que se corresponden, en cierto sentido, con las lógicas normales que hemos introducido previamente en forma axiomática (capítulo 3). En concreto, queremos contar para cada lógica normal estudiada L (sección 3.2) un cálculo de tableaux que trate la validez y satisfacibilidad en clases de modelos que caracterizan

$$(\leftrightarrow):\quad \frac{\sigma\colon A \leftrightarrow B}{\begin{array}{c|c} \sigma\colon A & \sigma\colon \neg A \\ \sigma\colon B & \sigma\colon \neg B \end{array}} \qquad\qquad (\neg\leftrightarrow):\quad \frac{\sigma\colon \neg(A \leftrightarrow B)}{\begin{array}{c|c} \sigma\colon A & \sigma\colon \neg A \\ \sigma\colon \neg B & \sigma\colon B \end{array}}$$

Tabla 4.2: Reglas de expansión para $\leftrightarrow$

$$(Int\,\neg\Box):\quad \frac{\sigma\colon \neg\Box A}{\sigma\colon \Diamond\neg A} \qquad\qquad (Int\,\neg\Diamond):\quad \frac{\sigma\colon \neg\Diamond A}{\sigma\colon \Box\neg A}$$

Tabla 4.3: Reglas de intercambio de modalidades

$$(Int):\quad \frac{\sigma\colon \neg o_1 \ldots o_n A}{\sigma\colon \hat{o_1} \ldots \hat{o_n}\neg A}$$

donde cada o_i $(1 \leq i \leq n)$ es un operador modal ($\Box$ o $\Diamond$); además, $\hat{o_i} = \Box$ si $o_i = \Diamond$ y $\hat{o_i} = \Diamond$ si $o_i = \Box$.

Tabla 4.4: Regla de intercambio modal generalizada

$(\Box K)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma.n\colon A}$	$\sigma.n$ ocurre en la rama, pero $\sigma.n\colon A$ no.	$(\Diamond K)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Diamond A}{\sigma.n\colon A}$	n es el mínimo entero para el cual $\sigma.n$ es nueva en la rama.
$(\Box T)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma\colon A}$	$\sigma\colon A$ no ocurre en la rama.	$(\Box D)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma\colon \Diamond A}$	$\sigma\colon \Diamond A$ no ocurre en la rama.
$(\Box B)$:	$\dfrac{\sigma.n\colon \Box A}{\sigma\colon A}$	$\sigma\colon A$ no ocurre en la rama.	$(\Diamond 4)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Diamond A}{\sigma.n\colon A}$	σ no es superflua en la rama y n es el mínimo entero para el cual $\sigma.n$ es nueva en la rama.
$(\Box 4)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma.n\colon \Box A}$	$\sigma.n$ está usada en la rama, pero $\sigma.n\colon \Box A$ no ocurre en dicha rama.	$(\Diamond 5)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Diamond A}{\sigma.n\colon A}$	n es el mínimo entero para el cual $\sigma.n$ es nueva en la rama y para ninguna etiqueta σ' se da que $\sigma'\colon A$ ocurra en dicha rama.
$(\Box 4^r)$:	$\dfrac{\sigma.n\colon \Box A}{\sigma\colon \Box A}$	$\sigma\colon \Box A$ no ocurre en la rama.			

Tabla 4.5: Reglas de expansión modales. Nótese que en la formulación de la regla $(\Diamond 4)$ aparece la noción de etiqueta superflua. Intuitivamente, una etiqueta σ se dice superflua si contiene la misma información modal que σ' y apareció antes que esta o bien contiene menos. Haremos esta noción precisa cuando lleguemos a los ejemplos de t-S4 (sección 4.9.5).

$(\Box 4_d)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma'\colon A}$	$\sigma' = \sigma$ o bien σ' es una extensión propia de σ que está usada en la rama y, además, $\sigma'\colon A$ no ocurre en dicha rama.	$(\Box 5_d)$:	$\dfrac{\sigma\colon \Box A}{\sigma'\colon A}$	σ' es cualquier etiqueta usada en la rama, pero $\sigma'\colon A$ no ocurre en dicha rama.

Tabla 4.6: Reglas de expansión derivadas

a L. Denotaremos mediante **cálculo de tableaux-L** (o, abreviadamente, t-L) el cálculo de tableaux que trata justamente la validez y satisfacibilidad en la clase de modelos-L.

Cualquier cálculo de tableaux de esta sección contiene las reglas expuestas en las tablas 4.1 y 4.3. Como hemos mencionado, las dos reglas de la tabla 4.3 pueden fusionarse y generalizarse en la regla de la tabla 4.4. En la tabla 4.7 exponemos las reglas de expansión modales que determinan cada cálculo de tableaux presentado.

Tableaux-L	Reglas universales	Reglas existenciales
t-K	$(\Box K)$	$(\Diamond K)$
t-D	$(\Box K), (\Box D)$	$(\Diamond K)$
t-T	$(\Box K)$, $(\Box T)$	$(\Diamond K)$
t-B	$(\Box K)$, $(\Box T)$, $(\Box B)$	$(\Diamond K)$
t-S4	$(\Box K)$, $(\Box T)$, $(\Box 4)$	$(\Diamond 4)$
t-S5	$(\Box K)$, $(\Box T)$, $(\Box 4)$, $(\Box 4^r)$	$(\Diamond 5)$

Tabla 4.7: Cálculo de tableaux 1

Podemos usar las reglas de expansión derivadas expuestas en la tabla 4.6 para redefinir los cálculos de tableaux-S4 y tableaux-S5 (ver tabla 4.8).

Tableaux-L	Reglas universales	Reglas existenciales
t-S4	$(\Box 4_d)$	$(\Diamond 4)$
t-S5	$(\Box 5_d)$	$(\Diamond 5)$

Tabla 4.8: Cálculo de tableaux 2

Observación 11 (Variantes de t-S4 **y** t-S5**)** *Merece la pena observar que los cálculos de tableaux* t-S4 *y* t-S5 *admiten otras variantes si consideramos las reglas derivadas introducidas en cada caso. Tanto las versiones originales como sus variantes son equivalentes; es decir, dichos cálculos generan el mismo conjunto de teoremas, cosa que no probaremos aquí. Resumimos seguidamente todas las versiones de estos cálculos incidiendo únicamente en las reglas universales y existenciales que los definen:*

t-S4:	$\{(\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Diamond 4)\}$
t-S4(i):	$\{(\Box 4_d), (\Diamond 4)\}$
t-S5:	$\{(\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Diamond 5)\}$
t-S5(i):	$\{(\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Diamond 4)\}$
t-S5(ii):	$\{(\Box 5_d), (\Diamond 5)\}$

Por razones de brevedad, emplearemos la expresión "tableaux-S4" ("tableaux-S5") para referirnos a los tableaux de cualquiera de las versiones para S4 (S5). Al fin y al cabo, todas las versiones en uno y otro caso son equivalentes, como ya hemos comentado. Únicamente cuando queramos recalcar expresamente una determinada versión emplearemos la nomenclatura introducida.

Observación 12 (Bibliografía sobre las reglas de tableaux) *Señalemos que las reglas* $(\Box K)$*,* $(\Box D)$ *y* $(\Box T)$ *son comunes a los planteamientos muy conocidos de Fitting, 1983, Goré, 1999 y Massacci, 2000; las reglas* $(\Box 4)$ *y* $(\Box 4^r)$ *aparecen en Goré, 1999 y Massacci, 2000 (las principales fuentes consultadas), las reglas* $(\Box 4_d)$ *y* $(\Box 5_d)$ *están inspiradas en Fitting, 1983, mientras que* $(\Diamond 4)$ *y* $(\Diamond 5)$ *las incluimos nosotros aquí. Las reglas* $(\Diamond 4)$ *y* $(\Diamond 5)$ *incorporan mecanismos de parada que en otros desarrollos forman parte bien del procedimiento sistemático o bien hay una regla específica de parada añadida (como en el trabajo de Bolander y Braüner, 2006).*

4.6. PROCEDIMIENTO SISTEMÁTICO

Hay varios procedimientos bien conocidos en lógica modal para desarrollar sistemáticamente un tableau (veáse, por ejemplo, Fitting, 1983, pp. 403-404 o Goré, 1999, p. 374). Presentaremos un procedimiento (figura 4.1) que sirve para todos los cálculos de tableaux aquí considerados.

Exponemos ahora algunos detalles explicativos a tener en cuenta:

Primero, usaremos la siguiente **terminología para simplificar la referencia a las reglas**:

- **Reglas conjuntivas**: las instancias de sus premisas son fórmulas etiquetadas booleanas y su aplicación en una rama no da lugar a un bifurcación de la misma. Son las reglas clásicas:

$$(\neg\neg), (\wedge), (\neg\vee), (\neg \rightarrow)$$

- **Reglas disyuntivas**: las instancias de sus premisas son fórmulas etiquetadas booleanas y su aplicación en una rama da lugar a una bifurcación en la misma. Son las reglas clásicas:

$$(\vee), (\neg\wedge), (\rightarrow)$$

- **Reglas de intercambio**: las instancias de sus premisas son fórmulas etiquetadas modales cuya fórmula base comienza por $\neg\Box$ o $\neg\Diamond$. Su aplicación no da lugar a bifurcación. Son las reglas modales:

$$(\neg\Box), (\neg\Diamond),\ (Int)$$

- **Reglas universales**: las instancias de sus premisas son fórmulas etiquetadas modales cuyo operador principal es $\Box$ y posee restricciones de aplicación. No dan lugar a bifurcación. Son las reglas modales:

$$(\Box K), (\Box D), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Box 4_d), (\Box 5_d)$$

- **Reglas existenciales**: las instancias de sus premisas son fórmulas etiquetadas modales cuyo operador principal es $\Diamond$ y posee restricciones de aplicación. No da lugar a bifurcación. Son las reglas modales:

$$(\Diamond K), (\Diamond 4), (\Diamond 5)$$

Necesitamos ahora precisar una serie de **nociones acerca de las reglas de expansión**:

- **Aplicación de una regla de expansión**: aplicar una regla de expansión a una fórmula etiquetada que aparezca en un nodo del tableau es usar la fórmula como instancia de la premisa de la regla y debajo de la hoja de cada rama abierta que pase por dicho nodo se introduce la(s) instancia(s) de la(s) conclusión(es) que corresponde(n) (de acuerdo con las restricciones de la reglas, si las hay).

  Merece la pena observar que las reglas existenciales y universales son especiales; pues son reglas cuyas conclusiones dependen de la información de cada rama sobre las etiquetas. Es por ello que al aplicar una regla existencial a una fórmula etiquetada es posible que la instancia de la conclusión porte una etiqueta nueva que no sea la misma para todas las ramas abiertas que pasen por la fórmula. En cuanto a la aplicación de una regla universal puede darse que en alguna rama no haya que anotar ninguna instancia de la conclusión, simplemente porque la restricción de la regla no lo permite.

- **Prioridad de aplicación de las reglas de expansión**:

  El algoritmo que usaremos prioriza la aplicación de ciertas reglas de expansión sobre otras a la hora de construir un tableau. Este orden es:

  $$\langle \text{ conjuntivas, de intercambio, universales, disyuntivas, existenciales } \rangle.$$

- **Desactivación**: Una fórmula etiquetada se considera activa si se le puede aplicar una regla de expansión. Si a dicha fórmula se le ha aplicado toda regla de expansión posible la marcaremos como desactivada. Usaremos el símbolo ✓ para indicar la desactivación. Una excepción a esta norma la constituyen las fórmulas etiquetadas universales. Los detalles de la desactivación en general podemos encontrarlos en el diagrama de la figura 4.1, que muestra un **procedimiento sistemático** para la construcción de un tableau.

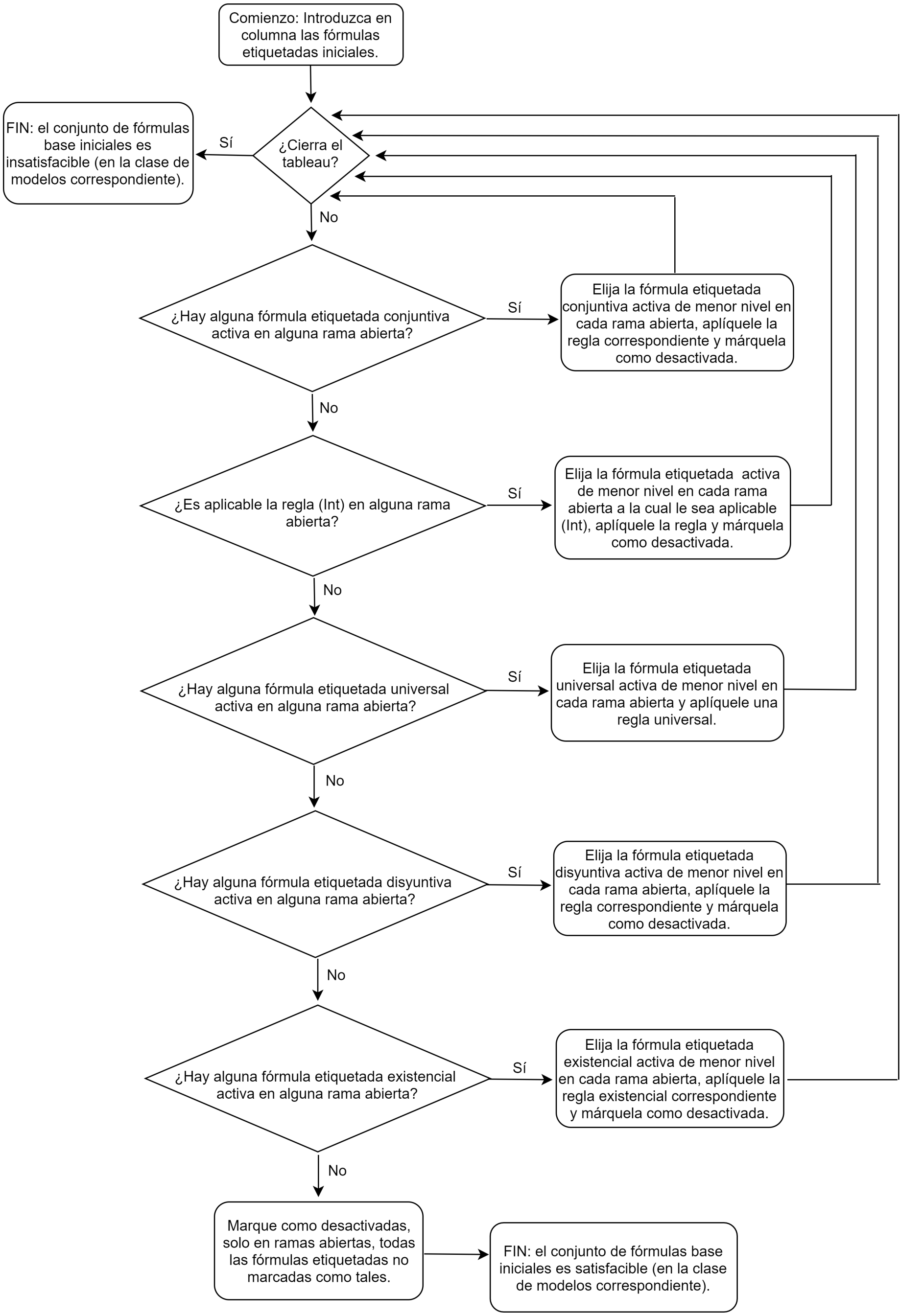


Figura 4.1: Procedimiento sistemático para la construcción de un tableau

4.6.1. Explicación intuitiva del procedimiento sistemático de la figura 4.1

Arrancamos el tableau introduciendo en columna $1\colon A_1, \ldots, 1\colon A_n$ (con $n \geq 1$) como **fórmulas etiquetadas iniciales** (a las fórmulas $A_1, \ldots, A_n$ las denominamos **fórmulas base iniciales**). Con esta formulación general resumimos varias cuestiones:

- La mera satisfacibilidad de una fórmula o conjunto de fórmulas.
- La validez de una fórmula o de un argumento de manera indirecta. Recuérdese que en la sección 4.3 indicábamos que la validez de un argumento $\langle\{P_1, \ldots, P_k\}, C\rangle$ (con $k \geq 0$) se trata testando en un tableau el conjunto $\{P_1, \ldots, P_k, \neg C\}$. El tratamiento de la validez de una fórmula se reduce al caso anterior cuando $k = 0$ (no hay premisas) y tenemos que testar $\neg C$.

Después pasamos a aplicar las reglas. El procedimiento se desarrolla de la siguiente manera:

- De modo general, en cada aplicación de una regla se elige la premisa de menor nivel en cada rama abierta.
- Tras el turno de aplicación de cada tipo de reglas (conjuntivas, disyuntivas, etc.) preguntamos si el tableau está cerrado. Si lo está, paramos; si no, continuamos como se indica más abajo.
- Las reglas **conjuntivas** son aplicadas exhaustivamente.
- La regla de **intercambio** (Int) también es aplicada exhaustivamente.
- Después pasamos a aplicar las reglas **universales**. En esta ocasión realizamos una *única* aplicación de este tipo de reglas en cada rama abierta donde se pueda y acto seguido preguntamos por la aplicabilidad de los dos tipos de reglas anteriores (conjuntivas y de intercambio). Tras ello, se vuelve a aplicar, si procede, las reglas conjuntivas y de intercambio exhaustivamente. Después le vuelve a tocar el turno a las reglas universales y procedemos como ya hemos dicho. Continuamos así hasta que no haya más reglas universales que aplicar.
- Posteriormente le toca el turno a las reglas **disyuntivas**. Al igual que en el caso anterior, realizamos una *única* aplicación de este tipo de reglas en cada rama abierta donde se pueda; después pasamos a preguntar por los tres tipos de reglas anteriores (conjuntivas, de intercambio y universales). Esto se repite hasta agotar la aplicación de las reglas disyuntivas.

- Finalmente, es el turno de la regla **existencial**. De nuevo realizamos una *única* aplicación de la misma en cada rama abierta donde sea posible y repetimos el proceso ya descrito de aplicación de las reglas anteriores (que comienza por las conjuntivas) y vamos repitiendo este proceso hasta agotar la aplicación de la regla existencial.

- Tras este ciclo, cuando ya no se puedan aplicar más reglas, procedemos a marcar como desactivadas (usando el símbolo $\checkmark$) todas las fórmulas etiquetadas que estén sin marcar como tales en las ramas abiertas y paramos.

- Nótese que, durante el proceso, las fórmulas etiquetadas activas reciben una sola aplicación excepto las universales. Dicho tipo de fórmulas han de permanecer activas hasta el final, a la espera de la introducción de una etiqueta nueva. Por otro lado, los literales (átomos y sus negaciones) etiquetados no están nunca activos, ya que ninguna regla de expansión les es aplicable. No obstante, estos reciben igualmente la marca de desactivación para indicar que, finalmente, toda línea ha sido visitada. Eso mismo pasa con ciertas fórmulas etiquetadas existenciales cuando usamos tableaux con la regla $(\Diamond 4)$. Debido a las restricciones de aplicación que esta regla lleva incorporadas, es posible que sea inaplicable a una determinada fórmula etiquetada existencial; no obstante, dicha fórmula se marcará al final también.

Cuando acaba este proceso tenemos un tableau **terminado**, esto es, se trata de un tableau en el que no puede aplicarse ninguna regla que lo prolongue. La manera de identificarlo es observar que cualquier rama del tableau está igualmente **terminada**, más específicamente: o está cerrada o bien toda fórmula etiquetada en la rama posee la marca de desactivación $\checkmark$.

Algo que merece la pena considerar es que el procedimiento presentado no es completamente *determinista* para todos los cálculos de tableaux; únicamente lo es para t-K. Es decir, en los cálculos distintos de t-K pueden obtenerse diferentes tableaux para el mismo conjunto de fórmulas. La razón es que el procedimiento no especifica el orden de las aplicaciones de las reglas universales cuando un cálculo contiene varias. En este punto el lector tiene libertad para proceder como desee. Lo único que tiene que tener en cuenta es agotar todas las posibilidades de aplicación de las reglas universales a cada fórmula etiquetada de la forma $\sigma : \Box A$ cuando les toque el turno.

Ejemplo 15 *[Construcción de un tableau-*K *paso a paso] Testaremos la validez de* $(\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)$ *en la clase de todos los modelos. Para ello sigamos el procedimiento expuesto en la figura 4.1 usando las reglas de* t-K *indicadas en la tabla 4.7. Así, comenzamos con:*

1.		$1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$	

Como vamos a testar la validez hemos introducido la negación de la fórmula asociada a la etiqueta 1. La rama claramente no está cerrada. La regla que podemos aplicar es conjuntiva, debido a la forma de la fórmula base.

1.	$\checkmark$	$1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$	
2.		$1\colon \Box p \to \Box q$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.		$1\colon \neg\Box(p \to q)$	*de 1 por* $(\neg \to)$

Obtenemos dos nuevas líneas (2 y 3) prolongando la única rama del árbol y desactivamos la premisa de la regla con la marca $\checkmark$*. Esto significa que no vamos a volver a usar la fórmula etiquetada de la línea 1. El algoritmo comprueba ahora si la rama cierra y, como no es así, prosigue. De las líneas 2 y 3, que contienen fórmulas activas, el algoritmo elegirá la fórmula etiquetada de la línea 3, pues la regla* (Int) *tiene preferencia sobre* $(\to)$*, que es disyuntiva.*

1.	$\checkmark$	$1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$	
2.		$1\colon \Box p \to \Box q$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \neg\Box(p \to q)$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.		$1\colon \Diamond\neg(p \to q)$	*de 3 por (Int)*

Tras aplicar (Int)*, la premisa de la regla ha quedado desactivada, por eso va acompañada de la marca* $\checkmark$*. La fórmula etiquetada de la línea 3 no se volverá a usar. Como la rama sigue abierta tras la aplicación de la regla, hemos de hacer una nueva elección. Las fórmulas etiquetadas de las líneas 2 y 4 están activas, pero el algoritmo da preferencia a la de 2 sobre la de 4 por la forma de las fórmulas base: en 2 es aplicable una regla disyuntiva, mientras que en 4 es aplicable una regla existencial.*

1.	$\checkmark$	$1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark$	$1\colon \Box p \to \Box q$		*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \neg\Box(p \to q)$		*de 1 por* $(\neg \to)$
4.		$1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		*de 3 por (Int)*
5.		$1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	*de 2 por* $(\to)$

Hemos aplicado la regla $(\to)$ *a la fórmula etiquetada de la línea 2 y la hemos desactivado. El resultado de la aplicación nos ofrece ahora un tableau con dos ramas, ambas abiertas, por lo que hemos de continuar. Nótese que la regla* $(\Diamond K)$

es ahora mismo inaplicable al último nodo de la rama derecha ($1\colon \Box q$), por lo que tenemos que elegir entre la fórmula etiquetada del nivel 4 o la del nivel 5 de la rama izquierda. Nos quedamos con la segunda, pues la regla (Int) tiene prioridad sobre $(\Diamond K)$ según el algoritmo.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	$1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		de 3 por (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	de 2 por $(\to)$
6.	$1\colon \Diamond\neg p$		de 5 por (Int)

La fórmula etiquetada $1\colon \neg\Box p$ de la línea 5 está desactivada y la conclusión de la regla se pone debajo. Ambas ramas siguen abiertas. Ahora le toca el turno a la fórmula existencial de la línea 4, pues la regla $(\Box K)$ sigue siendo inaplicable a la fórmula etiquetada $1\colon \Box q$ de la línea 5.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		de 3 por (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	de 2 por $(\to)$
6.	$1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	de 5 por (Int)
7.	$1.1\colon \neg(p \to q)$	$1.1\colon \neg(p \to q)$	de 4 por $(\Diamond K)$

La fórmula etiquetada de la línea 4 queda desactivada. De acuerdo con el concepto de aplicación de una regla, como hay dos ramas abiertas, la conclusión de la regla $(\Diamond K)$ se pone debajo de cada una de las ramas. A continuación el algoritmo considera dar prioridad a la aplicación de una regla conjuntiva (en la línea 7) frente a la universal (en la línea 5, que ahora sí es aplicable). El procedimiento establece que la regla conjuntiva se aplica en ambas ramas.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		*de 1 por* $(\neg\to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		*de 1 por* $(\neg\to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	*de 2 por* $(\to)$
6.	$1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	*de 5 por* (Int)
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
8.	$1.1\colon p$	$1.1\colon p$	*de 7 por* $(\neg\to)$
9.	$1.1\colon \neg q$	$1.1\colon \neg q$	*de 7 por* $(\neg\to)$

Tras la aplicación de la regla $(\neg\ \to)$*, las fórmulas etiquetadas de la línea 7 quedan desactivadas. Ahora el algoritmo da preferencia a la fórmula universal etiquetada* $1\colon \Box q$ *de la línea 5 antes que a la existencial* $1\colon \Diamond\neg p$ *de la línea 6.*

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		*de 1 por* $(\neg\to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		*de 1 por* $(\neg\to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	*de 2 por* $(\to)$
6.	$1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	*de 5 por* (Int)
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
8.	$1.1\colon p$	$1.1\colon p$	*de 7 por* $(\neg\to)$
9.	$1.1\colon \neg q$	$1.1\colon \neg q$	*de 7 por* $(\neg\to)$
10.		$1.1\colon q$	*de 5 por* $(\Box K)$
		$\otimes$	

La rama derecha cierra (debido a las líneas 9 y 10) y lo indicamos con el símbolo $\otimes$ *debajo de su hoja. En la rama izquierda queda pendiente la aplicación de* $(\Diamond K)$ *a la fórmula etiquetada de la línea 6.*

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	*de 2 por* $(\to)$
6.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	*de 5 por* (Int)
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
8.	$1.1\colon p$	$1.1\colon p$	*de 7 por* $(\neg \to)$
9.	$1.1\colon \neg q$	$1.1\colon \neg q$	*de 7 por* $(\neg \to)$
10.	$\vert$	$1.1\colon q$	*de 5 por* $(\Box K)$
11.	$1.2\colon \neg p$	$\otimes$	*de 6 por* $(\Diamond K)$

Tras la aplicación de $(\Diamond K)$, ya no quedan más aplicaciones de reglas que realizar y la rama izquierda queda definitivamente abierta. A continuación procedemos a marcar todas las fórmulas etiquetadas de la rama izquierda como desactivadas.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \to \Box q$		*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \to q)$		*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	*de 2 por* $(\to)$
6.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	*de 5 por* (Int)
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \to q)$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
8.	$\checkmark\ 1.1\colon p$	$1.1\colon p$	*de 7 por* $(\neg \to)$
9.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg q$	$1.1\colon \neg q$	*de 7 por* $(\neg \to)$
10.	$\vert$	$1.1\colon q$	*de 5 por* $(\Box K)$
11.	$\checkmark\ 1.2\colon \neg p$	$\otimes$	*de 6 por* $(\Diamond K)$

Tras la última operación de marca el proceso acaba. El tableau está terminado; pero no cierra porque la rama izquierda queda abierta.

La conclusión de esto es que la fórmula base de la fórmula etiquetada de la raíz, a saber, $\neg((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q))$, es satisfacible (es lo que dice la salida inferior del algoritmo 4.1), luego la fórmula a testar, $(\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)$ no es válida en la clase de todos los modelos.

Más adelante mostraremos cómo definir modelos a partir de ramas abiertas.

Observación 13 (Representación gráfica de los tableaux) *En la representación gráfica de un tableau usamos números de línea en columna con los comentarios metalingüísticos a la derecha. Un número de línea puede afectar a una o más fórmulas etiquetadas (correspondientes a distintas ramas). Además, nos permitimos la licencia de introducir saltos de línea (indicados por rayitas verticales: $|$) cuando en una misma línea exista la posibilidad de aplicar reglas de distinto tipo (conjuntivas, existenciales, etc.) en ramas diferentes; el fin es distinguir claramente el orden de aplicación de tales reglas. Así, en el ejemplo anterior, el nodo de nivel 6 de la rama derecha ha sido desplazado un nivel hacia abajo, y en su lugar hemos escrito $|$. Esto indica la prioridad de (Int) sobre $(\Diamond K)$. Lo mismo ocurre con el nodo de la rama izquierda de nivel 10, que sirve para diferenciar la prioridad de $(\neg \rightarrow)$ sobre $(\Box K)$.*

4.7. TEOREMAS BÁSICOS

4.7.1. Terminación

Una cuestión importante, desde el punto de vista computacional, es determinar si, realmente, el procedimiento de la figura 4.1 alcanza siempre una de las dos salidas descritas, dando así lugar a un tableau terminado en todos los casos. Una respuesta negativa a esta cuestión vendría a decir que dicho procedimiento no es realmente un algoritmo para decidir la satisfacibilidad de una fórmula o conjunto de fórmulas en alguna clase de modelos elegida porque, ante una posible pregunta, el programa quedaría ejecutándose de manera ininterrumpida, sin ofrecer ninguna respuesta. No obstante, la respuesta es positiva para todos los cálculos de tableaux aquí estudiados. Esto lo enunciamos como sigue.

Teorema 4 *(Terminación) Para cualquier conjunto finito Γ de fórmulas de $\mathcal{L}_M$, cualquier tableau-L (tabla 4.7) para Γ construido mediante el procedimiento sistemático (figura 4.1) acaba tras un número finito de pasos.*

Pueden consultarse Fitting, 1983 (pp.410-416) o Gasquet et al., 2014 (capítulo 4.9), entre otros, para una demostración de este resultado para estas y otras lógicas modales normales.

4.7.2. Corrección y completud de los cálculos de tableaux. Algunas consecuencias

Sabemos por resultados del capítulo anterior que la lógica de todos los modelos es K, la de los modelos seriales es D, la de los modelos reflexivos es T, la de los modelos reflexivos y transitivos es S4 y la de los modelos de equivalencia es S5. En este apartado tratamos con tableaux y pretendemos que para cada lógica L que ha sido presentada axiomáticamente en la sección 3.2 podamos definir un cálculo de tableaux que determine precisamente qué fórmulas de $\mathcal{L}_M$ son válidas en la clase de modelos-L. Así, por ejemplo, para la lógica de la clase de modelos reflexivos (que es la lógica T), pretendemos diseñar un cálculo de tableaux (denominado t-T) que nos diga precisamente qué fórmulas de $\mathcal{L}_M$ son válidas en esa clase.

Por otra parte, al igual que en el cálculo axiomático, tenemos un concepto de demostración o prueba en el cálculo de tableaux. Dada una lógica L y fórmulas $A_1, \ldots, A_n, A$ ($n \geq 0$), diremos que hay una **prueba en** el cálculo de tableaux-t-L (o más abreviadamente, una **prueba en** t-L) **de** A **a partir de** $A_1, \ldots, , A_n$ (en símbolos: $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_{\text{t-L}} A$) justo en el caso de que exista un tableau-L cerrado para $\{A_1, \ldots, A_n, \neg A\}$. Si $n = 0$, decimos que hay una **prueba en** t-L **de** A (o igualmente, que A es un **teorema de** t-L) si existe un tableau-L cerrado para $\neg A$.

Establecemos siguiente resultado sin demostración, ya que la misma excede el alcance del libro. El lector puede consultar Fitting, 1983, Cap. 8, Goré, 1999 o Massacci, 2000, para cálculos de tableaux similares a los presentados aquí para las lógicas que hemos visto y también otras.

Teorema 5 *Cualquier cálculo de tableaux-L está caracterizado por la clase de modelos-L.*

Merece la pena "desmenuzar" el resultado del teorema anterior. Usemos "$\mathcal{C}_{\text{L}}$" como abreviatura de "la clase de modelos-L". Entonces:

- **Corrección de** t-L **respecto de** $\mathcal{C}_{\text{L}}$: Si $\vdash_{\text{t-L}} A$, entonces $\models_{\mathcal{C}_{\text{L}}} A$
- **Completud de** t-L **respecto de** $\mathcal{C}_{\text{L}}$: Si $\models_{\mathcal{C}_{\text{L}}} A$, entonces $\vdash_{\text{t-L}} A$.

Observación 14 (Fórmulas vs. conjuntos de fórmulas) *Consideremos un argumento cualquiera $\langle\{A_1, \ldots, A_n\}, A\rangle$ ($n \geq 0$). Desde un punto de vista semántico, la validez de ese argumento equivale a la validez de la fórmula $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow$*

A. Por otro lado, desde un punto de vista sintáctico, hay una prueba en t-L de A a partir de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ($n \geq 0$) sii hay una prueba en t-L de $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow A$, o lo que es lo mismo, una prueba en t-L de $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg A)$. Por esta razón, nos ha bastado enunciar la corrección y completud del método de tableaux centrándonos solamente en el tratamiento de fónrmulas y no de argumentos. Esto nos permite homogeneizar la presentación de este resultado con el resto de cálculos.

Ahora podemos conectar la noción de teoremicidad dada en el capítulo 3 con la presente dada para los tableaux. Tenemos lo siguiente:

Teorema 6 *Para cualquier lógica* $\mathsf{L} \in \{\mathsf{K}, \mathsf{D}, \mathsf{T}, \mathsf{B}, \mathsf{S4}, \mathsf{S5}\}$ *y cualquier fórmula A se cumple:*

$$\vdash_{L} A \textit{ sii } \vdash_{t\text{-}L} A.$$

Esto se debe al teorema 5 y los resultados de caracterización de los cálculos axiomáticos (Teorema 1).

Hay varias consecuencias notables del teorema 6:

1. Una consecuencia muy importante es que cualquier resultado de caracterización (recordemos, corrección y completud) de una lógica modal normal L por una clase de marcos (o modelos) es transferible al cálculo de tableaux t-L y viceversa.

2. Es importante advertir que los tableaux, como tales procedimientos de decisión, ofrecen solo modelos-L finitos y, en realidad, es lo único que requieren. Luego, en consonancia con lo dicho anteriormente en el item 1, una manera de encontrar resultados de caracterización de una lógica L por una clase de modelos finitos sería lograr este resultado para t-L. No obstante, contamos con algunos resultados sobre este asunto que se demuestran usando métodos distintos de los tableaux. Sabemos que cada lógica L (de las aquí estudiadas) está caracterizada por la clase de los modelos-L finitos e incluso, en algunos casos por subclases de esta. Por ejemplo, la lógica de los modelos universales finitos (una subclase de los modelos de equivalencia finitos) es $\mathsf{S5}$. No entraremos en más detalles sobre esta cuestión aquí (véase, por ejemplo, Chellas, 1980 y Hughes y Cresswell, 1996).

3. Por último, debemos notar que la diferencia del método de tableaux con la presentación axiomática es que, en este último caso, dada una lógica L,

no podemos averiguar si una fórmula es o no un teorema de L salvo que encontremos su demostración y, entonces, tendríamos una respuesta positiva; pero el cálculo axiomático por sí solo no nos permite obtener respuestas negativas (qué fórmulas no son teoremas suyos). En cambio, los cálculos de tableaux son un método de decisión. Determinar si una fórmula A es o no un teorema de L, gracias al teorema 6, se resuelve en t-L algorítmicamente.

¿Qué hemos logrado?

Lo que hemos conseguido es establecer una equivalencia entre tres nociones distintas:

- la de validez en clases de modelos-L y, en particular, de modelos-L finitos,
- la noción de prueba en el cálculo de tableaux y
- la noción de prueba axiomática.

Así, decir, por ejemplo, que A es válida en la clase de todos los modelos reflexivos y transitivos (o que pertenece a la lógica de la clase de todos los modelos reflexivos y transitivos), que hay una prueba en el cálculo de tableaux-S4 de A o que hay una demostración axiomática de A en S4 son nociones equivalentes. Por tanto, cualquiera de estas cuestiones es decidible por el método de tableaux.

4.8. REGLAS CON RESTRICCIONES DE ACORTAMIENTO

En esta sección reformularemos las reglas $(\Diamond K)$ y $(\Diamond 4)$ añadiendo nuevas restricciones de aplicación. El único fin de este proceder es acortar los tableaux; así que tales restricciones no son necesarias, pero pueden usarse si se desea. Dado que las reglas modales universales y existenciales llevan asociadas las condiciones de aplicación en su propia formulación, al incluir nuevas restricciones estamos definiendo nuevas reglas. Así, introduciremos las reglas $(\Diamond K)^{\mathsf{A}}$ y $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$, que extienden las restricciones de $(\Diamond K)$ y $(\Diamond 4)$ respectivamente con condiciones de acortamiento. Estas nuevas reglas comparten la forma:

$$\frac{\sigma\colon \Diamond A}{\sigma.n\colon A}$$

En cuanto a las restricciones tenemos lo siguiente.

Para $(\Diamond K)^{\mathsf{A}}$:

- n es el mínimo entero para el cual $\sigma.n$ es nueva en la rama.
- $\sigma.m\colon A$ no ocurre en la rama para ningún entero m. **[AcoK]**

Para $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$:

- σ no es superflua en la rama.
- $\sigma'\colon A$ no ocurre en la rama para ninguna etiqueta σ' que sea extensión de σ. **[Aco4]**

[AcoK] y **[Aco4]** son restricciones de acortamiento. Son restricciones similares a las que hemos puesto en otras reglas, pero en todos esos casos no constituyen simples condiciones de acortamiento, sino que se requieren para terminar los tableaux. Además, no introduciremos nuevos nombres para referirnos a los cálculos de tableaux con estas nuevas reglas para no complicar más la nomenclatura. Basta con que indiquemos su uso cuando queramos utilizarlas en lugar de $(\Diamond K)$ y $(\Diamond 4)$.

Ejemplo 16 *Veamos un ejemplo del uso de las condiciones de acortamiento incorporadas a las reglas. Sea el siguiente tableau-K:*

1.	✓	$1\colon \Diamond(p \wedge q)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond p$	
3.	✓	$1.1\colon p \wedge q$	*de 1 por* $(\Diamond K)^{\mathsf{A}}$
4.	✓	$1.1\colon p$	*de 3 por* $(\wedge)$
5.	✓	$1.1\colon q$	*de 3 por* $(\wedge)$

El tableau termina. Nótese que la restricción de acortamiento de la regla $(\Diamond K)^{\mathsf{A}}$ *ha impedido su aplicación a 1:* $\Diamond p$ *en la línea 2 debido a que en la línea 4 aparece* $1.1\colon p$*, siendo la etiqueta 1.1 una extensión simple de la etiqueta 1.*

4.9. EJEMPLOS DE TABLEAUX

Pasamos ahora a presentar ejemplos de tableaux en cada una de las lógicas modales que tratamos.

4.9.1. Tableaux-K

Recordemos que los tableaux-K se construyen usando el conjunto de reglas modales (tablas 4.4 y 4.5):

$$\{(Int), (\Box K), (\Diamond K)\}.$$

Ejercicio 21 *Modifique el procedimiento de la figura 4.1 dando prioridad a las reglas existenciales sobre las disyuntivas. Después, rehaga el tableau del ejemplo 15 acorde con dicha modificación.*

Ejemplo 17 *Tomemos la siguiente instancia del esquema de axioma* K*:*

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

*y veamos si hay una prueba en t-*K *de dicha fórmula.*

$$\begin{array}{lcl}
\textit{1.} & \checkmark \quad 1\colon \neg\big(\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)\big) & \\
\textit{2.} & 1\colon \Box(p \to q) & \textit{de 1 por } (\neg \to) \\
\textit{3.} & \checkmark \quad 1\colon \neg(\Box p \to \Box q) & \textit{de de 1 por } (\neg \to) \\
\textit{4.} & 1\colon \Box p & \textit{de 3 por } (\neg \to) \\
\textit{5.} & \checkmark \quad 1\colon \neg\Box q & \textit{de 3 por } (\neg \to) \\
\textit{6.} & \checkmark \quad 1\colon \Diamond\neg q & \textit{de 5 por } (Int) \\
\textit{7.} & 1.1\colon \neg q & \textit{de 6 por } (\Diamond K) \\
\textit{8.} & \checkmark \quad 1.1\colon p \to q & \textit{de 2 por } (\Box K) \\
\textit{9.} & 1.1\colon p & \textit{de 4 por } (\Box K) \\
\textit{10.} & 1.1 : \neg p \qquad\qquad 1.1 : \neg q & \textit{de 8 por } (\to) \\
 & \otimes \qquad\qquad\qquad \otimes &
\end{array}$$

*El tableau está cerrado, así que hay un prueba en t-*K *de la fórmula* $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$*. Debido al teorema de corrección para t-*K*, esto mismo implica la validez de esa instancia en la clase de todos los modelos.*

*Construcción de modelos a partir de los tableaux-*K

Recordemos que un tableau-L terminado (i.e., un tableau-L resultante de la ejecución completa del algoritmo de la figura 4.1) y abierto (i.e., con al menos una rama abierta) significa que el conjunto de fórmulas base iniciales es satisfacible en la clase de modelos-L. Es decir, que hay al menos un modelo-L tal que las fórmulas de dicho conjunto son todas verdaderas en uno de sus mundos. Una manera de construir dicho modelo cuando un tableau-K queda abierto es la siguiente. Elijamos una rama abierta $\mathfrak{r}$ y definamos un modelo $\langle W, R_{\mathsf{K}}, V\rangle$ con las etiquetas que estén usadas en $\mathfrak{r}$; llamemos $E^{\mathfrak{r}}$ a dicho conjunto. Tenemos entonces:

- $W = E^{\mathfrak{r}}$.
- $R_{\mathsf{K}} \subseteq E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}}$ (relación de accesibilidad entre las etiquetas de $E^{\mathfrak{r}}$), definida: $R_{\mathsf{K}} = \{\langle\sigma, \sigma'\rangle \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma'$ es una extensión simple de $\sigma\}$ [2].
- $V(p) = \{\sigma \in E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma:$ p ocurre en $\mathfrak{r}\}$
  (para cada átomo p y etiqueta $\sigma \in E^{\mathfrak{r}}$).

Observación 15 *El modelo que acabamos de definir, basado sobre el* **marco de etiquetas** $\langle W, R_{\mathsf{K}}\rangle$*, es el que se usa en la prueba de completud (teorema 5) para encontrar modelos para ramas abiertas y verificar las fórmulas base iniciales en la clase de modelos propuesta* [3]*. Lo mismo ocurre con el resto de cálculos de tableaux.*

Ejemplo 18 *Testemos la instancia de* **5**, $\Diamond p \to \Box\Diamond p$*, para determinar si tiene una prueba en t-*K*.*

[2] Con esta definición, R_{K} es una relación irreflexiva.

[3] De hecho hay un lema que asegura que en una rama abierta de un tableau terminado cada fórmula base es verdadera en la etiqueta asociada correspondiente (tomada esta como un mundo del modelo construido para la rama).

1.	✓	$1\colon \neg(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	✓	$1.1\colon p$	*de 2 por* $(\Diamond K)$
6.	✓	$1.2\colon \Box\neg p$	*de 4 por* $(\Diamond K)$

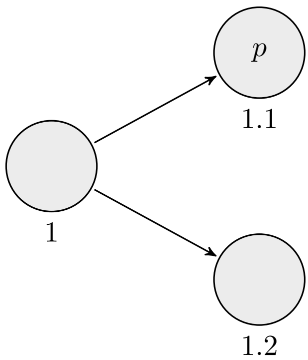
*El tableau está terminado y tiene una rama abierta. Por tanto, no hay una prueba en t-*K *de* $\Diamond p \to \Box\Diamond p$*. Esto implica que podemos encontrar un modelo-*K *que invalide* $\Diamond p \to \Box\Diamond p$*, como mostramos a continuación:*

$W = \{1,\ 1.1,\ 1.2\}$;

$R = \{\langle 1, 1.1\rangle, \langle 1, 1.2\rangle\}$;

$V(p) = \{1.1\}$.

La fórmula $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ *es falsa en el mundo 1. Tengamos presente en lo sucesivo que en los modelos obtenidos a partir de las ramas terminadas y abiertas siempre se verifica el conjunto de fórmulas base iniciales en el mundo 1. El modelo puede representarse como sigue:*



Ejercicio 22 *Muestre un modelo para la rama abierta del ejemplo 15.*

Veamos ahora un ejemplo de cómo usar los tableaux-K para testar la validez de argumentos. Recordemos lo dicho en la sección 4.3. Para testar un argumento $\langle\{A_1, \ldots A_n\}, A\rangle$ arrancamos con $1\colon A_1, \ldots, 1\colon A_n, 1\colon \neg A$.

Ejemplo 19 *Comprobemos que el argumento* $\langle\{\Box(p \to q), \Diamond p\}, \Diamond q\rangle$ *es válido en la clase de todos los modelos de Kripke. Para ello, desarrollamos un tableaux* *que arranca con sus premisas y la negación de la conclusión asociadas todas a la etiqueta 1, obteniendo lo siguiente:*

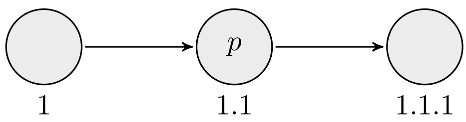
1.	$\checkmark \quad 1\colon \Box(p \to q)$		
2.	$\checkmark \quad 1\colon \Diamond p$		
3.	$\checkmark \quad 1\colon \neg\Diamond q$		
4.	$1\colon \Box\neg q$		*de 3 por* (Int)
5.	$1.1\colon p$		*de 2 por* $(\Diamond K)$
6.	$\checkmark \quad 1.1\colon p \to q$		*de 1 por* $(\Box K)$
7.	$1.1\colon \neg q$		*de 4 por* $(\Box K)$
8.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon q$	*de 6 por* $(\to)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau cierra, lo que significa que el conjunto $\{\Box(p \to q), \Diamond p, \neg\Diamond q\}$ *es insatisfacible en la clase de todos los modelos y, por tanto, el argumento* $\langle\{\Box(p \to q), \Diamond p\}, \Diamond q\rangle$ *es válido en dicha clase.*

Ejemplo 20 *Analicemos el argumento* $\langle\{\Box p\}, \Box\Box p\rangle$ *y mostremos que es inválido. Para ello, construimos el tableau:*

1.	$\checkmark \quad 1\colon \Box p$	
2.	$\checkmark \quad 1\colon \neg\Box\Box p$	
3.	$\checkmark \quad 1\colon \Diamond\Diamond\neg p$	*de 2 por* (Int)
4.	$\checkmark \quad 1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 3 por* $(\Diamond K)$
5.	$\checkmark \quad 1.1\colon p$	*de 1 por* $(\Box K)$
6.	$\checkmark \quad 1.1.1\colon \neg p$	*de 4 por* $(\Diamond K)$

El tableau está terminado y queda abierto, mostrando que el conjunto $\{\Box p, \neg\Box\Box p\}$ *es satisfacible en la clase de todos los modelos y, por tanto, el argumento* $\langle\{\Box p\}, \Box\Box p\rangle$ *es inválido en la misma. El contra-modelo que ofrece el tableau para este argumento es el siguiente:*



Ejercicio 23 *Compruebe si las siguientes fórmulas son teoremas de t-*K*. Cuando una fórmula no lo sea, construya alguno de los contra-modelos generados por el tableau.*

(1) $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$.

(2) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$.

(3) $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$.

(4) $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$.

(5) $\Box(p \vee \Box q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$.

(6) $\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$.

(7) $\Diamond(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$.

Ejercicio 24 *Determine, usando el cálculo de tableaux-*K*, si las siguientes afirmaciones son correctas. Cuando una afirmación no lo fuera, construya un contra-modelo.*

(1) $\{\Box p, \Diamond q\} \vdash_{\text{t-K}} \Diamond(p \wedge q)$.

(2) $\{\Box(p \rightarrow q)\} \vdash_{\text{t-K}} \Box\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond q$.

(3) $\{\Box(p \vee q)\} \vdash_{\text{t-K}} \Box p \vee \Diamond q$.

(4) $\{\Box(\Diamond p \vee \Diamond q), \Diamond\Box\neg p\} \vdash_{\text{t-K}} \Diamond\Diamond q$.

4.9.2. Tableaux-D

Los tableaux-D se construyen usando el conjunto de reglas modales:

$$\{(Int), (\Box K), (\Box D), (\Diamond K)\}.$$

Ejemplo 21 *Consideremos la instancia de* **D***:* $\Box p \rightarrow \Diamond p$*. Un tableau-*D *para testar si es válida en la clase de modelos seriales es el siguiente:*

1.	✓	$1\colon \neg(\Box p \to \Diamond p)$	
2.		$1\colon \Box p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.		$1\colon \Box\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	✓	$1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box D)$
6.		$1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box D)$
7.		$1.1\colon p$	*de 5 por* $(\Diamond K)$
8.		$1.1\colon \neg p$	*de 4 por* $(\Box K)$
		$\otimes$	

*El tableau cierra y hay una prueba-*D *de* $\Box p \to \Diamond p$*. Por tanto, no hay modelo serial (modelo-*D*) que la invalide.*

*Construcción de modelos a partir de los tableaux-*D

La construcción de modelos se realiza igual que en el caso de los modelos para los tableaux-K, solo que la relación R_{K} para los tableaux-K se modifica, extendiéndola con la siguiente condición:

$$(\dagger_{\mathsf{D}}) \quad \{(\sigma,\sigma) \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma \text{ es una etiqueta final en } \mathfrak{r}\}.$$

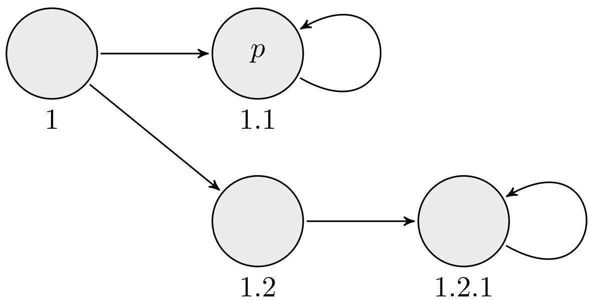
Es decir, $R_{\mathsf{D}} = R_{\mathsf{K}} \cup (\dagger_{\mathsf{D}})$. Decimos que una etiqueta σ es **final** en una rama si no existe una extensión simple suya en la rama. Con la definición anterior queda garantizada la serialidad de R_{D}, ya que cualquier etiqueta final en $\mathfrak{r}$ accedería a sí misma [4].

Ejemplo 22 *Testemos nuevamente la satisfacibilidad de* $\neg(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$*, pero esta vez en modelos seriales. Para ello, construimos el siguiente tableau-*D*:*

[4] Un modelo serial carece de mundos finales. El modelo que ofrece una rama con etiquetas finales (consideradas como mundos) no es serial. Por ello, definimos una extensión del marco no serial de la rama a un marco serial donde definir finalmente el modelo de la rama.

1.	✓	$1\colon \neg(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	✓	$1.1\colon p$	*de 2 por* $(\Diamond K)$
6.	✓	$1.2\colon \Box\neg p$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
7.	✓	$1.2\colon \Diamond\neg p$	*de 6 por* $(\Box D)$
8.	✓	$1.2.1\colon \neg p$	*de 7 por* $(\Diamond K)$

Siguiendo la explicación anterior de cómo construir modelos a partir de un tableaux-D *abierto, obtenemos el siguiente modelo, cuyo mundo* 1 *verifica* $\neg(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$*:*



Ejercicio 25 *Demuestre que* $\neg\Box(p \wedge \neg p)$ *y* $\Box\Diamond\Diamond(p \to (q \to p))$ *son teoremas de t*-D*.*

Ejercicio 26 *Demuestre que* $\neg(\Box\Box p \to \Box p)$ *es satisfacible en la clase de todos los modelos seriales.*

4.9.3. Tableaux-T

Los tableaux-T se construyen con el conjunto de reglas modales:

$$\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Diamond K)\}.$$

Construcción de modelos a partir de los tableaux-T

La construcción de modelos se realiza igual que en el caso de los modelos para los tableaux-K, extendiendo R_{K} con la condición:

$$(\dagger_{\mathsf{T}}) \quad \{(\sigma, \sigma) \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma \in E^{\mathfrak{r}}\}.$$

La relación así definida, a la que llamaremos R_{T} $(= R_{\mathsf{K}} \cup (\dagger_{\mathsf{K}}))$, es reflexiva [5].

Ejemplo 23 *Veamos si hay un modelo reflexivo que satisfaga la fórmula*

$$\Box(p \wedge q) \wedge (\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond\Diamond\neg q)$$

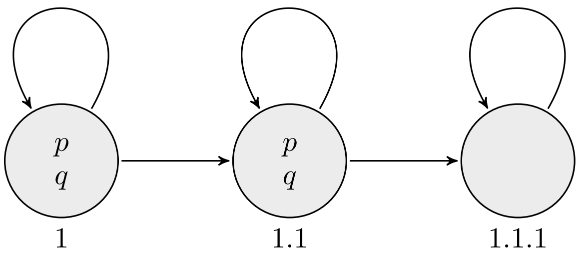
Tenemos el siguiente tableau-T*:*

1.	✓ $1\colon \Box(p \wedge q) \wedge (\Box\Diamond\neg p \vee \Diamond\Diamond\neg q)$		
2.	✓ $1\colon \Box(p \wedge q)$		*de 1 por* $(\wedge)$
3.	✓ $1\colon \Box\Diamond\neg p \vee \Diamond\Diamond\neg q$		*de 1 por* $(\wedge)$
4.	✓ $1\colon p \wedge q$		*de 2 por* $(\Box T)$
5.	✓ $1\colon p$		*de 4 por* $(\wedge)$
6.	✓ $1\colon q$		*de 4 por* $(\wedge)$
7.	$1\colon \Box\Diamond\neg p$	✓ $1\colon \Diamond\Diamond\neg p$	*de 3 por* $(\vee)$
8.	✓ $1\colon \Diamond\neg p$	$\vert$	*de 7 por* $(\Box T)$
9.	$1.1\colon \neg p$	✓ $1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 8 y 7 por* $(\Diamond K)$
10.	✓ $1.1\colon p \wedge q$	✓ $1.1\colon p \wedge q$	*de 2 por* $(\Box K)$
11.	$1.1\colon p$	✓ $1.1\colon p$	*de 10 por* $(\wedge)$
12.	$1.1.\colon q$	✓ $1.1\colon q$	*de 10 por* $(\wedge)$
13.	$\otimes$	✓ $1.1.1\colon \neg p$	*de 9 por* $(\Diamond K)$

La rama izquierda cierra, pero la rama derecha está abierta. Nótese que no podemos ir desde 1 a 1.1.1 porque 1.1.1 no es una extensión simple de 1; así que la fórmula etiquetada del paso 2, a saber, $1\colon \Box(p \wedge q)$ *no puede utilizarse como premisa de la regla* $(\Box K)$ *y anotar 1.1.1:* $p \wedge q$ *en la rama derecha. Por esta rama podemos encontrar al menos un modelo reflexivo que satisfaga la fórmula base de la raíz.*

[5] Los modelos de t-T son reflexivos.

$W = \{1,\ 1.1,\ 1.1.1\}$;
$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,1.1\rangle, \langle 1.1,1.1\rangle, \langle 1.1,1.1.1\rangle, \langle 1.1.1,1.1.1\rangle\}$;
$V(p) = V(q) = \{1,1.1\}$.



Ejercicio 27 *Considere una manera más flexible de definir la función V de valoración que venimos manejando y defina un modelo diferente al ofrecido para la rama abierta del tableau del ejemplo 23.*

Ejercicio 28 *Pruebe que las siguientes fórmulas son válidas en la clase de modelos reflexivos:*

(1) $\Box p \to p$ *(instancia de* **T***).*

(2) $\Box(p \to \Box q) \to \Box(\Box p \to q)$.

Ejercicio 29 *Muestre que los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles en la clase de modelos reflexivos:*

(1) $\{\Box p \vee \Box\neg q, \Box\neg p, \Diamond(\neg p \to \Diamond q)\}$.

(2) $\{\Box\Diamond\neg p, \Box\neg q, \Box\Diamond p \to \Box q\}$.

4.9.4. Tableaux-B

Los tableaux-B se construyen usando el siguiente conjunto de reglas modales:

$$\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Box B), (\Diamond K)\}.$$

Ejemplo 24 *Mostraremos que la instancia de* B, $p \to \Box\Diamond p$, *tiene una prueba en t*-B.

1.	✓	$1\colon \neg(p \to \Box\Diamond p)$	
2.		$1\colon p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	✓	$1.1\colon \Box\neg p$	*de 4 por* $(\Diamond K)$
6.		$1\colon \neg p$	*de 5 por* $(\Box B)$
		$\otimes$	

Construcción de modelos a partir de los tableaux-B

Seguimos las pautas de la construcción de modelos para tableaux-T añadiendo a la relación R_{T} la condición:

$$\{\langle \sigma, \sigma' \rangle \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma \text{ es una extensión simple de } \sigma'\}$$

Esta condición expresa una relación simétrica. Por tanto, la nueva relación R_{B}, que extiende R_{T} con dicha condición, es reflexiva y simétrica [6].

Ejercicio 30 *Muestre que la relación* R_{B} *definida es simétrica.*

Ejercicio 31 *Determine mediante la técnica de tableaux si la fórmula* $\Box\Diamond\Box p$ *es satisfacible en la clase de modelos*-B. *Si lo es, defina un modelo usando el tableau*-B *construido.*

Ejercicio 32 *Decida si las siguientes fórmulas son teoremas de* t-B. *Para los casos negativos construya un contra-modelo.*

(1) $(p \wedge \Box q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$.

(2) $((\Box p \wedge (p \to \Diamond\Box q)) \to \Box q$.

(3) $(p \to \Box\neg q) \to \Box(q \to \Diamond\neg p)$.

[6] Los modelos de los tableaux-B son reflexivos y simétricos.

4.9.5. Tableaux-S4

Los tableaux-S4 se construyen usando cualquiera de los siguientes conjuntos de reglas modales:

t-S4: $\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Diamond 4)\}$.
t-S$4(i)$: $\{(Int), (\Box 4_d), (\Diamond 4)\}$.

Ejemplo 25 *Veamos que la instancia de* **4**, $\Box p \to \Box\Box p$, *tiene una prueba en t-S4.*

1.	✓	$1\colon \neg(\Box p \to \Box\Box p)$	
2.		$1\colon \Box p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Box p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Diamond\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.		$1\colon p$	*de 2 por* $(\Box T)$
6.	✓	$1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Diamond 4)$
7.		$1.1\colon p$	*de 2 por* $(\Box K)$
8.		$1.1\colon \Box p$	*de 2 por* $(\Box 4)$
9.		$1.1.1\colon \neg p$	*de 6 por* $(\Diamond 4)$
10.		$1.1.1\colon p$	*de 8 por* $(\Box K)$
		$\otimes$	

En las restricciones de aplicación de la regla $(\Diamond 4)$ interviene el concepto de *etiqueta superflua*, que nos permite introducir un mecanismo que evita la infinitud del tableau. Imaginemos por un momento que para los tableaux-S4 usáramos la regla $(\Diamond K)$ en lugar de la regla $(\Diamond 4)$, de modo que eliminaríamos la restricción "σ no es superflua en la rama". Veamos el resultado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 26 *Decidamos la validez de la fórmula* $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ *en la clase de modelos reflexivos y transitivos:*

1.	$\checkmark$	$1\colon \neg(\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)$	
2.		$1\colon \Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \neg\Diamond\Box p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.		$1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box T)$
6.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box T)$
7.		$1.1\colon p$	*de 5 por* $(\Diamond K)$
8.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box K)$
9.		$1.1\colon \Box\Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 4)$
10.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box K)$
11.		$1.1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box 4)$
12.		$1.2\colon \neg p$	*de 6 por* $(\Diamond K)$
13.		$1.2\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box K)$
14.		$1.2\colon \Box\Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 4)$
15.		$1.2\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box K)$
16.		$1.2\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box 4)$
17.		$1.1.1\colon p$	*de 8 por* $(\Diamond K)$
18.		$1.1.1\colon \Diamond p$	*de 9 por* $(\Box K)$
19.		$1.1.1\colon \Box\Diamond p$	*de 9 por* $(\Box 4)$
20.		$1.1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 11 por* $(\Box K)$
21.		$1.1.1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 11 por* $(\Box 4)$
22.		$1.1.2\colon \neg p$	*de 10 por* $(\Diamond K)$
23.		$1.1.2\colon \Diamond p$	*de 9 por* $(\Box K)$
24.		$1.1.2\colon \Box\Diamond p$	*de 9 por* $(\Box 4)$
25.		$1.1.2\colon \Diamond\neg p$	*de 11 por* $(\Box K)$
26.		$1.1.2\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 11 por* $(\Box 4)$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Nótese que el conjunto de fórmulas base asociadas a 1.1 es el mismo que el de 1.1.1, a saber

$$\{p.\Diamond p, \Box\Diamond p, \Diamond\neg p, \Box\Diamond\neg p\}$$

y el correspondiente a 1.2 es el mismo que el de 1.1.2:

$$\{\neg p, \Diamond p, \Box\Diamond p, \Diamond\neg p, \Box\Diamond\neg p\}.$$

Podríamos proseguir así indefinidamente alternando ambos conjuntos.

La cuestión es que la regla $(\Box 4)$ (también le pasa a $(\Box 4_d)$) causa infinitud si no hay un mecanismo de parada, como vamos a tener ocasión de comprobar. Un mecanismo que cumple esta función es el conocido como **comprobación de bucles** (*loop checking*), que identifica un bucle que se repite indefinidamente. Esa es la razón por la que hemos definido la noción de *etiqueta superflua*. Ésta indica una repetición de fórmulas que daría lugar a un bucle en la rama. La restricción de la regla $(\Diamond 4)$, que impide usar como premisa de la regla una fórmula etiquetada con una etiqueta superflua, evita la aplicación de reglas existenciales sin control y la prolongación indefinida de la rama.

La noción de etiqueta superflua varía en la bibliografía. Hay autores que exigen una repetición exacta del conjunto de fórmulas base asociadas a una etiqueta para identificarla como superflua. Fitting, 1983 y Goré, 1999 son incluso más restrictivos; pues requiere que haya una cadena entre las etiquetas. Otros autores, como Massacci, 2000, eliminan esta última restricción. Una condición aún menos restrictiva es considerar que una etiqueta σ es superflua en una rama si hay otra etiqueta σ' que aparece antes en esa misma rama tal que el conjunto de fórmulas base asociadas a σ es un subconjunto del conjunto de fórmulas base asociadas a σ' (véase, por ejemplo, Bolander y Blackburn, 2007; Bolander y Braüner, 2006). Aquí seremos todavía menos restrictivos, de manera que podamos encontrar los bucles antes. Para considerar a una etiqueta σ como superflua nos contentaremos con que exista otra etiqueta σ' en la misma rama que verifique que toda fórmula modal asociada a σ lo esté igualmente a σ'. No importa entonces que σ' aparezca antes o después que σ en la rama ni que entre los conjuntos asociados a ambas etiquetas se dé una relación de inclusión no estricta; solo compararemos los subconjuntos de fórmulas modales asociados a ambas etiquetas.

Necesitamos nueva notación:

- $\mathsf{Base}^{\mathfrak{r}}_{\sigma}$ es el conjunto de fórmulas base etiquetadas con σ que aparecen en $\mathfrak{r}$ (i.e., $\mathsf{Base}^{\mathfrak{r}}_{\sigma} = \{A \in \mathcal{L}_M \mid \sigma\colon A \text{ ocurre en } \mathfrak{r}\}$).
- $\mathsf{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma}$ es el siguiente conjunto de fórmulas base modales que ocurren en $\mathsf{Base}^{\mathfrak{r}}_{\sigma}$: $\mathsf{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma} = \{A \in \mathsf{Base}^{\mathfrak{r}}_{\sigma} \mid A \text{ es de la forma } \Box B \text{ o } \Diamond B\}$.

Sea $\mathfrak{r}$ una rama de un tableau y $\sigma \in E^{\mathfrak{r}}$. Diremos que σ es una **etiqueta superflua** en $\mathfrak{r}$ (o $\mathfrak{r}$-superflua) si existe $\sigma' \in E^{\mathfrak{r}}$ que verifica una de las situaciones siguientes:

(1) $\mathsf{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma} \subset \mathsf{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma'}$

(2) $\mathrm{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma} = \mathrm{MBase}^{\mathfrak{r}}_{\sigma'}$ y σ' ocurre antes que σ in $\mathfrak{r}$.

En este caso, llamamos a σ una repetición modal de σ' en $\mathfrak{r}$. Si σ' es la primera etiqueta que interviene en $\mathfrak{r}$ tal que σ es una repetición modal de σ', decimos que σ' es la original de σ en $\mathfrak{r}$. Si está claro por el contexto, decimos simplemente que una etiqueta es "superflua" u "original", sin mencionar la rama.

Ejemplo 27 *Si ahora tenemos en cuenta el uso de la regla* $(\Diamond 4)$, *el tableau del ejemplo 26 quedaría como sigue:*

1.	$\checkmark$	$1\colon \neg(\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)$	
2.	$\checkmark$	$1\colon \Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \neg\Diamond\Box p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	$\checkmark$	$1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box T)$
6.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box T)$
7.	$\checkmark$	$1.1\colon p$	*de 5 por* $(\Diamond 4)$
8.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box K)$
9.	$\checkmark$	$1.1\colon \Box\Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 4)$
10.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box K)$
11.	$\checkmark$	$1.1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box 4)$
12.	$\checkmark$	$1.2\colon \neg p$	*de 6 por* $(\Diamond 4)$
13.	$\checkmark$	$1.2\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box K)$
14.	$\checkmark$	$1.2\colon \Box\Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 4)$
15.	$\checkmark$	$1.2\colon \Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box K)$
16.	$\checkmark$	$1.2\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 4 por* $(\Box 4)$

El tableau está terminado y queda abierto. Las etiquetas 1.1 y 1.2 son superfluas, pues el conjunto de fórmulas modales

$$\{\Diamond p, \Box\Diamond p, \Diamond\neg p, \Box\Diamond\neg p\}$$

asociado a ambas está asociado también a la etiqueta 1.

*Construcción de modelos a partir de los tableaux-*S4

En este caso, dada una rama abierta $\mathfrak{r}$ de un tableau terminado, la relación de accesibilidad $R_{\mathsf{S4}} \subseteq E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}}$ podemos construirla en sucesivos pasos extendiendo diversas relaciones R_1, R_2, R_3 (donde $R_3 = R_{\mathsf{S4}}$) como sigue:

1. $R_1 = \{(\sigma, \sigma') \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma'$ es una extensión de $\sigma\}$.
2. $R_2 = R_1 \cup \{(\sigma, \sigma') \mid \sigma$ es $\mathfrak{r}$-superflua y σ' es el original de σ en $\mathfrak{r}\}$.
3. R_3 es el cierre transitivo de R_2 [7].

La relación inicial R_1 es una relación reflexiva y transitiva (probamos esto más abajo). R_2 es una extensión de R_1 que obedece a la introducción de nuevos pares correspondientes al mecanismo de *comprobación de bucles*, por eso engancha cada etiqueta superflua con su original formando un bucle. Esto hace que potencialmente se pierda la transitividad que tiene R_1 pero se mantenga la reflexividad. Finalmente, realizamos el cierre transitivo de R_2 para recuperar la transitividad tras haber introducido nuevos pares. Esto da pie a una nueva relación (R_3) que culmina el proceso. Por tanto, para ver que $R_{\mathsf{S4}}(= R_3)$ es finalmente reflexiva y transitiva solo hemos de ver que R_1 lo es.

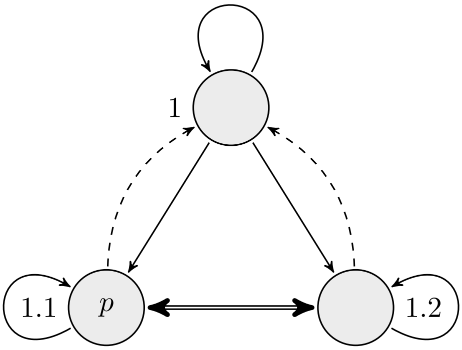
Probemos que R_1 es transitiva: supongamos que $\langle \sigma, \sigma' \rangle \in R_1$ y $\langle \sigma', \sigma'' \rangle \in R_1$, entonces σ' es una extensión de σ y σ'' lo es de σ'. Esto quiere decir que tenemos las siguientes posibilidades:

1. $\sigma = \sigma' = \sigma''$
2. $\sigma = \sigma'$ y σ'' es una extensión propia de σ'
3. σ' es una extensión propia de σ y $\sigma' = \sigma''$
4. σ' es una extensión propia de σ y σ'' es una extensión propia de σ'.

En todos estos casos σ'' es una extensión de σ y, por tanto, $\langle \sigma, \sigma'' \rangle \in R_1$. Veamos como se demuestra esto en el caso de que se cumpliera 4 (el resto de condiciones quedan como ejercicio). Si $\sigma' = \sigma.n_1.n_2 \dots n_k$ (con $k \geq 1$) y $\sigma'' = \sigma'.m_1.m_2 \dots m_j$ (con $j \geq 1$), entonces $\sigma'' = \sigma.n_1.n_2 \dots n_k.m_1 m_2 \dots m_j$; es decir, σ'' es una extensión propia de σ y, por tanto, una extensión de σ.

Ejemplo 28 *Para la rama abierta del tableau del ejemplo 27 tenemos la construcción del siguiente modelo:*

[7] El **cierre transitivo** de una relación R es la menor relación R' (con respecto a $\subseteq$) tal que $R \subseteq R'$ y R' es transitiva.



Las flechas continuas corresponden a la relación R_1. Las flechas discontinuas representan los pares $\langle 1.1, 1\rangle$ y $\langle 1.2, 1\rangle$ del modelo correspondientes a los bucles. Todas estas flechas (continuas y discontinuas) representan la relación R_2. La flecha de doble trazo representa los pares que faltan para obtener una relación que sea el cierre transitivo de R_2. Finalmente, el modelo presenta una relación reflexiva y transitiva (R_3). Este modelo es un modelo-$\mathsf{S}4$ donde la fórmula $\neg(\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)$ es verdadera en 1. Luego $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ no es válida en la clase de todos los modelos reflexivos y transitivos (que son modelos-$\mathsf{S}4$).

Ejercicio 33 *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

(1) $\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$ es válida en la clase de modelos reflexivos y transitivos.

(2) El conjunto $\{\Box(p \wedge \Diamond\Diamond q), \Diamond(\Box\neg p \vee \neg q)\}$ es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y transitivos.

(3) El conjunto $\{\Box\Diamond p, \Diamond(\Box p \wedge \Diamond q)\}$ es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y transitivos (puede probar a hacer el ejercicio de dos formas distintas: usando la regla de acortamiento $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$ y sin ella).

El lector puede utilizar cualquier versión de los tableaux S4 para los ítems 1-3.

Ejercicio 34 *Modifique el procedimiento de la figura 4.1 dando prioridad a las reglas existenciales sobre las disyuntivas (como en el ejercicio 21) y compruebe la satisfacibilidad en la clase de modelos reflexivos y transitivos del conjunto $\{\Box p, \Diamond\Diamond q, \Box\neg p \vee \Diamond q\}$. Luego use el procedimiento habitual para este mismo conjunto y compare los dos tableaux. En ambos casos utilice la versión t-$\mathsf{S}4$.*

4.9.6. Tableaux-S5

Los tableaux-S5 se construyen usando cualquiera de los siguientes conjuntos de reglas modales:

t-S5: $\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Diamond 5)\}$.
t-S5(i): $\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Diamond 4)\}$.
t-S5(ii): $\{(Int), (\Box 5_d), (\Diamond 5)\}$.

Nótese que la presentación t-S5(i) de los tableaux-S5 lleva un mecanismo de comprobación de bucles, requerido por la incorporación de la regla $(\Diamond 4)$, sobre el cual hablamos al tratar los tableaux-S4. Las otras presentaciones no requieren de dicho mecanismo debido a la presencia de la regla $(\Diamond 5)$ (véase la observación 16).

Ejemplo 29 *Veamos que hay una prueba los tableaux-S5 de la instancia del esquema de axioma* **5**: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$. *O lo que es lo mismo, que dicha instancia es válida en la clase de modelos de equivalencia. Para ello, usaremos el conjunto de reglas modales de t-S5:*

$$\{(Int), (\Box K), (\Box T), (\Box 4), (\Box 4^r), (\Diamond 5)\}.$$

Obtenemos el tableau:

1.	✓	$1\colon \neg(\Diamond p \to \Box\Diamond p)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg p$	*de 3 por* (Int)
5.		$1.1\colon p$	*de 2 por* $(\Diamond 5)$
6.		$1.2\colon \Box\neg p$	*de 4 por* $(\Diamond 5)$
7.		$1\colon \Box\neg p$	*de 6 por* $(\Box 4^r)$
8.		$1.2\colon \neg p$	*de 6 por* $(\Box T)$
9.		$1.1\colon \neg p$	*de 7 por* $(\Box K)$
		$\otimes$	

Construcción de modelos a partir de los tableaux-S5

En este caso la relación R_{S5} se define

$$\{(\sigma, \sigma') \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma, \sigma' \in E^{\mathfrak{r}}\}.$$

Esta relación es de equivalencia sobre $E^{\mathfrak{r}}$ [8].

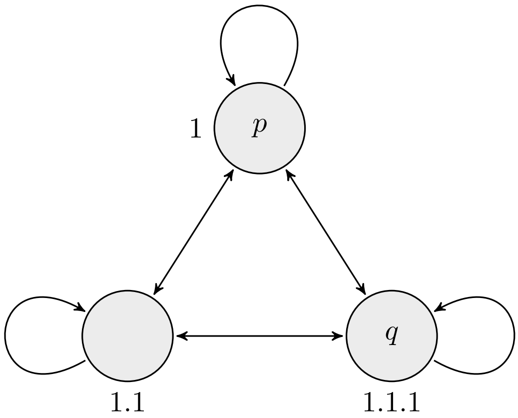
Ejemplo 30 *Veamos que la fórmula $(p \wedge \Diamond\neg q) \wedge (\Diamond\Diamond\Box\neg p \vee \Box\Diamond q)$ es satisfacible en la clase de modelos de equivalencia. Construimos un tableau-*S5 *para dicha fórmula y usaremos el conjunto de reglas:*

$$t\text{-}\mathsf{S5}(ii) = \{(Int), (\Box 5_d), (\Diamond 5)\}.$$

1.	$\checkmark$ $1\colon (p \wedge \Diamond\neg q) \wedge (\Diamond\Diamond\Box\neg p \vee \Box\Diamond q)$		
2.	$\checkmark$ $1\colon p \wedge \Diamond\neg q$		*de 1 por* $(\wedge)$
3.	$\checkmark$ $1\colon \Diamond\Diamond\Box\neg p \vee \Box\Diamond q$		*de 1 por* $(\wedge)$
4.	$\checkmark$ $1\colon p$		*de 2 por* $(\wedge)$
5.	$\checkmark$ $1\colon \Diamond\neg q$		*de 2 por* $(\wedge)$
6.	$\checkmark$ $1\colon \Diamond\Diamond\Box\neg p$	$\checkmark$ $1\colon \Box\Diamond q$	*de 3 por* $(\vee)$
7.	$\vert$	$\checkmark$ $1\colon \Diamond q$	*de 6 por* $(\Box 5_d)$
8.	$1.1\colon \neg q$	$\checkmark$ $1.1\colon \neg q$	*de 5 por* $(\Diamond 5)$
9.	$\vert$	$\checkmark$ $1.1\colon \Diamond q$	*de 6 por* $(\Box 5_d)$
10.	$\checkmark$ $1.2\colon \Diamond\Box\neg p$	$\checkmark$ $1.1.1\colon q$	*de 6 y 7 por* $(\Diamond 5)$
11.	$\vert$	$\checkmark$ $1.1.1\colon \Diamond q$	*de 6 por* $(\Box 5_d)$
12.	$1.2.1\colon \Box\neg p$		*de 10 por* $(\Diamond 5)$
13.	$1\colon \neg p$		*de 12 por* $(\Box 5_d)$
	$\otimes$		

El tableau está terminado y la rama derecha está abierta. Por ahí puede encontrarse un modelo que satisfaga la fórmula base inicial. El modelo descrito por la rama es el siguiente:

[8] Más específicamente es una relación universal sobre $E^{\mathfrak{r}}$, una subclase de las relaciones de equivalencia. Los cálculos de tableaux-S5 solo necesitan buscar modelos entre los modelos universales. Es por ello que Fitting, 1983, p. 397 simplifica la notación de las etiquetas usando enteros, ya que la relación de accesibilidad que se maneja en los modelos es universal (un subtipo de relación de equivalencia). No obstante, nosotros mantendremos las etiquetas tal y como las hemos definido por una mera cuestión de homogeneización con el resto de cálculos de tableaux.



Observación 16 *Las condiciones de aplicación de la regla* $(\Diamond 5)$ *incorporan un mecanismo de parada. Recordemos la regla:*

$$\frac{\sigma\colon \Diamond A}{\sigma.n\colon A}\quad \begin{array}{l}n \text{ es el mínimo entero para el cual } \sigma.n \text{ es nueva}\\ \text{en la rama y para ninguna etiqueta } \sigma' \text{ se da que}\\ \sigma'\colon A \text{ ocurra en dicha rama.}\end{array}$$

La condición a la que nos referimos es que no ocurra en la rama la fórmula A *asociada a una etiqueta* σ' *ya usada.*

Sin esta condición un tableau podría no parar [9]. *Veamos el siguiente ejemplo, donde eliminamos dicha condición; para ello utilizamos la regla* $(\Diamond K)$ *en su lugar.*

[9] A diferencia de las reglas $(\Diamond K)^{\mathsf{A}}$ y $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$, la restricción que lleva la formulación de la regla $(\Diamond 5)$ no es una simple condición de acortamiento.

1.	✓	$1\colon \Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\neg p$	
2.		$1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\wedge)$
3.		$1\colon \Box\Diamond\neg p$	de 1 por $(\wedge)$
4.	✓	$1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
5.	✓	$1\colon \Diamond\neg p$	de 3 por $(\Box 5_d)$
6.		$1.1\colon p$	de 4 por $(\Diamond K)$
7.	✓	$1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
8.	✓	$1.1\colon \Diamond\neg p$	de 3 por $(\Box 5_d)$
9.		$1.2\colon \neg p$	de 5 por $(\Diamond K)$
10.		$1.2\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
11.		$1.2\colon \Diamond\neg p$	de 3 por $(\Box 5_d)$
12.		$1.1.1\colon p$	de 7 por $(\Diamond K)$
13.		$1.1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
14.		$1.1.1\colon \Diamond\neg p$	de 3 por $(\Box 5_d)$
15.		$1.1.2\colon \neg p$	de 8 por $(\Diamond K)$
16.		$1.1.2\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
17.		$1.1.2\colon \Diamond\neg p$	de 3 por $(\Box 5_d)$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

y así estaríamos alternando indefinidamente los conjuntos

$$\{p, \Diamond p, \Diamond\neg p\} \text{ y } \{\neg p, \Diamond p, \Diamond\neg p\}$$

con diferentes etiquetas. Con la restricción que hemos eliminado de la regla $(\Diamond 5)$ *paramos en el paso 9 y tenemos un modelo-*$\mathrm{S5}$ *de la fórmula* $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\neg p$*, cuya satisfacibilidad se ha puesto a prueba en la clase de modelos-*$\mathrm{S5}$*.*

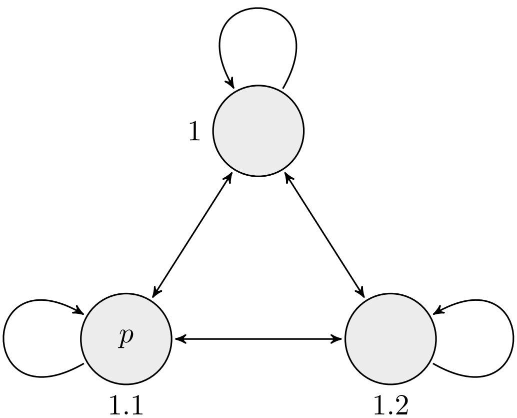
Podemos demostrar efectivamente que dicha condición constituye un mecanismo de parada para los tableaux-$\mathrm{S5}$*. Veámoslo para el caso particular en que la entrada del tableau es una fórmula (se generaliza muy fácilmente a conjuntos finitos de fórmulas). Sea* A *la fórmula base de la raíz de un tableau, todas las fórmulas base que aparecen en el tableau pertenecen al conjunto compuesto por las subfórmulas y negaciones de subfórmulas de* A*. Este conjunto es finito, pues* A *es de longitud finita. Eso quiere decir que el conjunto de fórmulas base existenciales que pueden entrar en una rama* $\mathfrak{r}$ *del tableau es finito igualmente. Sea* $\{\Diamond A_1, \ldots, \Diamond A_n\}$ *tal conjunto. Ahora, debido a las condiciones de aplicación de la regla* $(\Diamond 5)$*, para cada*

$\Diamond A_i (1 \leq i \leq n)$, la fórmula base A_i solo puede intervenir en una aplicación de la regla $(\Diamond 5)$ una sola vez, no importa con qué etiqueta σ se asocie A_i en $\mathfrak{r}$. Así que no hay más de n aplicaciones de la regla $(\Diamond 5)$ en $\mathfrak{r}$ y, por tanto, tenemos a lo sumo $n+1$ etiquetas diferentes en la rama [10]. Conforme a lo que prueba Fitting, 1983, el número de fórmulas base asociadas a una misma etiqueta en una rama es finito, luego $\mathfrak{r}$ contiene un número finito de fórmulas etiquetadas, es decir, $\mathfrak{r}$ es finita.

Si usamos ahora la regla $(\Diamond 5)$ en lugar de $(\Diamond K)$ en el tableau anterior, el resultado es el siguiente:

1.	$\checkmark\ 1\colon \Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond\neg p$	
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box\Diamond p$	*de 1 por* $(\wedge)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \Box\Diamond\neg p$	*de 1 por* $(\wedge)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 5_d)$
5.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg p$	*de 3 por* $(\Box 5_d)$
6.	$\checkmark\ 1.1\colon p$	*de 4 por* $(\Diamond 5)$
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 5_d)$
8.	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond\neg p$	*de 3 por* $(\Box 5_d)$
9.	$\checkmark\ 1.2\colon \neg p$	*de 5 por* $(\Diamond 5)$
10.	$\checkmark\ 1.2\colon \Diamond p$	*de 2 por* $(\Box 5_d)$
11.	$\checkmark\ 1.2\colon \Diamond\neg p$	*de 3 por* $(\Box 5_d)$

donde hay una rama abierta. El modelo encontrado es:



[10] Téngase en cuenta que si no hubiera fórmulas existenciales en la rama, al menos aparecería la etiqueta inicial 1.

Ejercicio 35 *Demuestre que las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) $\vdash_{\text{t-S5}} (\Box p \wedge \Box(p \to q)) \to \Box\Diamond\Box q$.

(2) $\vdash_{\text{t-S5}} \Diamond\Box p \to \Box p$.

(3) $\vdash_{\text{t-S5}} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond q)$

(4) $\{\Box\Diamond\Box p, \Diamond(p \to q)\} \vdash_{\textit{t-S5}} \Diamond q$

(5) La fórmula $\Diamond\Box\Diamond p$ *es satisfacible en la clase de modelos cuya relación de accesibilidad es de equivalencia.*

Aunque en los ítems (1)-(4) aparece la expresión "$\vdash_{\text{t-S5}}$*" (para unificar), el lector puede usar, en cada caso, la versión que le parezca de los tableaux-*$\mathrm{S5}$*.*

5. DEDUCCIÓN NATURAL

En este capítulo estudiaremos sistemas de deducción natural para la lógica modal básica. Para la elaboración del mismo nos hemos basado en el libro de Garson, 2013 y en las notas de clase no publicadas de Mastop, s.f. Los sistemas de cálculos allí presentados son, a su vez, extensiones modales del conocido como "estilo Fitch" para la deducción natural clásica (Fitch, 1952). En realidad, aunque fue Fitch quien popularizó estos sistemas y fijó su notación actual, su creador fue el lógico polaco Jaśkowski (véase Pelletier y Hazen, 2024 para esta y otras notas históricas).

Los sistemas de deducción natural son parecidos a los cálculos axiomáticos del capítulo 3. Hay dos diferencias fundamentales: (i) en deducción natural no tenemos axiomas, solo reglas de inferencia; (ii) hay un constructo calculístico ausente en los cálculos axiomáticos llamado *supuesto*, que permite capturar de forma transparente la noción de razonamiento hipotético. Uno de los propósitos de este tipo de cálculos es, como su nombre sugiere, modelar algo parecido a lo que hacemos los humanos cuando razonamos en un contexto lógico.

5.1. CÁLCULO DE DEDUCCIÓN NATURAL PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL CLÁSICA

Comenzamos recordando todas las nociones básicas de la deducción natural clásica. No obstante tal y como advertimos en el prólogo, la lectura de este capítulo resultará más provechosa para las personas que tengan ya cierta familiaridad con las mismas. Para un aprendizaje desde cero del cálculo de deducción natural recomendamos, por ejemplo, los capítulos II.3 y III.2 de Deaño, 1975 como fuente en castellano.

5.1.1. Elementos del cálculo de deducción natural

- **Reglas de inferencia**

El constructo calculístico fundamental de los sistemas de deducción natural es el de **regla de inferencia**, que ya conocemos del capítulo 3. Una regla de deducción natural es un patrón con la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l}
P_1 \\
\vdots \\
P_n \\
\cdots\cdots \\
C_1 \\
\vdots \\
C_k
\end{array}
$$

donde $P_1, ..., P_n, C_1, ..., C_k$ representan esquemas de fórmulas. Denominamos a $P_1, ..., P_n$ las **premisas** de la regla y a $C_1, ..., C_k$ las **conclusiones** de la misma. En este libro, ocurre que $k \leq 2$. La línea de puntos que separa las premisas de la conclusión se denomina **línea de inferencia**.

Podemos sintetizar las dos reglas

$$
\begin{array}{lclcl}
P_1 & & C_1 & & P_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
P_n & & C_k & & P_n \\
\cdots\cdots & \text{y} & \cdots\cdots & \text{en la } \textbf{regla doble} & :::::::::: \\
C_1 & & P_1 & & C_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
C_k & & P_n & & C_k
\end{array}
$$

- **Subpruebas (subderivaciones)**

Son estructuras de la forma:

$$\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array}$$

donde A y B son fórmulas. Denominamos a A la **apertura** de la subprueba y a B el **cierre** de la subprueba. Los puntos en vertical indican la posible presencia de nuevas fórmulas que conforman, junto con la apertura y cierre, la subprueba.

- **Premisas**

Las premisas son las hipótesis de una deducción o prueba. Se colocan al principio de la misma en una lista.

- **Supuestos provisionales**

Los supuestos provisionales (o simplemente supuestos) son hipótesis con las que iniciamos las subpruebas. Un supuesto es la apertura de una subprueba. La línea que cierra la prueba indica la **cancelación** del supuesto. A diferencia de estos, las premisas son hipótesis que no se cancelan.

5.1.2. Aplicación de reglas de inferencia

Aplicar una regla de la forma:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ \vdots \\ P_n \\ \cdots\cdots \\ C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{array}$$

a una secuencia de fórmulas $F_1, ..., F_m$ consiste en (i) identificar las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ como instancias respectivas de $P_1, \ldots, P_n$; y (ii) crear una secuencia $F_1, ..., F_m, F_1', ..., F_k'$ donde $F_1', ..., F_k'$ son instancias de $C_1, ..., C_k$.

5.1.3. Concepto de prueba (deducción)

Sea A una fórmula de $\mathcal{L}_P$ y $\Gamma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_P$. Una **deducción** (o **derivación**) en el cálculo de deducción natural proposicional (dn-prop) **de** A **a partir de** Γ (en símbolos: $\Gamma \vdash_{\text{dn-prop}} A$) es una secuencia finita (no vacía) de fórmulas de $\mathcal{L}_P$, $P_1, \ldots, P_n, A_{n+1}, \ldots A_{n+m}$, que cumple las siguientes condiciones:

1. $P_1, \ldots, P_n$ son premisas.
2. Cada fórmula A_k (con $n+1 \leq k \leq n+m$) es un supuesto o bien se obtiene de una (o varias) fórmula(s) anterior(es) mediante la aplicación de una regla de inferencia.
3. Cualquier par de supuestos A_{k_1} y A_{l_1} de la secuencia que cierran respectivamente en A_{k_2} y A_{l_2} satisfacen lo siguiente: si $k_1 < l_1$ entonces $l_2 < k_2$[1].
4. Todos los supuestos están cancelados.
5. $A_{n+m} = A$.

Decimos que A es **deducible (o derivable) de** un conjunto finito de fórmulas Γ en dn-prop sii existe una deducción en dn-prop de A a partir de Γ. Equivalentemente, diremos que el argumento $\langle \Gamma, A \rangle$ es **deducible (o derivable)** en dn-prop. En el caso especial de que Γ sea vacío tenemos una **demostración** en dn-prop de A (en símbolos: $\emptyset \vdash_{\text{dn-prop}} A$; lo cual equivale a $\vdash_{\text{dn-prop}} A$). En este caso a la fórmula A se le llama **teorema** de dn-prop.

Una prueba se organiza usualmente en columna, cada línea se denomina "línea de derivación" (o deducción) y se usan comentarios metalingüísticos a la derecha de cada línea de deducción para aclarar cómo se ha procedido. Las premisas llevan el comentario "premisa" y los supuestos provisionales llevan el término "supuesto". El resto de las líneas llevan la regla aplicada y las líneas de deducción involucradas para obtener dicha línea.

[1] En términos gráficos, si tenemos dos líneas verticales delimitando subpruebas que se extienden en paralelo, entonces la que está más a la derecha no podrá superar nunca a la que está más a la izquierda.

Algo importante a considerar en una deducción es que una vez que un supuesto ha sido cancelado, las fórmulas que hay dentro de la subprueba de la cual el supuesto es la apertura no pueden ser usadas mediante ninguna regla de inferencia fuera de la subprueba.

Por ejemplo, veamos una aplicación errónea (la de la izquierda) y otra correcta (la de la derecha) de la regla (Id):

Aplicación errónea de (Id)	Aplicación correcta de (Id)
$\quad\mid\ \vdots$	n $\quad A$
$\quad\mid\ \vdots$	$\quad\vdots$
n $\quad\mid\ A$	$\qquad\mid\ \vdots$
$\quad\mid\ \vdots$	$\qquad\mid\ \vdots$
$\quad\vdots$	m $\quad\mid\ A \quad$ (Id) n
m $\quad A \quad$ (Id) n	$\qquad\mid\ \vdots$

Reglas para el cálculo proposicional. La tabla 5.1 muestra las reglas básicas de un cálculo de deducción natural correcto y completo para la lógica proposicional clásica. Nótese que el sistema está formado por una regla de introducción (I) y una eliminación (E) para cada operador booleano. Asimismo, las tablas 5.2 y 5.3 muestras algunas reglas derivadas proposicionales[2]. Para estrategias de prueba así como multitud de ejemplos, volvemos a remitir al lector a la obra de Deaño, 1975.

5.2. CÁLCULO DE DEDUCCIÓN NATURAL PARA LA LÓGICA MODAL PROPOSICIONAL

El cálculo de deducción natural para la lógica modal proposicional extiende el cálculo de deducción natural proposicional (que acabamos de introducir) con nuevas reglas de inferencia para manejar los operadores modales. Dada una lógica modal normal L (véase el capítulo 3), denotamos mediante dn-L **el cálculo de deducción natural para L**.

[2]Las reglas derivadas son reglas que, sin ser estrictamente necesarias (es decir, si prescindimos de ellas, seguimos contando con un cálculo correcto y completo), sí que permiten acortar las derivaciones.

<table>
<tr><th>(I $\neg$)</th><th>(I $\wedge$)</th><th>(I $\vee$)</th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \wedge \neg B \end{array}$
$\cdots\cdots\cdots$
$\neg A$</td><td>A
B
$\cdots\cdots$
$A \wedge B$</td><td>A
$\cdots\cdots$
$A \vee B$

A
$\cdots\cdots$
$B \vee A$</td></tr>
<tr><th>(E $\neg$)</th><th>(E $\wedge$)</th><th>(E $\vee$)</th></tr>
<tr><td>$\neg\neg A$
$\cdots\cdots$
A</td><td>$A \wedge B$
$\cdots\cdots$
A

$A \wedge B$
$\cdots\cdots$
B</td><td>$A \vee B$
$\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ C \end{array}$
$\begin{array}{|l} B \\ \hline \vdots \\ C \end{array}$
$\cdots\cdots$
C</td></tr>
<tr><th>(I $\to$)</th><th>(E $\to$)</th><th></th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array}$
$\cdots\cdots$
$A \to B$</td><td>$A \to B$
A
$\cdots\cdots$
B</td><td></td></tr>
<tr><th>(I $\leftrightarrow$)</th><th>(E $\leftrightarrow$)</th><th></th></tr>
<tr><td>$A \to B$
$B \to A$
$\cdots\cdots\cdots$
$A \leftrightarrow B$</td><td>$A \leftrightarrow B$
$\cdots\cdots\cdots$
$A \to B$
$B \to A$</td><td></td></tr>
</table>

Tabla 5.1: Reglas de deducción natural proposicional. † IMPORTANTE: Recuérdese la restricción general en el uso de supuestos: cuando un supuesto queda cancelado, no se puede usar posteriormente ninguna fórmula que esté dentro del mismo. Además, los supuestos han cerrarse de acuerdo a la siguiente jerarquía: el último supuesto en abrirse es el primero en cerrarse.

(MT)	(DMC)
$A \rightarrow B$ $\neg B$ .... $\neg A$	$\neg(A \wedge B)$ :::::::::::::::::::: $\neg A \vee \neg B$
(DMD)	**(ConmC)**
$\neg(A \vee B)$ :::::::::::::::::::: $\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge B$ :::::::::: $B \wedge A$
(ConmD)	**(DistC)**
$A \vee B$ :::::::::: $B \vee A$	$A \wedge (B \vee C)$ :::::::::::::::::::::::::::::: $(A \wedge B) \vee (A \vee C)$
(DisD)	**(IdemC)**
$A \vee (B \wedge C)$ :::::::::::::::::::::::::::::: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \wedge A$ ...... A
(IdemD)	**(Cp)**
$A \vee A$ ...... A	$A \rightarrow B$ :::::::::::::::::::: $\neg B \rightarrow \neg A$

Tabla 5.2: Algunas reglas derivadas para deducción natural proposicional

<table>
<tr><th>(TrI)</th><th colspan="2">(Mut)</th></tr>
<tr><td>$A \to B$
$B \to C$
....
$A \to C$</td><td colspan="2">$A \to (B \to C)$
::::::::::::::::::::
$B \to (A \to C)$</td></tr>
<tr><th>(Id)</th><th colspan="2">(Cpr)</th></tr>
<tr><td>A
::::::::::
A</td><td colspan="2">A
::::::::::
$B \to A$</td></tr>
<tr><th>(Imp/Exp)</th><th colspan="2">(ECQ)</th></tr>
<tr><td>$(A \wedge B) \to C$
::::::::::::::::::::
$A \to (B \to C)$</td><td colspan="2">$A \wedge \neg A$
....
B</td></tr>
<tr><th>(IDN)</th><th colspan="2">(SD)</th></tr>
<tr><td>A
::::::::::
$\neg\neg A$</td><td>$A \vee B$
$\neg A$
......
B</td><td>$A \vee B$
$\neg B$
......
A</td></tr>
</table>

Tabla 5.3: Más reglas derivadas para deducción natural proposicional

En estos cálculos contamos con un nuevo tipo de supuesto provisional, que tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{|l} \Box \\ \hline \\ \end{array}$$

Semánticamente, lo que estamos haciendo al abrir el supuesto $\Box$ es cambiar del mundo posible donde estamos al conjunto de todos sus accesibles. Llamaremos a la subprueba abierta por $\Box$ una **subprueba-$\Box$**.

La noción de deducción en dn-L requiere una ligera modificación respecto a la de dn-prop debido a la incorporación de $\Box$, que no es una fórmula, como supuesto. Usaremos el término **expresión aceptable** para denotar tanto a fórmulas de $\mathcal{L}_m$ como al símbolo $\Box$. Una **deducción (o derivación) en** dn-**L de** $A \in \mathcal{L}_M$ **a partir de** $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_M$ es una secuencia de expresiones aceptables cumpliendo las exigencias 1-5 de la definición de deducción dada anteriormente (sección 5.1.3). Si existe una deducción en dn-L de A a partir de Γ decimos que A **es deducible (o derivable) a partir de** Γ **en** dn-L (en símbolos, $\Gamma \vdash_{\textsf{dn-L}} A$). Si tenemos que $\emptyset \vdash_{\textsf{dn-L}} A$, decimos que A **es un teorema de** dn-**L** (y lo abreviamos como $\vdash_{\textsf{dn-L}} A$).

5.2.1. El cálculo dn-K

Las reglas básicas modales para este cálculo son las expuestas en la tabla 5.4. En la tabla 5.5 se exponen algunas reglas derivadas modales muy útiles.

Comentarios sobre las reglas de la tabla 5.4 y la subprueba-$\Box$.

- **Regla (E $\Box$)**: Dada una fórmula de la forma $\Box A$ en una línea de la deducción y una subprueba-$\Box$ abierta en una línea posterior (que no esté dentro de otra subprueba-$\Box$), podemos introducir A en dicha subprueba. Esto se justifica semánticamente porque si $\Box A$ es cierta en w, entonces A será verdadera en todos los mundos accesibles desde w (i.e., en los mundos correspondientes a la subprueba-$\Box$ considerada).

- **Regla (I $\Box$)**: Si podemos obtener una fórmula A a partir del supuesto $\Box$, entonces podemos cancelar este supuesto obteniendo $\Box A$ fuera de la deducción subsidiaria. Esto se justifica semánticamente por lo siguiente: supongamos que estamos en un mundo w, al abrir el supuesto $\Box$ nos hallamos dentro del conjunto de los accesibles desde w. Ahora, si A es cierta dentro de

(E $\Box$)	(I $\Box$)	(Def $\Diamond$)
$\Box A$ $\Box$ $\vdots$ $\cdots$ A	$\Box$ $\vdots$ A $\cdots\cdots$ $\Box A$	$\Diamond A$ :::::::::: $\neg\Box\neg A$

Tabla 5.4: Reglas modales básicas. † IMPORTANTE: El uso de supuestos del tipo $\Box$ tiene dos restricciones. La primera es genérica de todos los supuestos: cuando un supuesto $\Box$ queda cancelado, no se puede usar posteriormente ninguna fórmula que esté dentro del mismo. La segunda es específica para este tipo de supuestos: ninguna fórmula fuera de un supuesto $\Box$ puede usarse dentro del mismo (salvo, obviamente, aquellas que sean fruto de la aplicación de la regla (E $\Box$)).

($\neg\Box$)	($\neg\Diamond$)	(Def $\Box$)
$\neg\Box A$	$\neg\Diamond A$	$\Box A$
::::::::::	::::::::::	::::::::::
$\Diamond\neg A$	$\Box\neg A$	$\neg\Diamond\neg A$

Tabla 5.5: Reglas derivadas I para dn-K

la subprueba-$\Box$, es decir, en todos los mundos accesibles desde w, entonces $\Box A$ es cierta en w (lo que se indica sacando la fórmula $\Box A$ fuera de la subprueba-$\Box$).

- **Regla (Def $\Diamond$)**: Esta regla se basa en la equivalencia válida en lógica modal

$$\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A.$$

- **Subprueba-$\Box$**: Es importante advertir la naturaleza especial de esta subprueba. Nótese que contamos con una restricción específica para esta subprueba: ninguna regla, excepto (E $\Box$), puede aplicarse a fórmulas fuera de la subprueba para introducir fórmulas dentro de la misma. Esta restricción se justifica semánticamente porque no hay garantía de que los resultados de la aplicación de una regla que no sea (E $\Box$) valgan en todos los mundos posibles correspondientes a la subprueba-$\Box$. Una observación sobre los comentarios metalingüísticos en este tipo de subpruebas: si n es el número de línea del supuesto $\Box$ y m es el número de línea de A (fin de la deducción subsidiaria abierta con $\Box$), la fórmula $\Box A$, fuera del supuesto, llevará el comentario metalingüístico (I $\Box$) n-m. Veamos el siguiente **ejemplo de una subprueba-$\Box$ errónea**:

1	p	premisa
2	$\mid\ \Box$	supuesto
3	$\mid\ p$	(Id) 1
4	$\Box p$	(I $\Box$) 2-3

Hemos inferido erróneamente $\Box p$ a partir de p, pues hemos pensado que si p es verdadera en un cierto mundo w entonces lo es en todos los mundos accesibles desde w.

Otro punto importante a tener en cuenta es que, como el resto de subpruebas, las subpruebas-$\Box$ son iterables, es decir, podemos abrir una dentro de otra. Además, las restricciones específicas de estas subpruebas son relevantes a la hora de ser reiteradas. Veamos el siguiente **ejemplo de una subprueba-$\Box$ errónea**:

1	$\Box p$	premisa
2	$\quad\mid \Box$	supuesto
3	$\quad\mid\quad\mid \Box$	supuesto
4	$\quad\mid\quad\mid p$	(E $\Box$) 1
5	$\quad\mid \Box p$	(I $\Box$) 3-4
6	$\Box\Box p$	(I $\Box$) 2-5

Hemos inferido erróneamente $\Box\Box p$ a partir de $\Box p$, pues hemos pensado que si $\Box p$ es verdadera en un cierto mundo w entonces lo es en todos los mundos accesibles que son a su vez accesibles desde w [3].

Veamos ahora una aplicación correcta de (I $\Box$). Deduzcamos $\Box p$ a partir de $\{\Box(p \vee q), \Box\neg q\}$:

1	$\Box(p \vee q)$	premisa
2	$\Box\neg q$	premisa
3	$\quad\mid \Box$	supuesto
4	$\quad\mid p \vee q$	(E $\Box$) 1
5	$\quad\mid \neg q$	(E $\Box$) 2
6	$\quad\mid p$	(SD) 4, 5
7	$\Box p$	(I $\Box$) 3-6

Ejemplos y ejercicios de derivaciones en dn-K

Ejercicio 36 *Demuestre usando solo reglas básicas que las reglas de la tabla 5.5 son de hecho reglas derivadas en* dn-K. *Es decir, pruebe que*

(1) $\Box A \dashv\vdash_{\text{dn-K}} \neg\Diamond\neg A.$

(2) $\neg\Box A \dashv\vdash_{\text{dn-K}} \Diamond\neg A.$

[3]Esta inferencia no es correcta en la clase de todos los modelos, sino solamente en aquellos donde la relación de accesibilidad es transitiva. No obstante, nuestra manera de capturar el patrón de inferencia en dichos modelos prescindirá de supuestos-$\Box$ y lo hará directamente (véase la sección 5.2.2).

(3) $\neg\Diamond A \dashv\vdash_{\textsf{dn-K}} \Box\neg A$.

Utilizamos $X \dashv\vdash_{\textsf{dn-K}} Y$ *como abreviatura de* $\{X\} \vdash_{\textsf{dn-K}} Y$ *e* $\{Y\} \vdash_{\textsf{dn-K}} X$ *para cualesquiera* $X, Y \in \mathcal{L}_M$.

Ejemplo 31 *Hagamos uso de los resultados del ejercicio 36 y obtengamos* $\Diamond(p \vee q)$ *a partir de* $\Diamond p$*:*

1	$\Diamond p$	*premisa*
2	$\neg\Diamond(p \vee q)$	*supuesto*
3	$\Box\neg(p \vee q)$	*(¬◊) 2*
4	$\Box$	*supuesto*
5	$\neg(p \vee q)$	*(E □) 3*
6	$\neg p \wedge \neg q$	*(DMD) 5*
7	$\neg p$	*(E ∧) 6*
8	$\Box\neg p$	*(I □) 4-7*
9	$\neg\Box\neg p$	*(Def ◊) 1*
10	$\Box\neg p \wedge \neg\Box\neg p$	*(I ∧) 8, 9*
11	$\neg\neg\Diamond(p \vee q)$	*(I ¬) 2-10*
12	$\Diamond(p \vee q)$	*(E ¬) 11*

Ejemplo 32 *A modo de ejemplo, demostramos en* dn-K *un par de teoremas bien conocidos de* K*.*

$\vdash_{\text{dn-K}} (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$

1	$(\Box A \wedge \Box B)$	*supuesto*
2	$\Box A$	*(E $\wedge$) 1*
3	$\Box B$	*(E $\wedge$) 1*
4	$\quad \Box$	*supuesto*
5	$\quad A$	*(E $\Box$) 2*
6	$\quad B$	*(E $\Box$) 3*
7	$\quad A \wedge B$	*($I\wedge$) 5,6*
8	$\Box(A \wedge B)$	*(I $\Box$) 4-7*
9	$(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$	*$I \rightarrow$ 1-8*

$\vdash_{\text{dn-K}} \Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

1	$\Box(A \wedge B)$	*supuesto*
2	$\quad \Box$	*supuesto*
3	$\quad A \wedge B$	*(E $\Box$) 1*
4	$\quad A$	*(E $\wedge$) 3*
5	$\Box A$	*(I $\Box$) 2-4*
6	$\quad \Box$	*supuesto*
7	$\quad A \wedge B$	*(E $\Box$) 1*
8	$\quad B$	*(E $\wedge$) 7*
9	$\Box B$	*(I $\Box$) 6-8*
10	$\Box A \wedge \Box B$	*(I $\wedge$) 5,9*
11	$\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$	*(I $\rightarrow$) 1-10*

Ejercicio 37 *Compruebe que las siguientes fórmulas son teoremas de* dn-K *y que los siguientes esquemas de argumentos son deducibles en* dn-K*:*

(1) $\vdash_{\text{dn-K}} (\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$.

(2) $\{\Box(A \rightarrow B), \Box\neg B\} \vdash_{\text{dn-K}} \Box\neg A$.

(3) $\{\Box(A \to B), \Diamond A\} \vdash_{\textsf{dn-K}} \Diamond B$.

(4) $\{\Box(A \vee B), \Box(A \to C), \Box(B \to C)\} \vdash_{\textsf{dn-K}} \Box C$.

(5) $\vdash_{\textsf{dn-K}} (\Box p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$.

(6) $\vdash_{\textsf{dn-K}} \Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$.

Dos reglas derivadas adicionales para dn-K

Antes de pasar a las extensiones de dn-K, veamos un par de reglas derivadas de este cálculo que resultan muy útiles en algunas deducciones.

La primera de estas reglas sirve para introducir $\Diamond$ evitando rodeos y se muestra en la tabla 5.6. Nótese que (I $\Diamond$) tiene un par de peculiaridades:

- Es la única regla que exige iterar dos supuestos para su aplicación (el supuesto-$\Box$ y el supuesto A).
- Es la única regla que permite cerrar dos supuestos en la misma línea.

Veamos que (I $\Diamond$) es de hecho una regla derivada de dn-K. Supongamos que tenemos la siguiente deducción incompleta:

k	$\Diamond A$	
l	$\quad\mid\ \Box$	supuesto
	$\quad\mid\ \vdots$	
m	$\quad\mid\quad\mid\ A$	supuesto
	$\quad\mid\quad\mid\ \vdots$	
n	$\quad\mid\quad\mid\ B$	

Entonces podemos extenderla como sigue:

k	$\Diamond A$	
l	$\Box$	supuesto
	$\vdots$	
m	A	supuesto
	$\vdots$	
n	B	
(n+ 1)	$A \to B$	(I $\to$) m-n
(n+ 2)	$\Box(A \to B)$	(I $\Box$) l-(n+1)
(n+ 3)	$\Diamond B$	ejercicio 37 (3) $k, (n+2)$

Debemos advertir que en esta derivación general no hemos hecho uso de ningún elemento que no estuviera en las premisas de la regla o que no fuera derivable de las mismas. Esto permite que podamos "pegar" esta derivación general siempre que encontremos la estructura expresada por las premisas de la regla en una deducción o, de forma más sucinta, nos permite simplemente aplicar la regla.

Merece la pena que mencionemos el comentario metalingüístico que lleva la aplicación de esta regla, dada su complejidad (véase la tabla 5.6). Si n es el número de línea de $\Diamond A$, m es el número de línea del supuesto-$\Box$ y l es el número de línea de B (fin de la deducción subsidiaria abierta en m), entonces la fórmula $\Diamond B$ llevará el comentario (I $\Diamond$) n, m-l.

Ejemplo 33 *Veamos un ejemplo de aplicación de la regla (I $\Diamond$). Consideremos* $\{\Box p \wedge \Diamond q\} \vdash_{\text{dn-K}} \Diamond(p \wedge q)$*:*

1	$\Box p \wedge \Diamond q$	*premisa*
2	$\Box p$	*(E $\wedge$) 1*
3	$\Diamond q$	*(E $\wedge$) 1*
4	$\Box$	*supuesto*
5	q	*supuesto*
6	p	*(E $\Box$) 2*
7	$p \wedge q$	*(I $\wedge$) 5, 6*
8	$\Diamond(p \wedge q)$	*(I $\Diamond$) 3, 4-7*

(I $\Diamond$)

$$\begin{array}{l} \Diamond A \\ \left| \begin{array}{l} \Box \\ \hline \vdots \\ \left| \begin{array}{l} A \\ \hline \vdots \\ B \end{array} \right. \end{array}\right. \\ \cdots\cdots \\ \Diamond B \end{array}$$

Tabla 5.6: Reglas derivadas II para dn-K**: introducción de** $\Diamond$

La segunda de las reglas derivadas adicionales que veremos para dn-K es una combinación y generalización de $(\neg\Box)$ y $(\neg\Diamond)$ que resultará muy familiar para aquellas personas que hayan leído el capítulo anterior. La regla de **intercambio modal generalizada**, abreviada como (Int), se muestra en la tabla 5.7.

(Int)

$$\begin{array}{c} \neg o_1 \ldots o_n A \\ \vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots\vdots \\ \hat{o_1} \ldots \hat{o_n} \neg A \end{array}$$

donde cada $o_i \, (1 \leq i \leq n)$ es un operador modal ($\Box$ o $\Diamond$); además, $\hat{o_i} = \Box$ si $o_i = \Diamond$ y $\hat{o_i} = \Diamond$ si $o_i = \Box$,

Tabla 5.7: Reglas derivadas III para dn-K**: intercambio modal generalizada**

dn-D:	dn-K + (D)
dn-B:	dn-K + (B)
dn-T:	dn-K + (T)
dn-S4:	dn-K + $(T) + (4)$
dn-S5:	dn-K + $(T) + (5)$

Tabla 5.8: Extensiones de dn-K

(D)	(B)	
$\Box A$ $\cdots\cdots$ $\Diamond A$	A $\cdots\cdots$ $\Box\Diamond A$	
(T)	(4)	(5)
$\Box A$ $\cdots\cdots$ A	$\Box A$ $\cdots\cdots$ $\Box\Box A$	$\Diamond A$ $\cdots\cdots$ $\Box\Diamond A$

Tabla 5.9: Reglas para las extensiones de dn-K

5.2.2. Extensiones de dn-K

Ya conocemos las extensiones más comunes de K, i.e., D, B, T, S4 y S5 (véase el capítulo 3). Vamos a presentar ahora sus versiones como cálculos de deducción natural. La tabla 5.8 muestra el nombre de las reglas que conforman cada **extensión de** dn-K. La tabla 5.9 muestra cada una de estas reglas. Por último, la tabla 5.10 muestra una versión derivada de algunas de estas reglas que funcionan como reglas derivadas para cada sistema que contenga la regla original.

Las reglas derivadas de la tabla 5.10 son alternativas a las reglas (T), (B), (4) y (5) de la tabla 5.9. Llamemos dn-T$^\Diamond$, dn-B$^\Diamond$, dn-S$4^\Diamond$, dn-S$5^\Diamond$ a los cálculos de deducciónn natural que resultan de sustituir respectivamente las reglas (T), (B), (4) y (5) por las reglas $(T^\Diamond)$, $(B^\Diamond)$, (4$^\Diamond$) y (5$^\Diamond$). Cada cálculo dn-L genera la misma clase de teoremas que dn-L$^\Diamond$. Para ver esto, basta con probar que la regla

$(B^{\Diamond})$	$(T^{\Diamond})$
$\Diamond\Box A$ $\cdots\cdots$ A	A $\cdots\cdots$ $\Diamond A$
$(4^{\Diamond})$	$(5^{\Diamond})$
$\Diamond\Diamond A$ $\cdots\cdots$ $\Diamond A$	$\Diamond\Box A$ $\cdots\cdots$ $\Box A$

Tabla 5.10: Reglas derivadas para las extensiones de dn-K

$(T^{\Diamond})$ es una regla derivada de dn-T mientras que la regla (T) es una regla derivada de dn-T$^{\Diamond}$ y, similarmente, para el resto de las reglas. A continuaciónn trataremos solamente un par de casos como ejemplo.

- Derivación de $(T^{\Diamond})$ en dn-T:

1	A	premisa
2	$\quad \vert\ \Box\neg A$	supuesto
3	$\quad \vert\ \neg A$	(E $\Box$) 2
4	$\quad \vert\ A \wedge \neg A$	(I $\wedge$) 1, 3
5	$\neg\Box\neg A$	(I $\neg$) 2-4
6	$\Diamond A$	(Def $\Diamond$) 5

- Derivación de (T) en dn-T$^{\Diamond}$:

1	$\Box A$	premisa
2	$\quad \neg A$	supuesto
3	$\quad \Diamond\neg A$	(T$\Diamond$) 2
4	$\quad \neg\Box A$	($\neg\Box$) 3
5	$\quad \Box A \wedge \neg\Box A$	(I $\wedge$) 1, 4
6	$\neg\neg A$	(I $\neg$) 2-5
7	A	(E $\neg$) 6

- Derivación de ($4^{\Diamond}$) en dn-S4:

1	$\Diamond\Diamond A$	premisa
2	$\quad \neg\Diamond A$	supuesto
3	$\quad \Box\neg A$	$(\neg\Diamond)$ 2
4	$\quad \Box\Box\neg A$	(4) 3
5	$\quad\quad \Box$	supuesto
6	$\quad\quad \Box\neg A$	(E $\Box$) 4
7	$\quad\quad\quad \Diamond A$	supuesto
8	$\quad\quad\quad \neg\Diamond A$	$(\neg\Diamond)$ 6
9	$\quad\quad\quad \Diamond A \wedge \neg\Diamond A$	(I $\wedge$) 7, 8
10	$\quad\quad\quad A$	(ECQ) 9
11	$\quad \Diamond A$	(I $\Diamond$) 1, 5-10
12	$\quad \Diamond A \wedge \neg\Diamond A$	(I $\wedge$) 2, 11
13	$\neg\neg\Diamond A$	(I $\neg$) 2-12
14	$\Diamond A$	(E $\neg$) 13

- Derivación de (4) en dn-$S4^{\Diamond}$:

1	$\Box A$	premisa
2	$\quad \neg\Box\Box A$	supuesto
3	$\quad \Diamond\Diamond\neg A$	(Int) 2
4	$\quad \Diamond\neg A$	($4^{\Diamond}$) 3
5	$\quad \neg\Box A$	$(\neg\Box)$ 4
6	$\quad \Box A \wedge \neg\Box A$	(I $\wedge$) 1, 5
7	$\neg\neg\Box\Box A$	(I $\neg$) 2-6
8	$\Box\Box A$	(E $\neg$) 7

Ejercicio 38 *Probar lo siguiente: (1) ($B^{\Diamond}$) es una regla derivada de* dn-B *y (B) lo es de* dn-$B^{\Diamond}$. *(2)($5^{\Diamond}$) es una regla derivada de* dn-S5 *y (5) lo es de* dn-$S5^{\Diamond}$.

Ejemplo 34 *Veamos un par de casos de deducciones en dos extensiones distintas de* dn-K, *a saber,* dn-S4 *y* dn-S5.

$\vdash_{\text{dn-S4}} \Box\Box(\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q))$

1	$\Box$	*supuesto*
2	$\Box(p \wedge q)$	*supuesto*
3	$\Box$	*supuesto*
4	$p \wedge q$	*(E $\Box$) 2*
5	p	*(E $\wedge$) 4*
6	$\Box p$	*(I $\Box$) 3-5*
7	$\Box$	*supuesto*
8	$p \wedge q$	*(E $\Box$) 2*
9	q	*(E $\wedge$) 8*
10	$\Box q$	*(I $\Box$) 7-9*
11	$\Box p \wedge \Box q$	*(I $\wedge$) 6,10*
12	$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	*(I $\rightarrow$) 2-11*
13	$\Box p \wedge \Box q$	*supuesto*
14	$\Box p$	*(E $\wedge$)13*
15	$\Box q$	*(E $\wedge$)13*
16	$\Box$	*supuesto*
17	p	*(E $\Box$) 14*
18	q	*(E $\Box$) 15*
19	$p \wedge q$	*(I $\wedge$) 17,18*
20	$\Box(p \wedge q)$	*(I $\Box$) 16-19*
21	$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	*(I $\rightarrow$) 13-20*
22	$\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	*(I $\leftrightarrow$) 12,21*
23	$\Box(\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	*(I $\Box$) 1-22*
24	$\Box\Box(\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q))$	*(4) 23*

A continuación introducimos la regla (5^*) *y acto seguido mostramos que es una regla derivada de* dn-S5*:*

(5^*)
$\Diamond\Box A$
$\cdots\cdots$
A

1	$\neg\Box A$	*premisa*
2	$\quad\vert\ \neg\Box\neg\Box A$	*supuesto*
3	$\quad\vert\ \Diamond\Box A$	*(Def $\Diamond$) 2*
4	$\quad\vert\ \Box A$	*($5^\Diamond$) 3 (por el ejercicio 38)*
5	$\quad\vert\ \Box A \wedge \Box\neg A$	*(I $\wedge$) 1, 4*
6	$\neg\neg\Box\neg\Box A$	*(I $\neg$) 2-5*
7	$\Box\neg\Box A$	*(E $\neg$) 6*

Seguidamente mostraremos el uso de esta regla con el siguiente ejemplo:

$\vdash_{\text{dn-S5}} \Box\neg\Box(\Box(p \wedge \neg p))$

1	$\vert\ \Box(\Box(p \wedge \neg p))$	*supuesto*
2	$\vert\ \Box(p \wedge \neg p)$	*(T) 1*
3	$\vert\ p \wedge \neg p$	*(T) 2*
4	$\neg\Box(\Box(p \wedge \neg p))$	*(I $\neg$) 1-3*
5	$\Box\neg\Box(\Box(p \wedge \neg p))$	*(5^*) 4*

Ejercicio 39 *Compruebe que se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\vdash_{\text{dn-D}} \neg\Box(p \wedge \neg p)$.

(2) $\{\Box p, \Diamond p \to \Box q, \Box(q \to \Box r)\} \vdash_{\text{dn-D}} \Diamond(p \wedge \Diamond r)$

(3) $\vdash_{\text{dn-T}} \Box p \to \Diamond p$.

(4) $\{\Box p\} \vdash_{\text{dn-T}} q \to p$.

(5) $\vdash_{\textsf{dn-B}} (p \wedge (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q)) \to \Box\Diamond q$.

(6) $\{\Box(\Diamond p \to q)\} \vdash_{\textsf{dn-B}} p \to \Box q$.

(7) $\vdash_{\textsf{dn-S4}} \Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$.

(8) $\vdash_{\textsf{dn-S4}} \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$.

(9) $\vdash_{\textsf{dn-S5}} \Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$ *[use solamente las reglas primitivas de* dn-S5 *e* (Int)*]*

Ejercicio 40 *Muestre que tanto* (B) *como* $(B^{\Diamond})$ *son derivables en* dn-S5.

Ejercicio 41 *Muestre que* (4) *es derivable en* dn-S5*. (Pista: sírvase del resultado del ejercicio anterior así como de* $(5^{\Diamond})$*).*

5.3. TEOREMAS BÁSICOS

Concluimos este libro enunciando los teoremas de caracterización para los sistemas de deducción natural que acabamos de estudiar. Primero, adaptamos al actual contexto la definición de caracterización que usamos en la sección 3.3.

Sea dn-L un cálculo de deducción natural (con L$\in \{\mathsf{K}, \mathsf{D}, \mathsf{T}, \mathsf{B}, \mathsf{S4}, \mathsf{S5}\}$) y $\mathcal{C}$ una clase de marcos (o modelos). Entonces:

- dn-L está **caracterizado** por la clase de marcos (modelos) $\mathcal{C}$ sii para cada fórmula $A \in \mathcal{L}_M$ tenemos que:

$$\vdash_{\textsf{dn-L}} A \text{ sii } \models_{\mathcal{C}} A.$$

Recordemos que a la implicación de derecha izquierda de la definición anterior se le suele llamar **corrección** y a la de izquierda a derecha **completud**.

Teorema 7 (Caracterización) *Los cálculos de deducción natural aquí estudiados son están caracterizados por la clase de marcos (modelos) que muestra la siguiente tabla:*

CARACTERIZACIÓN D.N.	
SISTEMA D.N.	**CLASE $\mathcal{C}$ DE MARCOS (MODELOS)**
dn-K	*todos*
dn-D	*seriales*
dn-T	*reflexivos*
dn-B	*reflexivos y simétricos*
dn-S4	*reflexivos y transitivos*
dn-S5	*reflexivos y euclídeos* [4]

[4] Recuérdese que esta clase es la misma que la clase de marcos (modelos) reflexivos, simétricos y transitivos o clase de marcos (modelos) de equivalencia.

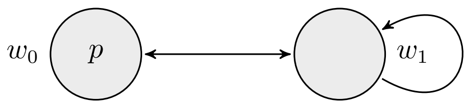
APÉNDICE: EJERCICIOS RESUELTOS

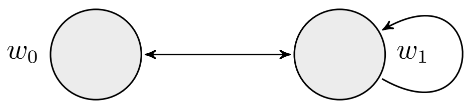
Solución al ejercicio 1 Las sucesiones de símbolos de los ítems (2) y (5) son fórmulas (elementos de $\mathcal{L}_M$). El resto no lo son.

Solución al ejercicio 2

$$\begin{aligned}
\mathsf{sub}\Big(\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow (p \vee (\Box\neg q \to \Diamond r))\Big) &= \\
\{\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow (p \vee (\Box\neg q \to \Diamond r)), \Box\Diamond\neg p,& \\
p \vee (\Box\neg q \to \Diamond r), \Box\neg q \to \Diamond r,& \\
\Box\neg q, \Diamond r, \Diamond\neg p, \neg p, p, \neg q, q, r\}&
\end{aligned}$$

Solución al ejercicio 3 Los modelos representados por las siguiente figuras, y basados en el marco propuesto, son contramodelos a la validez de $\Box p$.





Solución al ejercicio 4

1. $\Diamond\Box p$ es verdadera en w_1 y w_2.
2. $\Box(p \vee \Box q)$ es verdadera en w_0.
3. $\Box(\neg p \vee \Box\Diamond q)$ es verdadera en w_1.

Solución a los ejercicios 5, 6, 7. Los ejercicios están basados en el uso de *Modal Logic Playground*. El software es fácil de usar y viene acompañado de instrucciones y tutoriales, debería ser autoexplicativo.

Solución al ejercicio 8

Observación 17 *Las demostraciones que siguen asumen cierta familiaridad con la lógica de primer orden. Véanse los Preliminares de este libro o cualquiera de las obras allí referenciadas.*

Para lo que sigue definamos una relación binaria cualquiera R en un conjunto A, esto es $R \subseteq A \times A$.

(a) Si R es reflexiva, entonces es serial.

Demostración.

Supongamos que R es reflexiva, es decir, que $\forall x xRx$. Ahora, sea $a \in A$ un objeto cualquiera, tenemos que aRa (eliminando el cuantificador universal de la expresión anterior). Entonces es cierto que a se relaciona mediante R con al menos un objeto, a saber, él mismo. Luego $\forall x \exists y xRy$.

(b) R es simétrica y transitiva sii R es simétrica y euclídea.
Veamos la proposición de izquierda a derecha. Supongamos que R es simétrica y transitiva. Entonces solo tenemos que probar que R es euclídea, ya que por hipótesis R es simétrica. Sean $a, b, c \in A$ tales que aRb y aRc. Como R es simétrica y aRb, también se cumple bRa; luego tenemos bRa y aRc, así que -por transitividad de R- obtenemos bRc. Es decir, hemos obtenido el condicional: si aRb y aRc, entonces bRc. Como a, b, c eran objetos cualesquiera, generalizando, tenemos la fórmula de primer orden

$$\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \rightarrow yRz)$$

que recoge el hecho de que la relación es euclídea. Ahora de derecha a izquierda. Supongamos que R es simétrica y euclídea. Solo necesitamos probar que R es transitiva. La prueba es muy similar a la anterior (dejamos que la termine el lector).

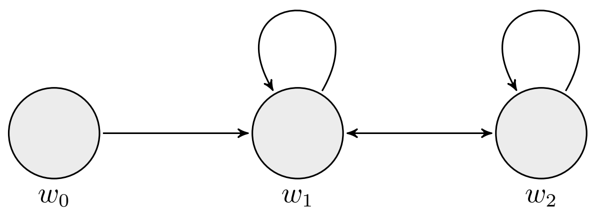
(c) R es reflexiva, simétrica y transitiva sii R es reflexiva y euclídea.
Veamos la proposición de izquierda a derecha. Supongamos que R es reflexiva, simétrica y transitiva. Entonces solo tenemos que probar que R es euclídea, ya que por hipótesis R es reflexiva. Sin embargo, el resultado anterior, el apartado (b), nos dice que R es euclídea por ser simétrica y transitiva.

Veamos ahora la dirección de derecha a izquierda. Sea R reflexiva y euclídea. Entonces hemos de comprobar solamente que R es simétrica y transitiva. Veamos lo primero. Sean $a, b \in A$. Supongamos que aRb. Por reflexividad de R tenemos aRa, luego, por euclidianeidad de R, de todo lo anterior obtenemos que bRa también. Como a y b eran objetos cualesquiera de A obtenemos, generalizando, la fórmula de primer orden

$$\forall x \forall y (xRy \rightarrow yRx).$$

Además, como ya hemos probado que R es simétrica y, dado que es euclídea por hipótesis, por el resultado (b) anterior obtenemos que R es transitiva también.

Solución al ejercicio 9 El siguiente diagrama expresa el cierre euclídeo del marco dibujado en el ejercicio 9:



Solución al ejercicio 10 Establecemos para cada marco las propiedades de su relación de accesibilidad como sigue:

Marco 1: simétríca, transitiva, euclídea.

Marco 2: serial, reflexiva, simétrica, transitiva, euclídea.

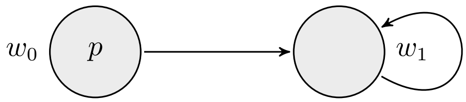
Marco 3: serial, simétrica.

Marco 4: transitiva.

Marco 5: serial, transitiva, euclídea.

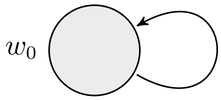
Solución al ejercicio 11 Ofrecemos los siguientes contra-modelos:

(1). Contra-modelo serial de $p \to \Diamond p$:

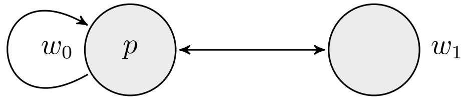


La fórmula $p \to \Diamond p$ es falsa en w_0.

(2). Contra-modelo reflexivo de $\Box\Diamond p$:

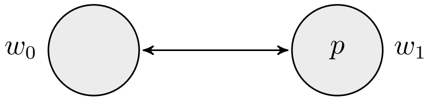


(3). Contra-modelo simétrico para $\Diamond p \to \Box p$:



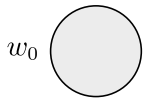
La fórmula $\Diamond p \to \Box p$ es falsa en w_0.

(4). Contra-modelo serial y simétrico de $\Diamond p \to \Box\Box p$:

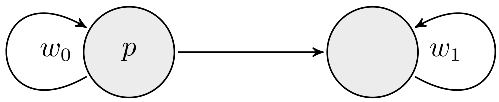


La fórmula $\Diamond p \to \Box\Box p$ es falsa en w_0. También podemos dar como solución el contra-modelo del ítem 3 (nótese que allí la fórmula propuesta es falsa en ambos mundos).

(5). Contra-modelo transitivo de $\Box p \to p$:

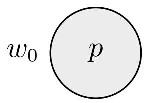


(6). Contra-modelo reflexivo y transitivo de $\Diamond p \to \Box\Diamond\Box p$:

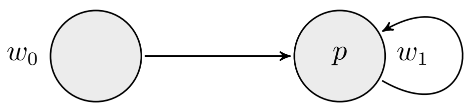


La fórmula $\Diamond p \to \Box\Diamond\Box p$ es falsa en w_0.

(7). Contra-modelo euclídeo de $p \to \Diamond\Box p$:



(8). Contra-modelo transitivo y euclídeo de $\Diamond\Box p \to p$:



La fórmula $\Diamond\Box p \to p$ es falsa en w_0.

Solución al ejercicio 12 Probaremos las definibilidad de las siguientes propiedades de la relación de accesibilidad.

- *Reflexividad*:

  Sea $\mathcal{C}_{ref}$ la clase de todos los marcos reflexivos. Probaremos lo siguiente:

  1. El esquema **T** (i.e. $\Box A \to A$) es válido en todo marco $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{ref}$.
  2. El esquema **T** es inválido en todo marco $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{ref}$.

  Prueba de 1.

  Sea $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{ref}$. Consideremos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ basado sobre $\langle W, R\rangle$. Sea, además, $w \in W$ un mundo arbitrariamente elegido y $\mathcal{M}, w \models \Box A$. Como R es reflexiva, entonces wRw; por lo cual, $\mathcal{M}, w \models A$ (por definición semántica de $\Box$). Por tanto, $\mathcal{M}, w \models \mathbf{T}$ (por definición semántica de $\to$). Con esto damos por concluida la prueba de esta dirección.

  Prueba de 2.

  Sea $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{ref}$. Existe entonces al menos un mundo $w \in W$ tal que no se cumple que wRw. Refutemos la validez de la instancia de **T**: $\Box p \to p$ en algún modelo basado sobre $\langle W, R\rangle$ y con esto es suficiente para dar por terminada la prueba. Para ello, definamos el modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ donde $V(p) = W\backslash\{w\}$ (es decir, el átomo p es verdadero en todo mundo del modelo menos en w). Tenemos entonces que $\mathcal{M}, w \models \Box p$, pues p es verdadero en todo mundo accesible desde w, ya que el único mundo en el que p es falso es w y este mundo no accede a sí mismo. Sin embargo, por definición, $\mathcal{M}, w \not\models p$; luego $\mathcal{M}, w \not\models \Box p \to p$.

- *Simetría*:

  Sea $\mathcal{C}_{sim}$ la clase de todos los marcos simétricos. Probaremos lo siguiente:

  1. El esquema **B** (i.e. $A \to \Box\Diamond A$) es válido en todo marco $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{ref}$.
  2. El esquema **B** es inválido en todo marco $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{ref}$.

  Prueba de 1.

Sea $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{sim}$. Consideremos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ basado sobre $\langle W, R\rangle$. Sea, además, $w \in W$ un mundo arbitrariamente elegido. Procederemos por contraposición: sea $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond A$. Entonces, por definición semántica de $\Box$, existe $w' \in W$ tal que wRw' y $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond A$. Como R es simétrica, entonces $w'Rw$ también; luego, dado $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond A$, por definición semántica de $\Diamond$, obtenemos que $\mathcal{M}, w \not\models A$. Luego, si $\mathcal{M}, w \models A$ entonces $\mathcal{M}, w \models \Box\Diamond A$. Por tanto, $\mathcal{M}, w \models \mathbf{B}$ (por definición semántica de $\rightarrow$).

<u>Prueba de 2</u>.

Sea $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{sim}$. Existe entonces al menos un par de mundos $w, w' \in W$ tales que wRw' pero no $w'Rw$. Refutemos la validez de la instancia de **B**: $p \rightarrow \Box\Diamond p$. Para ello, definamos un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde

$$V(p) = \{w\}$$

En este caso, tenemos que $\mathcal{M}, w \models p$ por definición; pero $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Diamond p$. Comprobemos esto último. Como w' no accede a w, que es el único mundo donde el átomo p es verdadero, tenemos que $\mathcal{M}, w' \not\models \Diamond p$. Ahora, dado que wRw', tenemos el resultado.

- *Transitividad*:

Sea $\mathcal{C}_{tran}$ la clase de todos los marcos transitivos. Probaremos lo siguiente:

1. El esquema **4** (i.e. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$) es válido en todo marco $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{tran}$.
2. El esquema **4** es inválido en todo marco $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{tran}$.

<u>Prueba de 1</u>.

Sea $\langle W, R\rangle \in \mathcal{C}_{tran}$. Consideremos un modelo cualquiera $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$ basado sobre $\langle W, R\rangle$. Sea, además, $w \in W$ un mundo arbitrariamente elegido. Procederemos por contraposición: sea $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box A$.

Entonces, por la cláusula de satisfacción de $\Box$:

existe $w' \in W$ tal que wRw' y $\mathcal{M}, w' \not\models \Box A$. [1]

Luego, de [1], usando de nuevo la cláusula de satisfacción de $\Box$:

existe $w'' \in W$ tal que $w'Rw''$ y $\mathcal{M}, w'' \not\models A$. [2]

Dado que R es transitiva, de [1] y [2], tenemos que

wRw''. [3]

Dado $\mathcal{M}, w'' \not\models A$ (de [2]) y wRw'' (de [3]), por la cláusula de satisfacción de $\Box$, obtenemos

$\mathcal{M}, w \not\models \Box A$. [4]

Por tanto, $\mathcal{M}, w \models \mathbf{4}$ (usando la cláusula de satisfacción de $\rightarrow$). Con esto damos por finalizada la prueba.

Prueba de 2.

Sea $\langle W, R\rangle \notin \mathcal{C}_{tran}$. Entonces existen $w, w', w'' \in W$ tales que wRw' y $w'Rw''$, pero no wRw''. Refutemos la validez de la instancia de **4**: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Definamos entonces un modelo $\mathcal{M} = \langle W, R, V\rangle$, donde

$$V(p) = W \setminus \{w''\}$$

Comprobemos que la instancia $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ es falsa en w. Tenemos que $\mathcal{M}, w \models \Box p$; pues w no accede a w'', que es el único mundo donde el átomo p es falso (de acuerdo con la definición de V). Sin embargo, dado $w'Rw''$ y $\mathcal{M}, w'' \not\models p$, resulta que $w' \not\models \Box p$ (por la definición semántica de $\Box$). A partir de esto último, como wRw', tenemos, de nuevo por la definición semántica de $\Box$, que $\mathcal{M}, w \not\models \Box\Box p$. Esto significa que $w \not\models \Box p \rightarrow \Box\Box p$.

Solución al ejercicio 13 Probaremos que K está cerrada bajo $R\Box_2$ y $R\Diamond_2$:

- Prueba para $R\Box_2$. Procederemos de la siguiente manera:

  Sea $A \leftrightarrow B \in$ K. Dado que $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\big)$ es una tautología y K está cerrada bajo (LP), entonces $A \rightarrow B \in$ K y $B \rightarrow A \in$ K. Ya hemos probado en 3.2.1 que K está cerrada bajo la regla $R\Box_1$, luego $\Box A \rightarrow \Box B \in$ K y $\Box B \rightarrow \Box A \in$ K. Por (LP) tenemos entonces que $\Box A \leftrightarrow \Box B \in$ K.

- Prueba para $R\Diamond_2$. Justificaremos el resultado con el mismo estilo que hemos usado en otras partes del capítulo 3:

1. $A \leftrightarrow B$ (hipótesis: teorema de K)
2. $A \to B$ de 1 por (LP)
3. $\Diamond A \to \Diamond B$ de 2 por $R\,\Diamond_1$ (regla probada en $3.2.1$)
4. $B \to A$ de 1 por (LP)
5. $\Diamond B \to \Diamond A$ de 4 por $R\,\Diamond_1$
6. $\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B$ de 3 y 5 por (LP)

Solución al ejercicio 14 Justificaremos **Neg** $\Box$ y **Neg** $\Diamond$.

Prueba de **Neg** $\Box$:

1. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$ **Def** $\Box$
2. $\neg\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg A$ de 1 por (LP)

Prueba de **Neg** $\Diamond$:

1. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$ **Def** $\Diamond$
2. $\neg\Diamond A \leftrightarrow \Box\neg A$ de 1 por (LP)

Solución al ejercicio 15 Veamos (1) $\vdash_{\mathsf{K}} \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$:

1. $(A \wedge B) \to A$ (LP)
2. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ de 1 por $(R\,\Box_1)$
3. $(A \wedge B) \to B$ (LP)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box B$ de 3 por $(R\,\Box_1)$
5. $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ de 2 y 4 por (LP)
6. $A \to (B \to (A \wedge B))$ (LP)
7. $\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B))$ de 6 por $(R\,\Box_1)$
8. $\Box(B \to (A \wedge B)) \to (\Box B \to \Box(A \wedge B))$ **K** (A por B y B por $A \wedge B$)
9. $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$ de 7 y 8 por (LP)
10. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ de 5 y 9 por (LP)

Ahora veamos (2) $\vdash_{\mathsf{K}} \Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$:

1. $\Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$	ejercicio15(1) (A por $\neg A$; B por $\neg B$)
2. $\neg\Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$	de 1 por (LP)
3. $\neg\Box(\neg A \wedge \neg B) \leftrightarrow \Diamond\neg(\neg A \wedge \neg B)$	**Neg** $\Box$ (A por $\neg A \wedge \neg B$)
4. $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$	(LP)
5. $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond\neg(\neg A \wedge \neg B)$	de 4 por $R\Diamond_2$
6. $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B)$	de 2, 3 y 5 por (LP)
7. $\neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B) \leftrightarrow (\neg\Box\neg A \vee \neg\Box\neg B)$	(LP)
8. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$	**Def** $\Diamond$
9. $\Diamond B \leftrightarrow \neg\Box\neg B$	**Def** $\Diamond$ (A por B)
10. $\neg(\Box\neg A \wedge \Box\neg B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$	de 7, 8 y 9 por (LP)
11. $\Diamond(A \vee B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$	de 6 y 10 por (LP)

Solución al ejercicio 16 Daremos las demostraciones de **4** $\Diamond$ en S4 y de **5** $\Diamond$ en S5.

Prueba de **4** $\Diamond$ ($\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$) en S4:

1. $\Box\neg A \to \Box\Box\neg A$	**4** (sustituyendo A por $\neg A$)
2. $\neg\Box\Box\neg A \to \neg\Box\neg A$	de 1 por (LP)
3. $\neg\Box\Box\neg A \leftrightarrow \Diamond\neg\Box\neg A$	**Neg** $\Box$ (sustituyendo A por $\Box\neg A$)
4. $\Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$	**Def** $\Diamond$
5. $\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\neg\Box\neg A$	de 4 por $R\Diamond_2$
6. $\Diamond\Diamond A \to \neg\Box\neg A$	de 2, 3 y 5 por (LP)
7. $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$	de 4 y 6 por (LP)

Prueba de **5** $\Diamond$ ($\Diamond\Box A \to \Box A$) en S5:

1. $\Diamond\neg A \to \Box\Diamond\neg A$	**5** (sustituyendo A por $\neg A$)
2. $\neg\Box\Diamond\neg A \to \neg\Diamond\neg A$	de 1 por (LP)
3. $\neg\Box\Diamond\neg A \leftrightarrow \Diamond\neg\Diamond\neg A$	**Neg** $\Box$ (sustituyendo A por $\Diamond\neg A$)
4. $\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$	**Def** $\Box$
5. $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\neg\Diamond\neg A$	de 4 por $R\Diamond_2$
6. $\Diamond\Box A \to \neg\Diamond\neg A$	de 2, 3 y 5 por (LP)
7. $\Diamond\Box A \to \Box A$	de 4 y 6 por (LP)

Solución al ejercicio 17 Probemos lo siguiente:

(1) $\vdash_{\mathsf{D}} \Diamond p \vee \Diamond\neg p$

1. $\Box p \to \Diamond p$	instancia de **D**
2. $\neg\Box p \vee \Diamond p$	de 1 por (LP)
3. $\neg\Box p \leftrightarrow \Diamond\neg p$	instancia de **Neg** $\Box$
4. $\Diamond p \vee \Diamond\neg p$	de 2 y 3 por (LP)

(2) $\vdash_{\mathsf{D}} \Box(p \vee \Box q) \to (\Diamond p \vee \Diamond\Diamond q)$

1. $\Box(p \vee \Box q) \to \Diamond(p \vee \Box q)$	instancia de **D**
2. $\Diamond(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond\Box q)$	instancia de (2) en ejercicio 15
3. $\Diamond p \to (\Diamond p \vee \Diamond\Diamond q)$	(LP)
4. $\Box q \to \Diamond q$	instancia de **D**
5. $\Diamond\Box q \to \Diamond\Diamond q$	de 4 por $R\Diamond_1$
6. $\Diamond\Diamond q \to (\Diamond p \vee \Diamond\Diamond q)$	(LP)
7. $\Box(p \vee \Box q) \to (\Diamond p \vee \Diamond\Diamond q)$	de 1, 2, 3, 5 y 6 por (LP)

(3) $\vdash_{\mathsf{T}} \Box\Box p \to \Diamond\Box\Diamond p$

1. $\Box p \to \Diamond p$	instancia de **D** (T1 en 3.2.1)
2. $\Box(\Box p \to \Diamond p)$	de 1 por (N)
3. $\Box(\Box p \to \Diamond p) \to (\Box\Box p \to \Box\Diamond p)$	**K**
4. $\Box\Box p \to \Box\Diamond p$	de 2 y 3 por (LP)
5. $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$	instancia de **T** $\Diamond$
6. $\Box\Box p \to \Diamond\Box\Diamond p$	de 4 y 5 por (LP)

(4) $\vdash_{\mathsf{T}} (\Diamond p \to \Box q) \to (\Box p \to \Diamond q)$

1. $\Box p \to \Diamond p$	instancia de **D** (T1 en 3.2.1)
2. $((\Diamond p \to \Box q) \wedge \Box p) \to \Box q$	de 1 por (LP)
3. $\Box q \to \Diamond q$	instancia de **D** (T1 en 3.2.1)
4. $(\Diamond p \to \Box q) \to (\Box p \to \Diamond q)$	de 2 y 3 por (LP)

(5) $\vdash_{\mathsf{B}} \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$

1. $\Diamond\Box p \to p$ instancia de **B** $\Diamond$
2. $p \to \Box\Diamond p$ instancia de **B**
3. $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ de 1 y 2 por (LP)

(6) $\vdash_{\mathsf{B}} \Diamond(\Box p \vee q) \to (p \vee \Diamond q)$

1. $\Diamond(\Box p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond\Box p \vee \Diamond q)$ instancia de (2) en ejercicio 15
2. $\Diamond\Box p \to p$ instancia de **B** $\Diamond$
3. $p \to (p \vee \Diamond q)$ (LP)
4. $\Diamond q \to (p \vee \Diamond q)$ (LP)
5. $\Diamond(\Box p \vee q) \to (p \vee \Diamond q)$ de 1-4 por (LP)

(7) $\vdash_{\mathsf{S4}} \Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$

1. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box p)$ instancia de **K**
2. $\Box\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box p)$ de 1 por $R\Box_1$
3. $\Box(p \to q) \to \Box\Box(p \to q)$ instancia de **4**
4. $\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box p)$ de 2 y 3 por (LP)

(8) $\vdash_{\mathsf{S4}} \big((p \to \Box\Diamond\Diamond q) \wedge \Box p\big) \to \Diamond q$

1. $\Box p \to p$ instancia de **T**
2. $((p \to \Box\Diamond\Diamond q) \wedge \Box p) \to \Box\Diamond\Diamond q$ de 1 por (LP)[5]
3. $\Box\Diamond\Diamond q \to \Diamond\Diamond q$ instancia de **T**
4. $\Diamond\Diamond q \to \Diamond q$ instancia de **4** $\Diamond$
5. $\big((p \to \Box\Diamond\Diamond q) \wedge \Box p\big) \to \Diamond q$ de 2, 3 y 4 por (LP)

(9) $\vdash_{\mathsf{S5}} \Diamond\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$

1. $\Diamond\Box p \to \Box p$ instancia de **5** $\Diamond$
2. $\Box p \to \Box\Box p$ instancia de **4** (T3 en 3.2.1)
3. $\Diamond\Box p \to \Box\Box p$ de 1 y 2 por (LP)
4. $\Box\Box p \to \Diamond\Box p$ instancia de **D** (T1 en 3.2.1) [6]
5. $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ de 3 y 4 por (LP)

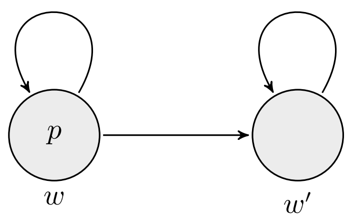
[5] Nótese que $((B \to C) \wedge A) \to C$ es consecuencia tautológica de $A \to B$.

[6] La prueba de T1 vale en S5.

(10) $\vdash_{\mathsf{S5}} \Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box\Box\Diamond p$

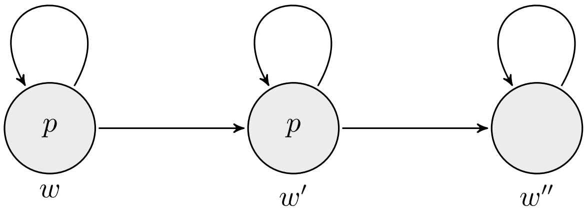
1. $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ — instancia de **5**
2. $\Box\Diamond p \to \Box\Box\Diamond p$ — instancia de **4** (T3 en 3.2.1)
3. $\Box\Box\Diamond p \to \Diamond\Box\Box\Diamond p$ — instancia de **T**$\Diamond$
4. $\Diamond p \to \Diamond\Box\Box\Diamond p$ — de 1, 2 y 3 por (LP)
5. $\Diamond\Box\Box\Diamond p \to \Box\Box\Diamond p$ — instancia de **5**$\Diamond$
6. $\Box\Box\Diamond p \to \Box\Diamond p$ — instancia de **T**
7. $\Box\Diamond p \to \Diamond p$ — instancia de **T**
8. $\Diamond\Box\Box\Diamond p \to \Diamond p$ — de 5, 6 y 7 por (LP)
9. $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box\Box\Diamond p$ — de 4 y 8 por (LP)

Solución al ejercicio 18 Probemos primero que B es más fuerte que T. Es claro que T $\subseteq$ B, pues la axiomatización de T está incluida en la axiomatización de B. Veamos, no obstante, que algún elemento de B no está en T, por lo que T $\subset$ B. Elijamos, pues, la instancia de **B**: $p \to \Box\Diamond p$ (que es un teorema de B) y veamos que no es un teorema de T. Para ello, aprovecharemos la corrección de T respecto a la clase de modelos reflexivos ($\mathcal{C}_{ref}$), que dice que todo teorema de T es un elemento de $log(\mathcal{C}_{ref})$. El siguiente modelo reflexivo invalida la fórmula $p \to \Box\Diamond p$ (es falsa en w):



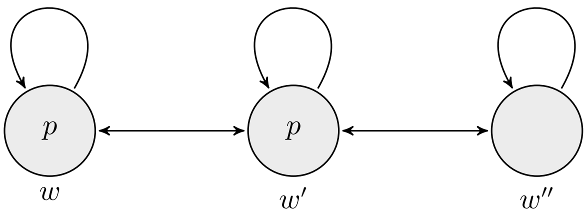
Tenemos entonces que $p \to \Box\Diamond p \notin log(\mathcal{C}_{ref})$. Así pues, obtenemos que $p \to \Box\Diamond p \notin$ T y, por tanto, T $\subset$ B (i.e., B es más fuerte que T).

Ahora probaremos que S4 también es más fuerte que T. Tenemos que T $\subseteq$ S4 debido a que la axiomatización de T está incluida en la de S4. Ahora veamos que esta inclusión es estricta ($\subset$). Para ello, elijamos la instancia de 4: $\Box p \to \Box\Box p$ (teorema de S4) y comprobemos que no es un teorema de T. El siguiente modelo reflexivo invalida $\Box p \to \Box\Box p$ (esta fórmula es falsa en w):



Por tanto, $\Box p \rightarrow \Box\Box p \notin log(\mathcal{C}_{ref})$ y, por la corrección de T respecto de $\mathcal{C}_{ref}$, podemos concluir que dicha instancia no es un elemento de T. Así pues, finalmente, T $\subset$ S4.

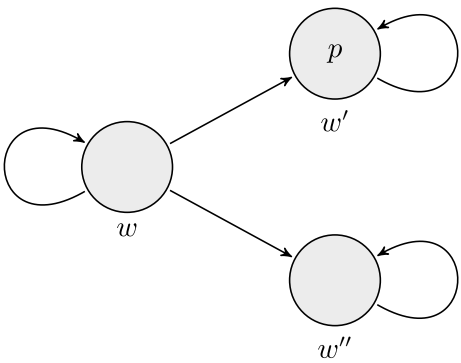
Solución al ejercicio 19 Para demostrar que S$4 \not\subseteq$ B consideremos la instancia de **4**: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ (teorema de S4). Sea $\mathcal{C}_{ref \cap sim}$ la clase de todos los modelos reflexivos y simétricos. El siguiente modelo-B (reflexivo y simétrico) es un contramodelo de la validez de dicha instancia (es falsa en w).



Luego, por el teorema de corrección de B respecto de $\mathcal{C}_{ref \cap sim}$, tenemos que $\Box p \rightarrow \Box\Box p \notin$ B. Así pues, S$4 \not\subseteq$ B.

Solución al ejercicio 20 Prueba de (ii): S5 es más fuerte que S4.

La única diferencia entre las axiomatizaciones de S4 y S5 es que la de S4 contiene el esquema **4** mientras que la de S5 contiene el esquema **5**. Ahora bien, **4** es un teorema de S5 (teorema T3, apartado 3.2.1), así que todo teorema de S4 lo es de S5, es decir, S$4 \subseteq$ S5. Sin embargo, no todo teorema de S5 lo es de S4 (luego S$4 \subset$ S5) como probaremos seguidamente. Consideremos la instancia de **5**: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ (que es un teorema de S5) y veamos que no es un teorema de S4. Llamemos $\mathcal{C}_{ref \cap tran}$ a la clase de todos los modelos reflexivos y transitivos. El siguiente modelo reflexivo y transitivo invalida $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ (esta fórmula es falsa en w):



Por tanto, $\Diamond p \to \Box\Diamond p \notin log(\mathcal{C}_{ref\cap tran})$; así que, por el teorema de corrección de S4 respecto de $\mathcal{C}_{ref\cap tran}$, llegamos a que $\Diamond p \to \Box\Diamond p \notin \mathrm{S4}$, como queríamos probar.

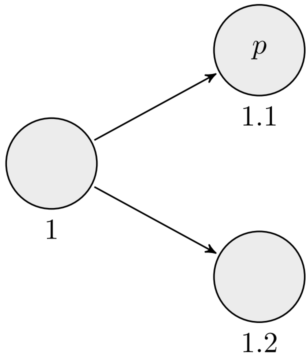
Solución al ejercicio 21 Podemos cambiar el procedimiento de la figura 4.1 de modo que el orden de aplicación de las reglas de expansión sea

$$\langle \text{ conjuntivas, de intercambio, universales, existenciales, disyuntivas } \rangle$$

1.	✓ $1\colon \neg\big((\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)\big)$		
2.	✓ $1\colon \Box p \to \Box q$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓ $1\colon \neg\Box(p \to q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓ $1\colon \Diamond\neg(p \to q)$		de 3 por (Int)
5.	✓ $1.1\colon \neg(p \to q)$		de 4 por $(\Diamond K)$
6.	✓ $1.1\colon p$		de 5 por $(\neg \to)$
7.	✓ $1.1\colon \neg q$		de 5 por $(\neg \to)$
8.	✓ $1\colon \neg\Box p$	$1\colon \Box q$	de 2 por $(\to)$
9.	✓ $1\colon \Diamond\neg p$	$\mid$	de 8 por (Int)
10.	$\mid$	$1.1\colon q$	de 8 por $(\Box K)$
11.	✓ $1.2\colon \neg p$	$\otimes$	de 9 por $(\Diamond K)$

El tableau no cierra. La rama izquierda está abierta.

Solución al ejercicio 22 Definamos el modelo $\langle W, R, V\rangle$ correspondiente a la rama abierta del tableau del ejemplo 15:



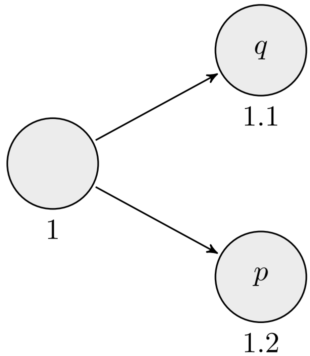
Este modelo muestra que la fórmula $(\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)$ es inválida (en la clase de todos los modelos).

Solución al ejercicio 23 Comprobaremos si las siguientes fórmulas son teoremas de t-K:

(1) $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$

1.	✓ $1\colon \neg\big((\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)\big)$		
2.	✓ $1\colon \Box(p \vee q)$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓ $1\colon \neg(\Box p \vee \Box q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓ $1\colon \neg\Box p$		de 3 por $(\neg\vee)$
5.	✓ $1\colon \neg\Box q$		de 3 por $(\neg\vee)$
6.	✓ $1\colon \Diamond\neg p$		de 4 por (Int)
7.	✓ $1\colon \Diamond\neg q$		de 5 por (Int)
8.	✓ $1.1\colon \neg p$		de 6 por $(\Diamond K)$
9.	✓ $1.1\colon p \vee q$		de 2 por $(\Box K)$
10.	$1.1\colon p$	✓ $1.1\colon q$	de 9 por $(\vee)$
11.	$\otimes$	✓ $1.2\colon \neg q$	de 7 por $(\Diamond K)$
12.		✓ $1.2\colon p \vee q$	de 2 por $(\Box K)$
13.		✓ $1.2\colon p$ $1.2\colon q$ $\otimes$	de 12 por $(\vee)$

El tableau-K está terminado y hay una rama abierta. Por tanto, la fórmula (1) no es un teorema de t-K. El siguiente contra-modelo nos lo proporciona la rama abierta:



(2) $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \vee \Box q$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p \vee q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p \vee q)$		de 3 por (Int)
5.	$1\colon \Box p$	$1\colon \Box q$	de 2 por $(\vee)$
6.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \vee q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p \vee q)$	de 2 por $(\Diamond K)$
7.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon \neg p$	de 6 por $(\neg\vee)$
8.	$1.1\colon \neg q$	$1.1\colon \neg q$	de 6 por $(\neg\vee)$
9.	$1.1\colon p$	$1.1\colon q$	de 5 por $(\Box K)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau-K cierra. La fórmula (2) es un teorema de t-K.

(3) $\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box(p\wedge q)\to(\Box p\wedge\Box q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box(p\wedge q)$		de 1 por $(\neg\to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg(\Box p\wedge\Box q)$		de 1 por $(\neg\to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box p$	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box q$	de 3 por $(\neg\wedge)$
5.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg p$	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg q$	de 4 por (Int)
6.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon \neg q$	de 5 por $(\Diamond K)$
7.	$\checkmark\ 1.1\colon p\wedge q$	$\checkmark\ 1.1\colon p\wedge q$	de 2 por $(\Box K)$
8.	$1.1\colon p$	$1.1\colon p$	de 7 por $(\wedge)$
9.	$1.1\colon q$	$1.1\colon q$	de 7 por $(\wedge)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau-K cierra. La fórmula (3) es un teorema de t-K.

(4) $(\Box p\wedge\Box q)\to\Box(p\wedge q)$.

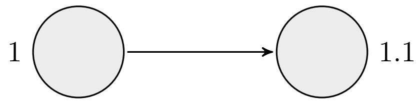
1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p\wedge\Box q)\to\Box(p\wedge q)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p\wedge\Box q$		de 1 por $(\neg\to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(p\wedge q)$		de 1 por $(\neg\to)$
4.	$1\colon \Box p$		de 2 por $(\wedge)$
5.	$1\colon \Box q$		de 2 por $(\wedge)$
6.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(p\wedge q)$		de 3 por (Int)
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(p\wedge q)$		de 6 por $(\Diamond K)$
8.	$1.1\colon p$		de 4 por $(\Box K)$
9.	$1.1\colon q$		de 5 por $(\Box K)$
10.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon \neg q$	de 7 por $(\neg\wedge)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau-K cierra. La fórmula (4) es un teorema de t-K.

(5) $\Box(p\vee\Box q)\to(\Diamond p\vee\Box q)$.

1.	✓	$1\colon \neg\big(\Box(p \vee \Box q) \to (\Diamond p \vee \Box q)\big)$	
2.	✓	$1\colon \Box(p \vee \Box q)$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg(\Diamond p \vee \Box q)$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \neg\Diamond p$	de 3 por $(\neg\vee)$
5.	✓	$1\colon \neg\Box q$	de 3 por $(\neg\vee)$
6.	✓	$1\colon \Box\neg p$	de 4 por (Int)
7.	✓	$1\colon \Diamond\neg q$	de 5 por (Int)
8.	✓	$1.1\colon \neg q$	de 7 por $(\Diamond K)$
9.	✓	$1.1\colon p \vee \Box q$	de 2 por $(\Box K)$
10.	✓	$1.1\colon \neg p$	de 6 por $(\Box K)$
11.		$1.1\colon p$ $\otimes$ | ✓ $1.1\colon \Box q$	de 9 por $(\vee)$

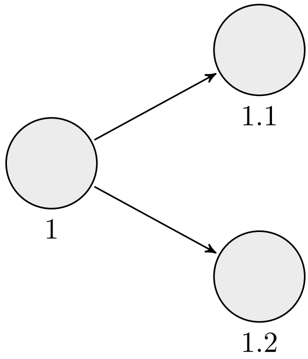
El tableau-K tiene una rama abierta; luego la fórmula (5) no es un teorema de t-K. A partir de la rama abierta podemos obtener el siguiente contra-modelo de (5):



(6) $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$.

1.	✓	$1\colon \neg(\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond\Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond p$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg p$	de 3 por (Int)
5.	✓	$1.1\colon \Box p$	de 2 por $(\Diamond K)$
6.	✓	$1.2\colon \Box\neg p$	de 4 por $(\Diamond K)$

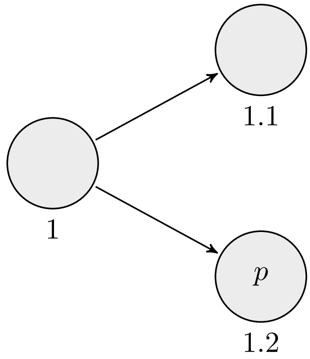
El tableau-K está terminado y abierto. Por tanto, la fórmula (6) no es un teorema de t-K. La rama abierta del tableau nos proporciona el siguiente contra-modelo de (6):



(7) $\Diamond(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$.

1.	$\checkmark$ $1\colon \neg\big(\Diamond(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)\big)$		
2.	$\checkmark$ $1\colon \Diamond(p \to q)$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark$ $1\colon \neg(\Diamond p \to \Diamond q)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark$ $1\colon \Diamond p$		de 3 por $(\neg \to)$
5.	$\checkmark$ $1\colon \neg\Diamond q$		de 3 por $(\neg \to)$
6.	$\checkmark$ $1\colon \Box\neg q$		de 5 por (Int)
7.	$\checkmark$ $1.1\colon p \to q$		de 2 por $(\Diamond K)$
8.	$\checkmark$ $1.1\colon \neg q$		de 6 por $(\Box K)$
9.	$\checkmark$ $1.1\colon \neg p$	$1.1\colon q$	de 7 por $(\to)$
10.	$\checkmark$ $1.2\colon p$	$\otimes$	de 4 por $(\Diamond K)$
11.	$\checkmark$ $1.2\colon \neg q$		de 6 por $(\Box K)$

El tableau-K está terminado y tiene una rama abierta. Por tanto, la fórmula (7) no es un teorema de t-K. A partir de la rama abierta podemos definir el siguiente modelo que invalida (7):



Solución al ejercicio 24 Determinaremos si las siguientes afirmaciones son ciertas usando los tableaux-K:

(1) $\{\Box p, \Diamond q\} \vdash_{\text{t-K}} \Diamond(p \wedge q)$.

Lo que tenemos que hacer es comprobar si hay un tableau-K cerrado para el conjunto $\{\Box p, \Diamond q, \neg\Diamond(p \wedge q)\}$.

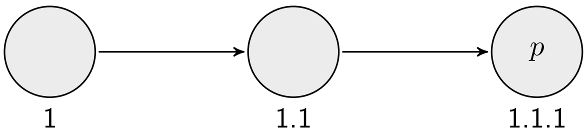
1.	$1\colon \Box p$		
2.	$\checkmark\ \ 1\colon \Diamond q$		
3.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\Diamond(p \wedge q)$		
4.	$1\colon \Box\neg(p \wedge q)$		de 3 por (Int)
5.	$1.1\colon q$		de 2 por $(\Diamond K)$
6.	$1.1\colon p$		de 1 por $(\Box K)$
7.	$\checkmark\ \ 1.1\colon \neg(p \wedge q)$		de 4 por $(\Box K)$
8.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon \neg q$	de 7 por $(\neg\wedge)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau cierra. Efectivamente, la afirmación (1) es cierta.

(2) $\{\Box(p \to q)\} \vdash_{\text{t-K}} \Box\Diamond p \to \Box\Diamond q$.

1.	$\checkmark\ \ 1\colon \Box(p \to q)$		
2.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg(\Box\Diamond p \to \Box\Diamond q)$		
3.	$\checkmark\ \ 1\colon \Box\Diamond p$		de 2 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\Box\Diamond q$		de 2 por $(\neg \to)$
5.	$\checkmark\ \ 1\colon \Diamond\Box\neg q$		de 4 por (Int)
6.	$\checkmark\ \ 1.1\colon \Box\neg q$		de 5 por $(\Diamond K)$
7.	$\checkmark\ \ 1.1\colon p \to q$		de 1 por $(\Box K)$
8.	$\checkmark\ \ 1.1\colon \Diamond p$		de 3 por $(\Box K)$
9.	$\checkmark\ \ 1.1\colon \neg p$	$\checkmark\ \ 1.1\colon q$	de 7 por $(\to)$
10.	$\checkmark\ \ 1.1.1\colon p$	$\checkmark\ \ 1.1.1\colon p$	de 8 por $(\Diamond K)$
11.	$\checkmark\ \ 1.1.1\colon \neg q$	$\checkmark\ \ 1.1.1\colon \neg q$	de 6 por $(\Box K)$

El tableau-K no cierra; la afirmación (2) es falsa. Cualquiera de las dos ramas abiertas nos ofrece un contra-modelo del argumento. Veamos, por ejemplo, el ofrecido por la rama izquierda:



(3) $\{\Box(p \vee q)\} \vdash_{\text{t-K}} \Box p \vee \Diamond q$.

1.	$1\colon \Box(p \vee q)$		
2.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg(\Box p \vee \Diamond q)$		
3.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\Box p$		de 2 por $(\neg\vee)$
4.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\Diamond q$		de 2 por $(\neg\vee)$
5.	$\checkmark\ \ 1\colon \Diamond\neg p$		de 3 por (Int)
6.	$1\colon \Box\neg q$		de 4 por (Int)
7.	$1.1\colon \neg p$		de 5 por $(\Diamond K)$
8.	$\checkmark\ \ 1.1\colon p \vee q$		de 1 por $(\Box K)$
9.	$1.1\colon \neg q$		de 6 por $(\Box K)$
10.	$1.1\colon p$	$1.1\colon q$	de 9 por $(\vee)$
	$\otimes$	$\otimes$	

El tableau-K cierra; la afirmación (3) es cierta.

(4) $\{\Box(\Diamond p \vee \Diamond q), \Diamond\Box\neg p\} \vdash_{\text{t-K}} \Diamond\Diamond q$.

1.	✓ $1\colon \Box(\Diamond p \vee \Diamond q)$		
2.	✓ $1\colon \Diamond\Box\neg p$		
3.	✓ $1\colon \neg\Diamond\Diamond q$		
4.	$1\colon \Box\Box\neg q$		de 3 por (Int)
5.	$1.1\colon \Box\neg p$		de 2 por $(\Diamond K)$
6.	✓ $1.1\colon \Diamond p \vee \Diamond q$		de 1 por $(\Box K)$
7.	$1.1\colon \Box\neg q$		de 4 por $(\Box K)$
8.	✓ $1.1\colon \Diamond p$	✓ $1.1\colon \Diamond q$	de 6 por $(\vee)$
9.	$1.1.1\colon p$	$1.1.1\colon q$	de 8 por $(\Diamond K)$
10.	$1.1.1\colon \neg p$	$1.1.1\colon \neg p$	de 5 por $(\Box K)$
11.	$\otimes$	$1.1.1\colon \neg q$	de 7 por $(\Box K)$
		$\otimes$	

El tableau-K cierra; la afirmación (4) es cierta.

Solución al ejercicio 25 Probaremos lo siguiente:

(1) $\vdash_{t-\text{D}} \neg\Box(p \wedge \neg p)$

1.	✓ $1\colon \neg\neg\Box(p \wedge \neg p)$	
2.	$1\colon \Box(p \wedge \neg p)$	de 1 por $(\neg\neg)$
3.	✓ $1\colon \Diamond(p \wedge \neg p)$	de 2 por $(\Box D)$
4.	✓ $1.1\colon p \wedge \neg p$	de 3 por $(\Diamond K)$
5.	$1.1\colon p$	de 4 por $(\wedge)$
6.	$1.1\colon \neg p$	de 4 por $(\wedge)$
	$\otimes$	

El tableau-D cierra. La afirmación (1) queda probada.

(2) $\vdash_{t-\text{D}} \Box\Diamond\Diamond(p \to (q \to p))$

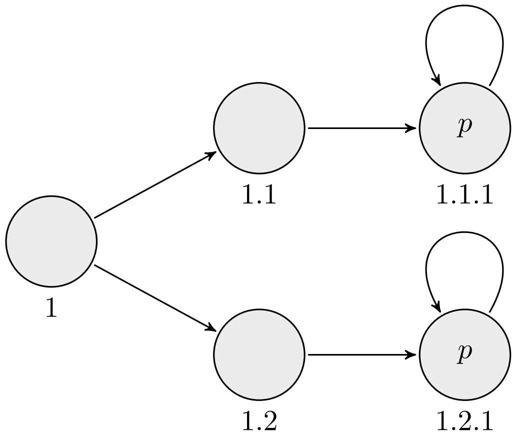
1.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond\Diamond(p \to (q \to p))$	
2.	✓	$1\colon \Diamond\Box\Box\neg(p \to (q \to p))$	de 1 por (Int)
3.		$1.1\colon \Box\Box\neg(p \to (q \to p))$	de 2 por $(\Diamond K)$
4.	✓	$1.1\colon \Diamond\Box\neg(p \to (q \to p))$	de 3 por $(\Box D)$
5.		$1.1.1\colon \Box\neg(p \to (q \to p))$	de 4 por $(\Diamond K)$
6.	✓	$1.1.1\colon \Diamond\neg(p \to (q \to p))$	de 5 por $(\Box D)$
7.	✓	$1.1.1.1\colon \neg(p \to (q \to p))$	de 6 por $(\Diamond K)$
8.		$1.1.1.1\colon p$	de 7 por $(\neg \to)$
9.	✓	$1.1.1.1\colon \neg(q \to p)$	de 7 por $(\neg \to)$
10.		$1.1.1.1\colon q$	de 9 por $(\neg \to)$
11.		$1.1.1.1\colon \neg p$	de 9 por $(\neg \to)$
		$\otimes$	

El tableau-D cierra. Por tanto, hemos probado la afirmación (2).

Solución al ejercicio 26 Para probar que $\neg(\Box\Box p \to \Box p)$ es satisfacible en la clase de todos los modelos seriales haremos uso de los tableaux-D. En este caso, el tableau-D a desarrollar testa la fórmula propuesta para ver si hay una rama abierta por donde encontrar el modelo-D verificador.

1.	✓	$1\colon \neg(\Box\Box p \to \Box p)$	
2.	✓	$1\colon \Box\Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\neg p$	de 3 por (Int)
5.	✓	$1\colon \Diamond\Box p$	de 2 por $(\Box D)$
6.	✓	$1.1\colon \neg p$	de 4 por $(\Diamond K)$
7.	✓	$1.1\colon \Box p$	de 2 por $(\Box K)$
8.	✓	$1.1\colon \Diamond p$	de 7 por $(\Box D)$
9.	✓	$1.2\colon \Box p$	de 5 por $(\Diamond K)$
10.	✓	$1.2\colon \Diamond p$	de 9 por $(\Box D)$
11.	✓	$1.1.1\colon p$	de 8 por $(\Diamond K)$
12.	✓	$1.2.1\colon p$	de 10 por $(\Diamond K)$

El tableau está terminado y abierto. La rama abierta nos ofrece el modelo serial buscado.



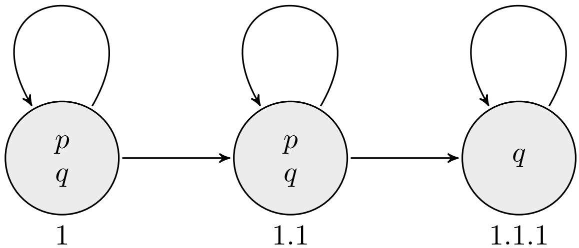
Animamos al lector a que busque un modelo más pequeño que el anterior donde la fórmula $\neg(\Box\Box p \to \Box p)$ sea satisfacible.

Solución al ejercicio 27 Podemos dar una definición más flexible de la función de valoración V. Sea $\mathfrak{r}$ una rama abierta de un tableau terminado. Definamos un modelo de etiquetas (para cualquiera de las lógicas L tratadas) $\langle W, R_{\mathsf{L}}, V\rangle$ donde la función V se define:

Para todo $p \in$ At y todo $\sigma \in W$:

- $\sigma \in V(p)$, si $\sigma\colon p$ ocurre en $\mathfrak{r}$;
- $\sigma \notin V(p)$, si $\sigma\colon \neg p$ ocurre en $\mathfrak{r}$;
- $\sigma \in V(p)$ o $\sigma \notin V(p)$, arbitrariamente, en otro caso.

Con la definición anterior, un modelo de la rama abierta del ejemplo 23 podría ser el siguiente:



Solución al ejercicio 28 Probaremos que las siguientes fórmulas son válidas en la clase de los modelos reflexivos:

(1) $\Box p \to p$

1.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg(\Box p \to p)$	
2.	$1\colon \Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	$1\colon \neg p$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	$1\colon p$	de 2 por $(\Box T)$
	$\otimes$	

El tableaux-T cierra. La fórmula (1) es válida en la clase de modelos reflexivos.

(2) $\Box(p \to \Box q) \to \Box(\Box p \to q)$

1.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\big(\Box(p \to \Box q) \to \Box(\Box p \to q)\big)$			
2.	$1\colon \Box(p \to \Box q)$			de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ \ 1\colon \neg\Box(\Box p \to q)$			de 1 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ \ 1\colon \Diamond\neg(\Box p \to q)$			de 3 por (Int)
5.	$\checkmark\ \ 1\colon p \to \Box q$			de 2 por $(\Box T)$
6.	$1\colon \neg p$		$1\colon \Box q$	de 5 por $(\vee)$
7.	$\mid$		$1\colon q$	de 6 por $(\Box T)$
8.	$\checkmark\ \ 1.1\colon \neg(\Box p \to q)$		$\checkmark\ \ 1.1\colon \neg(\Box p \to q)$	de 4 por $(\Diamond K)$
9.	$1.1\colon \Box p$		$1.1\colon \Box p$	de 8 por $(\neg \to)$
10.	$1.1\colon \neg q$		$1.1\colon \neg q$	de 8 por $(\neg \to)$
11.	$\checkmark\ \ 1.1\colon p \to \Box q$		$\checkmark\ \ 1.1\colon p \to \Box q$	de 2 por $(\Box K)$
12.	$1.1\colon p$		$1.1\colon q$	de 9 por $(\Box T)$
			$\otimes$	y de 6 por $(\Box K)$
13.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon \Box q$		de 11 por $(\to)$
14.	$\otimes$	$1.1\colon q$		de 13 por $(\Box T)$
		$\otimes$		

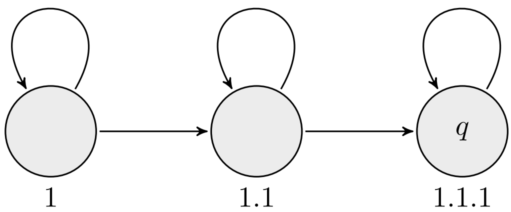
El tableau-T cierra. La fórmula (2) es válida en la clase de modelos reflexivos.

Solución al ejercicio 29 Probaremos que los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles en la clase de los modelos reflexivos:

(1) $\{\Box p \vee \Box\neg q, \Box\neg p, \Diamond(\neg p \to \Diamond q)\}$

1.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \vee \Box\neg q$			
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box\neg p$			
3.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond(\neg p \to \Diamond q)$			
4.	$\checkmark\ 1\colon \neg p$			de 2 por $(\Box T)$
5.	$1\colon \Box p$	$\checkmark\ 1\colon \Box\neg q$		de 1 por $(\vee)$
6.	$1\colon p$	$\checkmark\ 1\colon \neg q$		de 5 por $(\Box T)$
7.	$\otimes$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg p \to \Diamond q$		de 3 por $(\Diamond K)$
8.		$\checkmark\ 1.1\colon \neg p$		de 2 por $(\Box K)$
9.		$\checkmark\ 1.1\colon \neg q$		de 5 por $(\Box K)$
10.		$1.1\colon \neg\neg p$	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond q$	de 7 por $(\to)$
11.		$\otimes$	$\checkmark\ 1.1.1\colon q$	de 10 por $(\Diamond K)$

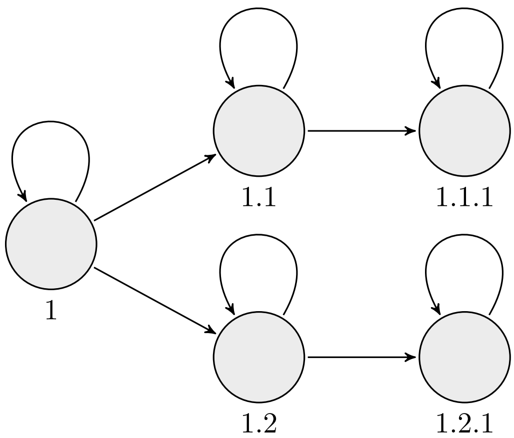
El tableau-T está terminado y no cierra; la rama más a la derecha está abierta y nos proporciona un modelo-T del conjunto de fórmulas base iniciales. Su diagrama es:



(2) $\{\Box\Diamond\neg p, \Box\neg q, \Box\Diamond p \to \Box q\}$

1.	✓ $1\colon \Box\Diamond\neg p$		
2.	✓ $1\colon \Box\neg q$		
3.	✓ $1\colon \Box\Diamond p \to \Box q$		
4.	✓ $1\colon \Diamond\neg p$		de 1 por $(\Box T)$
5.	✓ $1\colon \neg q$		de 2 por $(\Box T)$
6.	✓ $1\colon \neg\Box\Diamond p$	$1\colon \Box q$	de 3 por $(\to)$
7.	✓ $1\colon \Diamond\Box\neg p$	$\vert$	de 6 por (Int)
8.	$\vert$	$1\colon q$	de 6 por $(\Box T)$
9.	✓ $1.1\colon \neg p$	$\otimes$	de 4 por $(\Diamond K)$
10.	✓ $1.1\colon \Diamond\neg p$		de 1 por $(\Box K)$
11.	✓ $1.1\colon \neg q$		de 2 por $(\Box K)$
12.	✓ $1.2\colon \Box\neg p$		de 7 por $(\Diamond K)$
13.	✓ $1.2\colon \Diamond\neg p$		de 1 por $(\Box K)$
14.	✓ $1.2\colon \neg q$		de 2 por $(\Box K)$
15.	✓ $1.2\colon \neg p$		de 12 por $(\Box T)$
16.	✓ $1.1.1\colon \neg p$		de 10 por $(\Diamond K)$
17.	✓ $1.2.1\colon \neg p$		de 13 por $(\Diamond K)$

El tableau-T está terminado y no cierra; la rama izquierda está abierta y nos proporciona un modelo-T verificador del conjunto de fórmulas base iniciales. He aquí su diagrama:



Efectivamente, todas las fórmulas del conjunto (2) son simultáneamente verdaderas en el mundo 1.

Nótese que puede conseguirse un modelo más pequeño que cumpla la misma función (satisfacer el conjunto de fórmulas base iniciales). Dejamos esta tarea como reto al lector.

Solución al ejercicio 30 Sea $\langle W, R_{\mathsf{B}}, V\rangle$ un modelo de una rama abierta terminada de un tableaux-B y $\sigma, \sigma' \in W$. Probaremos que si $\langle \sigma, \sigma' \rangle \in R_{\mathsf{B}}$, entonces $\langle \sigma', \sigma \rangle \in R_{\mathsf{B}}$. Sea, pues, $\langle \sigma, \sigma' \rangle \in R_{\mathsf{B}}$. Teniendo en cuenta la definición de R_{B}, tenemos tres situaciones posibles:

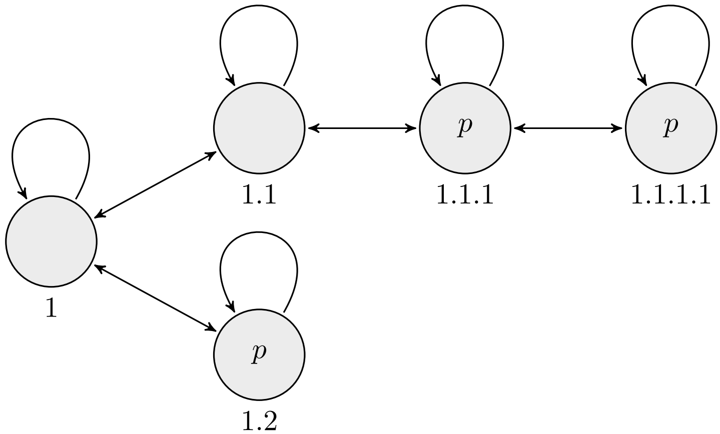
1. $\sigma = \sigma'$ (dado que R_{B} es una extensión de R_{T}).
2. σ' es una extensión simple de σ (dado que R_{B} es una extensión de R_{T}).
3. σ es una extensión simple de σ' (condición específica de R_{B}).

Ahora bien, esas mismas condiciones satisfacen inmediatamente que $\langle \sigma', \sigma \rangle \in R_{\mathsf{B}}$, como se requiere.

Solución al ejercicio 31 Veamos si $\Diamond\Box\Diamond p$ es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y simétricos. Para ello desarrollemos el siguiente tableau-B:

1.	✓	$1\colon \Diamond\Box\Diamond p$	
2.	✓	$1.1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Diamond K)$
3.	✓	$1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box B)$
4.	✓	$1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box T)$
5.	✓	$1.2\colon p$	de 3 por $(\Diamond K)$
6.	✓	$1.1.1\colon p$	de 4 por $(\Diamond K)$
7.	✓	$1.1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box K)$
8.	✓	$1.1.1.1\colon p$	de 7 por $(\Diamond K)$

El tableau está terminado y contiene una rama abierta. Podemos definir un modelo verificador de $\Diamond\Box\Diamond p$ a partir de dicha rama como sigue:



Si el lector lo desea, puede valerse de cierto ingenio para encontrar un modelo más pequeño que satisfaga igualmente la fórmula propuesta.

Solución al ejercicio 32 Determinaremos cuáles de las fórmulas (1)-(3) son teoremas de t-B.

(1) $(p \wedge \Box q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)$.

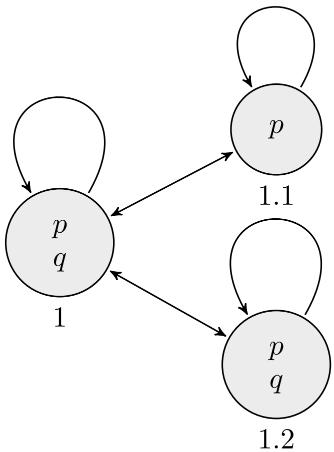
1.	✓	$1\colon \neg\big((p \wedge \Box q) \to \Box\Diamond(p \wedge q)\big)$	
2.	✓	$p \wedge \Box q$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box\Diamond(p \wedge q)$	de 1 por $(\neg \to)$
4.		$1\colon p$	de 2 por $(\wedge)$
5.		$1\colon \Box q$	de 2 por $(\wedge)$
6.	✓	$1\colon \Diamond\Box\neg(p \wedge q)$	de 3 por (Int)
7.		$1\colon q$	de 5 por $(\Box T)$
8.		$1.1\colon \Box\neg(p \wedge q)$	de 6 por $(\Diamond K)$
9.		$1.1\colon q$	de 5 por $(\Box K)$
10.	✓	$1\colon \neg(p \wedge q)$	de 8 por $(\Box B)$
11.		$1.1\colon \neg(p \wedge q)$	de 8 por $(\Box T)$
12.		$1\colon \neg p$ ⊗ | $1\colon \neg q$ ⊗	de 10 por $(\neg\wedge)$

El tableau-B cierra, luego la fórmula (1) es un teorema de t-B.

(2) $((\Box p \wedge (p \to \Diamond\Box q)) \to \Box q$.

1.	✓ $1\colon \neg\big((\Box p \wedge (p \to \Diamond\Box q)) \to \Box q\big)$		
2.	✓ $1\colon \Box p \wedge (p \to \Diamond\Box q)$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓ $1\colon \neg\Box q$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓ $1\colon \Box p$		de 2 por $(\wedge)$
5.	✓ $1\colon p \to \Diamond\Box q$		de 2 por $(\wedge)$
6.	✓ $1\colon \Diamond\neg q$		de 3 por (Int)
7.	✓ $1\colon p$		de 4 por $(\Box T)$
8.	$1\colon \neg p$	✓ $1\colon \Diamond\Box p$	de 5 por $(\to)$
9.	$\otimes$	✓ $1.1\colon \neg q$	de 6 por $(\Diamond K)$
10.		✓ $1.1\colon p$	de 4 por $(\Box K)$
11.		✓ $1.2\colon \Box q$	de 8 por $(\Diamond K)$
12.		✓ $1.2\colon p$	de 4 por $(\Box K)$
13.		✓ $1\colon q$	de 11 por $(\Box B)$
14.		✓ $1.2\colon q$	de 11 por $(\Box T)$

El tableau-B está terminado y la rama derecha está abierta. Luego, la fórmula (2) no es un teorema de t-B. Por la rama abierta definimos el siguiente modelo que invalida la fórmula (2):



(3) $(p \to \Box\neg q) \to \Box(q \to \Diamond\neg p)$.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((p \to \Box\neg q) \to \Box(q \to \Diamond\neg p)\big)$		
2.	$\checkmark\ 1\colon p \to \Box\neg q$		de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(q \to \Diamond\neg p)$		de 1 por $(\neg \to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(q \to \Diamond\neg p)$		de 3 por (Int)
5.	$1\colon \neg p$	$1\colon \Box\neg q$	de 2 por $(\to)$
6.	$\vert$	$1\colon \neg q$	de 5 por $(\Box T)$
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(q \to \Diamond\neg p)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(q \to \Diamond\neg p)$	de 4 por $(\Diamond K)$
8.	$1.1\colon q$	$1.1\colon q$	de 7 por $(\neg \to)$
9.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg\Diamond\neg p$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg\Diamond\neg p$	de 7 por $(\neg \to)$
10.	$1.1\colon \Box\neg\neg p$	$1.1\colon \Box\neg\neg p$	de 9 por (Int)
11.	$1\colon \neg\neg p$	$1.1\colon \neg q$	de 10 por $(\Box B)$
	$\otimes$	$\otimes$	y de 5 por $(\Box K)$

El tableau-B cierra, luego la fórmula (3) es un teorema de t-B.

Solución al ejercicio 33 Probaremos las siguientes afirmaciones:

(1) Veamos que $\vdash_{\text{t-S4}} \Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$. Emplearemos la versión original t-S4 para ello.

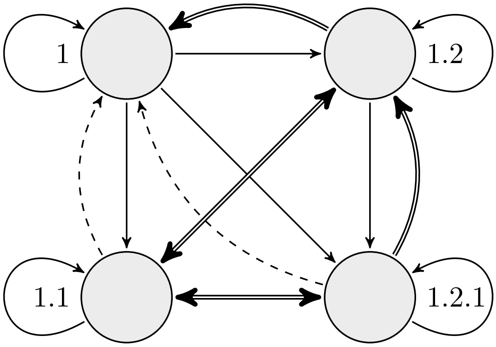
1.	$\checkmark\ 1\colon \neg(\Box(p\to q)\to\Box(\Box p\to\Box q))$		
2.	$1\colon \Box(p\to q)$		de 1 por $(\neg\to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box(\Box p\to\Box q)$		de 1 por $(\neg\to)$
4.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\neg(\Box p\to\Box q)$		de 3 por (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon p\to q$		de 2 por $(\Box T)$
6.	$1\colon \neg p$	$1\colon q$	de 5 por $(\to)$
7.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(\Box p\to\Box q)$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg(\Box p\to\Box q)$	de 4 por $(\Diamond 4)$
8.	$1.1\colon \Box p$	$1.1\colon \Box p$	de 7 por $(\neg\to)$
9.	$\checkmark\ 1.1\colon \neg\Box q$	$\checkmark\ 1.1\colon \neg\Box q$	de 7 por $(\neg\to)$
10.	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond\neg q$	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond\neg q$	de 9 por (Int)
11.	$\checkmark\ 1.1\colon p\to q$	$\checkmark\ 1.1\colon p\to q$	de 2 por $(\Box K)$
12.	$1.1\colon \Box(p\to q)$	$1.1\colon \Box(p\to q)$	de 2 por $(\Box 4)$
13.	$1.1\colon p$	$1.1\colon p$	de 8 por $(\Box T)$
14.	$1.1\colon \neg p$ $1.1\colon q$	$1.1\colon \neg p$ $1.1\colon q$	de 11 por $(\to)$
15.	$\otimes$ $1.1.1\colon \neg q$	$\otimes$ $1.1.1\colon \neg q$	de 10 por $(\Diamond 4)$
16.	$1.1.1\colon p$	$1.1.1\colon p$	de 8 por $(\Box K)$
17.	$1.1.1\colon \Box p$	$1.1.1\colon \Box p$	de 8 por $(\Box 4)$
18.	$\checkmark\ 1.1.1\colon p\to q$	$\checkmark\ 1.1.1\colon p\to q$	de 12 por $(\Box K)$
19.	$1.1.1\colon \Box(p\to q)$	$1.1.1\colon \Box(p\to q)$	de 12 por $(\Box 4)$
20.	$1.1.1\colon \neg p$ $1.1.1\colon q$	$1.1.1\colon \neg p$ $1.1.1\colon q$	de 18 por $(\to)$
	$\otimes$ $\otimes$	$\otimes$ $\otimes$	

El tableau-S4 cierra, así que la afirmación (1) está probada.

(2) Veamos que el conjunto de fórmulas $\{\Box(p\wedge\Diamond\Diamond q), \Diamond(\Box\neg p\vee\neg q)\}$ es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y transitivos. Emplearemos la versión t-S$4(i)$ para ello.

1.	$\checkmark \quad 1\colon \Box(p \wedge \Diamond\Diamond q)$		
2.	$\checkmark \quad 1\colon \Diamond(\Box\neg p \vee \neg q)$		
3.	$\checkmark \quad 1\colon p \wedge \Diamond\Diamond q$		de 1 por $(\Box 4_d)$
4.	$\checkmark \quad 1\colon p$		de 3 por $(\wedge)$
5.	$\checkmark \quad 1\colon \Diamond\Diamond q$		de 3 por $(\wedge)$
6.	$\checkmark \quad 1.1\colon \Box\neg p \vee \neg q$		de 2 por $(\Diamond 4)$
7.	$\checkmark \quad 1.1\colon p \wedge \Diamond\Diamond q$		de 1 por $(\Box 4_d)$
8.	$\checkmark \quad 1.1\colon p$		de 7 por $(\wedge)$
9.	$\checkmark \quad 1.1\colon \Diamond\Diamond q$		de 7 por $(\wedge)$
10.	$1.1\colon \Box\neg p$	$\checkmark \quad 1.1\colon \neg q$	de 6 por $(\vee)$
11.	$1.1\colon \neg p$	$\vert$	de 10 por $(\Box 4_d)$
12.	$\otimes$	$\checkmark \quad 1.2\colon \Diamond q$	de 5 por $(\Diamond 4)$
13.		$\checkmark \quad 1.2\colon p \wedge \Diamond\Diamond q$	de 1 por $(\Box 4_d)$
14.		$\checkmark \quad 1.2\colon p$	de 13 por $(\wedge)$
15.		$\checkmark \quad 1.2\colon \Diamond\Diamond q$	de 13 por $(\wedge)$
16.		$\checkmark \quad 1.2.1\colon q$	de 12 por $(\Diamond 4)$
17.		$\checkmark \quad 1.2.1\colon p \wedge \Diamond\Diamond q$	de 1 por $(\Box 4_d)$
18.		$\checkmark \quad 1.2.1\colon p$	de 17 por $(\wedge)$
19.		$\checkmark \quad 1.2.1\colon \Diamond\Diamond q$	de 17 por $(\wedge)$

Por la rama derecha, las etiquetas 1.1 y 1.2.1 son superfluas. Nótese que no hemos podido aplicar $(\Diamond 4)$ a $1.1\colon \Diamond\Diamond q$ (línea 9) ni a $1.2.1\colon \Diamond\Diamond q$ (línea 19). La etiqueta 1 es la original de 1.1 y de 1.2.1 (por esa rama). El tableau-S4 termina y la rama derecha está abierta. Efectivamente, queda probado que el conjunto testado es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y transitivos. He aquí un modelo construido a partir de la rama abierta:



El modelo se ha construido en tres fases:

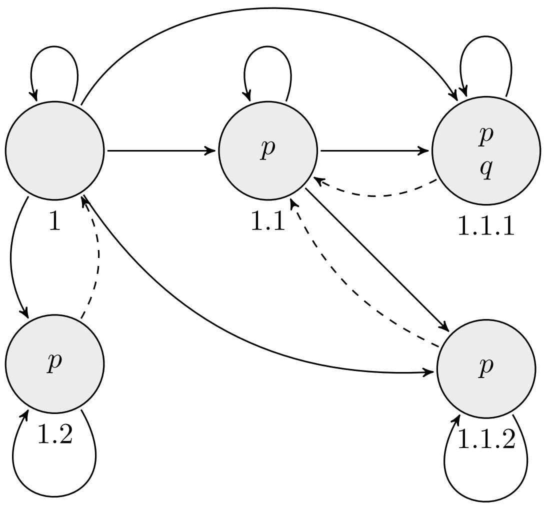
1. Las líneas continuas representan la relación R_1 que inicialmente describe la rama del tableau:
   $R_1 = \{(\sigma, \sigma') \in E^{\mathfrak{r}} \times E^{\mathfrak{r}} \mid \sigma'$ es una extensión de $\sigma\}$.
2. La líneas discontinuas corresponden a la relación R_2, que extiende R_1 con los pares que van desde cada etiqueta superflua a su original:
   $R_2 = R_1 \cup \{(\sigma, \sigma') \mid \sigma$ es $\mathfrak{r}$-superflua y σ' es el original de σ en $\mathfrak{r}\}$.
3. Las flechas de trazo doble (R_3) representan el cierre transitivo de R_2.

(3) Mostraremos que el conjunto de fórmulas $\{\Box\Diamond p, \Diamond(\Box p \wedge \Diamond q)\}$ es satisfacible en la clase de modelos reflexivos y transitivos. Emplearemos primero la versión original (t-S4) y seguidamente esta misma pero con la regla de acortamiento.

• Versión original:

1.	✓	$1\colon \Box\Diamond p$	
2.	✓	$1\colon \Diamond(\Box p \wedge \Diamond q)$	
3.	✓	$1\colon \Diamond p$	de 1 por $(\Box T)$
4.	✓	$1.1\colon \Box p \wedge \Diamond q$	de 2 por $(\Diamond 4)$
5.	✓	$1.1\colon \Box p$	de 4 por $(\wedge)$
6.	✓	$1.1\colon \Diamond q$	de 4 por $(\wedge)$
7.	✓	$1.1\colon \Diamond p$	de 1 por $(\Box K)$
8.	✓	$1.1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Box 4)$
9.	✓	$1.1\colon p$	de 5 por $(\Box T)$
10.	✓	$1.2\colon p$	de 3 por $(\Diamond K)$
11.	✓	$1.2\colon \Diamond p$	de 1 por $(\Box K)$
12.	✓	$1.2\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Box 4)$
13.	✓	$1.1.1\colon q$	de 6 por $(\Diamond 4)$
14.	✓	$1.1.1\colon p$	de 5 por $(\Box K)$
15.	✓	$1.1.1\colon \Box p$	de 5 por $(\Box 4)$
16.	✓	$1.1.1\colon \Diamond p$	de 8 por $(\Box K)$
17.	✓	$1.1.1\colon \Box\Diamond p$	de 8 por $(\Box 4)$
18.	✓	$1.1.2\colon p$	de 7 por $(\Diamond 4)$
19.	✓	$1.1.2\colon \Box p$	de 5 por $(\Box 4)$
20.	✓	$1.1.2\colon \Diamond p$	de 8 por $(\Box K)$
21.	✓	$1.1.2\colon \Box\Diamond p$	de 8 por $(\Box 4)$

El tableau-S4 termina y queda abierto. Nótese que las etiquetas 1.2, 1.1.1 y 1.1.2 son superfluas, siendo sus respectivas originales las etiquetas 1, 1.1 y 1.1. Así, obtenemos el siguiente modelo, donde el conjunto de fórmulas $\{\Box\Diamond p, \Diamond(\Box p \wedge \Diamond q)\}$ es satisfacible, lo que prueba la afirmación (3).

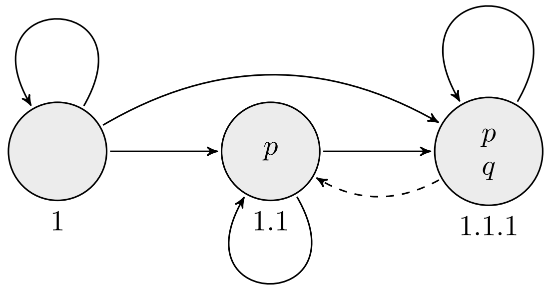


Hemos omitido el cierre transitivo de la relación que expresan las líneas continuas y discontinuas para mayor claridad en el dibujo. Dicho cierre queda implícito.

- Con regla de acortamiento:

1.	$\checkmark\quad 1\colon \Box\Diamond p$	
2.	$\checkmark\quad 1\colon \Diamond(\Box p \wedge \Diamond q)$	
3.	$\checkmark\quad 1\colon \Diamond p$	de 1 por $(\Box T)$
4.	$\checkmark\quad 1.1\colon \Box p \wedge \Diamond q$	de 2 por $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$
5.	$\checkmark\quad 1.1\colon \Box p$	de 4 por $(\wedge)$
6.	$\checkmark\quad 1.1.\colon \Diamond q$	de 4 por $(\wedge)$
7.	$\checkmark\quad 1.1\colon \Diamond p$	de 1 por $(\Box K)$
8.	$\checkmark\quad 1.1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Box 4)$
9.	$\checkmark\quad 1.1\colon p$	de 5 por $(\Box T)$
10.	$\checkmark\quad 1.1.1\colon q$	de 6 por $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$
11.	$\checkmark\quad 1.1.1\colon p$	de 5 por $(\Box K)$
12.	$\checkmark\quad 1.1.1\colon \Box p$	de 5 por $(\Box 4)$
13.	$\checkmark\quad 1.1.1\colon \Diamond p$	de 8 por $(\Box K)$
14.	$\checkmark\quad 1.1.1\colon \Box\Diamond p$	de 8 por $(\Box 4)$

La única rama del tableau está terminada y abierta. Nóntese que la etiqueta 1.1.1 es superflua en la rama; su original es la etiqueta 1.1. Es igualmente destacable que la restricción de acortamiento de la regla $(\Diamond 4)^{\mathsf{A}}$ ha impedido que esta se aplique a las líneas 3 y 7. Mostramos un modelo a continuaciónn a partir de la rama abierta:



Nótese que al incluir la flecha con línea discontinua, el cierre transitivo ya está dado.

Solución al ejercicio 34

- Solución al ejercicio prefiriendo la aplicación de la regla existencial sobre las reglas disyuntivas:

1.		$\checkmark$ $1\colon \Box p$	
2.		$\checkmark$ $1\colon \Diamond\Diamond q$	
3.		$\checkmark 1\colon \Box\neg p \vee \Diamond q$	
4.		$\checkmark$ $1\colon p$	de 1 por $(\Box T)$
5.		$\checkmark$ $1.1\colon \Diamond q$	de 2 por $(\Diamond 4)$
6.		$\checkmark$ $1.1\colon p$	de 1 por $(\Box K)$
7.		$\checkmark$ $1.1\colon \Box p$	de 1 por $(\Box 4)$
8.		$\checkmark$ $1.1.1\colon q$	de 5 por $(\Diamond 4)$
9.		$\checkmark$ $1.1.1\colon p$	de 7 por $(\Box K)$
10.		$\checkmark$ $1.1.1\colon \Box p$	de 7 por $(\Box 4)$
11.	$1\colon \Box\neg p$	$\checkmark$ $1\colon \Diamond q$	de 3 por $(\vee)$
12.	$1\colon \neg p$	$\vert$	de 11 por $(\Box T)$
13.	$\otimes$	$\checkmark$ $1.2\colon q$	de 11 por $(\Diamond 4)$
14.		$\checkmark$ $1.2\colon p$	de 1 por $(\Box K)$
15.		$\checkmark$ $1.2\colon \Box p$	de 1 por $(\Box 4)$

- Solución al ejercicio aplicando el procedimiento habitual (las reglas disyuntivas se prefieren a la existencial):

1.	✓ $1\colon \Box p$		
2.	✓ $1\colon \Diamond\Diamond q$		
3.	✓ $1\colon \Box\neg p \vee \Diamond q$		
4.	✓ $1\colon p$		de 1 por $(\Box T)$
5.	$1\colon \Box\neg p$	✓ $1\colon \Diamond q$	de 3 por $(\vee)$
6.	$1\colon \neg p$	$\mid$	de 11 por $(\Box T)$
7.	$\otimes$	✓ $1.1\colon \Diamond q$	de 2 por $(\Diamond 4)$
8.		✓ $1.1\colon p$	de 1 por $(\Box K)$
9.		✓ $1.1\colon \Box p$	de 1 por $(\Box 4)$
10.		✓ $1.2\colon q$	de 5 por $(\Diamond 4)$
11.		✓ $1.2\colon p$	de 1 por $(\Box K)$
12.		✓ $1.2\colon \Box p$	de 1 por $(\Box 4)$

Dejamos al lector la comparación de ambos tableaux así como de los modelos generados.

Solución al ejercicio 35 Probaremos que son ciertas las afirmaciones siguientes.

(1) $\vdash_{\text{t-S5}} (\Box p \wedge \Box(p \to q)) \to \Box\Diamond\Box q$.

Usaremos la versión alternativa t-S$5(ii)$.

1.	$\checkmark\ 1\colon \neg\big((\Box p \wedge \Box(p \to q)) \to \Box\Diamond\Box q\big)$	
2.	$\checkmark\ 1\colon \Box p \wedge \Box(p \to q)$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	$\checkmark\ 1\colon \neg\Box\Diamond\Box q$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	$1\colon \Box p$	de 2 por $(\wedge)$
5.	$1\colon \Box(p \to q)$	de 2 por $(\wedge)$
6.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\Box\Diamond\neg q$	de 3 por (Int)
7.	$1\colon p$	de 4 por $(\Box 5_d)$
8.	$\checkmark\ 1\colon p \to q$	de 5 por $(\Box 5_d)$
9.	$1\colon \neg p$ | $1\colon q$	de 8 por $(\to)$
10.	$\otimes$ | $1.1\colon \Box\Diamond\neg q$	de 6 por $(\Diamond 5)$
11.	$1.1\colon p$	de 4 por $(\Box 5_d)$
12.	$\checkmark\ 1.1\colon p \to q$	de 5 por $(\Box 5_d)$
13.	$\checkmark\ 1.1\colon \Diamond\neg q$	de 10 por $(\Box 5_d)$
14.	$1.1\colon \neg p$ | $1.1\colon q$	de 12 por $(\to)$
15.	$\otimes$ | $1.1.1\colon \neg q$	de 13 por $(\Diamond 5)$
16.	$1.1.1\colon p$	de 4 por $(\Box 5_d)$
17.	$\checkmark\ 1.1.1\colon p \to q$	de 5 por $(\Box 5_d)$
18.	$1.1.1\colon \Diamond\neg q$	de 10 por $(\Box 5_d)$
19.	$1.1.1\colon \neg p$ | $1.1.1\colon q$	de 17 por $(\to)$
	$\otimes$ | $\otimes$	

El tableau-S5 cierra; esto prueba la afirmación (1).

(2) $\vdash_{\text{t-S5}} \Diamond\Box p \to \Box p$.

Usaremos la versión original t-S5.

1.	✓	$1\colon \neg(\Diamond\Box p \to \Box p)$	
2.	✓	$1\colon \Diamond\Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓	$1\colon \neg\Box p$	de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓	$1\colon \Diamond\neg p$	de 3 por (Int)
5.		$1.1\colon \Box p$	de 2 por $(\Diamond 5)$
6.		$1\colon \Box p$	de 5 por $(\Box 4^r)$
7.		$1.1\colon p$	de 5 por $(\Box T)$
8.		$1\colon p$	de 6 por $(\Box T)$
9.		$1.2\colon \neg p$	de 4 por $(\Diamond 5)$
10.		$1.2\colon p$	de 6 por $(\Box K)$
		$\otimes$	

El tableau-S5 cierra. Está probada la afirmación (2).

(3) $\vdash_{\text{t-S5}} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond q)$

Usaremos la variante t-S$5(ii)$.

1.	✓ $1\colon \neg\big((\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond q)\big)$				
2.	✓ $1\colon \Diamond p \wedge \Diamond q$				de 1 por $(\neg \to)$
3.	✓ $1\colon \neg\Diamond(p \wedge \Diamond q)$				de 1 por $(\neg \to)$
4.	✓ $1\colon \Diamond p$				de 2 por $(\wedge)$
5.	✓ $1\colon \Diamond q$				de 2 por $(\wedge)$
6.	$1\colon \Box\neg(p \wedge \Diamond q)$				de 3 por (Int)
7.	✓ $1\colon \neg(p \wedge \Diamond q)$				de 6 por $(\Box 5_d)$
8.	$1\colon \neg p$		✓ $1\colon \neg\Diamond q$		de 7 por $(\neg\wedge)$
9.			$1\colon \Box\neg q$		de 8 por (Int)
10.			$1\colon \neg q$		de 9 por $(\Box 5_d)$
11.	$1.1\colon p$		$1.1\colon p$		de 4 por $(\Diamond 5)$
12.	✓ $1.1\colon \neg(p \wedge \Diamond q)$		✓ $1.1\colon \neg(p \wedge \Diamond q)$		de 6 por $(\Box 5_d)$
13.			$1.1\colon \neg q$		de 9 por $(\Box 5_d)$
14.	$1.1\colon \neg p$	✓ $1.1\colon \neg\Diamond q$	$1.1\colon \neg p$	✓ $1.1\colon \neg\Diamond q$	de 12 por $(\neg\wedge)$
15.	$\otimes$	$1.1\colon \Box\neg q$	$\otimes$	$1.1\colon \Box\neg q$	de 14 por (Int)
16.		$1\colon \neg q$			de 15 por $(\Box 5_d)$
17.		$1.1\colon \neg q$			de 15 por $(\Box 5_d)$
18.		$1.2\colon q$		$1.2\colon q$	de 5 por $(\Diamond 5)$
19.		$1.2\colon \neg(p \wedge \Diamond q)$		$1.2\colon \neg(p \wedge \Diamond q)$	de 6 por $(\Box 5_d)$
20.		$1.2\colon \neg q$		$1.2\colon \neg q$	de 15 y 9 por $(\Box 5_d)$
		$\otimes$		$\otimes$	

El tableau-S5 cierra, luego está probada la afirmación (3).

(4) $\{\Box\Diamond\Box p, \Diamond(p \to q)\} \vdash_{\text{t-S5}} \Diamond q$

Usaremos la variante t-S5(i).

1.	$1\colon \Box\Diamond\Box p$		
2.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond(p \to q)$		
3.	$\checkmark 1\colon \neg\Diamond q$		
4.	$1\colon \Box\neg q$		de 3 por (Int)
5.	$\checkmark\ 1\colon \Diamond\Box p$		de 1 por $(\Box T)$
6.	$1\colon \neg q$		de 4 por $(\Box T)$
7.	$\checkmark\ 1.1\colon p \to q$		de 2 por $(\Diamond 4)$
8.	$1.1\colon \Diamond\Box p$		de 1 por $(\Box K)$
9.	$1.1\colon \Box\Diamond\Box p$		de 1 por $(\Box 4)$
10.	$1.1\colon \neg q$		de 4 por $(\Box K)$
11.	$1.1\colon \Box\neg q$		de 4 por $(\Box 4)$
12.	$1.1\colon \neg p$	$1.1\colon q$	de 7 por $(\to)$
13.	$1.2\colon \Box p$	$\otimes$	de 5 por $(\Diamond 4)$
14.	$1.2\colon \Diamond\Box p$		de 1 por $(\Box K)$
15.	$1.2\colon \Box\Diamond\Box p$		de 1 por $(\Box 4)$
16.	$1.2\colon \neg q$		de 4 por $(\Box K)$
17.	$1.2\colon \Box\neg q$		de 4 por $(\Box 4)$
18.	$1\colon \Box p$		de 13 por $(\Box 4^r)$
19.	$1.2\colon p$		de 13 por $(\Box T)$
20.	$1.1\colon p$		de 18 por $(\Box K)$
	$\otimes$		

El tableau-S5 cierra. Queda probada la afirmación (4).

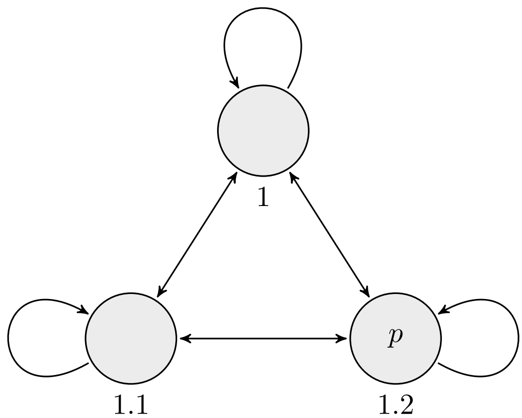
(5) Demostraremos que la fórmula $\Diamond\Box\Diamond p$ es satisfacible en la clase de modelos cuya relación de accesibilidad es de equivalencia.

Usaremos la variante t-S5(i).

1.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond\Box\Diamond p$	
2.	$\checkmark$	$1.1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Diamond 4)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \Box\Diamond p$	de 2 por $(\Box 4^r)$
4.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box T)$
5.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond p$	de 3 por $(\Box T)$
6.	$\checkmark$	$1.2\colon p$	de 5 por $(\Diamond 4)$
7.	$\checkmark$	$1.2\colon \Diamond p$	de 3 por $(\Box K)$
8.	$\checkmark$	$1.2\colon \Box\Diamond p$	de 3 por $(\Box 4)$

Notemos que 1.1 y 1.2 son etiquetas superfluas en la rama. La etiqueta original de ambas es la etiqueta 1. Por eso no ha habido ocasión de aplicar $(\Diamond 4)$ en los pasos 4 y 7.

El tableau-S5 termina y está abierto. luego la fónrmula base inicial es satisfacible en la clase de modelos de equivalencia. Un modelo verificador de la fórmula base inicial es el siguiente:



Ahora, usaremos la variante t-S5(ii).

1.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond\Box\Diamond p$	
2.	$\checkmark$	$1.1\colon \Box\Diamond p$	de 1 por $(\Diamond 5)$
3.	$\checkmark$	$1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
4.	$\checkmark$	$1.1\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$
5.	$\checkmark$	$1.2\colon p$	de 3 por $(\Diamond 5)$
6.	$\checkmark$	$1.2\colon \Diamond p$	de 2 por $(\Box 5_d)$

El tableau-S5 termina y queda abierto. En este caso, el modelo ofrecido es el mismo de antes.

Solución al ejercicio 36 (1) $\Box A \dashv\vdash_{\text{dn-K}} \neg\Diamond\neg A$

(1.1) $\{\Box A\} \vdash_{\text{dn-K}} \neg\Diamond\neg A$

1	$\Box A$	premisa
2	$\mid\ \Diamond\neg A$	supuesto
3	$\mid\ \neg\Box\neg\neg A$	(Def $\Diamond$) 3
4	$\mid\ \mid\ \Box$	supuesto
5	$\mid\ \mid\ A$	(E $\Box$) 1
6	$\mid\ \mid\ \neg\neg A$	(IDN) 5
7	$\mid\ \Box\neg\neg A$	(I $\Box$) 4-6
8	$\mid\ \Box\neg\neg A \wedge \neg\Box\neg\neg A$	(I $\wedge$) 3, 7
9	$\neg\Diamond\neg A$	(I $\neg$) 2-8

(1.2) $\{\neg\Diamond\neg A\} \vdash_{\text{dn-K}} \Box A$

1	$\neg\Diamond\neg A$	premisa
2	$\mid\ \neg\Box A$	supuesto
3	$\mid\ \mid\ \Box\neg\neg A$	supuesto
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \Box$	supuesto
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\neg A$	(E $\Box$) 3
6	$\mid\ \mid\ \mid\ A$	(E $\neg$) 5
7	$\mid\ \mid\ \Box A$	(I $\Box$) 4-6
8	$\mid\ \mid\ \Box A \wedge \neg\Box A$	(I $\wedge$) 2,7
9	$\mid\ \neg\Box\neg\neg A$	(I $\neg$) 3-8
10	$\mid\ \Diamond\neg A$	(Def $\Diamond$) 9
11	$\mid\ \Diamond\neg A \wedge \neg\Diamond\neg A$	(I $\wedge$) 1, 10
12	$\neg\neg\Box A$	(I $\neg$) 2-11
13	$\Box A$	(E $\neg$) 12

(2) $\neg\Box A \dashv\vdash_{\textsf{dn-K}} \Diamond\neg A$

(2.1) $\{\neg\Box A\} \vdash_{\textsf{dn-K}} \Diamond\neg A$

1	$\neg\Box A$	premisa
2	$\mid\ \neg\Diamond\neg A$	supuesto
3	$\mid\ \Box A$	(Def $\Box$) 2
4	$\mid\ \Box A \wedge \neg\Box A$	(I $\wedge$) 1, 3
5	$\neg\neg\Diamond\neg A$	(I $\neg$) 2-4
6	$\Diamond\neg A$	(E $\neg$) 5

(2.2) $\{\Diamond\neg A\} \vdash_{\textsf{dn-K}} \neg\Box A$

1	$\Diamond\neg A$	premisa
2	$\quad\vert\ \Box A$	supuesto
3	$\quad\vert\ \neg\Diamond\neg A$	(Def $\Box$) 2
4	$\quad\vert\ \Diamond\neg A \wedge \neg\Diamond\neg A$	(I $\wedge$) 1, 3
5	$\neg\Box A$	(I $\neg$) 2-4

(3) $\neg\Diamond A \dashv\vdash_{\text{dn-K}} \Box\neg A$

(3.1) $\{\neg\Diamond A\} \vdash_{\text{dn-K}} \Box\neg A$

1	$\neg\Diamond A$	premisa
2	$\quad\vert\ \neg\Box\neg A$	supuesto
3	$\quad\vert\ \Diamond A$	(Def $\Diamond$) 2
4	$\quad\vert\ \Diamond A \wedge \neg\Diamond A$	(I $\wedge$) 1, 3
5	$\neg\neg\Box\neg A$	(I $\neg$) 2-4
6	$\Box\neg A$	(E $\neg$) 5

(3.2) $\{\Box\neg A\} \vdash_{\text{dn-K}} \neg\Diamond A$

1	$\Box\neg A$	premisa
2	$\quad\vert\ \Diamond A$	supuesto
3	$\quad\vert\ \neg\Box\neg A$	(Def $\Diamond$) 2
4	$\quad\vert\ \Box\neg A \wedge \neg\Box\neg A$	(I $\wedge$) 1, 3
5	$\neg\Diamond\neg A$	(I $\neg$) 2-4

Solución al ejercicio 37 (1) $\vdash_{\textsf{dn-K}} (\Box p \lor \Box q) \to \Box(p \lor q)$

1	$\Box p \lor \Box q$	supuesto
2	$\Box p$	supuesto
3	$\Box$	supuesto
4	p	(E $\Box$) 2
5	$p \lor q$	(I $\lor$) 4
6	$\Box(p \lor q)$	(I $\Box$) 3-5
7	$\Box q$	supuesto
8	$\Box$	supuesto
9	q	(E $\Box$) 7
10	$p \lor q$	(I $\lor$) 9
11	$\Box(p \lor q)$	(I $\Box$) 8-10
12	$\Box(p \lor q)$	(E $\lor$) 1, 2-6, 7-11
13	$(\Box p \lor \Box q) \to \Box(p \lor q)$	(I $\to$) 1-12

(2) $\{\Box(A \to B), \Box\neg B\} \vdash_{\textsf{dn-K}} \Box\neg A$

1	$\Box(A \to B)$	premisa
2	$\Box\neg B$	premisa
3	$\Box$	supuesto
4	$A \to B$	(E $\Box$) 1
5	$\neg B$	(E $\Box$) 2
6	$\neg A$	(MT) 4,5
7	$\Box\neg A$	(I $\Box$) 3-6

(3) $\{\Box(A \to B), \Diamond A\} \vdash_{\text{dn-K}} \Diamond B$

1	$\Box(A \to B)$	premisa
2	$\Diamond A$	premisa
3	$\neg\Box\neg A$	(Def $\Diamond$)
4	$\mid\ \Box\neg B$	supuesto
5	$\mid\ \mid\ \Box$	supuesto
6	$\mid\ \mid\ \neg B$	(E $\Box$) 4
7	$\mid\ \mid\ A \to B$	(E $\Box$) 1
8	$\mid\ \mid\ \neg A$	(MT) 6,7
9	$\mid\ \Box\neg A$	(I $\Box$) 5-8
10	$\mid\ \Box\neg A \wedge \neg\Box\neg A$	(I $\wedge$) 3,9
11	$\neg\Box\neg B$	(I $\neg$) 4-10
12	$\Diamond B$	(Def $\Diamond$) 11

(4) $\{\Box(A \vee B), \Box(A \to C), \Box(B \to C)\} \vdash_{\text{dn-K}} \Box C$

1	$\Box(A \vee B)$	premisa
2	$\Box(A \to C)$	premisa
3	$\Box(B \to C)$	premisa
4	$\mid\ \Box$	supuesto
5	$\mid\ A \vee B$	(E $\Box$) 1
6	$\mid\ A \to C$	(E $\Box$) 2
7	$\mid\ B \to C$	(E $\Box$) 3
8	$\mid\ \mid\ A$	supuesto
9	$\mid\ \mid\ C$	(E $\to$) 6,8
10	$\mid\ \mid\ B$	supuesto
11	$\mid\ \mid\ C$	(E $\to$) 7,10
12	$\mid\ C$	(E $\vee$) 5, 8-9, 10-11
13	$\Box C$	(I $\Box$) 4-12

(5) $\vdash_{\text{dn-K}} (\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

1	$\Box p \wedge \Diamond q$	supuesto
2	$\Box p$	(E $\wedge$) 1
3	$\Diamond q$	(E $\wedge$) 1
4	$\neg\Box\neg q$	(Def $\Diamond$) 3
5	$\Box\neg(p \wedge q)$	supuesto
6	$\Box$	supuesto
7	p	(E $\Box$) 2
8	$\neg(p \wedge q)$	(E $\Box$) 5
9	$\neg p \vee \neg q$	(DMC) 8
10	$\neg\neg p$	(IDN) 7
11	$\neg q$	(SD) 9, 10
12	$\Box\neg q$	(I $\Box$) 6-11
13	$\Box\neg q \wedge \neg\Box\neg q$	(I $\wedge$) 4, 12
14	$\neg\Box\neg(p \wedge q)$	(I $\neg$) 5-13
15	$\Diamond(p \wedge q)$	(Def $\Diamond$) 14
16	$(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$	(I $\rightarrow$) 1-15

(6) $\vdash_K \Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

Demostramos solo la implicación de izquierda a derecha; dejamos la otra y culminar la prueba como desafío al lector.

1	$\Diamond(p \vee q)$	supuesto
2	$\neg\Box\neg(p \vee q)$	(Def $\Diamond$) 1
3	$\neg(\Diamond p \vee \Diamond q)$	supuesto
4	$\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond q$	(DMD) 3
5	$\neg\Diamond p$	(E $\wedge$) 4
6	$\neg\Diamond q$	(E $\wedge$) 4
7	$\Box\neg p$	($\neg\Diamond$) 5
8	$\Box\neg q$	($\neg\Diamond$) 6
9	$\Box$	supuesto
10	$\neg p$	(E $\Box$) 7
11	$\neg q$	(E $\Box$) 8
12	$\neg p \wedge \neg q$	(I $\wedge$) 10,11
13	$\neg(p \vee q)$	(DMD) 12
14	$\Box\neg(p \vee q)$	(I $\Box$) 9-13
15	$\Box\neg(p \vee q) \wedge \neg\Box\neg(p \vee q)$	(I $\wedge$) 2,14
16	$\neg\neg(\Diamond p \vee \Diamond q)$	(I $\neg$) 3-15
17	$(\Diamond p \vee \Diamond q)$	(E $\neg$) 16
18	$\Diamond(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$	(I $\rightarrow$) 1-17

Solución al ejercicio 38 Derivaciónn de (B$^{\Diamond}$) en dn-B:

1	$\Diamond\Box A$	premisa
2	$\neg A$	supuesto
3	$\Box\Diamond\neg A$	(B) 2
4	$\neg\Diamond\Box A$	(Int) 3
5	$\Diamond\Box A \wedge \neg\Diamond\Box A$	(I $\wedge$) 1, 4
6	$\neg\neg A$	(I $\neg$) 2-5
7	A	(E $\neg$) 6

Derivaciónn de (B) en dn-B$^{\Diamond}$:

1	A	premisa
2	$\mid \neg\Box\Diamond A$	supuesto
3	$\mid \Diamond\Box\neg A$	(Int) 2
4	$\mid \neg A$	(B$^{\Diamond}$) 3
5	$\mid A \wedge \neg A$	(I $\wedge$) 1, 4
6	$\neg\neg\Box\Diamond A$	(I $\neg$) 2-5
7	$\Box\Diamond A$	(E $\neg$) 6

Derivaciónn de (5$^{\Diamond}$) en dn-S5:

1	$\Diamond\Box A$	premisa
2	$\mid \neg\Box A$	supuesto
3	$\mid \Diamond\neg A$	($\neg\Box$) 2
4	$\mid \Box\Diamond\neg A$	(5) 3
5	$\mid \neg\Diamond\Box A$	(Int) 4
6	$\mid \Diamond\Box A \wedge \neg\Diamond\Box A$	(I $\wedge$) 1, 5
7	$\neg\neg\Box A$	(I $\neg$) 2-6
8	$\Box A$	(E $\neg$) 7

Derivaciónn de (5) en dn-S5$^{\Diamond}$:

1	$\Diamond A$	premisa
2	$\mid \neg\Box\Diamond A$	supuesto
3	$\mid \Diamond\Box\neg A$	(Int) 2
4	$\mid \Box\neg A$	(5$^{\Diamond}$) 3
5	$\mid \neg\Diamond A$	($\neg\Diamond$) 4
6	$\mid \Diamond A \wedge \neg\Diamond A$	(I $\wedge$) 1, 5
7	$\neg\neg\Box\Diamond A$	(I $\neg$) 2-6
8	$\Box\Diamond A$	(E $\neg$) 7

Solución al ejercicio 39 (1) $\vdash_{\text{dn-D}} \neg\Box(p \wedge \neg p)$

1	$\Box(p \wedge \neg p)$	supuesto
2	$\Diamond(p \wedge \neg p)$	(D) 1
3	$\neg\Box\neg(p \wedge \neg p)$	(Def $\Diamond$) 2
4	$\Box$	supuesto
5	$p \wedge \neg p$	(E $\Box$) 1
6	$\neg(p \wedge \neg p)$	(ECQ) 5
7	$\Box\neg(p \wedge \neg p)$	(I $\Box$) 4-6
8	$\Box\neg(p \wedge \neg p) \wedge \neg\Box\neg(p \wedge \neg p)$	(I $\wedge$) 3-8
9	$\neg\Box(p \wedge \neg p)$	(I $\neg$) 1-8

(2) $\{\Box p, \Diamond p \to \Box q, \Box(q \to \Box r)\} \vdash_{\text{dn-D}} \Diamond(p \wedge \Diamond r)$

1	$\Box p$	premisa
2	$\Diamond p \to \Box q$	premisa
3	$\Box(q \to \Box r)$	premisa
4	$\Diamond p$	(D) 1
5	$\Box q$	(E $\to$) 2, 4
6	$\Box$	supuesto
7	p	(E $\Box$) 1
8	$q \to \Box r$	(E $\Box$) 3
9	q	(E $\Box$) 5
10	$\Box r$	(E $\to$) 8, 9
11	$\Diamond r$	(D) 10
12	$p \wedge \Diamond r$	(I $\wedge$) 7, 11
13	$\Box(p \wedge \Diamond r)$	(I $\Box$) 6-12
14	$\Diamond(p \wedge \Diamond r)$	(D) 13

(3) $\vdash_{\text{dn-T}} \Box p \to \Diamond p$

1	$\Box p$	supuesto
2	$\quad \Box\neg p$	supuesto
3	$\quad p$	(T) 1
4	$\quad \neg p$	(T) 2
5	$\quad p \wedge \neg p$	(I $\wedge$) 3,4
6	$\neg\Box\neg p$	(I $\neg$) 2-5
7	$\Diamond p$	(Def $\Diamond$) 6
8	$\Box p \to \Diamond p$	(I $\to$) 1-7

(4) $\{\Box p\} \vdash_{\text{dn-T}} q \to p$

1	$\Box p$	premisa
2	p	(T) 1
3	$q \to p$	(CPr) 2

(5) $\vdash_{\text{dn-B}} (p \wedge (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q)) \to \Box\Diamond q$

1	$p \wedge (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q)$	supuesto
2	p	(E $\wedge$) 1
3	$\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q$	(E $\wedge$) 1
4	$\Box\Diamond p$	(B) 2
5	$\Diamond\Box q$	(E $\to$) 3, 4
6	q	(B$^{\Diamond}$) 5
7	$\Box\Diamond q$	(B) 6
8	$(p \wedge (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box q)) \to \Box\Diamond q$	(I $\to$) 1-7

(6) $\{\Box(\Diamond p \to q)\} \vdash_{\text{dn-B}} p \to \Box q$

1	$\Box(\Diamond p \to q)$	premisa
2	$\quad p$	supuesto
3	$\quad \Box\Diamond p$	(B) 2
4	$\quad\quad \Box$	supuesto
5	$\quad\quad \Diamond p \to q$	(E $\Box$) 1
6	$\quad\quad \Diamond p$	(E $\Box$) 3
7	$\quad\quad q$	(E $\to$) 5, 6
8	$\quad \Box q$	(I $\Box$) 4-7
9	$p \to \Box q$	(I $\to$) 2-8

(7) $\vdash_{\text{dn-S4}} \Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$.

1	$\quad \Box(p \to q)$	supuesto
2	$\quad \Box\Box(p \to q)$	(4) 1
3	$\quad\quad \Box$	supuesto
4	$\quad\quad \Box(p \to q)$	(E $\Box$) 2
5	$\quad\quad\quad \Box p$	supuesto
6	$\quad\quad\quad\quad \Box$	supuesto
7	$\quad\quad\quad\quad p \to q$	(E $\Box$) 4
8	$\quad\quad\quad\quad p$	(E $\Box$) 5
9	$\quad\quad\quad\quad q$	(E $\to$) 7, 8
10	$\quad\quad\quad \Box q$	(I $\Box$) 6-9
11	$\quad\quad \Box p \to \Box q$	(I $\to$) 5-10
12	$\quad \Box(\Box p \to \Box q)$	(I $\Box$) 3-11
13	$\Box(p \to q) \to \Box(\Box p \to \Box q)$	(I $\to$) 1-12

(8) $\vdash_{\text{dn-S4}} \Box p \leftrightarrow \Box\Box p$

1	$\mid\ \Box p$	supuesto
2	$\mid\ \Box\Box p$	(4) 1
3	$\Box p \to \Box\Box p$	(I $\to$) 1-2
4	$\mid\ \Box\Box p$	supuesto
5	$\mid\ \Box p$	(T) 4
6	$\Box\Box p \to \Box p$	(I $\to$) 4-5
7	$\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$	(I $\leftrightarrow$) 3,6

(9) $\vdash_{\text{dn-S5}} \Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$

1	$\mid\ \Diamond p$	supuesto
2	$\mid\ \Box\Diamond p$	(5) 1
3	$\mid\ \mid\ \neg\Diamond\Box\Diamond p$	supuesto
4	$\mid\ \mid\ \Box\Diamond\Box\neg p$	(Int) 3
5	$\mid\ \mid\ \Diamond\Box\neg p$	(T) 4
6	$\mid\ \mid\ \neg\Box\Diamond p$	(Int) 5
7	$\mid\ \mid\ \Box\Diamond p \wedge \neg\Box\Diamond p$	(I $\wedge$) 2, 6
8	$\mid\ \neg\neg\Diamond\Box\Diamond p$	(I $\neg$) 3-7
9	$\Diamond\Box\Diamond p$	(E $\neg$) 8
10	$\Diamond p \to \Diamond\Box\Diamond p$	(I $\to$) 1-9

Solución al ejercicio 40 Probemos que la regla (B) es derivable en dn-S5:

1	A	premisa
2	$\Diamond A$	$(T^{\Diamond})$ 1
3	$\Box\Diamond A$	(5) 3

La regla $(B^{\Diamond})$ se obtiene si se cuenta con la regla (B) (ver ejercicio 38). No obstante, daremos ahora una prueba más sencilla en dn-S5:

1	$\Diamond\Box A$	premisa
2	$\Box A$	$(5^{\Diamond})$ 1
3	A	(T) 3

Solución al ejercicio 41

1	$\Box A$		premisa
2	$\Box\Diamond\Box A$		(B) 1
3	|	$\Box$	supuesto
4	|	$\Diamond\Box A$	(E $\Box$) 2
5	|	$\Box A$	(5$^{\Diamond}$) 4
6	$\Box\Box A$		(I $\Box$) 3-5

Bibliografía

Backus, J. W., Bauer, F. L., Green, J., Katz, C., McCarthy, J., Perlis, A. J., Rutishauser, H., Samelson, K., Vauquois, B., Wegstein, J. H., et al. (1960). Report on the algorithmic language ALGOL 60. *Communications of the ACM*, *3*(5), 299-311 (vid. pág. 13).

Badesa, C., Jané, I., & Jansana, R. (2019). *Elementos de lógica formal*. Ariel. (Vid. págs. 8, 15).

van Benthem, J. (2010). *Modal logic for open minds*. Stanford, CACSLI Publications. (Vid. pág. 71).

Blackburn, P., De Rijke, M., & Venema, Y. (2002). *Modal Logic*. Cambridge University Press. (Vid. págs. 23, 71).

Bolander, T., & Blackburn, P. (2007). Termination for hybrid tableaus. *Journal of Logic and Computation*, *17*(3), 517-554 (vid. pág. 116).

Bolander, T., & Braüner, T. (2006). Tableau-based decision procedures for hybrid logic. *Journal of Logic and Computation*, *16*(6), 737-763 (vid. págs. 89, 116).

Carnap, R. (1946). Modalities and quantification. *The journal of symbolic logic*, *11*(2), 33-64 (vid. pág. 31).

Chellas, B. F. (1980). *Modal logic: an introduction*. Cambridge university press. (Vid. págs. 62, 71, 101).

Deaño, A. (1975). *Introducción a la lógica formal*. Alianza. (Vid. págs. 8, 10, 127, 131).

Fagin, R., Halpern, J. Y., Moses, Y., & Vardi, M. (1995). *Reasoning about knowledge*. MIT press. (Vid. pág. 32).

Fitch, F. B. (1952). *Symbolic Logic: An Introduction*. The Ronald Press Co. (Vid. pág. 127).

Fitting, M. (1983). *Proof methods for modal and intuitionistic logics*. Springer. (Vid. págs. 81, 89, 99, 100, 116, 121, 124).

Garrido, M. (2001). Lógica simbólica (vid. págs. 10, 15, 81).

Garson, J. W. (2013). *Modal logic for philosophers*. Cambridge University Press. (Vid. pág. 127).

Gasquet, O., Herzig, A., Said, B., & Schwarzentruber, F. (2014). *Kripke's World*. Birkhäuser. (Vid. pág. 99).

Goré, R. (1999). Tableau Methods for Modal and Temporal Logics. En M. D'Agostino, D. M. Gabbay, R. Hähnle & J. Posegga (Eds.), *Handbook of Tableau Methods* (pp. 297-396). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1754-0_6 (vid. págs. 89, 100, 116).

Harel, D., Kozen, D., & Tiuryn, J. (2000). *Dynamic Logic*. MIT Press. (Vid. pág. 32).

Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1968). An Introduction to Modal Logic, 1968. *Methuen* (vid. pág. 7).

Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1973). *Introduccón a la Lógica Modal*. Tecnos. (Vid. págs. 7, 31, 32).

Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1984). *A companion to modal logic*. Meuthen. (Vid. pág. 71).

Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1996). *A new introduction to modal logic*. Psychology Press. (Vid. pág. 101).

Jansana, R. (1990). *Una introducción a la lógica modal*. Tecnos. (Vid. pág. 7).

Jeffrey, R. C., & Burgess, J. P. (2006). *Formal logic: Its scope and limits*. Hackett Publishing. (Vid. pág. 81).

Kripke, S. A. (1959). A completeness theorem in modal logic. *The journal of symbolic logic*, *24*(1), 1-14 (vid. pág. 30).

Kripke, S. A. (1963). Semantical analysis of modal logic I normal modal propositional calculi. *Mathematical Logic Quarterly*, *9*(5-6), 67-96 (vid. pág. 30).

Lewis, C., & Langford, C. (1932). *Symbolic Logic*. Dover. (Vid. pág. 23).

Lipschutz, S. (1991). Teoría de conjuntos y temas afines (vid. pág. 8).

de Lorenzo, J. (1972). *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos*. Tecnos. (Vid. pág. 8).

Massacci, F. (2000). Single step tableaux for modal logics. *Journal of Automated Reasoning*, *24*(3), 319-364 (vid. págs. 89, 100, 116).

Mastop, R. (s.f.). *Modal Logic for Artificial Intelligence*. Unpublished Manuscript. (Vid. pág. 127).

Menzel, C. (2023). Possible Worlds. En E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2023). Metaphysics Research Lab, Stanford University. (Vid. pág. 31).

Naur, P. (1961). A course of algol 60 programming. *ALGOL Bull.,(Sup 9)*, 1-38 (vid. pág. 13).

Pelletier, F. J., & Hazen, A. (2024). Natural Deduction Systems in Logic. En E. N. Zalta & U. Nodelman (Eds.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2024). Metaphysics Research Lab, Stanford University. (Vid. pág. 127).

Wen, X. (2020). Some common mistakes in the teaching and textbooks of modal logic. *arXiv preprint arXiv:2005.10137* (vid. pág. 64).

West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. (Vid. pág. 34).

Wikipedia. (2023). Notación de Backus-Naur — Wikipedia, La enciclopedia libre [[Internet; descargado 28-octubre-2019]]. (Vid. pág. 13).

Wilson, R. J. (1983). *Introducción a la teoría de grafos*. Alianza Editorial. (Vid. pág. 34).

Zach, R. (2019). *Boxes and Diamonds: An Open Introduction to Modal Logic*. (Vid. pág. 8).