



# Sobre Galileo Galilei

*Resumen ordenado de treinta años de  
trabajo intermitente y desordenado*

**Juan Luis Alcántara López**

La Línea, 2009

Editor: Dr. Juan Falgueras Cano

Universidad de Málaga, 2025

© UMA Editorial. Universidad de Málaga  
Bulevar Louis Pasteur, 30 (Campus de Teatinos) - 29071  
Málaga [www.umaeditorial.uma.es](http://www.umaeditorial.uma.es)

© Los autores

Diseño y maquetación: Los autores

ISBN: 978-84-1335-402-6



Esta obra está sujeta a una licencia Creative Commons:  
Reconocimiento - No comercial - (cc-by-nc):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.es>  
Esta licencia permite a los reutilizadores distribuir,  
remezclar, adaptar y desarrollar el material en cualquier  
medio o formato únicamente con fines no comerciales y  
siempre que se otorgue la atribución al creador.

# Índice de contenido

---

<b>Figuras</b>	<b>5</b>
<b>Tablas</b>	<b>7</b>
<b>Lista de gráficas</b>	<b>9</b>
<b>Lista de ecuaciones</b>	<b>10</b>
Prólogo del editor . . . . .	11
Prefacio del autor . . . . .	30
<b>1 Fricción de rodadura de una esfera. Teoría</b>	<b>33</b>
1.1 Introducción . . . . .	33
1.2 Coeficiente de fricción de rodadura . . . . .	34
1.3 ¿Cómo puede obtenerse el valor de este coeficiente? . . . . .	39
1.4 Una nueva interpretación de $\lambda$ . . . . .	42
1.5 Esfera rodando sobre un surco de sección rectangular . . . . .	45
1.6 Cálculo del porcentaje de energía disipado por rodadura . . . . .	48
Referencias . . . . .	50
<b>2 Fricción de rodadura de una esfera. Experiencias</b>	<b>51</b>
2.1 Montaje experimental . . . . .	51
2.2 Esfera metálica sobre plano de madera . . . . .	52
2.3 Esfera metálica sobre plano metálico . . . . .	55
2.4 Esfera metálica sobre surco de sección rectangular . . . . .	56
2.5 El porcentaje de energía disipado es función de $h$ . . . . .	58
2.6 Dos experiencias de enero 2001 . . . . .	60
<b>3 La muy discutida experiencia del plano inclinado</b>	<b>64</b>
3.1 La experiencia de Galileo . . . . .	64
3.2 La experiencia de Thomas B. Settle . . . . .	74

3.3	Mi primer plano inclinado . . . . .	85
	Referencias . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Mi primer plano inclinado</b>	<b>90</b>
4.1	Antecedentes . . . . .	90
4.2	El registro horizontal . . . . .	91
4.3	El poder estimulante del experimento . . . . .	94
4.4	El registro vertical . . . . .	96
4.5	La importancia del centro de masa . . . . .	98
4.6	Prototipo completo . . . . .	100
4.7	El modelo final . . . . .	104
<b>5</b>	<b>El folio <math>116^V</math></b>	<b>107</b>
5.1	Descripción . . . . .	107
5.2	La interpretación de Stillman Drake . . . . .	108
5.3	El significado físico de la constante $\underline{K}$ . . . . .	110
5.4	Evaluación de la energía disipada . . . . .	114
5.5	La inclinación del plano . . . . .	116
5.6	Una experiencia de 1979 . . . . .	118
5.7	Para terminar . . . . .	120
5.8	Apéndice . . . . .	124
	Referencias . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Los folios <math>114^V</math> y <math>81^r</math></b>	<b>126</b>
6.1	Introducción . . . . .	126
6.2	Mis supuestos de partida . . . . .	129
6.3	El folio $114^V$ . . . . .	131
6.4	El folio $81^r$ . . . . .	137
6.5	Mi opinión sobre el folio $81^r$ . . . . .	138
6.6	Conclusiones . . . . .	144
	Referencias . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Un relato ilustrado</b>	<b>146</b>
<b>8</b>	<b>Últimos comentarios y experiencias</b>	<b>153</b>
8.1	23 de abril de 2009 . . . . .	153

8.2	¿Fue Galileo muy cuidadoso al medir longitudes? . . . . .	154
8.3	Reproducción de la experiencia reseñada en el folio 8I <sup>r</sup> . . . . .	158
8.4	Reproducción de la experiencia reseñada en el folio 116 <sup>v</sup> . . . . .	161
8.5	Reproducción de la experiencia reseñada en el folio 114 <sup>v</sup> . . . . .	165
<b>9</b>	<b>EPÍLOGO</b>	<b>168</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>172</b>
	<b>Apéndice A Teoría del rodamiento sin rozamiento</b>	<b>172</b>
A.1	Velocidad . . . . .	172
A.2	Distancia horizontal en el vuelo libre . . . . .	175
A.3	Energía cinética total . . . . .	176
A.4	Medición de la fricción en el plano inclinado a partir de la longitud alcanzada en el vuelo libre . . . . .	177
	<b>Apéndice B Sobre la fricción de rodadura de una bola</b>	<b>180</b>
B.1	Evaluación fácil del coeficiente de fricción de rodadura . . . . .	182
	Referencias . . . . .	184

1	Vidas de personajes relacionados con Galileo . . . . .	16
1.1	Deformación del plano . . . . .	35
1.2	Ángulos en la deformación del plano . . . . .	35
1.3	Velocidades en la deformación del plano . . . . .	36
1.4	Fuerzas en la deformación del plano . . . . .	37
1.5	Ángulo $\lambda$ en la deformación del plano . . . . .	38
1.6	Otra expresión de $\lambda$ . . . . .	40
1.7	Nueva interpretación de $\lambda$ . . . . .	42
1.8	Radio $r'$ aparente de bola sobre canal . . . . .	46
1.9	Velocidad angular $\omega'$ de bola sobre canal . . . . .	47
1.10	Conversión de $E_p$ en $E_{cT}$ con una disipación de $\chi\%$ . . . . .	48
2.1	Montaje experimental para calcular $\lambda$ . . . . .	51
2.2	Regleta de Boyle . . . . .	56
3.1	Bolas del experimento de Settle . . . . .	75
3.2	Idealización del perfil del plano con el canal semicircular . . . . .	78
3.3	¿Pudo Galileo comprobar esto experimentalmente? . . . . .	80
3.4	Perspectiva completa del montaje para realizar la experiencia . . . . .	87
4.1	Registro horizontal . . . . .	92
4.2	Velocidad de la esfera en el punto final del plano . . . . .	93
4.3	Registro vertical . . . . .	97
4.4	Diferencia de marcas entre el registro horizontal y el vertical . . . . .	99
4.5	Prototipo para el registro vertical . . . . .	102
4.6	Registros verticales en papel milimetrado . . . . .	103
4.7	Plano inclinado para el registro vertical. El modelo final . . . . .	105
4.8	Registros verticales en papel milimetrado con regla de aluminio . . . . .	106
5.1	Reproducción del folio $\text{II6}^V$ . . . . .	108
5.2	Reproducción del experimento del $\text{II6}^V$ . . . . .	118
5.3	Registros horizontales de Galileo . . . . .	119

6.1	Transcripción del folio $\text{II4}^{\text{v}}$ . . . . .	132
6.2	Datos para el problema de la <i>proyección oblicua</i> . . . . .	132
6.3	Transcripción del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	138
7.1	Reproducción de las trayectorias del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	147
7.2	Galileo tomando los datos de las dos primeras parábolas del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	147
7.3	¿Cómo pudo Galileo tomar los datos correspondientes a la tercera parábola del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	149
7.4	Fragmento del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	150
7.5	Fragmento del folio $\text{II4}^{\text{v}}$ . . . . .	151
7.6	Galileo tomando los datos del folio $\text{II4}^{\text{v}}$ . . . . .	151
7.7	Galileo tomando los datos del folio $\text{II6}^{\text{v}}$ . . . . .	152
7.8	Fragmento del folio $\text{II6}^{\text{v}}$ . . . . .	152
8.1	Precisión de los datos de Galileo . . . . .	155
8.2	Correcciones a los datos del folio $8\text{I}^{\text{r}}$ . . . . .	160
8.3	Reproducción de la experiencia del folio $\text{II6}^{\text{v}}$ . . . . .	162
8.4	Reproducción de la experiencia del folio $\text{II4}^{\text{v}}$ . . . . .	165
B.1	Pérdida de energía por rozamiento . . . . .	183

2.1	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ de esfera metálica sobre madera . . .	54
2.2	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ de esfera metálica sobre duraluminio . . .	55
2.3	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ esfera metálica sobre surco metálico . . .	57
2.5	Rodadura de una esfera metálica de hierro niquelado de 12 mm sobre una regleta de Boyle A, con una zona de contacto . . .	60
2.6	Rodadura de una esfera metálica de hierro niquelado de 12 mm sobre una regleta de Boyle B, con dos zonas de contacto . . .	61
3.1	Tabla de Settle . . . . .	76
3.2	Tabla de Settle con la aceleración . . . . .	77
3.3	Tabla de Settle con bola de billar . . . . .	81
3.4	Rodadura de canica de vidrio sobre un canal . . . . .	86
4.1	Registro con 180 cm . . . . .	93
4.2	Esfera sobre planos de 135 cm, 90 cm y 45 cm . . . . .	95
4.3	Datos experimentales . . . . .	95
4.4	Registro con 180 cm . . . . .	97
4.5	Registros verticales . . . . .	100
4.6	Registros verticales . . . . .	103
4.8	Registros verticales . . . . .	106
5.1	Energías disipadas en experimento de Galileo del folio II6 <sup>V</sup> . . . . .	115
6.1	Valores estimados de $h$ para el folio II6 <sup>V</sup> . . . . .	135
6.2	Valores calculados y los tomados por Galileo . . . . .	135
6.3	Verificación de Galileo de $d^2 \propto h$ en el folio II4 <sup>V</sup> . . . . .	136
6.4	Comprobación de $d^2 \propto h$ en el folio 8I <sup>r</sup> . . . . .	139
6.5	Diferencias entre las curvas teórica y de Galileo en folios II4 <sup>V</sup> y II6 <sup>V</sup> . . . . .	141
8.1	Ecuaciones de las parábolas en el folio 8I <sup>r</sup> . . . . .	156
8.2	Valores de la parábola intermedia . . . . .	157
8.3	Valores de la parábola más abierta . . . . .	157

8.4	Correcciones a los datos de Galileo . . . . .	160
8.5	Correcciones a parábola intermedia . . . . .	161
8.6	Corrections to external parabola . . . . .	161
8.7	Experiencia del folio 116 <sup>v</sup> considerando pérdida de energía .	163
8.8	Cálculos de la energía disipada mínima . . . . .	164
8.9	Cálculos de la energía máxima . . . . .	164
8.10	Variación de la energía disipada con $h$ . . . . .	166

## Lista de gráficas

---

2.1	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ de esfera metálica sobre madera . . .	54
2.2	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ de esfera metálica sobre duraluminio	55
2.3	Resultados de $a_{CM}$ y $\underline{a}_{CM}$ esfera metálica sobre surco metálico	57
2.4	$\chi$ frente a $h$ . . . . .	59
2.5	Rodadura de una esfera metálica de hierro niquelado de 12 mm sobre una regleta de Boyle A, con una zona de contacto . . .	60
2.6	Rodadura de una esfera metálica de hierro niquelado de 12 mm sobre una regleta de Boyle B, con dos zonas de contacto . . .	61

## Lista de ecuaciones

1.2	Energía transferida al plano $E = s \lambda F_y$ . . . . .	38
1.5	$\lambda$ en función de $\alpha$ y $a_{\text{CM}}$ . . . . .	42
1.6	$\Delta h = s \lambda \cos \alpha$ . . . . .	44
1.7	$\Delta h(s, h, a_{\text{CM}}, g)$ . . . . .	44
1.8	$\lambda(\alpha, a_{\text{CM}}, g)$ . . . . .	44
1.9	$\underline{a}_{\text{CM}}$ teórica frente a $a_{\text{CM}}$ real . . . . .	45
1.12	$\underline{a}_{\text{CM}}$ , la aceleración del centro de masa teórica . . . . .	47
1.14	$\chi$ , la energía disipada . . . . .	49
1.15	$\chi(v_{\text{CM}}, \underline{v}_{\text{CM}})$ . . . . .	49
3.1	Tiempos de recorrido en función de $s$ y $h$ . . . . .	80
5.1	Drake: $d^2 = \underline{K} h$ . . . . .	109
5.3	$K = 20/7 H$ . . . . .	113
5.4	$\chi = 100 (1 - \underline{K}/K)$ . . . . .	114
6.2	$K = 20 H/7$ . . . . .	127
6.3	$\underline{K} = d^2/h$ . . . . .	127
6.4	$d^2 \propto h$ . . . . .	130
6.5	$v^2 \propto h$ . . . . .	130
6.6	$v = \sqrt{10 gh/7}$ . . . . .	132
6.7	$d = vt \cos \alpha$ . . . . .	133
6.8	$H = vt \sin \alpha + 1/2 gt^2$ . . . . .	133
6.9	Folio II4 <sup>v</sup> $d(h, H, \alpha)$ . . . . .	133
8.1	$t = \sqrt{2(H - d \tan \alpha)/g}$ . . . . .	153
8.2	$v_{\text{CM}} = d/t \cos \alpha$ . . . . .	153
B.1	Balance energético . . . . .	182
B.2	$\mu(s, \alpha, \Delta s)$ . . . . .	183

*¿ Llegó realmente Galileo a realizar todos los experimentos de los que habla ?*

ALEXANDER KOYRÉ, que fue su primer historiador, llegó a negarlo arguyendo que Galileo Galilei no llegó a realizar **todos** los experimentos de los que habló. Sin embargo, posteriormente, muchos otros historiadores, han tachado lo expresado por Koyré como opinión personal sesgada.

Nuestro autor, Juan Luis, demostrará,  
repitiendo los mismos,  
incluyendo sus imprecisiones,  
que Galileo sí que tuvo que realizar el  
**experimento de la esfera  
cayendo sobre un plano inclinado**

Nuestro autor a lo largo de este texto hace el análisis dinámico detallado de una esfera que cae por un plano inclinado y explica como puso en práctica los experimentos de Galileo, haciendo también partícipes a muchos alumnos de los que tuvo a lo largo de su carrera como profesor de física de instituto. Juan Luis

nos hace disfrutar con la observación de los fenómenos físicos y nos enseña como podemos apañarnos con pocos recursos técnicos para obtener datos fiables capaces de sustentar toda una teoría.

Nos trasladamos de época y mentalidad. Repetimos los brevemente descritos experimentos originales de Galileo; obtenemos medidas, rellenamos los huecos de la documentación pre-científica de Galileo. Esto nos lleva a ver detalles que se le escaparon al propio Galileo a la hora de medir distancias. Pero sobre todo llegamos a una única conclusión posible: los resultados que Galileo garabateó en sus pergaminos no pudieron ser deducidos o inventados, son resultados numéricos que únicamente pueden corresponder a experimentos reales.

El autor de nuestro libro defiende con pasión no sólo la palabra de Galileo, sino que contagia ese sano espíritu experimentador que tienen los observadores objetivos. Los montajes físicos de Galileo son asequibles, pueden fácilmente ser repetidos en primera persona. La principal consecuencia de los números de Galileo y de Juan Luis es el fenómeno natural que la velocidad de la esfera aumenta continuamente con el tiempo de caída. Si la velocidad fuese constante, el espacio recorrido sería directamente proporcional al tiempo. Al aumentar la velocidad linealmente, el espacio aumenta con el cuadrado del tiempo. Esta es la primera ley física de la dinámica, que dio origen a toda la ciencia física posterior. Este análisis lo hizo un pensador del siglo XVI, en un mundo dominado por las creencias religiosas y la física aristotélica creada y cerrada 200 años antes de Cristo. Para entender el

análisis de Galileo, hay que, con él, analizar detalles y adoptar esa actitud humilde, libre de prejuicios, que, sin lugar a dudas, hizo que Galileo fuese el primer científico, el primero en la historia, que tuvo el coraje de defender lo que se puede ver por uno mismo frente a impuestas ideas heredadas.

Este libro dejará ese poso en el lector: nos convertirá en observadores de los detalles, nos enseñará a analizarlos y medirlos, nos hará profundizar en un respeto por la naturaleza, no basado en la admiración ciega a la autoridad de quien la describe, sino en el descubrimiento personal de sus sorprendentes leyes y conexiones. Conexiones y leyes que a Galileo apasionaron a lo largo de toda su vida. Galileo rompió con el dogma pre-científico y abrió las puertas a la era de la ciencia. No a la de la tecnología, que siempre existió, y a la que también él vendió sus conocimientos, sino a la de la observación científica. Galileo, entonces, y Juan Luis, ahora, nos abren las puertas a la belleza del casi mágico comportamiento de la naturaleza, del comportamiento que se puede comunicar y experimentar objetivamente sin intereses ni interpretaciones añadidas, del conocimiento que proviene de nuestros sentidos.

Nuestro autor, Juan Luis, coincide con el profesor José Romo (Romo, 2005), aunque esto él nunca lo supo, en el análisis teórico de los datos que tenemos de Galileo; pero Juan Luis además los comprueba e incluso llega a ver los errores cometidos en los montajes de los experimentos originales. Juan Luis enseñó a sus estudiantes, entre los que me cuento, a realizar este tipo de experimentos a lo largo de una brillante carrera como profesor de instituto.

El «poder estimulante del experimento» como lo llama Juan Luis, es motivación suficiente para que cualquier investigador curioso intente probar con la realidad lo que las teorías pueden predecir, y en el caso de Galileo, habría sido realmente extraño que combatiera los prejuicios de su época sin una base experimental. Hizo muchas observaciones con su telescopio mejorado, y era mucho más fácil medir tiempos y longitudes para verificar teorías dinámicas revolucionarias que cualquiera podía comprobar por sí mismo.

### **Sobre el problema de la credibilidad de los experimentos**

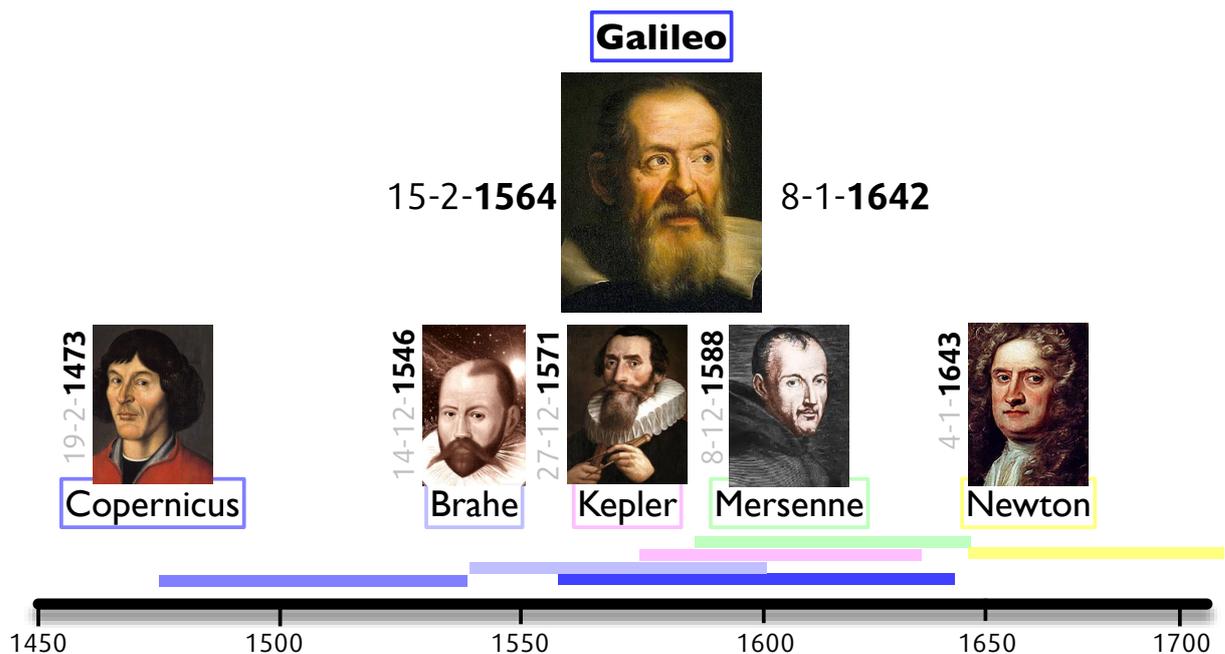
Es interesante, y creo que resume bastante bien la situación, la opinión de Naylor respecto a la importancia que Galileo dio a la precisión y predictibilidad de sus experimentos (Naylor, 1976):

«Los historiadores han intentado determinar en qué situaciones Galileo ofrecía un experimento como recurso didáctico y en cuáles lo consideraba una prueba crucial. Como hasta ahora se ha intentado hacerlo sin un conocimiento claro de qué experimentos eran reales y cuáles imaginarios, no es de extrañar que exista un espectro tan amplio de opiniones sobre el tema. Incluso ha dado lugar a una opinión ampliamente aceptada de que Galileo tenía poco interés en los experimentos reales. Esto se debe en gran parte a la influencia de Alexandre Koyré, que argumentó de forma muy persuasiva que la buena física se hace *a priori*. Aunque hay muchos argumentos a favor de esta tesis, cada vez está más

claro que la predisposición filosófica de Koyré le llevó a subestimar el papel de la experimentación en la mecánica de Galileo.»

En algunos de los textos e incluso series de textos, de algunos autores, se detallan repeticiones de los experimentos. Sin embargo, la falta de especificaciones de los experimentos originales ha hecho que la replicación de los mismos sea más un arte, que ningún meticuloso procedimiento basado en el seguimiento de una serie de pasos. Recordemos que estamos en el siglo XVI. Nuestro autor razona qué ángulos y longitudes debieron ser los empleados por Galileo. Consigue ponerse en el lugar del primer experimentador con un nivel de precisión que no han conseguido la mayoría de los historiadores. A lo largo de este texto se repiten distintas formas de experimentos, presentando sus resultados y comparándolos con los de Galileo. La conclusión final es inevitable.

En particular, no deja de sorprender la dureza de Koyré, que llega a negar la realización de los experimentos y, con ello, parte de la genialidad de Galileo y que, por algún misterioso motivo, otorga más mérito a personajes nacidos bastante más tarde y que tuvieron acceso a los trabajos, enfoques y conclusiones de los personajes anteriores. Precisamente este orden histórico de personajes, en el que participaron muchísimos genios de muchos países, colocaría a Galileo en la cúspide de una montaña a la que ascendieron los más valientes, los que se enfrentaron a los prejuicios imperantes más arraigados. A partir de él, el camino ya estaba trazado. En Florencia, no lejos del museo de Leonardo da Vinci,



**Figura 1:** Vidas de personajes relacionados con Galileo

el museo dedicado a Galileo representa un homenaje no solo al gran genio, sino al propio nacimiento de la ciencia. Muchos han sido los libros dedicados a Galileo. Uno de los libros más completos y exhaustivos es el reciente de Caffarelli (Caffarelli, 2009), donde se detalla minuciosamente toda su obra. Este museo solo puede dedicar una sala a los pocos instrumentos que se tienen de Galileo, las otras muchas salas están repletas de ingenios como telescopios, microscopios, balanzas, etc, de tantos otros personajes de la época, reflejando como el nacimiento de la ciencia fue el fruto de pequeñas aportaciones y, sobre todo, un cambio de mentalidad en la historia de la humanidad. El indiscutible gran papel de Galileo estuvo en la confianza de que la Naturaleza seguía la lógica de las matemáticas, y la confianza en que los experimentos, sin prejuicios, nos llevarían a encontrar las relaciones entre los fenómenos naturales, siendo así el primero que experimentó en tantas áreas de la física como pudo: astronomía, mecánica, fluidos, y muchas otras, siempre que pudiera hacer mediciones

y encontrar relaciones matemáticas en ellos. En astronomía su descripción de los principales satélites de Júpiter el 6 de enero de 1610, Ío, Europa, Ganímedes y Calisto fue tan precisa, como su cartografía de las manchas lunares, que hoy día sigue siendo válida.



## Referencias a Galileo de otros grandes físicos

**Stephen Hawking** (Hawking, 2011):

«Galileo, quizá más que ninguna otra persona, fue responsable del nacimiento de la ciencia moderna»

**Albert Einstein** (Einstein, 1953; Galilei, 2017):

«El paso más importante en la historia de la física fue la constatación de Galileo de que las leyes naturales pueden descubrirse mediante la observación sistemática y la deducción racional, en lugar de basarse en supuestos metafísicos»

«Las proposiciones a las que se llega por medios puramente lógicos son completamente vacías en cuanto a la realidad. Porque Galileo se dio cuenta de ello, y sobre todo porque lo introdujo en el mundo científico, es el padre de la física moderna —de hecho, de la ciencia moderna en su conjunto.»

**Steven Strogatz (Strogatz, 2019):**

«Galileo fue el primer practicante del método científico. En lugar de citar autoridades o filosofar desde un sillón, interroga a la naturaleza mediante observaciones meticulosas, experimentos ingeniosos y elegantes modelos matemáticos. Su planteamiento le llevó a muchos descubrimientos notables. Uno de los más sencillos y sorprendentes es el siguiente: Los números impares 1, 3, 5, 7, etc. se esconden en la forma en que caen las cosas.

Antes de Galileo, Aristóteles había propuesto que los objetos pesados caen porque buscan su lugar natural en el centro del cosmos. Galileo pensó que eran palabras vacías. En lugar de especular sobre por qué caían las cosas, quería cuantificar cómo caían. Para ello, tenía que encontrar una forma de medir los cuerpos que caían durante su descenso y saber dónde se encontraban en cada momento.

No era fácil. Cualquiera que haya tirado una piedra desde un puente sabe que las piedras caen rápido. Se necesitaría un reloj muy preciso, que no existía en la época de Galileo, y varias cámaras de vídeo muy buenas, que tampoco existían a principios del siglo XVII, para seguir la caída de una roca en cada momento de su rápido descenso.

Galileo encontró una solución brillante: Ralentizó el movimiento. En lugar de dejar caer una piedra desde un puente, dejó que una bola rodara lentamente por una rampa. En la jerga de la física, este tipo de rampa se conoce como plano inclinado, aunque en los experimentos originales de Galileo era más bien un trozo largo y fino de moldura de madera con una ranura cortada a lo largo

para que sirviera de canal a la pelota. Reduciendo la pendiente de la rampa hasta hacerla casi horizontal, podía hacer que el descenso de la bola fuera tan lento como quisiera, lo que le permitía medir dónde se encontraba la bola en cada momento, incluso con los instrumentos disponibles en su época.

Para cronometrar el descenso de la bola utilizaba un reloj de agua. Funcionaba como un cronómetro. Para ponerlo en marcha, abría una válvula. El agua fluía a un ritmo constante a través de un fino tubo hasta un recipiente. Para parar el reloj, cerraba la válvula. Pesando la cantidad de agua acumulada durante el descenso de la bola, Galileo podía cuantificar el tiempo transcurrido con una precisión de “una décima de latido”.

Repitió el experimento muchas veces, a veces variando la inclinación de la rampa, otras veces cambiando las distancias recorridas por la bola. Lo que descubrió, según sus propias palabras, fue lo siguiente: “Las distancias recorridas, durante intervalos iguales de tiempo, por un cuerpo que cae desde el reposo, guardan entre sí la misma relación que los números impares que empiezan por la unidad”.

Para explicar más explícitamente esta ley de los números impares, supongamos que la pelota recorre una cierta distancia en la primera unidad de tiempo. Entonces, en la siguiente unidad de tiempo, rodará *tres* veces más lejos. Y en la siguiente unidad de tiempo, rodará *cinco* veces más lejos que al principio. Es increíble; los números impares 1, 3, 5, y así sucesivamente son de alguna manera inherente a la forma en que las cosas ruedan cuesta abajo. Y si caer

es sólo el límite de rodar a medida que la inclinación se aproxima a la vertical, la misma regla debe valer para caer.

Podemos imaginar lo contento que debió de sentirse Galileo cuando descubrió esta regla. Pero fíjese en cómo lo expresó: con palabras, números y proporciones, no con letras, fórmulas y ecuaciones. En aquella época, nuestra actual preferencia por el álgebra en lugar del lenguaje hablado habría parecido vanguardista, una nueva forma de pensar y hablar. No es así como Galileo habría pensado o se habría expresado, ni sus lectores le habrían entendido si lo hubiera hecho»



## Agradecimientos

*A Juan Ignacio Ramos Sobrados, gracias por detectar lo que se escapa a todos los ojos menos al suyo. Su lectura atenta y generosa fue un verdadero regalo para este libro.*



## Sobre la edición

He tratado de respetar el texto original todo lo posible, pero he modificado el formato inevitablemente ya que me lo encontré como una serie de ficheros en formato *MS-Word* que con seguridad ya no reflejaban el cuidadoso estilo de nuestro autor. Por otro lado, su conversión a  $\text{\LaTeX}/\text{\TikZ}$  me hizo tratar de enriquecer y corregir la forma de referenciar fórmulas, tablas y gráficos. Aparte de toda esta cuestión estética, está la cuestión de contenido. La forma en que se presentó el libro inicialmente responde, como el autor nos narra, más a memorias que a un libro para ser leído. He respetado el orden de los capítulos, pero he creído necesario añadir apéndices e introducción para adaptarlo a lo que entendemos hoy día por libro, quizás no tanto de lectura, pero que permita sea fácil de acceder a lectores con nivel de conocimiento de física de instituto. Así pues, hay que reconocer que sí, que es inevitable, que hace falta saber física al menos de nivel de instituto para entender muchos de los detalles descritos en este libro. Sin embargo, creemos que lo más interesante no es el análisis físico que inevitablemente el autor hace de los experimentos, sino la repetición real y la descripción que el autor hace de los mismos, además de las conclusiones y las críticas que se hacen a los trabajos de los historiadores. El editor entiende que este trabajo puede en sí mismo constituir una base suficiente para demostrar sin lugar a dudas que Galileo sí que realizó estos experimentos, y por el análisis que hizo de éstos y de otros, muy probablemente no dejó de disfrutar de hacerlos todos con la mayor destreza que en aquellos tiempos, en los que no existían ni siquiera unidades

de medida cuyo estándar se pudiera alejar más que a los límites de la ciudad donde se vivía.

Dado que los capítulos han sido desarrollados en momentos muy diferentes, aunque con objetivos también muy diferentes, es imposible que no contengan repeticiones de algunas ideas. Esto me ha hecho recoger todas las ecuaciones relevantes en un Apéndice y algún experimento, ya mío, en otro. Espero que la matemática y la física a nivel bachiller que se maneja en este libro no haga sino refrescar la memoria de unos y animar a entrar en ella a otros.

## Referencias

- Caffarelli, Roberto Vergara (2009). *Galileo Galilei and Motion: A Reconstruction of 50 Years of Experiments and Discoveries*. Springer, pág. 298. ISBN: 978-3-642-42730-5.
- Einstein, Albert (1953). *Foreword to Galileo's Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*. University of California Press.
- Galilei, Galileo (2017). *Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to two new Sciences*. Inglés. Trad. del italiano por Henry Crew y Alfonso de Salvio. Delphi Series Seven. Originally published in Italian as *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in 1638. Delphi Classics. ISBN: 9781786560582.
- Hawking, Stephen (2011). *Historia del tiempo: Del big bang a los agujeros negros*. El Libro De Bolsillo - Ciencias. Alianza Editorial. ISBN: 9788420651996.
- Naylor, Ronald (1976). «Galileo: Real Experiment and Didactic Demonstration». En: *Isis* 67.3, págs. 398-419. ISSN: 00211753, 15456994.
- Romo, José (2005). «¿Hacia Galileo experimentos?» En: *Theoria: an international journal for theory, history and foundations of science* 20.52, págs. 5-24. ISSN: 0495-4548.

Strogatz, S. (2019). *Infinite Powers: The Story of Calculus - The Language of the Universe*. Atlantic Books. ISBN: 9781786492968.



## Prefacio del autor

---



Juan Luis en La Línea de la Concepción en la presentación de un libro **22-X-2009**

Los ocho capítulos que van a continuación contienen el resumen ordenado de treinta años de trabajo intermitente y desordenado.

En el primero desarrollo mis personales reflexiones teóricas sobre la rodadura de una esfera rígida sobre un plano deformable. Reflexiones que se iniciaron en 1994 y que se han prolongado hasta el 2008. La exposición ordenada y lógica que presento puede hacerlas parecer fruto de un corto e intenso periodo de trabajo. Tal impresión es engañosa.

En el segundo capítulo recopiló lo más significativo de mi trabajo experimental sobre ese mismo tema, realizado entre 1995 y 2002. El diseño del montaje experimental con que se inicia el capítulo puede aparecer como consecuencia lógica del desarrollo teórico expuesto en el anterior. Tal impresión también es engañosa. Lo cierto es que ambos trabajos – el teórico y el experimental – se fueron entrecruzando a lo largo de los años. El experimental – como veremos después – se inició en 1979, mucho antes que el teórico.

La decisión de resumir en estos dos capítulos los conocimientos básicos adquiridos por mí sobre este tema responde al deseo de poner al lector en condiciones de sacar el máximo provecho a la lectura de los seis restantes. No creo, sin embargo, necesario que el lector deba profundizar en su estudio en una primera lectura. En todo caso podrá volver a ellos más adelante si el tema tratado en los seis capítulos restantes llega a interesarle.

Inicio el tercero reproduciendo el relato que Galileo hace en los «Discorsi» de su famosa experiencia con el plano inclinado, así como los argumentos esgrimidos por Alexandre Koyré para negarle verosimilitud. Prosigo citando a I.B. Cohen, quien se muestra a favor de conceder validez a la experiencia realizada por T.B. Settle en 1961 replicando la descrita por Galileo en su famoso texto. Después resumo y comento el excelente trabajo experimental realizado T.B. Settle, citando las objeciones que —según Federico di Trocchio— le hace Ronald Naylor. Al final, y después de extraer mis propias conclusiones sobre todo lo anterior, expongo mi primera incursión experimental en este mismo tema, que se remonta a 1979, cuando yo no era más que un novato curioso e indocumentado.

En el cuarto capítulo detallo mis propias experiencias de 1979 encaminadas a comprobar de primera mano el principio de superposición de movimientos propuesto por Galileo. Estas experiencias me proporcionaron sorpresas muy agradables y enriquecedoras, tanto desde el punto de vista personal como profesional.

En el capítulo quinto desarrollo mis pesquisas en torno a un folio inédito de Galileo, el folio 116<sup>v</sup>, descubierto e interpretado en 1973 por Stillman Drake. Al iniciar estas pesquisas —finales de 2003— hacía ya varios meses que me había jubilado accediendo —por fin— al manejo de un ordenador, tecnología que me negué a usar durante mi vida activa como profesor, pero aún estaba

lejos de convertirme en internauta. Cuando al fin me rendí —finales de 2006— descubrí en la red la existencia de otro folio inédito de Galileo, el folio 81<sup>r</sup>. Me percaté entonces de que mis trabajos teórico/prácticos en torno a la *rodadura de una esfera rígida sobre un plano deformable* podrían servirme para justificar y completar la interpretación que Stillman Drake ofreció en su día del folio 116<sup>v</sup> así como para proponer interpretaciones de mi propia invención para los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup>. Eso es lo que expongo en el capítulo sexto.

El séptimo se inicia con la descripción de un pequeño hallazgo casual hecho mientras usaba el programa de dibujo de mi ordenador. Me basé en ese hallazgo para enhebrar un relato de cómo pudo Galileo iniciar y ordenar sus *pesquisas empíricas* sobre el movimiento, empezando por la que describe en su famoso relato de los «Discorsi» y siguiendo por las sugeridas en los tres enigmáticos folios inéditos. En el octavo capítulo hago una detallada exposición de mis propias experiencias caseras realizadas en apoyo de todo lo expuesto en los tres capítulos anteriores.

En el octavo capítulo hago una detallada exposición de mis propias experiencias caseras realizadas en apoyo de todo lo expuesto en los tres capítulos anteriores.

**Juan Luis Alcántara López**

La Línea de la Concepción, 14-IX-2009

# Fricción de rodadura de una esfera. Teoría

---

## 1.1. Introducción

Desde 1979 y hasta 2002 —año en que me jubilé como profesor de Física y Química— uno de los recursos que utilicé con mis alumnos para introducirlos en la *cinemática* consistió en reproducir con material moderno la experiencia de la esfera que rueda sobre un plano inclinado descrita someramente por Galileo en la tercera jornada del «Discorsi». Un problema en el que concentré mi atención desde el principio fue de tipo *dinámico*: *¿Cómo evaluar las fuerzas de fricción que el plano y la esfera se ejercen mutuamente?*

En enero de 1994 inicié mi investigación personal sobre este asunto, ya que el tema, quizás por ser considerado de escaso interés, no aparece tratado a fondo en ninguno de los manuales de Física que he consultado a lo largo de mi vida. En las secciones siguientes intentaré desarrollar mis razonamientos teóricos sobre esta cuestión.

## 1.2. Coeficiente de fricción de rodadura

Si una esfera metálica rueda sobre un plano de madera ambos sufrirán deformaciones en la zona de contacto mutuo, pero la deformación del plano —representada en la Figura 1.1 por el arco  $\widehat{A'B'}$  que subtende un ángulo  $\lambda$  en el centro de la esfera— debería ser más acusada que la experimentada por la propia esfera al ser el metal más rígido que la madera. La interacción mutua estará localizada en la pequeña *zona de contacto* en torno a los arcos  $\widehat{AB}$  de la esfera y  $\widehat{A'B'}$  del plano, pero si consideramos que  $\lambda$  debería ser muy pequeño, podremos simbolizarlos mediante sendos vectores aplicados en B y en B'. En la rodadura pura sin deslizamiento los puntos A y A' deben permanecer en reposo relativo, mientras que el B' se va hundiendo a medida que la esfera rueda hacia la derecha. Por lo tanto la esfera va transfiriendo su energía cinética al plano trabajando sobre él mediante una fuerza aplicada en B'. A la Figura 1.2 recurriremos más adelante. En ella se advierte que  $\beta = \lambda/2$  al ser perpendiculares entre sí los lados que forman ambos ángulos.

En las Figuras 1.3 y 1.4 presentamos la misma esfera rodando sobre el mismo plano dispuesto ahora con una inclinación  $\alpha$ . La velocidad instantánea con que el punto B' se va hundiendo como consecuencia del avance de la esfera vendrá dada por la ecuación:

$$\mathbf{v}_{B'} = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Obsérvese en la Figura 1.3 que los ángulos  $\lambda$  con vértices en CM y en B' son iguales entre sí por tener sus lados perpendiculares. Esto nos permite expresar el resultado del producto vectorial  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , en coordenadas cartesianas, mediante:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -v_{CM} \cos \lambda \mathbf{i} - v_{CM} \sin \lambda \mathbf{j}$$

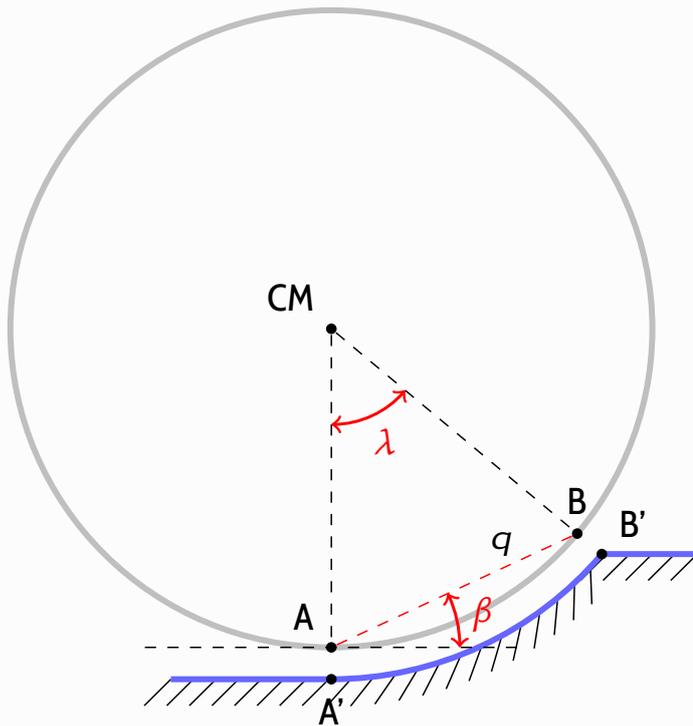


Figura 1.1: Deformación del plano

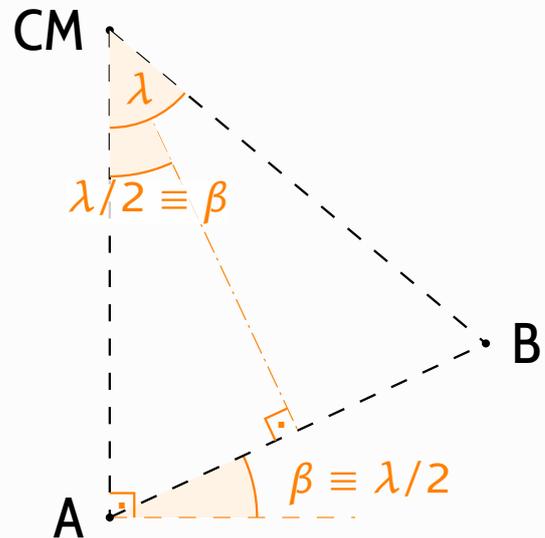


Figura 1.2: Ángulos  $\beta = \lambda/2$

y como, por otra parte,  $\mathbf{v}_{CM} = v_{CM} \mathbf{i}$ , la velocidad instantánea de B' vendrá dada por el vector:

$$\mathbf{v}_{B'} = v_{CM} [(1 - \cos \lambda) \mathbf{i} - \text{sen } \lambda \mathbf{j}]$$

La Figura 1.4 muestra las componentes rectangulares de la fuerza que la esfera aplica sobre ese mismo punto B' según hemos convenido antes.

La potencia instantánea  $P$  desarrollada por una fuerza constante —como es nuestro caso— se calcula mediante el producto escalar de dicha fuerza por la velocidad instantánea con que se desplaza su punto de aplicación.

Por lo tanto la potencia instantánea  $P = dE/dt$  con que el plano recibe ener-

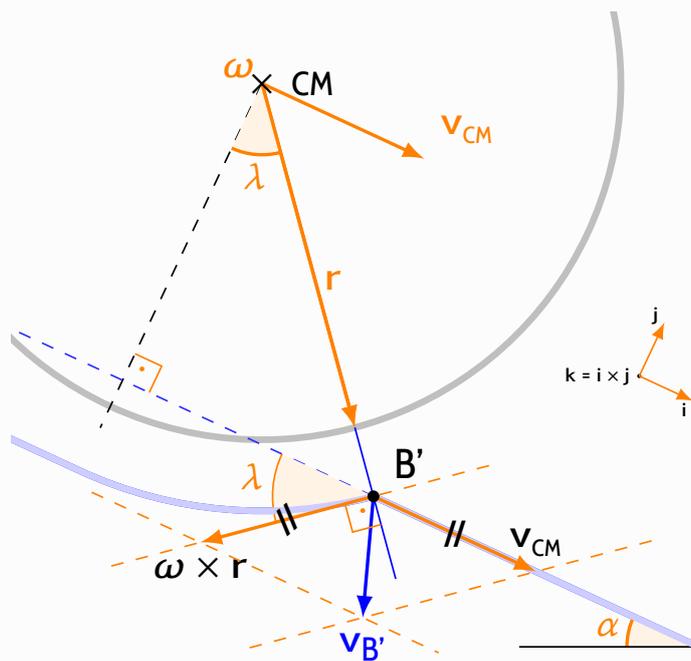


Figura 1.3: Velocidades

gía  $E$  de la esfera vendrá dada por el producto escalar<sup>1</sup>:

$$P = (\mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y) \cdot \mathbf{v}_{B'}$$

O sea,

$$P = v_{CM} [F_x (1 - \cos \lambda) + F_y \sin \lambda]$$

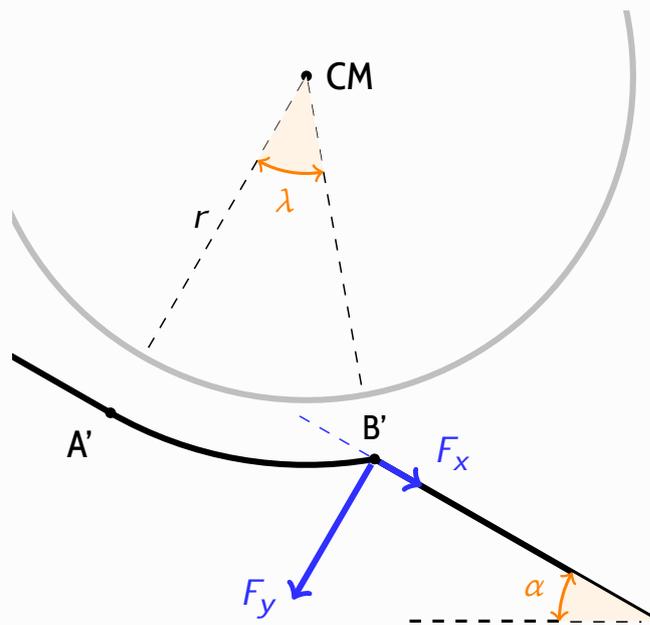
Pero como

$$v_{CM} = a_{CM} t$$

siendo  $a_{CM}$  la aceleración, constante, del centro de masa, la cantidad de energía transferida al plano durante el intervalo  $dt$  quedará:

$$dE = [F_x (1 - \cos \lambda) + F_y \sin \lambda] a_{CM} t dt.$$

<sup>1</sup> Nota del editor:  $dE/dt = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y$



**Figura 1.4:** Fuerzas que intervienen por la deformación del plano

Si la esfera parte del reposo, una sencilla integración respecto al tiempo nos dice que la energía  $E$  que la esfera transfiere al plano durante la rodadura vendrá dada por

$$E = [F_x (1 - \cos \lambda) + F_y \operatorname{sen} \lambda] \frac{1}{2} a_{\text{CM}} t^2$$

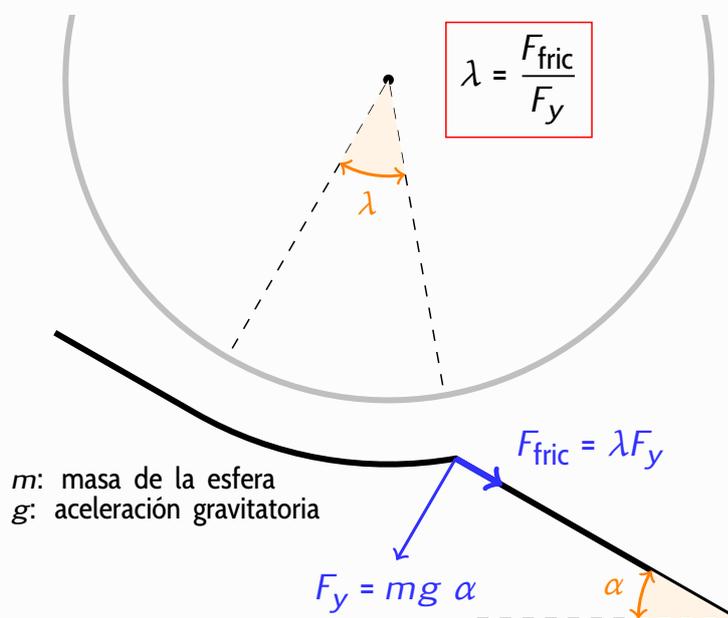
o bien

$$E = [F_x (1 - \cos \lambda) + F_y \operatorname{sen} \lambda] s \quad (1.1)$$

donde  $s$  es el recorrido del CM de la esfera durante el intervalo de tiempo considerado.

Si recordamos que  $\lambda \rightarrow 0$ , por lo que  $1 - \cos \lambda \rightarrow 0$  y  $\operatorname{sen} \lambda \rightarrow \lambda$ , la ecuación anterior quedará así:

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow E = \lambda F_y s \quad (1.2)$$



**Figura 1.5:** Ángulo  $\lambda$  en la deformación del plano

Por lo tanto podemos considerar que  $\lambda$  desempeña en la ecuación 1.2 la función de un «coeficiente de fricción de rodadura» de acuerdo con la definición usual de tales coeficientes<sup>2</sup>. Ver Figura 1.5.

La  $F_{\text{roz}}$  que aparece en la Figura 1.5 y la  $F_x$  que aparece en la Figura 1.4 desempeñan papeles completamente distintos en cuanto a la transferencia de energía que la esfera le hace al plano: el papel de  $F_x$  es nulo en la práctica, en virtud de la ecuación 1.1, de forma que la transferencia de energía queda a cargo casi exclusivo de  $F_{\text{roz}}$ , la cual depende, como acabamos de demostrar, de  $\lambda$  y de  $F_y$ .

<sup>2</sup> **Nota del editor:** La fuerza de rozamiento que frena el deslizamiento de un cuerpo sobre otro, ampliamente estudiada, es  $F_{\text{roz}} = \mu F_y$ , y su trabajo, la energía que se transfiere al plano debido a esta fuerza:  $E = F_{\text{roz}} s = \mu F_y s$ . Donde  $\mu$  es el coeficiente de rozamiento dinámico que, por ejemplo, para las superficies vidrio-madera tiene un valor de 0,2

### 1.3. ¿Cómo puede obtenerse el valor de este coeficiente?

Para lograrlo plantearemos la ecuación del movimiento de la esfera considerando la rotación/traslación simultáneas como una rotación pura en torno al eje instantáneo de giro que pasa por el punto A y es perpendicular al plano del papel. Ver Figura 1.6. Tendremos:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} + \mathbf{q} \times \mathbf{F} = I_A \gamma$$

siendo  $I_A$  el momento de inercia de la esfera y  $\gamma$  la aceleración angular. De acuerdo con el teorema de Steiner (Wikipedia, 2023) la expresión del momento de inercia  $I_A$  respecto a A será:

$$I_A = I_{\text{CM}} + m r^2 = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2$$

o bien

$$I_A = \frac{7}{5} m r^2 \quad (1.3)$$

siendo  $m$  la masa de la esfera y  $r$  su radio.

Consultemos ahora la Figura 1.2 para expresar el vector  $\mathbf{q}$  y encontraremos que

$$\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} = q \sin \frac{\lambda}{2} \mathbf{i} + q \cos \frac{\lambda}{2} \mathbf{j}$$

Hechas las sustituciones y operaciones pertinentes en la ecuación del movimiento tendremos:

$$r m g \sin \alpha - q F_x \sin \frac{\lambda}{2} - q F_y \cos \frac{\lambda}{2} = \frac{7}{5} m r a_{\text{CM}}$$

donde  $a_{\text{CM}}$  representa la aceleración lineal del centro de masa ya que  $\gamma =$

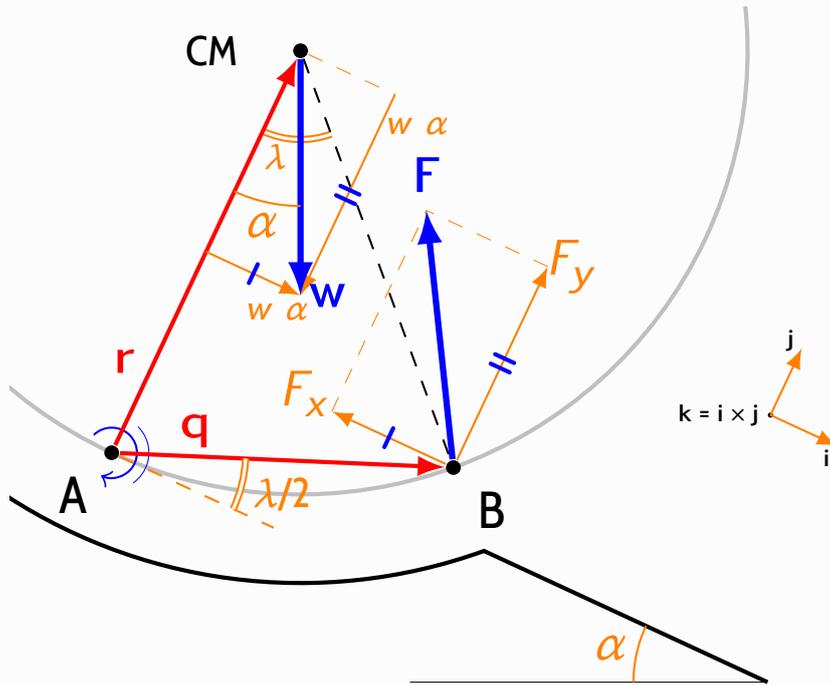


Figura 1.6:  $r \times w + q \times F = I_A \gamma$

$a_{CM}/r$ .

Como  $\lambda \rightarrow 0$ , tendremos que  $\cos \frac{\lambda}{2} \rightarrow 1$  y  $\sin \frac{\lambda}{2} \rightarrow \frac{\lambda}{2}$ , de modo que la ecuación anterior podemos escribirla así:

$$r mg \sen \alpha - \frac{\lambda}{2} q F_x - q F_y = \frac{7}{5} m r a_{CM}$$

Si ambos miembros de la ecuación anterior se dividen por  $r$  y se hace la aproximación, también aceptable, de que  $\frac{q}{r} \rightarrow \lambda$ , la ecuación anterior quedará:

$$mg \sen \alpha - \lambda^2 \frac{F_x}{2} - \lambda F_y = \frac{7}{5} m a_{CM}$$

o bien

$$\lambda^2 \frac{F_x}{2} + \lambda F_y + m \left( \frac{7}{5} a_{CM} - g \sen \alpha \right) = 0$$

Esta ecuación de segundo grado permite el cálculo de  $\lambda$  a partir de dos magnitudes cuyos valores son determinables experimentalmente: el ángulo  $\alpha$  que forma el plano con la horizontal y la aceleración  $a_{\text{CM}}$ . En cuanto a las componentes rectangulares de la fuerza que el plano ejerce sobre la esfera tendremos que serán:

$$F_y = mg \cos \alpha \quad F_x = m(g \sin \alpha - a_{\text{CM}})$$

Es evidente que si el plano y la esfera fueran ambos perfectamente rígidos, de modo que  $\lambda = 0$ , el contacto mutuo se reduciría a un único punto. En este caso no habría rozamiento y la aceleración sería la teórica que denotaremos con  $\underline{a}_{\text{CM}}$ <sup>3</sup>:

$$m \left( \frac{7}{5} \underline{a}_{\text{CM}} - g \sin \alpha \right) = 0$$

lo que nos lleva al conocido resultado para la aceleración que llamamos teórica del centro de masa  $\underline{a}_{\text{CM}}$ :

$$\lambda = 0 \Rightarrow \quad \underline{a}_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad (1.4)$$

ecuación válida en el caso ideal en *ausencia de fuerzas de fricción y, por tanto, sin disipación de energía*  $\lambda = 0$ <sup>4</sup>.

Una aproximación realista sin suponer  $\lambda$  totalmente nulo, —puesto que la rigidez absoluta no existe— se obtendría despreciando el término cuadrático en la ecuación de segundo grado, ya que si  $\lambda \rightarrow 0$  con mucha más razón lo hará su cuadrado y sustituyendo también  $F_y$  por el valor obtenido antes,

<sup>3</sup> **Nota del editor:** La notación usada para los valores teóricos de  $K$  a  $v$  sería  $\underline{K}$   $\underline{a}$   $\underline{v}$

<sup>4</sup> **Nota del editor:** Ver Apéndice A

obtendríamos:

$$\lambda = \tan \alpha - \frac{7 a_{\text{CM}}}{5g \cos \alpha},$$

o bien

$$\lambda = \sec \alpha \left( \sin \alpha - \frac{7 a_{\text{CM}}}{5g} \right) \quad (1.5)$$

expresión matemática que describe una relación funcional entre  $\lambda$  y un par de variables independientes: el *ángulo de inclinación del plano*  $\alpha$  y la *aceleración real del centro de masa de la esfera*  $a_{\text{CM}}$ . Es decir:  $\lambda = f(\alpha, a_{\text{CM}})$ .

### 1.4. Una nueva interpretación de $\lambda$

Si la esfera metálica rueda sobre el plano inclinado de madera parte de su energía potencial gravitatoria inicial se disipará a lo largo del recorrido, al llegar al pie del plano su contenido en energía cinética será inferior al previsto teóricamente.

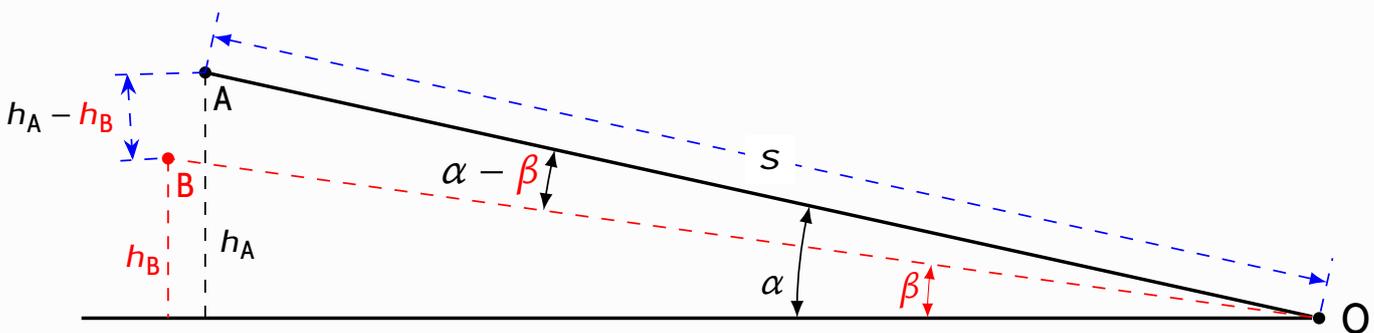


Figura 1.7: Nueva interpretación de  $\lambda$

Si la esfera rodante parte del reposo desde el punto A y recorre la longitud  $s$  hasta llegar a O —formando el plano un ángulo  $\alpha$  con la horizontal— la ineludible disipación de energía causará un efecto práctico equivalente al de haberse realizado *la misma rodadura sin disipación de energía*, pero sobre un plano de inclinación  $\beta < \alpha$ . Ver Figura 1.7. Podremos evaluar la energía disipada mediante:

$$\Delta E_p = mg \Delta h$$

o sea,

$$mg \Delta h = mgh_A - mgh_B = mgh_B$$

Simplificando, queda

$$\Delta h = h_A - h_B$$

que, multiplicando y dividiendo por  $s$ , queda:

$$\Delta h = s \left( \frac{h_A}{s} - \frac{h_B}{s} \right)$$

o bien, finalmente,

$$\Delta h = s (\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta)$$

El paréntesis de la última relación anterior lo podemos expresar de este modo:

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Si consideramos que  $\lambda = \alpha - \beta$  debe ser un ángulo muy pequeño podemos admitir que  $\beta \rightarrow \alpha$  y también que  $\text{sen } \lambda \rightarrow \lambda$ , por lo que la expresión anterior quedaría

$$\text{sen } \alpha - \text{sen } \beta = \lambda \cos \alpha$$

de ahí que podamos escribir

$$\Delta h = s \lambda \cos \alpha \quad (1.6)$$

Pero, puesto que el *valor experimental* de la aceleración lineal del centro de masa de la esfera debe ajustarse a la ecuación:

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7}g \sin \beta$$

tendríamos que

$$\sin \beta = \frac{7a_{\text{CM}}}{5g}$$

y resultaría ser cierto también que podemos expresar  $\Delta h$  de este otro modo:

$$\Delta h = s \left( \frac{h_A}{s} - \frac{7a_{\text{CM}}}{5g} \right) \quad (1.7)$$

Igualando los segundos miembros de 1.6 y 1.7 y operando obtenemos:

$$\lambda = \sec \alpha \left( \frac{h_A}{s} - \frac{7a_{\text{CM}}}{5g} \right)$$

o bien

$$\lambda = \sec \alpha \left( \sin \alpha - \frac{7a_{\text{CM}}}{5g} \right) \quad (1.8)$$

Esta ecuación 1.8 —idéntica a la 1.5— permite la evaluación de  $\lambda$  a partir de  $\alpha$  y  $a_{\text{CM}}$ . La novedad en este caso es que  $\lambda$  representa *ahora* no ya la *deformación* del plano ni el *coeficiente de fricción por rodadura* sino la diferencia entre las *inclinaciones real*  $\alpha$  y *aparente*  $\beta$  del mismo.

Una consecuencia interesante de todo lo anterior es que podemos y debemos distinguir entre  $\underline{a}_{\text{CM}}$ , *aceleración teórica o ideal* —la que poseería el CM de la

esfera rodante en el *caso ideal* de *fricción nula*— y  $a_{\text{CM}}$ , la *aceleración experimental* o *real*, la que presenta en la práctica el CM de la esfera, puesto que las *fuerzas de fricción* son *ineludibles* causando la consecuente disipación de energía. Ambas aceleraciones pueden calcularse mediante:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{\text{CM}} &= \frac{5}{7} g \sin \alpha \\ a_{\text{CM}} &= \frac{5}{7} g \sin \beta \\ \lambda &= \alpha - \beta \end{aligned} \tag{1.9}$$

## 1.5. Esfera rodando sobre un surco de sección rectangular

En una famosa experiencia realizada en 1961 por T. B. Settle —replicando la descrita por Galileo— este investigador hizo rodar sus esferas sobre un surco de sección rectangular tallado en la cara más estrecha de su plano inclinado. En esta experiencia la esfera rodante presenta *dos pequeñas zonas* de contacto con el soporte, según se indica en la Figura 1.8.

En la Figura 1.9 presentamos una vista lateral de la misma esfera rodando sobre el surco del plano inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal.

Supongamos que la esfera parte del el reposo, estando su CM a una altura  $h$  sobre la horizontal, y rueda a lo largo de una longitud  $s$ . En el supuesto ideal de no existir disipación de energía mecánica en la rodadura tendríamos que:

$$mgh = \frac{1}{2} m \underline{v}_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I \underline{\omega}'^2 \tag{1.10}$$

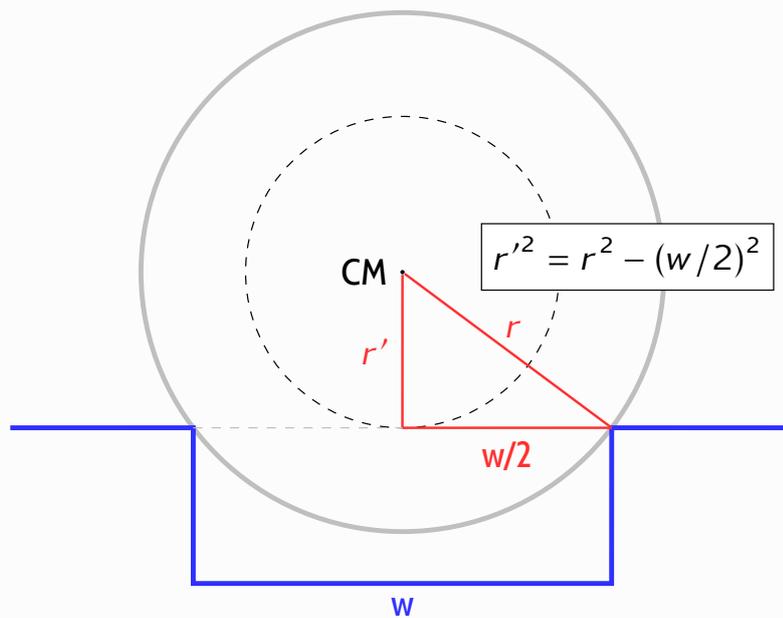


Figura 1.8: Radio  $r'$  aparente

siendo  $m$  la masa de la esfera e  $I$  su momento de inercia respecto al eje de rotación.

Como  $I = \frac{2}{5} m r^2$  y  $\omega'^2 = \left(\frac{v_{CM}}{r'}\right)^2$  tendremos que:

$$gh = \frac{1}{2} v_{CM}^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 v_{CM}^2$$

Esto lleva a un valor de la velocidad en función de la altura de salida  $h$  y del radio de la esfera (Nota del editor):

$$v_{CM}^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{r'}\right)^2} \tag{1.11}$$

Teniendo en cuenta que:  $v_{CM}^2 = 2a_{CM}s$  y que  $\sin \alpha = \frac{h}{s}$  llegamos a

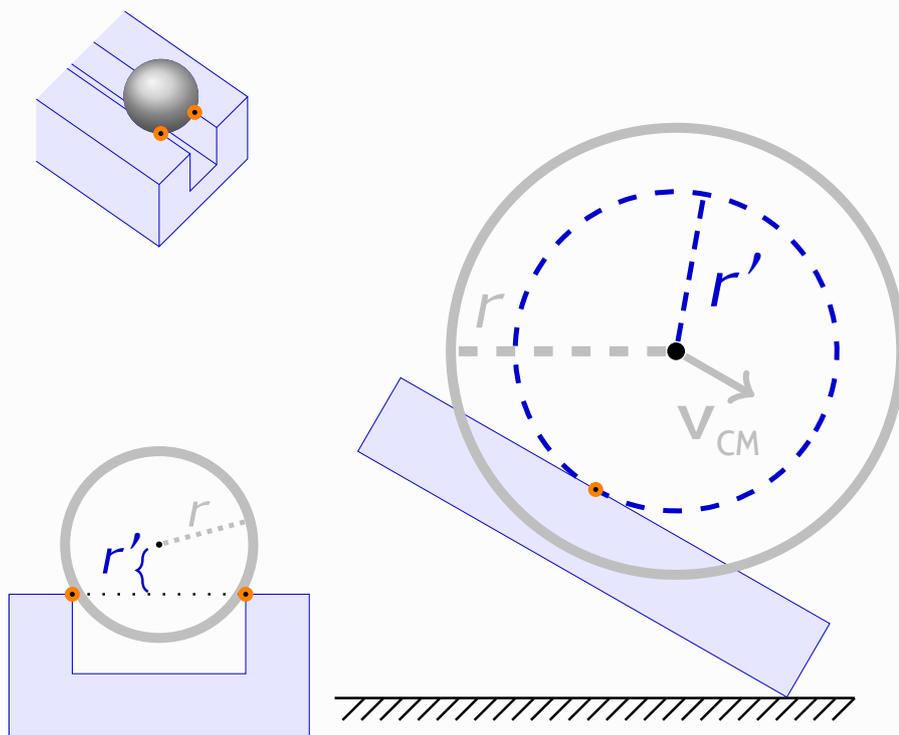


Figura 1.9: Velocidad angular  $\omega' = \frac{v_{CM}}{r'}$

$$\underline{a}_{CM} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{r'}\right)^2} g \operatorname{sen} \alpha \quad (1.12)$$

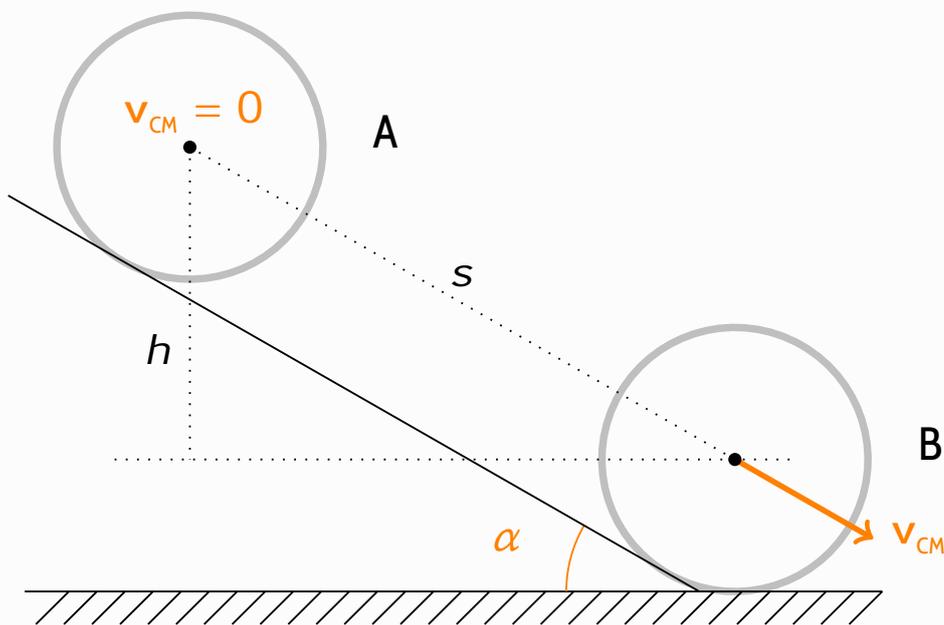
Expresión que nos permite calcular la *aceleración ideal o teórica*  $\underline{a}_{CM}$  del CM de la esfera rodando en esas condiciones. El coeficiente contenido entre paréntesis es fácil de calcular (ver Figura 1.8) y se reduce al familiar  $\frac{5}{7}$  en el caso de que  $r = r'$ .

En virtud de las relaciones 1.9 esta misma ecuación 1.12 servirá para calcular la *aceleración experimental*  $a_{CM}$  sin más que sustituir  $\operatorname{sen} \alpha$  por  $\operatorname{sen} \beta$ , puesto que la expresión encerrada en el paréntesis es un factor puramente geométrico.

## 1.6. Cálculo del porcentaje de energía disipado por rodadura

Demostraremos que ese porcentaje  $\chi$  puede calcularse mediante:

$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{a_{\text{CM}}}{\underline{a}_{\text{CM}}} \right)$$



**Figura 1.10:** Conversión de  $E_p$  en  $E_{cT}$  con una disipación de  $\chi$  %

En *ausencia de fricción* toda la energía potencial gravitatoria en A se conservaría en B como cinética, que podríamos expresar mediante:

$$\underline{E} = K \underline{v}_{\text{CM}}^2 \tag{1.13}$$

siendo

$$K = m \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right)$$

o bien

$$\underline{E} = 2 s K \underline{a}_{\text{CM}}$$

ya que

$$\underline{v}_{\text{CM}}^2 = 2\underline{a}_{\text{CM}}s$$

donde  $\underline{a}_{\text{CM}}$  representa la *aceleración ideal o teórica* del centro de masa.

Pero de forma análoga puede expresarse la energía  $E$  que *realmente* se conservará en B como cinética:

$$E = 2sK a_{\text{CM}}$$

siendo ahora  $a_{\text{CM}}$  la *aceleración real o experimental*.

El cociente  $E/\underline{E}$ , que se reduce a  $a_{\text{CM}}/\underline{a}_{\text{CM}}$  al simplificarlo, *representa el tanto por uno de la energía inicial conservada*.

El *tanto por uno de energía disipada* se obtendrá mediante:

$$\frac{\underline{E} - E}{\underline{E}} = \frac{\underline{a}_{\text{CM}} - a_{\text{CM}}}{\underline{a}_{\text{CM}}}$$

o sea,

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{a_{\text{CM}}}{\underline{a}_{\text{CM}}}$$

y el *tanto por ciento*  $\chi$  de energía disipada vendrá dado por:

$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{a_{\text{CM}}}{\underline{a}_{\text{CM}}} \right) \quad (1.14)$$

Resulta muy fácil demostrar que la ecuación

$$\chi = 100 \left( 1 - \left( \frac{v_{\text{CM}}}{\underline{v}_{\text{CM}}} \right)^2 \right) \quad (1.15)$$

nos permite el mismo cálculo que la 1.14 a partir de la relación entre velocidades (real y teórica) del centro de masa de la esfera.

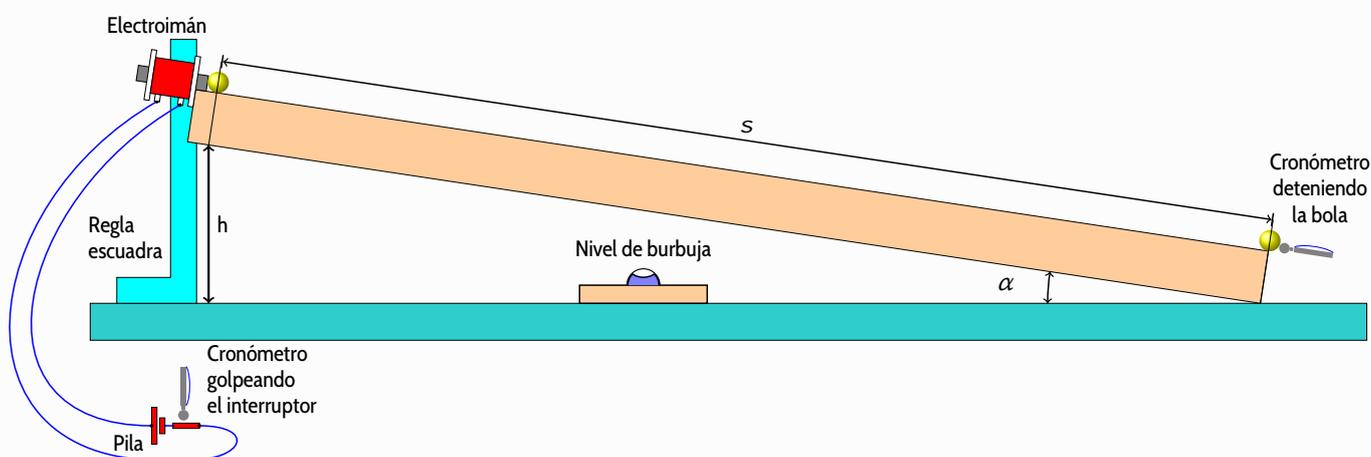
## Referencias

Wikipedia (2023). *Steiner's theorem*.

## Fricción de rodadura de una esfera. Experiencias

### 2.1. Montaje experimental

Cualquiera de las ecuaciones 1.5 o 1.8 sugiere un montaje de laboratorio que permitiría calcular valores de  $\lambda$  mediante la determinación empírica de valores de  $a_{CM}$  y  $h$ . Tal montaje aparece representado en la Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Montaje experimental para calcular  $\lambda$

Un nivel de burbuja, una regla-escuadra graduada y un cuadradillo de aluminio de los que se usan en la fabricación de ventanas, junto a nueces, pinzas y soportes —que no aparecen en la figura— permiten un montaje muy simple y fácil de transportar. El cuadradillo de aluminio colocado sobre la mesa del laboratorio, debe calzarse con monedas, por ejemplo, verificando su perfecta horizontalidad mediante el nivel de burbuja.

Mención aparte merece el procedimiento usado para medir los tiempos de rodadura, consistente en simultanear la puesta en marcha del cronómetro digital con la partida de la esfera en reposo (abrir el circuito alimentador del electroimán golpeando el interruptor con el resorte del cronómetro), y en que la detención de la marcha del cronómetro sea simultánea con la llegada de la esfera al final de su recorrido (esperarla con el resorte dispuesto de modo tal que éste sea golpeado por aquella). Hay que disponer el electroimán y el cronómetro de tal forma —sugerida en la figura— que el tiempo  $t$  cronometrado corresponda al recorrido  $s$  realizado por el centro de masa de la esfera.

## 2.2. Esfera metálica sobre plano de madera

En esta experiencia el plano inclinado consistió en un cuadradillo de pino de 105 cm de largo, 10 cm de ancho y 2 cm de espesor. A lo largo del espesor se tendieron estirados dos hilos de pesca paralelos —separados 5 mm entre sí— delimitando un camino por donde rodaba una esfera de hierro de 12,5 mm de radio manteniendo una pequeña zona de contacto con el plano, tal como ya hemos descrito en el capítulo anterior. Los hilos de pesca tienen la misión de corregir la posible desviación de la esfera de su trayectoria rectilínea con un coste mínimo de energía.

La longitud  $s$  recorrida para cada desnivel  $h$  fue siempre la misma (100 cm) y los tiempos de rodadura se midieron diez veces para cada  $h$  tomándose el valor medio como representativo. Sin embargo el procedimiento de cronometraje es tan fiel que bastaría con hacer una sola medida de tiempo para cada

desnivel, con lo que la experiencia puede realizarse en el aula durante la hora de clase sin aburrir al alumnado.

Por supuesto la *aceleración experimental*  $a_{\text{CM}}$  se calcula mediante

$$a_{\text{CM}} = \frac{2s}{t^2}$$

y el desnivel  $h$  se mide con la regla-escuadra, tal como se indica en la Figura 2.1. Los datos se recogen en la Tabla 2.1 y se representan en la Gráfica 2.1.

La recta azul de la Gráfica 2.1 muestra la *relación empírica* entre  $a_{\text{CM}}$  y  $h$  obtenida de este modo, mientras que la recta roja muestra la *relación teórica* que se obtendría entre la *aceleración teórica*  $\underline{a}_{\text{CM}}$  y  $h$  en ausencia de disipación de energía. La hemos calculado mediante la sencilla ecuación

$$\underline{a}_{\text{CM}} = 7h$$

que se obtiene a partir de

$$\underline{a}_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$$

recordando que

$$\sin \alpha = \frac{h}{100}$$

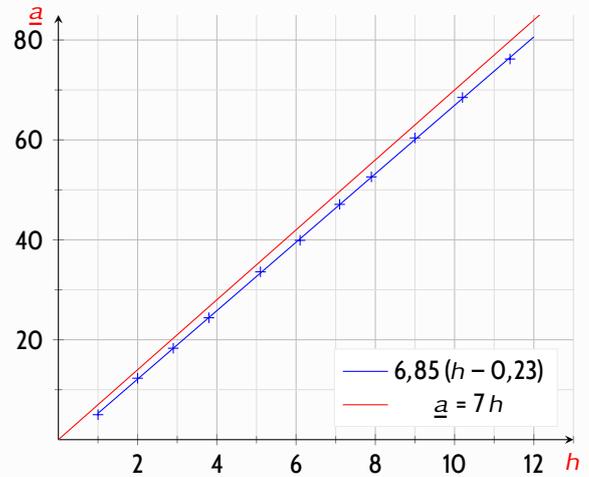
La ecuación empírica

$$a_{\text{CM}} = 6,85 (h - 0,23)$$

se ha obtenido relacionando los dos conjuntos de datos  $a_{\text{CM}}, h$  que aparecen en la Tabla 2.1 usando el método de regresión lineal. El índice de correlación resultó valer  $r = 0,999$ .

#	$\alpha^\circ$	$h$ cm	$t$ s	$a_{CM}$ cm/s <sup>2</sup>
1	0,57	1,0	6,32	5,0
2	1,14	2,0	4,04	12,3
3	1,66	2,9	3,31	18,3
4	2,18	3,8	2,86	24,4
5	2,92	5,1	2,44	33,6
6	3,50	6,1	2,24	39,9
7	4,07	7,1	2,06	47,1
8	4,53	7,9	1,95	52,6
9	5,16	9,0	1,82	60,4
10	5,85	10,2	1,71	68,5
11	6,54	11,4	1,62	76,2

Tabla 2.1



Gráfica 2.1: Resultados de  $a_{CM}$  y  $\underline{a}_{CM}$  de esfera metálica sobre madera

Si llevamos esta relación empírica a la ecuación teórica 1.8 y realizamos las operaciones pertinentes obtendremos:

$$\lambda = \sec \alpha (2,20 \times 10^{-4} h + 2,23 \times 10^{-3})$$

que nos ofrece la relación funcional  $\lambda = f(\alpha, h)$  en el caso particular de nuestra esfera metálica rodando sobre nuestro plano inclinado de madera de pino.

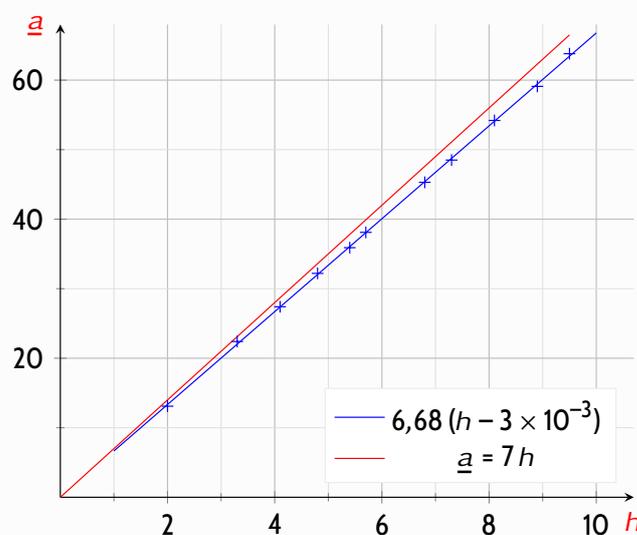
Si la esfera rueda sobre el plano dispuesto horizontalmente, de modo que  $\alpha = 0$ , se deduce de la relación anterior que el valor  $\lambda = 2,23 \times 10^{-3}$  radianes representará la *deformación del plano* o también el valor del *coeficiente de fricción de rodadura* en este caso.

### 2.3. Esfera metálica sobre plano metálico

En otra experiencia se hizo rodar la misma esfera sobre una regla de duraluminio haciéndola recorrer 100 cm siguiendo el mismo procedimiento descrito en la sección anterior. Los resultados obtenidos se recogen en la Tabla 2.2.

#	$\alpha^\circ$	$h$ cm	$t$ s	$a_{CM}$ cm/s <sup>2</sup>
1	1,14	2,0	3,90	13,1
2	1,89	3,3	2,99	22,4
3	2,35	4,1	2,70	27,4
4	2,75	4,8	2,49	32,2
5	3,09	5,4	2,36	35,9
6	3,27	5,7	2,29	38,1
7	3,90	6,8	2,10	45,3
8	4,18	7,3	2,03	48,5
9	4,64	8,1	1,92	54,2
10	5,10	8,9	1,84	59,1
11	5,45	9,5	1,77	63,8

Tabla 2.2



Gráfica 2.2: Resultados de  $a_{CM}$  y  $\underline{a}_{CM}$  de esfera metálica sobre duraluminio

La ecuación empírica

$$a_{CM} = 6,68 (h - 3 \times 10^{-3})$$

se ha obtenido también mediante el método de regresión lineal, presentando ambas series de datos un índice de correlación  $r = 0,999$ . Llevando esta relación empírica a la ecuación teórica 1.8 tendremos:

$$\lambda = \sec \alpha (4,6 \times 10^{-4} h + 2,8 \times 10^{-5})$$

Los datos se representan en la Gráfica 2.2.

En ambos casos —Gráficas 2.1 y 2.2— las líneas rojas pasan, como es lógico, por el punto de coordenadas  $(0, 0)$ , mientras que las azules cortan siempre al eje horizontal presentando una abscisa positiva en el origen.

## 2.4. Esfera metálica sobre surco de sección rectangular

En la experiencia que voy a presentar a continuación usé como plano inclinado la «regleta de Boyle». La bauticé así por tratarse de una gruesa regla metálica perteneciente a un montaje destinado a la verificación de las leyes de los gases (Boyle-Mariotte, Gay-Lussac etc.). Mide 110 cm de longitud, presenta una cara acanalada (11,0 mm de anchura de canal) y las demás caras lisas y planas, en una de las cuales consta una escala de 100 cm que permite apreciar hasta milímetros. En la Figura 2.2 se ilustra el doble uso que puede hacerse de esta «regleta de Boyle»: en A se muestra a la esfera rodando entre dos hilos de pesca (los circulitos verdes) de modo que la esfera rodante presente *una* zona de contacto con el plano. En B se muestra a la misma esfera rodando por el surco o canal presentando ahora *dos* zonas de contacto.

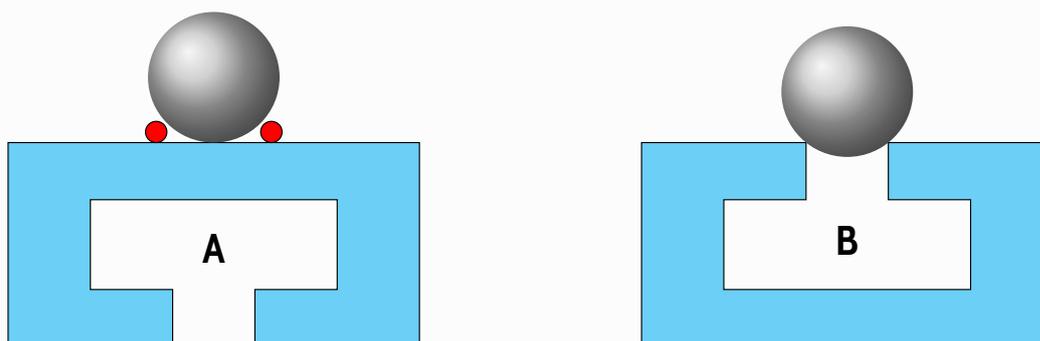


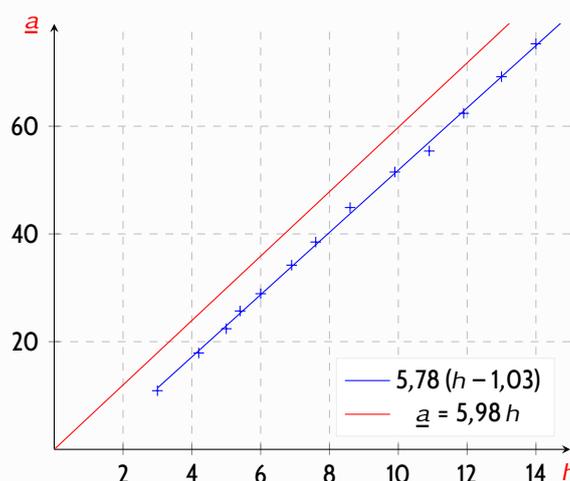
Figura 2.2: Regleta de Boyle

En la experiencia que voy a describir se usó la «regleta de Boyle» en la forma B. Más adelante presentaré un par de experiencias en las que se usó en ambas formas utilizando la misma esfera rodante.

En la que describo a continuación se usó una vieja esfera de hierro, de 23,84 g de masa y 0,9 cm de radio, que había perdido su niquelado superficial y se había oxidado por completo. Se eliminó parcialmente la capa de óxido frotándola con un paño. Se cronometró el tiempo invertido en recorrer ( $s = 100,0$  cm) sobre el surco rectangular de la regleta ( $A = 11,0$  mm) variando el desnivel  $h$  en trece ocasiones, tomando una sola medida de tiempo  $t$  por cada valor del desnivel. Se calculó la *aceleración experimental*  $a_{CM}$  para cada  $h$  y se procedió a la representación gráfica correspondiente de  $a_{CM}$  y  $\underline{a}_{CM}$  frente a  $h$ . (Gráfica 2.3).

#	$h$ cm	$\alpha^\circ$	$t$ s	$a_{CM}$ cm/s <sup>2</sup>
1	3,0	1,72	4,29	10,9
2	4,2	2,41	3,34	17,9
3	5,0	2,86	2,99	22,4
4	5,4	3,09	2,79	25,7
5	6,0	3,44	2,63	28,9
6	6,9	3,96	2,42	34,2
7	7,6	4,36	2,28	38,5
8	8,6	4,93	2,11	44,9
9	9,9	5,68	1,97	51,5
10	10,9	6,26	1,90	55,4
11	11,9	6,83	1,79	62,4
12	13,0	7,47	1,70	69,2
13	14,0	8,05	1,63	75,3

Tabla 2.3



Gráfica 2.3: Resultados de  $a_{CM}$  y  $\underline{a}_{CM}$  esfera metálica sobre surco metálico

La ecuación  $\underline{a}_{CM} = 5,98 h$  se ha obtenido usando la fórmula 1.12 del capítulo anterior, mientras que la  $a_{CM} = 5,78 (h - 1,03)$  se ha obtenido relacionando

los datos experimentales mediante el procedimiento de regresión lineal con un índice de correlación  $r = 0,999$ .

Usando la ecuación 1.8 del capítulo anterior encontramos que, en este caso:

$$\lambda = \sec \alpha (1,7 \times 10^{-3} h + 8,5 \times 10^{-3})$$

## 2.5. El porcentaje de energía disipado es función de $h$

Si aplicamos la ecuación 1.14 del capítulo anterior a la experiencia que acabamos de analizar tendremos que

$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{5,78 (h - 1,03)}{5,98 h} \right)$$

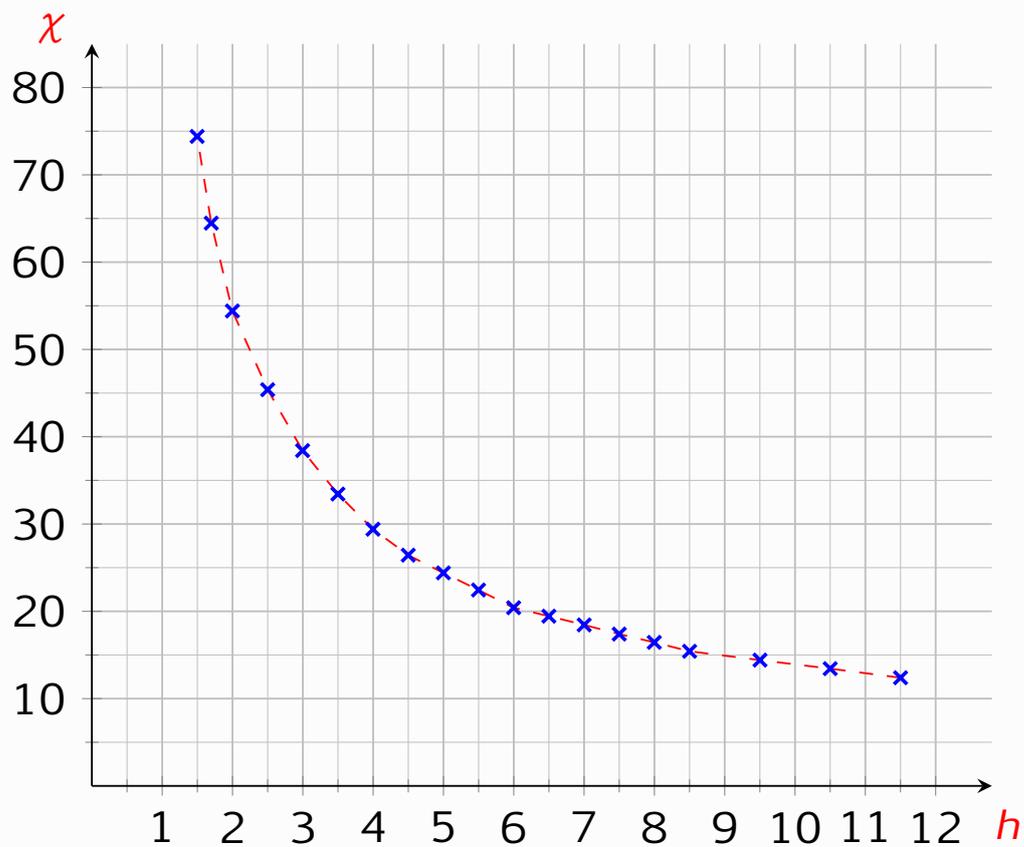
Realizando las pertinentes operaciones llegamos a

$$\chi = 3,34 + \frac{99,5}{h}$$

que para  $h \geq 1,03$ .

La ecuación que acabamos de obtener admite la representación que ofrecemos en la Gráfica 2.4.

Se trata de un interesante resultado al que acudiremos en capítulos posteriores. Es evidente que la energía total disponible aumenta a medida que lo hace



Gráfica 2.4:  $\chi$  frente a  $h$

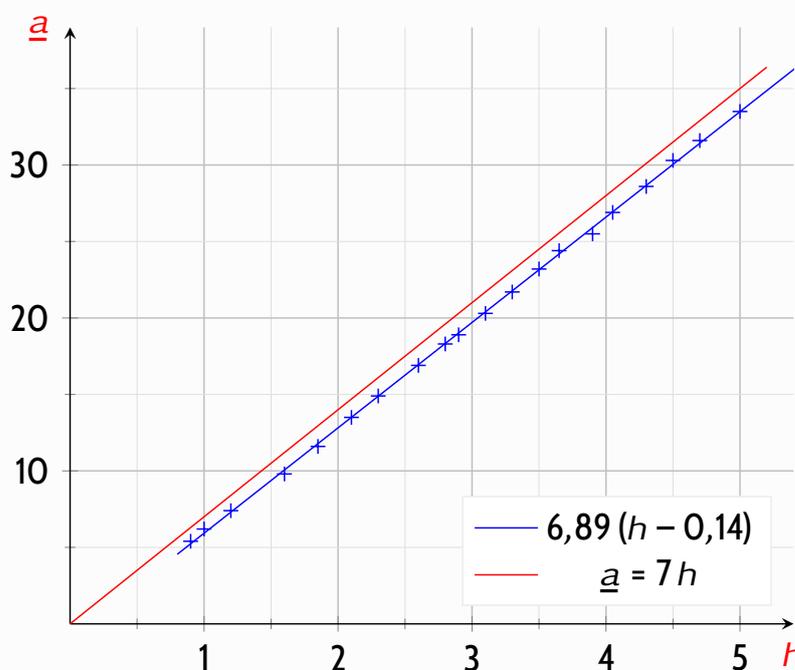
$h$ , pero también que el porcentaje de la que se disipa va disminuyendo en el mismo sentido.

## 2.6. Dos experiencias de enero 2001

El 22 de enero de 2001 usé el montaje descrito en la Figura 2.2 tomando la «regleta de Boyle» tal como aparece en la Figura 2.2A. Al día siguiente repetí la experiencia pero usando la «regleta de Boyle» tal como aparece en la Figura 2.2B. Hice rodar en ambos casos una esfera niquelada de 12 mm de radio a lo largo de los 100 cm disponibles midiendo diez veces el tiempo correspondiente a cada altura  $h$  para tomar el valor medio de  $t$  en el cálculo de las aceleraciones experimentales  $a_{CM}$ .

#	$h$ cm	$t$ s	$a_{CM}$ cm/s <sup>2</sup>
1	0,90	6,11	5,4
2	1,00	5,69	6,2
3	1,20	5,19	7,4
4	1,60	4,51	9,8
5	1,85	4,14	11,6
6	2,10	3,84	13,5
7	2,30	3,66	14,9
8	2,60	3,43	16,9
9	2,80	3,31	18,3
10	2,90	3,24	18,9
11	3,10	3,14	20,3
12	3,30	3,03	21,7
13	3,50	2,94	23,2
14	3,65	2,86	24,4
15	3,90	2,80	25,5
16	4,05	2,72	26,9
17	4,30	2,64	28,6
18	4,50	2,57	30,3
19	4,70	2,51	31,6
20	5,00	2,44	33,5

Tabla 2.5



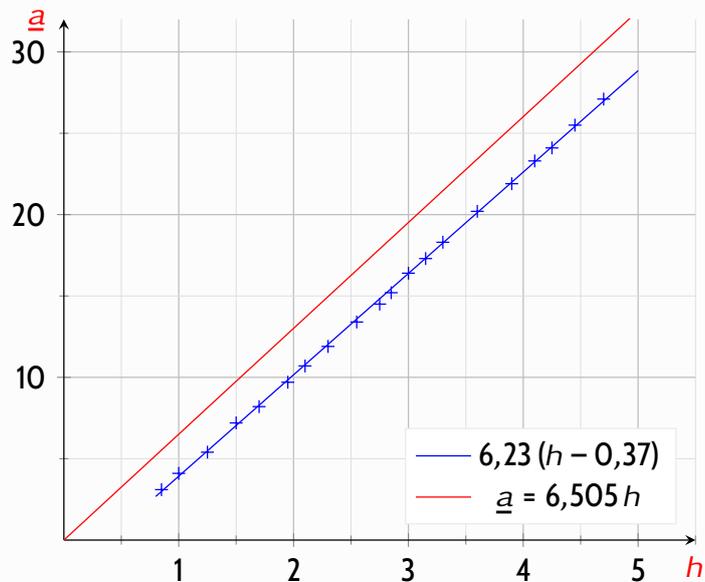
Gráfica 2.5: Rodadura con una zona de contacto

En las Tablas 2.5 y 2.6 se recogen los datos relativos a ambas experiencias.

Los de la Tabla 2.5 corresponden a 20 rodaduras en las que entre la esfera

#	$h$ cm	$t$ s	$a_{CM}$ cm/s <sup>2</sup>
1	0,85	8,01	3,1
2	1,00	6,95	4,1
3	1,25	6,08	5,4
4	1,50	5,26	7,2
5	1,70	4,94	8,2
6	1,95	4,53	9,7
7	2,10	4,32	10,7
8	2,30	4,10	11,9
9	2,55	3,86	13,4
10	2,75	3,71	14,5
11	2,85	3,62	15,2
12	3,00	3,49	16,4
13	3,15	3,40	17,3
14	3,30	3,30	18,3
15	3,60	3,15	20,2
16	3,90	3,02	21,9
17	4,10	2,93	23,3
18	4,25	2,88	24,1
19	4,45	2,80	25,5
20	4,70	2,71	27,1

Tabla 2.6



Gráfica 2.6: Rodadura con dos zonas de contacto

y el soporte existe «una zona de contacto» variando el ángulo de inclinación entre  $0,51^\circ$  y  $2,86^\circ$ . Aplicando el método de regresión lineal para establecer la relación entre  $a_{CM}$  y  $h$  se obtiene:

$$a_{CM} = 6,89 (h - 0,14) \quad \text{con un índice de correlación} \quad 0,999$$

Por el procedimiento ya conocido encontramos que

$$\lambda = \sec \alpha (1,38 \times 10^{-3} + 1,6 \times 10^{-4} h)$$

Los de la Tabla 2.6 corresponden a 20 rodaduras en las que entre la misma esfera y el mismo soporte existen «dos zonas de contacto» variando el ángulo

de inclinación entre  $0,48^\circ$  y  $2,69^\circ$ . Aplicando el método de regresión lineal obtenemos para la relación entre  $a_{\text{CM}}$  y  $h$ :

$$a_{\text{CM}} = 6,23 (h - 0,37)$$

con un índice de correlación  $0,999$ .

Por el mismo procedimiento encontramos que

$$\lambda = \sec \alpha (3,54 \times 10^{-3} + 4,2 \times 10^{-4}h)$$

Como para el intervalo de  $\alpha$  en que nos movemos  $\sec \alpha \rightarrow 1$  podemos prescindir de este refinamiento en las ecuaciones anteriores para comparar entre sí los coeficientes de  $h$  y los términos independientes, resultando:

$$\frac{3,54 \times 10^{-3}}{1,38 \times 10^{-3}} = 2,56 \approx 2,6$$

y

$$\frac{4,2 \times 10^{-4}}{1,6 \times 10^{-4}} = 2,62 \approx 2,6$$

En estas dos experiencias los materiales en contacto *son los mismos*, consistiendo la única diferencia que en A la esfera rueda sobre el «plano liso» y en B sobre «un carril o surco». Los cálculos que acabamos de hacer revelan que, de forma muy aproximada:

$$\lambda_B = 2,6 \lambda_A$$

La experiencia estaba diseñada precisamente para evidenciar esa diferencia entre ambos coeficientes de fricción de rodadura. Se esperaba que  $\lambda_B$  fuera

al menos *el doble* de  $\lambda_A$ . Es de suponer que la anchura del carril, en relación al diámetro de la esfera rodante, también influirá lo suyo.

Las aceleraciones *ideales en ausencia de fricción*  $\underline{a}_{\text{CM}}$  que corresponderían en ambos casos serían

$$\underline{a}_{\text{CM}} = 7,000 h \quad (\text{sobre el plano liso})$$

y

$$\underline{a}_{\text{CM}} = 6,505 h \quad (\text{sobre el carril})$$

Usando la ecuación 1.14 del capítulo anterior podemos comprobar que los porcentajes de disipación de energía son, por término medio, 2,6 veces mayores en el caso de la esfera rodando sobre el carril.

# La muy discutida experiencia del plano inclinado

---

## 3.1. La experiencia de Galileo

Él mismo la describe de este modo (Galilei, 1981):

«En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso, colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce muy dura, bien redonda y pulida.

»Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta una altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho) la bola por dicho canal, tomando nota como en seguida he de decir del tiempo que tardaba en recorrerlo todo.

»Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos consta-

tar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esa misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del modo más exacto, precisamente la mitad del otro. Haciendo después el experimento con otras partes, bien el tiempo de la longitud completa con el tiempo de la mitad, con el de dos tercios, con el de  $\frac{3}{4}$  o con cualquier otra fracción, llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban relacionados entre sí como los cuadrados de sus tiempos. Esto se podía aplicar a todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a través del cual se hacía descender la bola. Observamos también que los tiempos de las caídas por diversas inclinaciones del plano guardan entre sí de modo riguroso una proporción que es, como veremos después, la que les asignó y demostró el autor.

»En lo que a la medida del tiempo se refiere, empleamos una vasija grande llena de agua, sostenida a una buena altura y que, a través de un pequeño canal muy fino, iba vertiendo un hilillo de agua, siendo recogido en un vaso pequeño durante todo el tiempo en que la bola descendía, bien por todo el canal o solo por alguna de sus partes. Se iban pesando después en una balanza muy precisa aquellas partículas de agua recogidas del modo descrito, con lo que las diferencias y proporciones de los pesos nos iban dando las diferencias y proporciones de los tiempos. Ocurría esto con tal exactitud que, como he indicado, tales operaciones, repetidas muchísimas veces, jamás diferían de una manera sensible.»

Entre 1937 y 1961 estuvo de moda dudar de la eficacia y verosimilitud de la experiencia contenida en este somero relato. El prestigioso historiador de la ciencia, Koyré, se expresa así al respecto (Koiré, 1977c):

«Une boule en bronze roulant dans une rainure «lisse et polie» taillée dans du bois! Un récipient d'eau avec un petit trou par lequel l'eau passe et que l'on recueille dans un petit verre pour la peser ensuite et mesurer ainsi les temps de descente (la clepsydre romaine, celle de Ctésibius, était un bien meilleur instrument): quelle accumulation de sources d'erreur et d'inexactitude!

Il est évident que les expériences de Galilée sont complètement dénuées de valeur: la perfection même de leurs résultats est une preuve rigoureuse de leur inexactitude. Les historiens modernes, accoutumés à voir les expériences de Galilée faites à l'intention des étudiants dans nos laboratoires scolaires, acceptent. cet exposé étonnent comme vérité d'évangile et louent Galilée d'avoir établi ainsi non seulement la validité empirique de la loi de chute, mais cette dernière aussi. (Cf., parmi beaucoup d'autres, N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, 9, première partie, liv. IV, chap. I-III, Note historique, p. 150 («Actualités scientifiques et Industrielles» n° 1074, Paris, Hermann, 1949). Cf. Appendice 1.

Il n'est pas étonnant que Galilée, qui est sans doute pleinement conscient de tout cela, évite autant que possible (par exemple dans les *Discours*) de donner une valeur concrète pour l'accélération; et que, chaque fois qu'il en donne une (comme dans le *Dialogue*), celle-ci soit radicalement fausse. Tellement fausse que le P. Mersenne a été incapable de dissimuler sa surprise:

«Or il suppose, écrit-il à Peiresc 2, que le boulet tombe cent brasses dans cinq secondes, d'où il s'ensuit qu'il ne tombera que quatre brasses dans une seconde quoique je sois assuré qu'il tombe de plus haut.»

En effet, quatre coudées —pas même sept pieds 8— sont moins que la moitié de la vraie valeur; et environ la moitié de la valeur que le P. Mersenne établira lui-même. Et pourtant, le fait que les chiffres donnés par Galilée soient grossièrement inexacts n'a rien de surprenant; tout au contraire: il serait surprenant, et même miraculeux, qu'ils ne le fussent pas. Ce qui est surprenant, c'est le fait que Mersenne, dont les

moyens d'expérimentation n'étaient pas beaucoup plus riches que ceux de Galilée, ait pu obtenir des résultats tellement meilleurs»

«Una bola de bronce que rueda en una ranura «lisa y pulida» cortada en madera. Un recipiente de agua con un pequeño orificio por el que pasa el agua y que se recoge en un vasito para poder pesarla y medir los tiempos de descenso (la clepsidra romana, la de Ctesibius, era un instrumento mucho mejor): ¡vaya acumulación de fuentes de error e inexactitud! Es evidente que los experimentos de Galileo carecen por completo de valor: la perfección misma de sus resultados es una prueba rigurosa de su inexactitud.

Los historiadores modernos, acostumbrados a ver los experimentos de Galileo realizados en beneficio de los estudiantes en los laboratorios de nuestras escuelas, aceptan esta asombrosa afirmación como una verdad evangélica y alaban a Galileo por haber establecido así no sólo la validez empírica de la ley de la caída, sino también esta. (Cf, entre muchos otros, N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, 9, première partie, liv. IV, chap. I-III, Note historique, p. 150 («Actualités scientifiques et Industrielles» no. 1074, París, Hermann, 1949). Véase el Apéndice 1.

No es de extrañar que Galileo, que sin duda era plenamente consciente de todo esto, evitara en la medida de lo posible (por ejemplo en los Discursos) dar un valor concreto para la aceleración; y que, cuando lo daba (como en el Diálogo), fuera radicalmente falso. Tan falso que P. Mersenne no pudo disimular su sorpresa. Ahora supone —escribió a Peiresc 2— que la bala de cañón cae cien brazas en cinco segundos, de lo que se deduce que sólo caerá cuatro brazas en un segundo, aunque estoy seguro de que cae desde una altura mayor.

En efecto, cuatro codos —ni siquiera siete pies 8— son menos de la mitad del valor verdadero; y aproximadamente la mitad del valor que el propio P. Mersenne establecería. Y, sin embargo, el hecho de que las cifras dadas por Galileo sean groseramente inexactas no es sorprendente; al contrario, sería sorprendente, incluso milagroso, que no lo fueran. Lo que es sorprendente es el hecho de que Mersenne, cuyos medios de experimentación no eran mucho más ricos que los de Galileo, haya podido obtener resultados tanto mejores que los obtenidos por Galileo.»

En otro de sus artículos, en relación con la historia de la torre de Pisa (Koiré, 1977a) Koyré escribe:

«Il nous faudrait admettre que Galilée, qui ne s'est pas privé de nous conter et de nous présenter comme faites effectivement des expériences qu'il s'était borné à imaginer, nous aurait soigneusement caché une expérience glorieuse effectivement réalisée. C'est tellement improbable que l'on ne peut l'admettre sérieusement. La seule explication possible de ce silence est la suivante: si Galilée ne parle jamais de l'expérience de Pise, c'est qu'il ne l'a pas faite. Très heureusement pour lui, d'ailleurs. Car, s'il l'avait faite, en formulant le défi que, pour lui, formulent ses historiens, elle eût tourné à sa confusion.»

«Tendríamos que admitir que Galileo, que no dudó en contarnos y presentarnos como realmente realizados experimentos que él se había limitado a imaginar, nos hubiera ocultado cuidadosamente un glorioso experimento que realmente se había llevado a cabo. Esto es tan improbable que no puede tomarse en serio. La única explicación posible de este silencio es la siguiente: si Galileo nunca men-

ciona el experimento de Pisa, es porque no lo hizo. Muy afortunadamente para él, de hecho. Porque, si lo hubiera hecho, al formular el desafío que sus historiadores le formularon, habría resultado confuso.»

¿Acaso Koyré incluye el experimento del plano inclinado entre los «*imaginados*» que Galileo nos presenta como «*realizados*»? Personalmente considero ofensivo este comentario. ¿Qué necesidad tenía Galileo de mentir sobre este asunto?

Sigamos con Koyré (Koyré, 1977b):

«Mais, en fait, nous ne pouvons pas penser au mouvement dans le sens de l'effort et de l'impetus ; nous pouvons seulement nous l'imaginer. Nous devons donc choisir entre penser et imaginer. Penser avec Galilée ou imaginer avec le sens commun. Car c'est la pensée, la pensée pure et sans mélange, et non l'expérience et la perception des sens, qui est à la base de la «nouvelle science» de Galileo Galilée.

Galilée le dit très clairement. Ainsi, en discutant le fameux exemple de la balle tombant du haut du mât d'un navire en mouvement, Galilée explique longuement le principe de la relativité physique du mouvement, la différence entre le mouvement du corps par rapport à la Terre et son mouvement par rapport au navire; puis, sans faire aucune mention de l'expérience, il conclut que le mouvement de la balle par rapport au navire ne change pas avec le mouvement de ce dernier. De plus, quand son adversaire aristotélicien, imbu d'esprit empiriste, lui pose la question: «Avez-vous fait une expérience?» Galilée déclare avec fierté: «Non, et je n'ai pas besoin de la faire, et je peux affirmer sans aucune expérience qu'il en est ainsi, car il ne peut en être autrement»»

«Pero, de hecho, no podemos pensar en el movimiento en

el sentido de esfuerzo e impulso; sólo podemos imaginarlo. Así que tenemos que elegir entre pensar e imaginar. Pensar con Galileo o imaginar con sentido común. Porque es el pensamiento, el pensamiento puro y sin adulterar, y no la experiencia y la percepción de los sentidos, lo que constituye la base de la «nueva ciencia» de Galileo Galilei.

»Galileo lo deja muy claro. Así, al discutir el famoso ejemplo de la bola que cae desde lo alto del mástil de un barco en movimiento, Galileo explica extensamente el principio de la relatividad física del movimiento, la diferencia entre el movimiento del cuerpo con respecto a la Tierra y su movimiento con respecto al barco; luego, sin hacer mención alguna de la experiencia, concluye que el movimiento de la bola con respecto al barco no cambia con el movimiento de este último. Es más, cuando su oponente aristotélico de mentalidad empirista le pregunta: «¿Has hecho algún experimento?». Galileo declara con orgullo: «No, y no necesito hacerlo, y puedo afirmar sin ningún experimento que es así, porque no puede ser de otro modo.»»

La actitud de Koyré en cuanto a la credibilidad que puede concedérsele a Galileo es, por lo menos, curiosa: Le concede crédito en el caso que acabamos de citar, en el que Galileo se nos perfila como un platónico puro, y se lo niega cuando el mismo Galileo relata y pondera la exactitud y reiteración de los resultados obtenidos con el experimento del plano inclinado, en el que nos presenta su veta de experimentador.

Según I. Bernard Cohen (Cohen, 1989), otro eminente historiador de la ciencia:

«Estas dudas relativas al plano inclinado no se expresaron por primera vez en el siglo XX. En la misma época de Galileo, el padre Marin Mersenne escribió en la “*Harmonie Universelle*” (París, 1636): “Dudo que Galileo realizara experimentos con el plano inclinado, pues nunca habla de ellos y la proporción dada contradice a menudo a los datos experimentales.”

»Nuestro punto de vista sobre la cuestión ha sufrido hoy un giro radical. En 1961 Thomas B. Settle ideó y llevó a cabo un experimento que replicaba estrechamente el descrito por Galileo en las “*Dos nuevas ciencias*”. En su informe (“*An Experiment in the History of Science*”) Settle mostró que la exactitud de los resultados, precisamente como dijo Galileo, se hallaba holgadamente dentro de un décimo del latido del pulso. Otros confirmaron los resultados de Settle.»

**Sin embargo en «Las mentiras de la ciencia» (1993) Federico di Trocchio (Di Trocchio, 1995; Trocchio, 1993) escribe:**

«Alexandre Koyré, uno dei più grandi storici della scienza, ha sostenuto la prima ipotesi, vale a dire che Galilei non ha mai fatto l’esperimento del piano inclinato. La cosa sembrò a molti incredibile sicché nel 1961 Thomas S. Settle decise di provare a farlo nelle stesse identiche condizioni indicate da Galileo. Egli constatò che Galileo avrebbe potuto ottenere risultati empirici «soddisfacenti», cioè vicini anche se non proprio identici a quelli da lui riferiti, nel modo da lui sostenuto. Le cose sembravano così tornare finalmente a posto e Stillman Drake, il più noto studioso americano di Galileo, poté affermare con soddisfazione che «le ben note asserzioni di Galileo circa i suoi esperimenti su piani inclinati erano state completamente convalidate».

Purtroppo nel 1973 Ronald Naylor, nel ripetere ancora una volta l'esperimento di Galileo, individuò delle discrepanze tra ciò che aveva fatto Settle e la descrizione di Galileo. Settle aveva innanzitutto fatto rotolare una palla non già dentro la scanalatura del piano inclinato ma sospesa sui bordi di essa. In questo modo riduceva notevolmente l'effetto della rotazione, che priva la palla di gran parte della sua accelerazione, fornendo così dati più strettamente concordanti con la legge. Ma Galileo non aveva fatto l'esperimento in questo modo. Il suo piano inclinato aveva una scanalatura abbastanza ampia da contenere la palla. Alcuni studiosi hanno supposto che il segreto del successo dell'esperimento galileiano stesse proprio nell'uso della pergamena che, essendo liscia, riduceva al minimo l'attrito. Secondo Naylor in realtà l'effetto fu contrario. Dal momento che la pergamena, essendo fatta con pelle di vitello o di pecora, non può superare la lunghezza di tre piedi, per quanto accuratamente si possano congiungere le estremità queste non possono essere abbastanza lisce da assicurare un passaggio senza ostacoli.

Insomma l'accelerazione della palla sarebbe stata periodicamente ridotta dalla necessità di superare i punti di giuntura tra i vari pezzi di pergamena e, se Galileo avesse eseguito veramente l'esperimento, si sarebbe subito accorto che l'uso della pergamena non solo non era di alcun aiuto ma era controproducente.»

«Alexandre Koyré, uno de los más grandes historiadores de la ciencia, ha sostenido la primera hipótesis, vale decir que Galileo no ha hecho jamás el experimento del plano inclinado. Para muchos esto resultó tan increíble que en 1961 Thomas B. Settle decidió llevarlo a cabo en las mismas condiciones que indica Galileo. Constató así que Galileo habría podido obtener de la manera que sostenía resultados empíricos “satisfactorios”, próximos, aunque no idénticos a los que él transcribió. Las cosas parecían volver a su sitio y Stillman Drake, el más famoso estudioso norteamericano de Galileo, pudo afirmar con satisfacción que “las conocidas aseveraciones de Galileo acerca de sus experimentos de planos inclinados se habían convalidado completamente”.

»Desgraciadamente, en 1973, Ronald Naylor, al repetir una vez más el experimento de Galileo, observó algunas discrepancias entre aquello que Settle había realizado y la descripción de Galileo. Settle, ante todo, no había hecho rodar una esfera dentro del surco del plano inclinado, sino suspendida sobre los bordes del mismo. De este modo reducía notablemente el efecto de rotación, que le quita a la esfera gran parte de su aceleración, y ofrecía datos que se correspondían mucho más con la ley. Sin embargo Galileo no había llevado a cabo el experimento de esta forma. Su plano inclinado poseía un surco lo suficientemente amplio como para contener la esfera. Algunos estudiosos han supuesto que el secreto del éxito del experimento de Galileo radicaba precisamente en el uso del pergamino, que por ser liso reducía al mínimo la resistencia pasiva. Naylor opina, en cambio, que se trata de un efecto contrario. Dado que el pergamino, hecho de piel de ternero o de oveja, no supera los tres pies de ancho, aún en el caso de que los extremos pudieran unirse no lograrían ser lo suficientemente lisos como para asegurar un recorrido sin obstáculos. Por lo tanto la aceleración de la esfera se habría reducido periódicamente dada la necesidad de superar las zonas de unión entre los diferentes trozos de pergamino. Si Galileo realmente hubiera llevado a cabo el experimento se habría dado cuenta de inmediato de que el uso del pergamino no solo no constituía una ayuda, sino que además resultaba contraproducente.»

## 3.2. La experiencia de Thomas B. Settle

### Redacción original de 2009

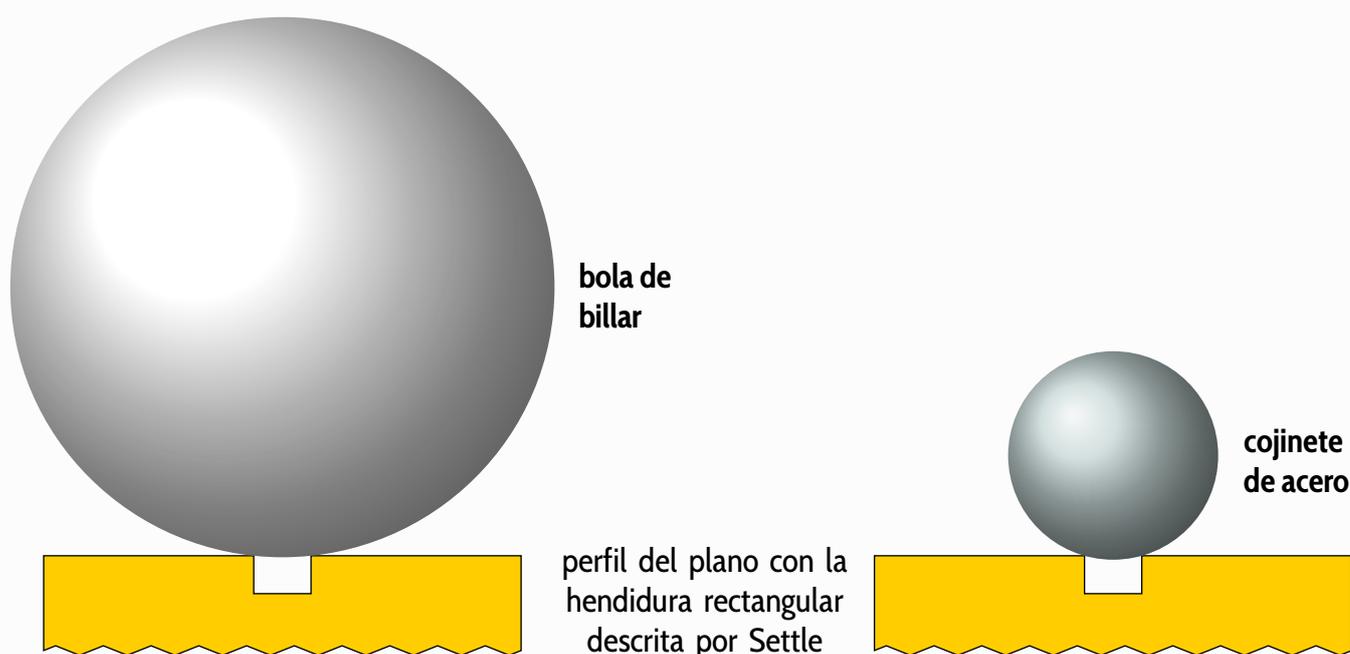
El 17 de enero de 2008, a través de Internet y en la página de la «Fondazione Galileo Galilei», encontré el texto del artículo de Thomas B. Settle «An Experiment in The History of Science» (1961) (Settle, 1961) al que aludo más arriba. Con mis precarios conocimientos de inglés y la ayuda inestimable de mi hijo Juan Manuel me dispuse a traducirlo. El trabajo de T. B. Settle resulta impresionante. Como el autor hace uso del sistema anglosajón para expresar longitudes me dediqué a pasar sus datos al sistema métrico decimal y a especular un poco en torno a ellos.

El plano usado por Settle medía

18 ft (5,48 m) de largo,  
6" (15,0 cm) de ancho y  
2" (5,0 cm) de espesor,

y lo dotó de una inclinación de  $3^{\circ}44'$ . Nos cuenta que practicó un surco de sección rectangular de  $\frac{1}{4}$ " (6 mm) de anchura a lo largo del borde del plano. Usó una bola de billar standard de  $2\frac{1}{4}$ " (5,7 cm) de diámetro y una bola de cojinete de acero de  $\frac{7}{8}$ " (2,2 cm) de diámetro para hacerlas rodar.

Para medir intervalos de tiempo usó una «*maceta ordinaria*» como contenedor de agua con un tubo de cristal roscado en el agujero inferior para que el agua fluyera al interior de una probeta graduada en mililitros colocada debajo. El tubo tenía una longitud de 4,5" (11,5 cm) y un diámetro interior aproximado de 0,18" (0,46 cm). El extremo superior del tubo se podía tapar y destapar con un dedo —para iniciar o detener el flujo de agua— teniendo la palma de



**Figura 3.1:** Bolas del experimento de Settle

la mano apoyada sobre el borde de la maceta. Mediante una serie de operaciones, minuciosamente descritas por el autor, logró que fluyera a través del tubo un caudal de agua uniforme que evaluó en  $19,5 \text{ ml} / \text{s}$  durante los breves intervalos de tiempo que duran las rodaduras. Como  $1,95 \text{ ml} \approx 2,0 \text{ ml}$  equivalen a  $0,1 \text{ s}$  puede decirse que con este dispositivo se puede aquilatar hasta «la décima parte de una pulsación», como presumió Galileo en la descripción que hizo de su propio experimento.

En cuanto a las medidas de longitudes y desniveles —operaciones para las que Galileo no describe el material que utilizó— Settle recurre a reglas rígidas, niveles de burbuja y vasos comunicantes que muy bien pudo usar también Galileo, a quien debemos concederle, como mínimo, un ingenio y una iniciativa similares a los desplegados por Settle trescientos cincuenta años después.

En el artículo que estoy comentando aparece una tabla en la que Settle anota los espacios recorridos (en pies,  $\text{ft}$ ) y los tiempos invertidos (en mililitros,  $\text{ml}$ )

por su *bola de billar* rodando sobre su plano inclinado que forma un ángulo de  $3^{\circ}44'$  con la horizontal. La columna tercera indica —en el resumen en la Tabla 3.1 que hago de la suya original— el número de *tomas* de tiempo realizadas para cada distancia. Settle parece elegir la *moda* como tiempo representativo, en las cuatro primeras experiencias, y la *media aritmética* en las tres últimas. En la experiencia n° (2) las siete tomas realizadas coinciden en señalar que se invierten 84 m1 en recorrer los 13 ft estipulados. Por ello Settle elige ese tiempo como *base* para juzgar la bondad de los demás tiempos experimentales.

#	Distancias ft	Tomas	Tiempos m1
1	15	(10)	90
2	13	(7)	84
3	10	(6)	72
4	7	(7)	62
5	5	(12)	52
6	3	(7)	40
7	1	(15)	23,5

Tabla 3.1: Tabla de Settle

En la Tabla 3.2 reproduzco estos mismos datos expresando las distancias en centímetros (cm) y los tiempos en segundos (s). Añado una columna donde calculo la aceleración correspondiente a cada descenso. Dentro de los límites de error impuestos por el método operativo puede asegurarse que la *aceleración* se mantiene constante confirmándose la ley buscada  $s \propto t^2$ . Pero no es ese el objetivo que persigo: *lo que yo busco es calcular el porcentaje de energía que se ha disipado, suponiendo que esa disipación sea la responsable de los valores experimentales más fiables obtenidos para la aceleración.*

Para calcular la aceleración  $\underline{a}_{\text{cm}}$  que correspondería a una *rodadura ideal* exen-

#	Distancias cm	Tiempos s	Aceleración $\text{cm/s}^2$
1	457,0	4,6	43,2
2	396,1	4,3	42,8
3	304,7	3,7	44,5
4	213,3	3,2	41,6
5	152,4	2,7	41,8
6	91,4	2,0	45,7
7	30,5	1,2	42,3

**Tabla 3.2:** Tabla de Settle con la aceleración

*ta de fricción*—teniendo en cuenta que la bola rueda por un carril manteniendo *dos zonas de contacto* con el plano— debemos aplicar la ecuación 1.12 obteniéndose:

$$\underline{a}_{\text{CM}} = 697,5 \text{ sen } 3^{\circ}44' = 45,4 \text{ cm/s}^2$$

Este resultado teórico invalida por absurdo el valor obtenido en la experiencia número (6) de la Tabla 3.2, pero no invalida los demás que son perfectamente admisibles. El valor experimental de la aceleración más digno de confianza pudiera ser el obtenido en la experiencia n° (1), *ya que los valores experimentales de partida son los afectados de un menor error relativo*. Vamos a calcular en este caso el porcentaje de energía disipado, usando la ecuación 1.14

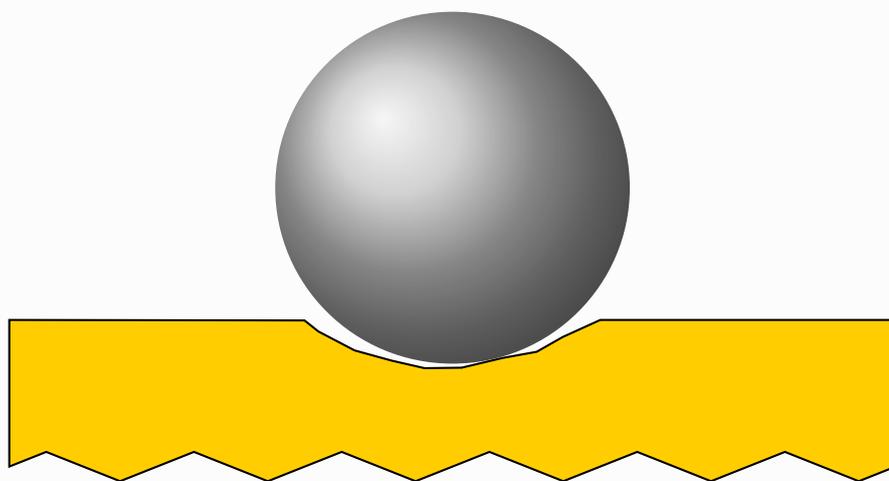
$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{43,2}{45,4} \right) = 4,8 \%$$

(Si tomáramos la experiencia n° (2), elegida como *base* por Settle, resultaría ser del 5,7 %).

Por supuesto es *imposible* controlar *todas* las variables que pueden influir en la rodadura, de modo que —aun procurando que para *dos* de ellas la pendiente y el recorrido sean los mismos— siempre existirán *otras* variables —pequeñas

diferencias en la posición inicial de la bola, irregularidades en su forma y en su recorrido sobre el plano— que las harán ligeramente *distintas*. Por lo tanto las *fuerzas de fricción* actuarán de manera también ligeramente distinta en dos rodaduras que se pretendan idénticas.

Las diferencias entre la experiencia de Galileo y la de Settle consisten en que el plano usado por aquél era algo más largo; en que el ángulo que yo le atribuyo en el análisis que haré mas adelante del folio 81<sup>r</sup>, es algo menor; y que —en mi opinión— *la hendidura o canal por la que descendería la bola en el plano de Galileo no fue de sección rectangular sino un arco de circunferencia*, crítica en la que coincido con la expresada por Naylor.



**Figura 3.2:** Idealización del perfil del plano con el canal semicircular. Galileo cuenta que «este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso, colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo». Esta observación me hace pensar que ese canal «de poco más de un dedo de anchura» debió presentar un perfil curvado obtenido con una gubia de corte curvo. Este perfil intentaría facilitar, en lo posible, una sola zona de contacto entre bola y plano.

Como Galileo no nos informa de las dimensiones de la bola que usó —limitándose a decir que era «*de bronce muy dura, bien redonda y pulida*»— me he

permitido representarla en la Figura 3.2 similar al cojinete de acero usado por Settle. Otra diferencia consistió en que Galileo *pesó* el agua recogida en cada operación en vez de *medir su volumen*. Pero el propio Settle nos informa de que ya en el siglo XVI existían balanzas capaces de aquilatar pesadas hasta 0,2 g, con lo que reconoce que las medidas de tiempo practicadas por Galileo pudieron ser mucho mejores que las suyas propias.

La experiencia realizada por Settle demuestra que la ley  $s \propto t^2$  pudo ser sometida a comprobación empírica eficiente con los medios descritos por Galileo en el famoso pasaje de los «Discorsi». Pero Galileo va aún más lejos cuando afirma que:

*«Esto se podía aplicar a todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a través del cual se hacía descender la bola.»*

Si por *inclinación del plano* entendemos el seno del ángulo que forma con la horizontal es muy fácil hoy proponer una experiencia para verificar si la ley  $s \propto t^2$  es aplicable «a todas las inclinaciones del plano», como aseguró Galileo. Veamos,

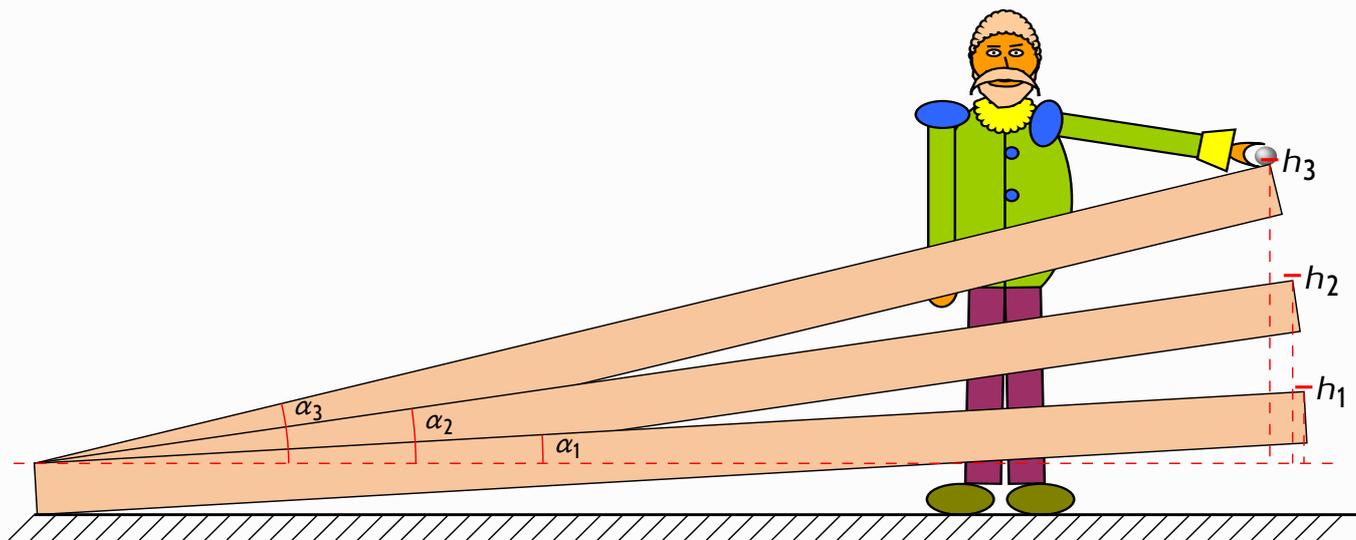
$$s \propto (\text{sen } \alpha) t^2$$

$$s \propto \left(\frac{h}{L}\right) t^2$$

Si por  $L$  entendemos la longitud del plano, *que es una constante*, podemos simplificar la expresión anterior:

$$s \propto h t^2$$

¿Pudo Galileo comprobar experimentalmente la afirmación anterior?



**Figura 3.3:** ¿Pudo Galileo comprobar esto experimentalmente?

Hay una consecuencia *empíricamente verificable* que se deduce de la ecuación anterior:

$$\frac{t_a}{t_b} = \sqrt{\frac{s_a h_b}{s_b h_a}} \quad (3.1)$$

donde  $t_a$  y  $t_b$  representan los tiempos invertidos por la bola en recorrer distancias *cualesquiera*  $s_a$  y  $s_b$  sobre planos de *inclinaciones* distintas  $h_a$  y  $h_b$ .

Settle sometió a verificación empírica esta consecuencia. Aclaremos antes que para determinar el seno del ángulo de inclinación Settle elige una longitud fija ( $L = 8 \text{ ft} = 96$ ) y mide las alturas  $h$ , que corresponden a cada ángulo, también en pulgadas, de modo que

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{96}$$

Reproduzco a continuación (Tabla 3.3) la segunda y última tabla publicada por Settle en su artículo, en la que se recogen los datos obtenidos por él *con su bola de billar* para probar experimentalmente si la aseveración de Galileo

es correcta.

#	$s$ ft	$h$ "	$t$ ml
1	12	2,92	117
2	13	6,25	84
3	9	11,47	53

**Tabla 3.3:** Tabla de Settle con bola de billar

Los datos de la experiencia n° (2) están extraídos de la Tabla 3.1. Quien tenga curiosidad puede comprobar que los datos contenidos en la Tabla 3.3 satisfacen la condición expresada en la ecuación 3.1.

Me parece obvio que si Settle realizó con éxito estas comprobaciones empíricas con medios tan precarios también *pudo* hacerlas Galileo trescientos cincuenta años antes.

Traduzco del artículo de Settle un párrafo que quiero comentar con cierto por-menor:

«The results of the tests made with the steel ball were just as good, but I found that they were not comparable with those made with the billiard ball. For instance, on the shallowest slope, the billiard ball made the 16-foot mark in 136 milliliters but the steel ball took 4 milliliters longer. This seemed odd; theoretically, neither the mass nor the radius should affect the acceleration. By the correct formula we can calculate that both balls should have traversed the distance in 132 milliliters. Actually, because the balls run on the two edges of the groove, their running circumferences are slightly less than their real ones, so they require more revolutions, and more time, to cover the same distance. A rough calculation shows that this fact probably accounts for most of the discrepancies. Had Galileo noticed similar differences between results for balls of different size, he probably would have ascribed them to frictional retardation. In

any case, it appears that they would not have controverted his proportionalities.»

«Los resultados de las pruebas hechas con la bola de acero fueron igual de satisfactorios, pero observé que no son comparables con las hechas con la bola de billar. Por ejemplo, en la pendiente menor la bola de billar recorre 16 ft en 136 m1, mientras que la de acero invirtió 4 m1 más. Esto parece extraño; en teoría, ni la masa ni el radio deben afectar a la aceleración. Usando la fórmula correcta podemos calcular que las dos bolas deberían haber recorrido la distancia en 132 m1. En realidad, ya que las dos bolas corren apoyadas en los dos filos de la ranura, sus circunferencias de rodadura son ligeramente menores que las reales, así que se requieren más tiempo y más revoluciones para recorrer la misma distancia. Un cálculo aproximado muestra que este hecho probablemente explique la mayor parte de las discrepancias. Si Galileo hubiera notado diferencias similares entre los resultados con bolas de tamaños diferentes, probablemente las hubiera achacado al retardo provocado por la fricción.»

Este párrafo es interesante porque en él Settle anota con agudeza una observación experimental y sugiere una explicación teórica acertada sólo hasta cierto punto. Resulta curioso que menosprecie la fricción como causa principal del retardo observado y lo atribuya a factores puramente geométricos como «sus circunferencias de rodadura menores que las reales». En esto se alinea con los historiadores que han abordado el enigma de los folios inéditos de Galileo, de los cuales trataremos más adelante. *Vamos a demostrar ahora que es la fricción la principal responsable de esa extraña observación hecha y anotada agudamente por Settle.*

Cuando alude a «la fórmula correcta», Settle se está refiriendo, sin duda, a la

ecuación

$$s = \frac{1}{2} \left( \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha \right) t^2$$

pues, efectivamente, al usarla se obtiene que ambas bolas —con independencia de sus masas y radios— deberían tardar 6,77 s (equivalentes a 132 m1) en recorrer los 16 ft.

Pero un cálculo riguroso —y no «aproximado», como el que sugiere Settle— puede hacerse a partir de la ecuación 1.12. Este cálculo muestra que los 16 ft deberían haber sido recorridos en 6,78 s por la bola de billar y en 6,79 por el cojinete de acero. Sin embargo, basándonos en los datos experimentales, resulta que la bola de billar invierte 6,97 s (0,19 s más) y la de acero 7,18 s (0,39 s más)...

*Sin duda alguna este retardo adicional debe ser achacado a la fricción por rodadura, y Galileo hubiera acertado plenamente pensando de ese modo.*

Puede comprobarse —aplicando la misma ecuación— que las *aceleraciones ideales en rodaduras exentas de fricción sobre el carril rectangular* tallado por Settle deberían ser:

$$\text{Para la bola de billar: } \underline{a}_{\text{CM}} = 21,18 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{Para la bola de acero: } \underline{a}_{\text{CM}} = 21,13 \text{ cm/s}^2$$

Mientras que las *aceleraciones experimentales* resultan ser:

$$\text{Para la bola de billar: } \underline{a}_{\text{CM}} = 20,06 \text{ cm/s}^2$$

$$\text{Para la bola de acero: } \underline{a}_{\text{CM}} = 18,90 \text{ cm/s}^2$$

A partir de estos datos se obtiene que la bola de billar disipa en la rodadura un 5,3 % de su energía, mientras que la de acero disipa hasta un 10,6 %. Esto

no tiene nada de extraño: la bola de billar —ver la Figura 4.1— rueda sobre el carril manteniendo relativamente próximas entre sí las dos zonas de contacto en relación a su propio diámetro, mientras que no ocurre lo mismo con la bola de acero, de ahí que el porcentaje de energía disipada en este segundo caso sea mayor. Esto está de acuerdo con mis propios resultados experimentales contenidos en la sección 2.6 (pág. 60) que titulo «Dos experiencias de enero de 2001».

Los cálculos que acabamos de hacer demuestran también que en la experiencia de Settle —bola rodando sobre los bordes del surco— no se le «quita a la esfera gran parte de su aceleración» en relación a la experiencia de Galileo —bola rodando sobre el fondo del surco— tal como éste la describe. La anchura del surco practicado por Settle es tan pequeña en relación al diámetro de la bola de billar usada que no existe diferencia apreciable entre las aceleraciones adquiridas por *la misma bola* en ambos casos. La objeción que Trocchio atribuye a R. Naylor en relación a este punto me parece carente de sentido.

Más seria parece la objeción de Naylor relativa al pergamino «suave y liso» con que Galileo dice haber recubierto el fondo del surco. Mi opinión, sin embargo, es que Galileo «si realmente hubiera llevado a cabo el experimento» no sólo habría reparado en este detalle sino que lo habría resuelto con éxito lijando más a fondo las «zonas de unión entre los diferentes trozos de pergamino»...

A propósito de todo esto me voy a permitir relatar mi primera experiencia con el plano inclinado, en la cual existió una «zona de unión» o «solución de continuidad» no resuelta, como las aducidas por Naylor en su crítica.

### 3.3. Mi primer plano inclinado

#### Redacción original de 2003

Durante el verano de 1979 mi colega Adolfo Cruz actuó como vocal en un tribunal de oposiciones a profesor agregado de Física y Química de Bachillerato. Me comentó a su regreso que en la Memoria presentada por un opositor había visto un intento de reproducir la experiencia de Galileo con el plano inclinado usando un canal de perfil en forma de uve. Opinaba Adolfo que el rozamiento en los dos puntos de contacto de la esfera con las dos paredes del canal haría inviable el proyecto. Le dije que yo iba a intentarlo, pero buscando otro procedimiento que permitiera un solo punto de contacto para reducir la fricción en lo posible.

Mi simpatía incondicional por Galileo era ya antigua, pero mi información sobre su vida y su obra, en 1969, se reducía a la biografía de Cortés Pla (Pla, 1946) y los comentarios que le dedica John D. Bernal (Bernal, 1979). Pese a todo tuve la osadía de elegir su figura como tema para la lección inaugural del curso 69/70, que recayó sobre mí —pobre interino— al soslayar el compromiso, con variados pretextos, los profesores titulares del Instituto Nacional de Bachillerato en el que llevaba dos años trabajando. Diez años más tarde, cuando hice esta experiencia, mis conocimientos sobre Galileo se habían ampliado algo con las referencias de Gerald Holton (Holton, 1993).

Cuando el 28 de octubre de 1979 me lancé a medir los tiempos de rodadura de una canica de vidrio (16 mm de diámetro), a lo largo de un canal (5 mm de anchura) —improvisado con dos hilos de pesca tensos y paralelos— sobre las caras más estrechas (2 cm) de dos tableros alineados (de 181,5 cm de longitud cada uno), inclinados apenas  $11^\circ$ , no podía ni imaginar que había encontrado una fuente inagotable de sana diversión y sabiduría de la que habría de

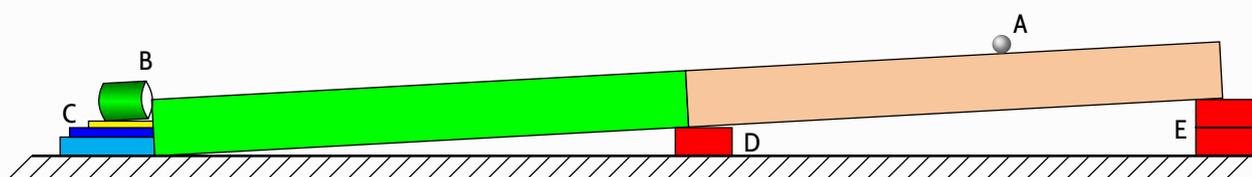
beber hasta hoy. En la Tabla 3.4 están los resultados tal como los consigné, en su momento.

$x$ cm	$t$ s	$K = x/t^2$
360	8,4	5,1
330	7,8	5,4
300	7,4	5,5
270	7,0	5,5
240	6,6	5,5
210	6,3	5,3
180	5,8	5,4
150	5,0	6,0
120	4,4	6,2
90	3,9	5,9
60	3,1	6,2

**Tabla 3.4:** Rodadura de canica de vidrio sobre un canal

Los dos tableros funcionaban como embellecedores laterales (aglomerado recubierto de formica) de las camas de mis hijos. Mi suegro (carpintero jubilado) soltaba la canica y yo pulsaba el cronómetro. Lográbamos la simultaneidad (?) por el procedimiento del «un, dos... tres». Al final de su recorrido la canica chocaba contra el fondo de una lata de cacahuets vacía, junto a la que yo me encontraba ubicado, y el sonido de este choque me servía (además de la visión directa) para proceder a la detención del cronómetro. Luis (mi hijo mayor de diez años) tomaba nota de las lecturas. Para lograr la inclinación de ambos planos se usaron tres tacos de madera de 32,5 mm de grosor cada uno (procedentes del juego de arquitectura de mi hijo y colaborador) dos de ellos calzando el primer plano, y el tercero calzando la *solución de continuidad* con el segundo plano, cuyo otro extremo descansaba en el suelo, procurándose así que la inclinación fuese la misma en los dos. Se tomaron varias medidas (nunca menos de tres) de cada tiempo y se consignaron en la tabla los valores

medios. Se invirtieron tres horas en la experiencia —según consta en el informe redactado entonces y que ahora consulto— y se realizó en el salón comedor de este sexto piso en el que resido a orillas de la bahía de Algeciras. Todo el material empleado, salvo el cronómetro analógico capaz de apreciar doubles décimas de segundo, era estrictamente casero, al alcance de cualquiera. Por lo que respecta al cronómetro, hoy pueden adquirirse modelos digitales, capaces de apreciar centésimas de segundo, muy baratos y en cualquier bazar.



**Figura 3.4:** (A) Esfera. (B) Lata de cacahuets vacía que actuaba de avisador para detener el cronómetro. (C) Libros. (D) y (E) Tacos destinados a calzar los planos para dotarlos de la inclinación adecuada

Podemos estar de acuerdo con Koyré en cuanto al platonismo de Galileo, pero negarle ingenio y habilidad experimental y, sobre todo, ignorar *el poder estimulante que desempeña el experimento* (por tosco e inexacto que sea) en una mente curiosa y aguda es, a mi parecer, el defecto de Koyré y el de cuantos historiadores de la ciencia han mantenido su misma postura. Creo que han contribuido al mito de que las experiencias de mecánica son muy difíciles, nada convincentes, y que no merece la pena tomarse la molestia de hacerlas porque... ¡no van a salir por aquello de las fuerzas de rozamiento...!

Procedí inmediatamente al cálculo de la *aceleración teórica* con que debió rodar la canica usando la ecuación

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha,$$

siendo

$$\text{sen } \alpha = \frac{3,25}{181,5} = 0,0179$$

y resultando

$$a_{\text{CM}} = 12,53 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Este resultado estaba bastante de acuerdo con el valor experimental obtenido, que oscilaría entre 10,2 y 12,2 cm/s<sup>2</sup>. Hay una *solución de continuidad* (un bache) entre ambos planos y, además, es utópica la pretensión de que los dos tuvieran exactamente la misma inclinación. Cualquier curioso puede comprobar, mediante cálculo, que bastan doce centésimas de grado sexagesimal de diferencia entre ambas pendientes para justificar el desacuerdo observado entre los siete primeros valores y los cuatro últimos de *K* en la Tabla 3.4. Esto es lo que yo llamo el poder estimulante del experimento, por tosco e inexacto que sea.

Mi suegro y colaborador me hizo algunas útiles sugerencias, junto con la aristotélica afirmación de que «*el tiempo del rodaje dependerá del peso de la esfera usada*». No me preocupé de refutar su afirmación a la espera de que la propia experiencia se encargara de hacerlo. Cuando probamos con una esfera de hierro de 16 mm de diámetro se quedó muy serio y murmuró: «*Si no lo veo no lo creo... A mí me hubiera gustado no tener que trabajar de carpintero toda mi vida para dedicarme a estas cosas*». Supongo que esta reacción puedo considerarla como otro ejemplo de lo que he llamado «el poder estimulante del experimento».

## Referencias

Bernal, John D. (1979). *Historia social de la ciencia. Vol. I, La ciencia en la historia*. 5ª ed. Historia, ciencia, sociedad; 9. Barcelona: Península. ISBN: 8429709363.

- Cohen, Bernard L. (1989). En: *El nacimiento de una nueva física*. Trad. por M.S. García y M.A. Sellés. Alianza Universidad Series. Alianza Editorial, S. A. ISBN: 978-8420626093.
- Di Trocchio, Federico (1995). «Las Mentiras de la Ciencia: ¿Por qué y cómo engañan los científicos?» Spanish. En: Alianza Editorial, S. A., pág. 19.
- Galilei, Galileo (1981). *G. Galilei. "Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias"*. Ed. por Javier Sádaba Garay y Carlos Solís Santos. Editora Nacional. Madrid. ISBN: 9788439544975.
- Holton, Gerald James (1993). *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. 2a ed. corr. y rev. por Stephen G. Brush. Barcelona: Reverté. ISBN: 84-291-4323-8.
- Koiré, Alexander (1977a). «Galileo y el experimento de Pisa». En: *Estudios de historia del pensamiento científico*. Siglo XXI. Madrid, págs. 296-205. ISBN: 968-23-0003-7.
- (1977b). «Galileo y la revolución científica del siglo XII,» en: *Estudios de historia del pensamiento científico*. Siglo XXI. Madrid, págs. 180-195. ISBN: 968-23-0003-7.
- (1977c). «Un experimento de medición». En: *Estudios de historia del pensamiento científico*. Siglo XXI. Madrid, págs. 274-305. ISBN: 968-23-0003-7.
- Pla, Cortés (1946). *Galileo Galilei : su vida, su obra*. 2ª ed. Colección Austral; 315. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- Settle, Thomas B. (1961). «An Experiment in the History of Science». En: *Science* 133.3445, págs. 19-23. DOI: [10.1126/science.133.3445.19](https://doi.org/10.1126/science.133.3445.19). URL: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.133.3445.19>.
- Trocchio, Federico Di (1993). *Le bugie della scienza: Perché e come gli scienziati imbrogliono*. Italian. Milano: Arnoldo Mondadori Editore.

# Las trayectorias parabólicas

Redacción original de 2003

---

## 4.1. Antecedentes

El 17 de noviembre de 1979 tenía ya montado mi plano inclinado de origen casero en el laboratorio cuando se me ocurrió la idea de añadirle un plano horizontal. Quería probar si era posible registrar, y relacionar entre sí, algunos puntos de la trayectoria parabólica que la esfera describe al abandonar el borde del plano horizontal después de recorrer el inclinado.

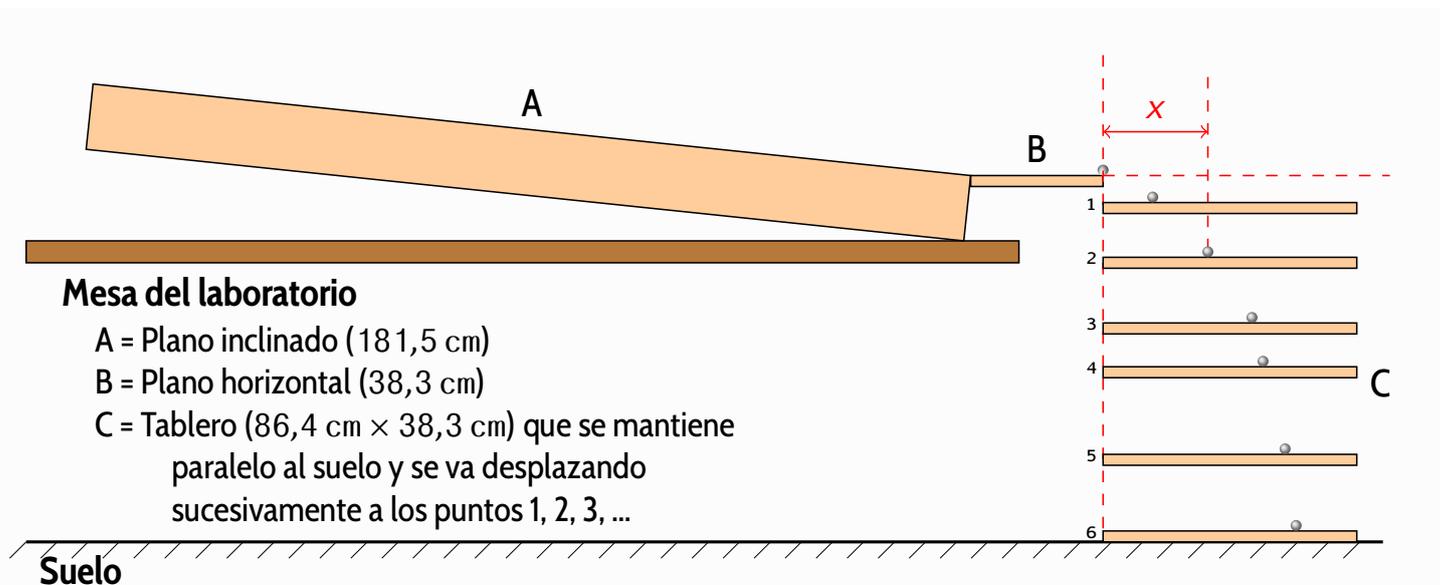
En junio de 1977 un buen alumno, Juan Falgueras Cano, junto con otros que, como él mismo, acababan de superar la prueba de Selectividad, me pidió contactar con el laboratorio de Física. Mis propios contactos eran por entonces muy rudimentarios y llenos de prejuicios, como los de la mayoría de mis colegas docentes de nivel medio; prejuicios que denominaré "koyresanos", aunque por aquellas fechas yo no había leído nada de Koyré... Había leído bastante sobre Galileo, pero casi nada de lo *escrito por* Galileo. Les propuse al mencionado grupo la realización de una práctica descrita en el manual de un equipo (Torres Quevedo) relativa a las trayectorias parabólicas. Mientras yo participaba —al fin con éxito— en las oposiciones a agregado de I.N.B. celebradas aquel verano, ellos trabajaron el asunto por su cuenta. Una tarde les hice una visita

y me presentaron los resultados. No eran malos del todo, pero para obtenerlos se habían visto obligados a repetir muchos impactos por cada punto (el plano acelerador consistía en dos barras cilíndricas paralelas por las que esfera descendía manteniendo dos puntos de contacto; la mesa encerada del laboratorio les servía de plano deflector horizontal; entre las barras y la mesa se producía un pequeño salto... etc.), y los impactos obtenidos para un mismo punto estaban muy desagrupados. Los resultados no animaban demasiado, sino que más bien alimentaban los prejuicios "koyresanos" que casi todos llevamos inscritos en los genes.

## 4.2. El registro horizontal

Pero en la fecha ya citada, animado por los buenos resultados obtenidos con el plano inclinado, recordé el trabajo que hicieron mis alumnos de antaño y decidí repetirlo y, a ser posible, mejorarlo. Para ello monté, el tinglado que se esquematiza en la Figura 4.1 sobre el registro horizontal

Los tableros B y C no eran más que los entrepaños desmontables de uno de los armarios del laboratorio. El tablero C llevaba pegada una larga tira de papel blanco recubierta por otra de papel carbón, de modo que al impactar la esfera dejaba una marca circular. La dificultad mayor consistía en asegurar (¿quién podría hacerlo?) la horizontalidad perfecta del plano C en las sucesivas posiciones 1, 2, etc. Por eso se fijaron de antemano las ordenadas  $y$  que con nuestros medios (barras, soportes, mesas, etc.) podíamos obtener con relativa comodidad, mientras que las abscisas  $x$  se leerían sobre el registro de



**Figura 4.1:** Registro horizontal

marcas en el papel. Así tendríamos las coordenadas de cada punto en un sistema de referencia rectangular con origen en el borde del tablero B, donde se cortan los ejes coordenados  $x$  e  $y$ .

Las condiciones en que se hizo este primer registro fueron:

- La esfera recorría siempre 180 cm, partiendo del reposo, sobre el plano inclinado.
- Se registraron cuatro impactos (que resultaron muy agrupados) por cada posición del tablero C. Se tomó el valor medio en cada caso como representativo de la abscisa.

Los resultados se consignan en la Tabla 4.1.

Como es sabido, la interpretación física de la constante  $K = y/x^2$  es:

$$K = \frac{g}{2v^2}$$

x cm	y cm	$y/x^2$
15,0	9,4	0,0417
28,7	33,0	0,0400
33,8	45,0	0,0394
38,3	57,5	0,0392
46,2	83,8	0,0392
49,6	95,8	0,0389

**Tabla 4.1:** Registro con 180 cm

siendo  $v$  la velocidad instantánea de la esfera al asomar horizontalmente por el borde del tablero horizontal y  $g$  la aceleración gravitatoria. A partir de ahí podemos calcular el valor de  $v$ , que resulta ser:

$$v = 112,0 \text{ cm/s,}$$

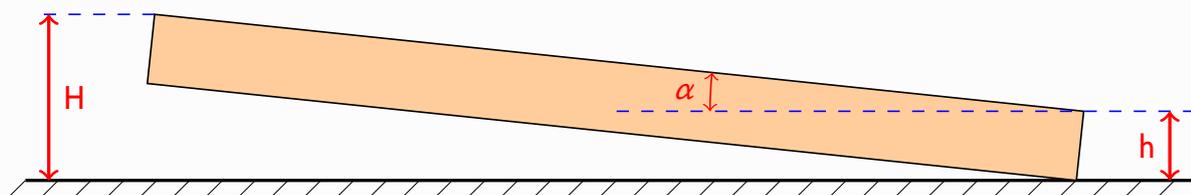
si tomamos

$$K = 0,039 \text{ cm}^{-1}$$

y

$$g = 980,0 \text{ cm/s}^2$$

Pero hay otra forma de averiguar la velocidad  $v$  de la esfera en el punto en que acaba el plano inclinado y se inicia el horizontal.



**Figura 4.2:**  $H = 31,4 \text{ cm}$      $h = 20,9 \text{ cm}$      $H - h = 10,5 \text{ cm}$

$$\text{sen } \alpha = \frac{10,5}{181,5} = 0,0578$$

$$a_{\text{cm}} = \frac{5}{7} g \text{ sen } \alpha = 40,5 \text{ cm/s}^2$$

$$\underline{v} = \sqrt{2ax} = 10,7 \text{ cm/s}$$

Así consta en el informe que redacté, ese día. No recuerdo la razón que me movió a hacer el cálculo de la aceleración por este procedimiento, en vez de hacerlo midiendo el tiempo invertido en recorrer los 180,0 cm de plano inclinado, dato que tomé posiblemente, pero que no aparece en el registro. Quizás quería obtener el valor "teórico" de la aceleración para evaluar el porcentaje de velocidad perdido. Tal porcentaje resulta ser del 7,3 %. Supuse que esa pérdida se debería a diversos motivos razonables, como pérdida de la componente vertical de la velocidad por choque sobre el tablero (calculable y poco significativa), disipación de energía, tanto en el plano inclinado como en el horizontal (de horizontalidad dudosa), así como en la solución de continuidad (bache inevitable) entre ambos planos.

### 4.3. El poder estimulante del experimento

Con todos estos datos empíricos en mi poder me lancé a calcular qué pasaría si repitiera la experiencia para diversos recorridos de la esfera (135 cm, 90 cm, 45 cm) sobre el plano inclinado. Los cálculos de las correspondientes  $\underline{v}$  y  $v$ , teniendo en cuenta el porcentaje de velocidad perdido es fácil. Los resultados aparecen en la Tabla 4.2.

$x$ cm	$v$ cm/s	$\underline{v}$ cm/s
135,0	105,0	97,2
90,0	85,7	79,4
45,0	60,6	56,1

**Tabla 4.2:** Esfera sobre planos de 135 cm, 90 cm y 45 cm

Ni que decir tiene que me lancé inmediatamente a la comprobación experimental. Los resultados aparecen en la Tabla 4.3.

Registro de 135			Registro de 90			Registro de 45		
$x$	$y$	$y/x^2$	$x$	$y$	$y/x^2$	$x$	$y$	$y/x^2$
12,9	9,4	0,056	10,7	9,4	0,082	7,5	9,4	0,167
24,7	33,0	0,054	20,2	33,0	0,081	14,1	33,0	0,166
29,4	45,0	0,052	23,8	45,0	0,079	16,8	45,0	0,159
33,0	57,5	0,052	26,7	57,5	0,080	18,9	57,5	0,161
39,7	83,8	0,053	32,6	83,8	0,079	23,0	83,8	0,158
42,7	95,8	0,052	34,9	95,8	0,078	24,6	95,8	0,158

**Tabla 4.3:** Datos experimentales

$$\underline{v} = 96,1 \text{ cm/s} \quad \underline{v} = 78,4 \text{ cm/s} \quad \underline{v} = 55,16 \text{ cm/s}$$

Compárense estos valores experimentales de  $\underline{v}$  con los calculados en la Tabla 4.2.

Aproveché esta experiencia para interesar a mis alumnos de COU de aquel curso. Llevaba por las tardes al laboratorio a grupos de voluntarios y los distribuía en cuatro equipos. Les explicaba la técnica experimental y el equipo (1) tomaba los puntos del registro de 180 cm. A continuación el equipo (2) hacía lo mismo para el registro de 135 cm. Entretanto el equipo (1) interpretaba sus datos y yo los retaba a *predecir* los resultados que iban a obtener los del (2). Así

íbamos encadenando el trabajo... El interés de cada grupo por comprobar el grado de exactitud de sus predicciones animaba el ambiente, y las cuestiones (¿Tarda la esfera el mismo tiempo en recorrer todas las parábolas? ¿Podemos calcularlo? ¿Podemos medirlo? ¿Por qué las marcas que deja la esfera aumentan de diámetro a medida que avanzamos en el registro?) iban surgiendo con naturalidad y yo los animaba a buscar las respuestas y a idear técnicas experimentales para comprobarlas. Una auténtica delicia para ellos y, por supuesto, para mí.

#### 4.4. El registro vertical

El 19 de noviembre Adolfo Cruz Lobo, mi compañero de Seminario por aquellos días, me sugirió la idea de realizar registros verticales. En realidad esa fue en principio mi intención, ya que así aparecía en el manual del equipo Torres Quevedo. A la hora de la verdad me pareció más factible mantener un tablero de 86,4 cm en posición horizontal que vertical y me decidí por la horizontalidad. Como estaba empezando a dejar de ser "koyresano", y la fiebre del empirismo se había adueñado de mí, me lancé a la tarea de inmediato. Sobre una larga tira de papel fabriqué una escalilla de divisiones espaciadas de dos en dos centímetros, la pegué a uno de los tableros y la dispuse horizontal, en el suelo, para que sirviera como eje de abscisas. Sobre ella se desplazaría otro tablero vertical provisto del correspondiente registro con su papel carbón. El aspecto del montaje es el que aparece en la Figura 4.3 (Registro vertical), y las condiciones fueron las mismas descritas antes. En este caso se fijaban las abscisas en la escalilla graduada mientras que las ordenadas quedarían regis-

tradas en el registro de marcas recubierto por el papel carbón. De este modo tendríamos las coordenadas de las marcas respecto al mismo sistema de referencia anterior.

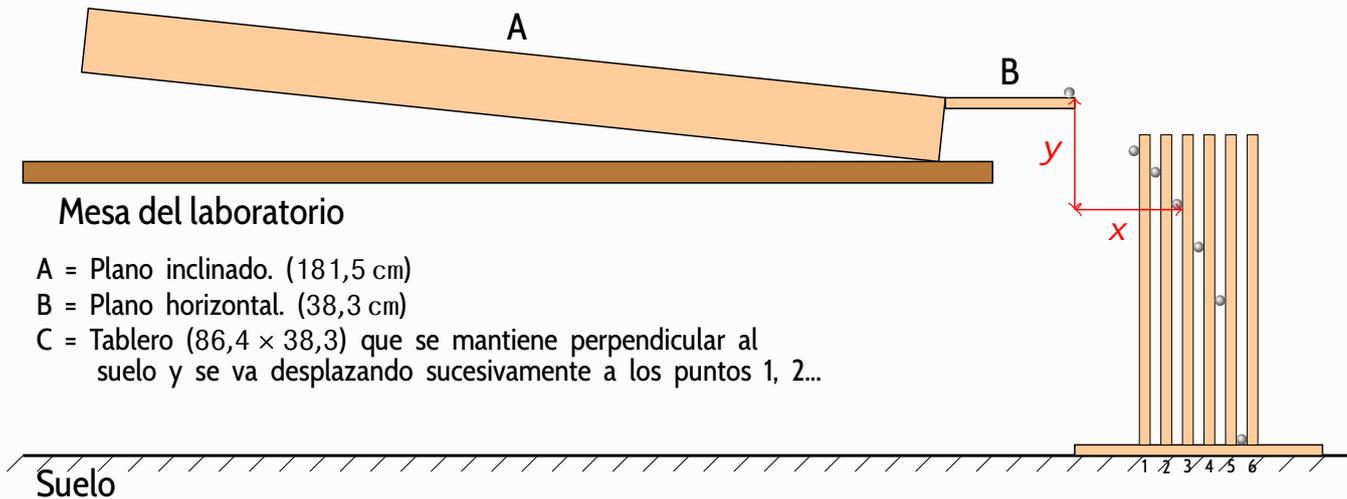


Figura 4.3: Registro vertical

Los resultados se consignan en la Tabla 4.4.

x cm	y cm	$y/x^2$
20,0	14,5	0,0362
22,0	17,5	0,0361
24,0	20,9	0,0363
26,0	24,5	0,0362
28,0	28,3	0,0361
30,0	33,4	0,0371
32,0	38,5	0,0376
34,0	42,8	0,0370
36,0	48,5	0,0374
38,0	53,6	0,0371
42,0	63,7	0,0361
44,0	70,4	0,0364
46,0	77,4	0,0366

Tabla 4.4: Registro con 180 cm

Si se compara con el Tabla 4.1 encontramos motivos para desconcertarnos:

- a) La constante no tiene el mismo valor:  
Aquí sale  $K = 0,037 \text{ cm}^{-1}$  frente al obtenido en el registro horizontal  $K = 0,039 \text{ cm}^{-1}$ .
- b) Resulta muy halagador, pero desconcertante, que en este caso los valores de  $K$  estén más agrupados, y no en progresión decreciente, como en el registro horizontal.
- c) La velocidad de salida resulta valer  $115,0 \text{ cm/s}$  en vez los  $112,0$  que salían con los datos del registro horizontal.

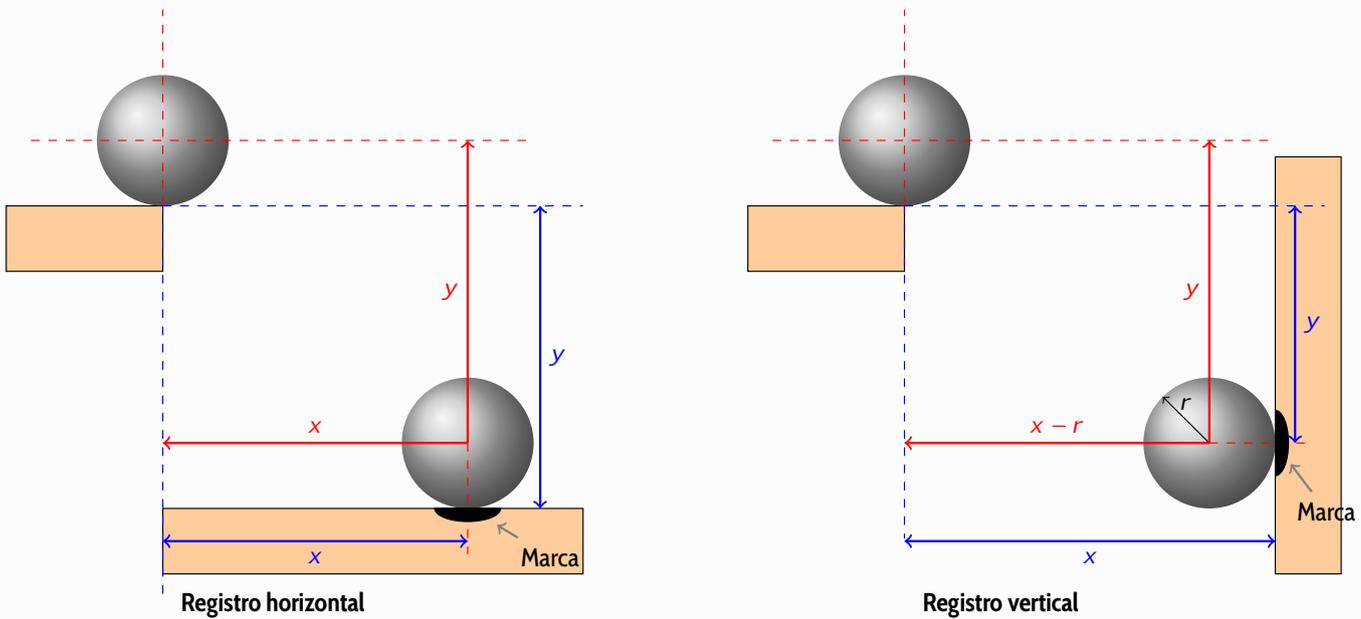
No obstante parece haber algo sospechoso en tanta perfección. Pocas horas después, casi sin pensar conscientemente en ello, la solución al enigma se reveló.

## 4.5. La importancia del centro de masa

Tanto en el *registro horizontal* como en el *registro vertical* se obtienen *manchas o marcas negras circulares* sobre el papel blanco. Las *coordenadas del centro* de cada una de esas marcas nos *orientan* acerca de las *coordenadas del centro de masas de la esfera* en cada impacto.

Lo que nos interesa son *las coordenadas*  $(x, y)$  del CM en el sistema de referencia con origen situado en el CM de la esfera en el instante en que esta sale por el borde del tablero (ejes rojos en la Figura 4.4), pero lo que obtenemos en ambos registros (horizontal y vertical) son las coordenadas  $(x, y)$  de los

centros de las marcas en el sistema de referencia con origen en el borde del tablero (ejes azules en la figura).



**Figura 4.4:** Diferencia de marcas entre el registro horizontal y el vertical

En el *registro horizontal* coinciden los valores de ambas parejas de coordenadas (rojas y azules), pero no así en el *registro vertical*, en el que hay que hacer una corrección para tener en cuenta el valor del radio  $r$  de la propia esfera. Supongo que la Figura 4.4 es más elocuente que cualquier aclaración minuciosa.

La esfera usada tenía un radio  $r = 0,8 \text{ cm}$ . Una vez hecha la corrección pertinente el resultado puede verse en la Tabla 4.5. La concordancia con la Tabla 4.1 es perfecta, como no podía ser de otro modo: en ambos casos se están considerando ya las coordenadas del centro de masas de la esfera respecto al sistema de referencia correcto. A medida que bajamos en ambas Tablas 4.1 y 4.5 se observa que el valor de la constante tiende a estabilizarse en  $0,038 \text{ cm}^{-1}$ , después de empezar con valores de  $0,041 \text{ cm}^{-1}$ . La estabilización y fiabilidad del valor de  $K$  a medida que se baja en ambas tablas se debe a que el

$x - r$ cm	$y + r$ cm	$(y + r)/(x - r)^2$
19,2	15,3	0,0415
21,2	18,3	0,0407
23,2	21,7	0,0403
25,2	25,3	0,0398
27,2	29,1	0,0393
29,2	34,2	0,0401
31,2	39,3	0,0404
33,2	43,6	0,0396
35,2	49,3	0,0398
37,2	54,4	0,0393
41,2	64,5	0,0379
43,2	71,2	0,0381
45,2	78,2	0,0383

**Tabla 4.5:** Registros verticales

*error relativo* de las medidas decrece en ese mismo sentido, observación y enseñanza práctica de extraordinario interés para los alumnos.

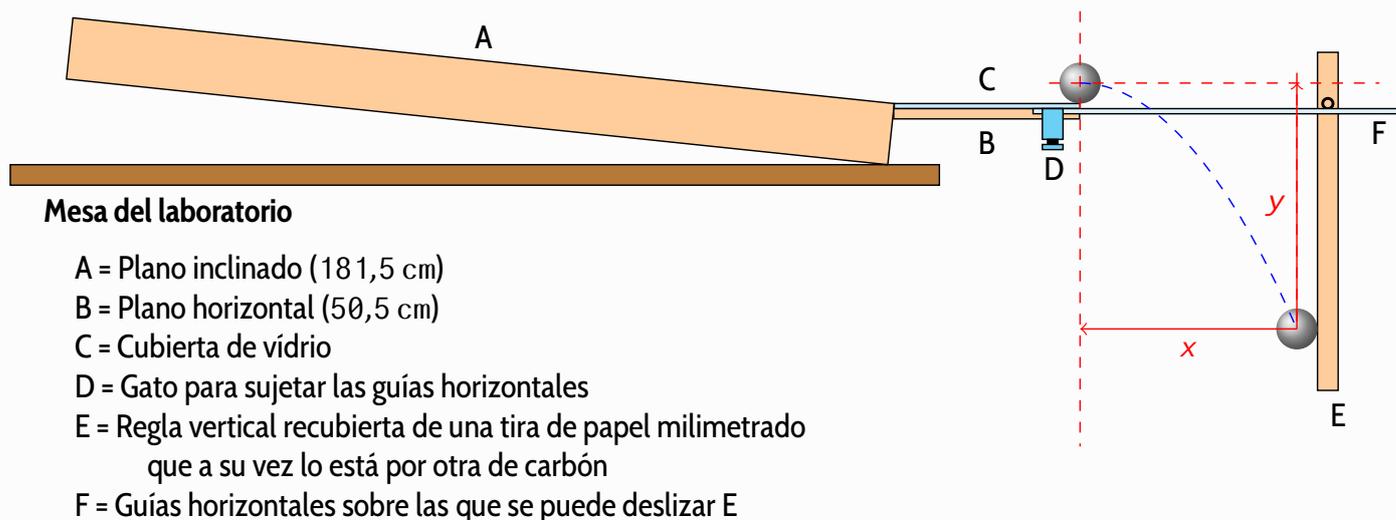
*La importancia del centro de masa de un sistema resalta en esta experiencia de forma natural.* Experiencia que aproveché para enfrentar a mis alumnos con el enigma y espolearlos en busca de la solución.

## 4.6. Prototipo completo

Durante el verano de 1980 el prototipo experimentó diversas mejoras, tales como:

- a) Por sugerencia e iniciativa de Mercedes Marfil, alumna de COU durante ese curso, se sustituyó el plano horizontal por una gruesa regla de madera B de 50,5 cm, recubierta por una *placa de vidrio* C. Se pretendía obtener un *filo vivo* en la salida de la esfera, así como *atenuar el rozamiento*, y nos pareció que el uso del vidrio mejoraría ambas circunstancias respecto a la madera que se había usado hasta entonces.
- b) Colocar dos reglas graduadas (F), sujetas mediante un gato (D) a la regla *horizontal*, las cuales servirían como guías para determinar la  $x$  del centro de masa de la esfera. Con ellas podía hacerse automáticamente la corrección del radio.
- c) Sobre dichas guías deslizaría otra gruesa regla *vertical* (E), atravesada por un tornillo horizontal de apoyo, que serviría para localizar la ( $Y$ ) del centro de masa de la esfera.
- d) El uso de una tira de *papel milimetrado*, recubierta de otra de *papel carbón*, sobre la regla vertical para registrar las marcas correspondientes a cada impacto.
- e) Registrar el *impacto cero* colocando la regla portadora del registro (E) exactamente en el borde del vidrio (C). A partir del centro de la marca así obtenida se medirían las ordenadas  $Y$  de los restantes puntos.
- f) Registrar solamente un *impacto por cada punto*, variando la abscisa desde  $x = 5,0$  cm en adelante de centímetro en centímetro. Las marcas para  $x < 5,0$  cm quedan tan juntas entre sí que forman prácticamente una mancha única.

El prototipo quedó como se indica en la Figura 4.5. En las Figura 4.6 y la Tabla 4.6 se reproduce un registro obtenido con este montaje.



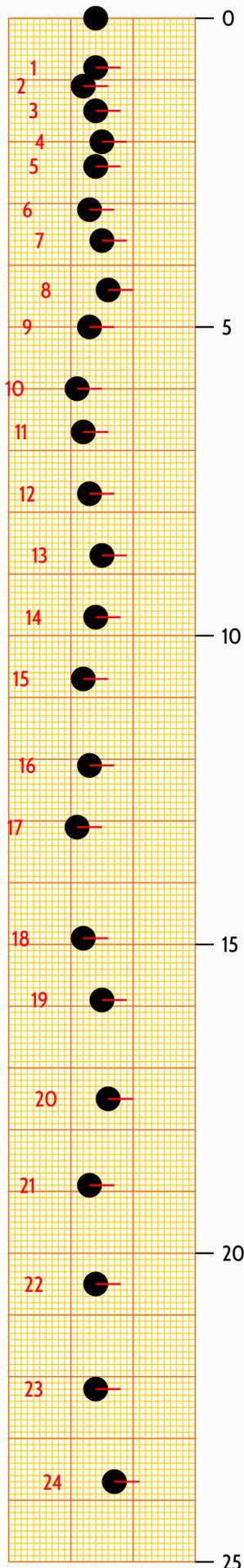
**Figura 4.5:** Prototipo para el registro vertical

La esfera ha recorrido 150 cm sobre el plano inclinado acelerándose desde el reposo. Después ha recorrido 50,5 cm sobre la regla horizontal y ha ido a impactar sobre la vertical portadora del registro.

El impacto cero se observa a la cabeza del registro. Los demás impactos se han numerado para localizarlos fácilmente y medir su ordenada.

Las marcas de los impactos tienen todas el mismo diámetro, 4 mm, ya que la componente horizontal de la cantidad de movimiento se conserva a lo largo de todos los vuelos parabólicos. Puede fácilmente estimarse la componente horizontal de la velocidad en 127,4 cm/s.

El zizagueo de las marcas, que hemos reproducido lo más fielmente posible, se debe al hecho evidente de que la dirección de la *velocidad de salida* no es siempre la misma. Esta dirección oscila dentro de unos estrechos márgenes debido a que el canal improvisado sobre el vidrio con los dos hilos de pesca tensos y paralelos tiene 5 mm de separación. Obsérvese que el zizagueo se acentúa a medida que bajamos en el registro.



#	x cm	y cm	$y/x^2$
1	5,0	0,8	0,0320
2	6,0	1,1	0,0305
3	7,0	1,5	0,0306
4	8,0	2,0	0,0312
5	9,0	2,4	0,0296
6	10,0	3,1	0,0310
7	11,0	3,6	0,0297
8	12,0	4,4	0,0305
9	13,0	5,0	0,0296
10	14,0	6,0	0,0306
11	15,0	6,7	0,0298
12	16,0	7,7	0,0300
13	17,0	8,7	0,0301
14	18,0	9,7	0,0299
15	19,0	10,7	0,0296
16	20,0	12,1	0,0302
17	21,0	13,1	0,0297
18	22,0	14,9	0,0307
19	23,0	15,9	0,0300
20	24,0	17,5	0,0304
21	25,0	18,9	0,0302
22	26,0	20,5	0,0303
23	27,0	22,2	0,0304
24	28,0	23,7	0,0302

Figura 4.6

Tabla 4.6: En esta página se reproduce un registro obtenido el 17 de enero de 1994 con el dispositivo descrito en la anterior

## 4.7. El modelo final

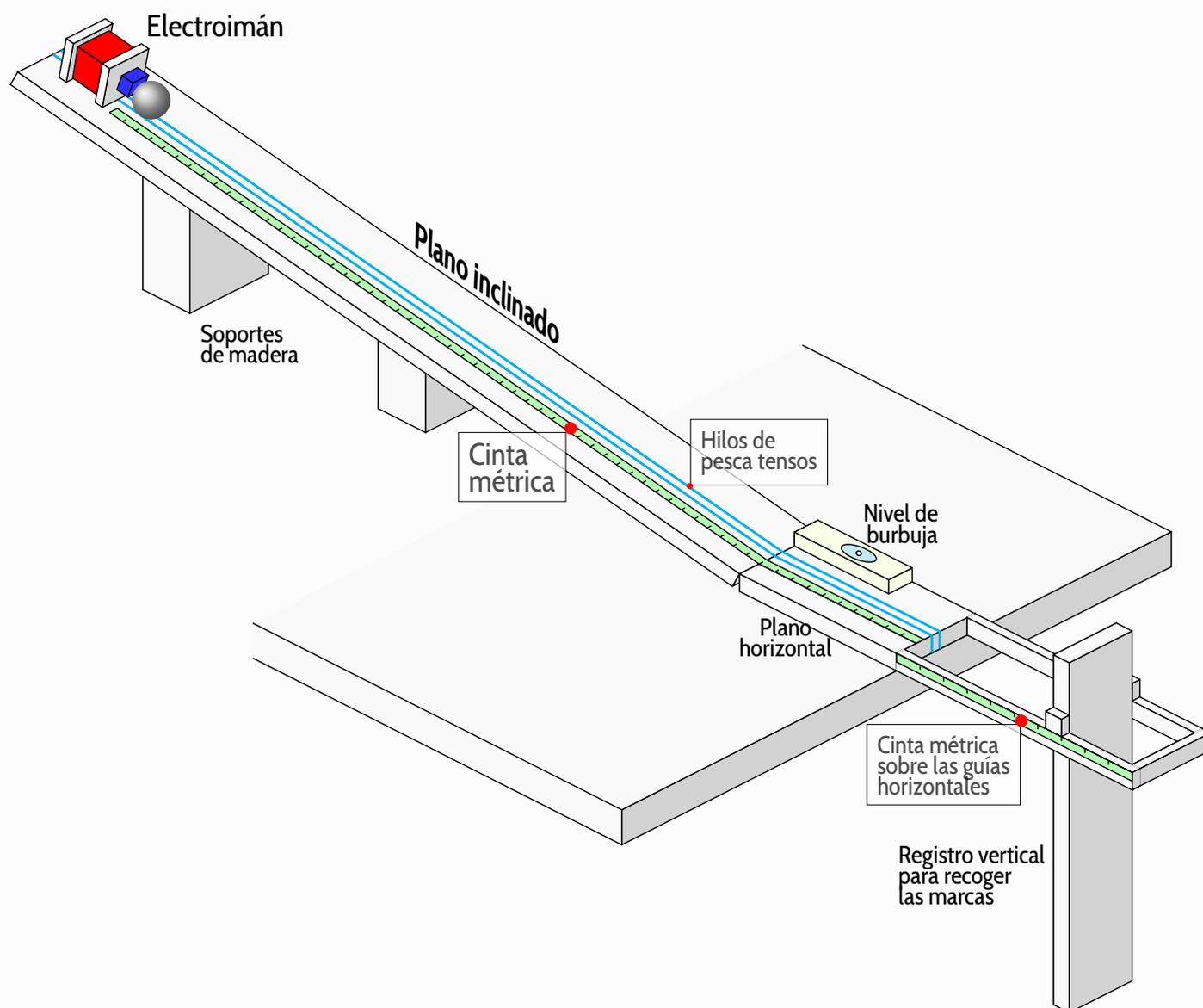
En 1998 Antonio Molina Fernández, mi compañero de Seminario, construyó un modelo en aluminio, de una sola pieza, que reúne las ventajas de no presentar solución de continuidad entre los planos inclinado y horizontal y la de ser fácilmente transportable a las aulas. Tiene el inconveniente de que el ángulo de inclinación es fijo ( $4^{\circ}53'$ ), compensado sobradamente por las ventajas citadas. Lo he llamado "modelo final", cuya perspectiva puede contemplarse a continuación, porque me parece que no puede ser ya mejorado.

Resulta fácil calcular cual es la velocidad instantánea del CM de la esfera en el instante en que esta pasa del plano inclinado al horizontal:  $v = 116,6 \text{ cm/s}$

En la página 106 aparece reproducido el registro obtenido en la experiencia del citado día 17 de noviembre de 1999. El resultado es inmejorable. Del valor de la constante  $K = 0,0380 \text{ cm}^{-1}$  puede deducirse que la velocidad instantánea del CM de la esfera en el instante en que esta abandona el plano horizontal vale  $113,4 \text{ cm/s}$ . Como era de esperar la esfera, por muy perfecta que sea y por muy horizontal que esté dispuesto el plano, experimenta una desaceleración a causa, fundamentalmente, de la fricción por rodadura.

La regla portadora del registro vertical es, en este caso, de aluminio y va apoyada sobre las guías horizontales mediante sendos paralelepípedos que impiden la oscilación y aseguran la verticalidad. Se trata de una ventaja innegable respecto al «prototipo», en el que el tornillo que atraviesa la regla de madera no es tan eficaz para asegurar ambas condiciones.

El que las guías horizontales sean solidarias con el plano horizontal también es ventajoso respecto al «prototipo», en el que las reglas de plástico horizontales debían sujetarse mediante un gato no del todo seguro.



**Figura 4.7:**

- Longitud del plano inclinado = 120,0 cm
- Tiempo invertido en el recorrido = 2,06 s
- Aceleración del CM de la esfera rodante =  $56,6 \text{ cm/s}^2$

La esfera usada en esta experiencia es la misma del registro anterior. Las marcas de los impactos tienen, en este caso, 2 mm de diámetro por dos razones: la componente horizontal de la velocidad es menor ( $113,4 \text{ cm/s}$  frente a  $127,4 \text{ cm/s}$ ), y, sobre todo, porque la regla portadora es de aluminio en vez de madera.

El zizagueo de las marcas a lo largo de la vertical, que hemos reproducido fielmente, tiene la misma causa que en el registro anterior.

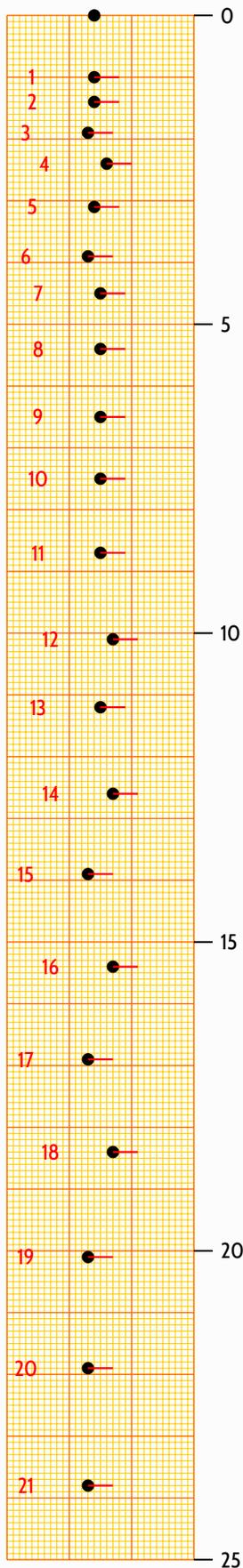


Figura 4.8

#	x cm	y cm	$y/x^2$
1	5,0	1,0	0,0400
2	6,0	1,4	0,0389
3	7,0	1,9	0,0388
4	8,0	2,4	0,0375
5	9,0	3,1	0,0383
6	10,0	3,9	0,0390
7	11,0	4,5	0,0372
8	12,0	5,4	0,0375
9	13,0	6,5	0,0385
10	14,0	7,5	0,0383
11	15,0	8,7	0,0387
12	16,0	10,1	0,0395
13	17,0	11,2	0,0387
14	18,0	12,6	0,0389
15	19,0	13,9	0,0385
16	20,0	15,4	0,0385
17	21,0	16,9	0,0382
18	22,0	18,4	0,0380
19	23,0	20,1	0,0380
20	24,0	21,9	0,0380
21	25,0	23,8	0,0381

Tabla 4.8: Regla portadora del registro vertical

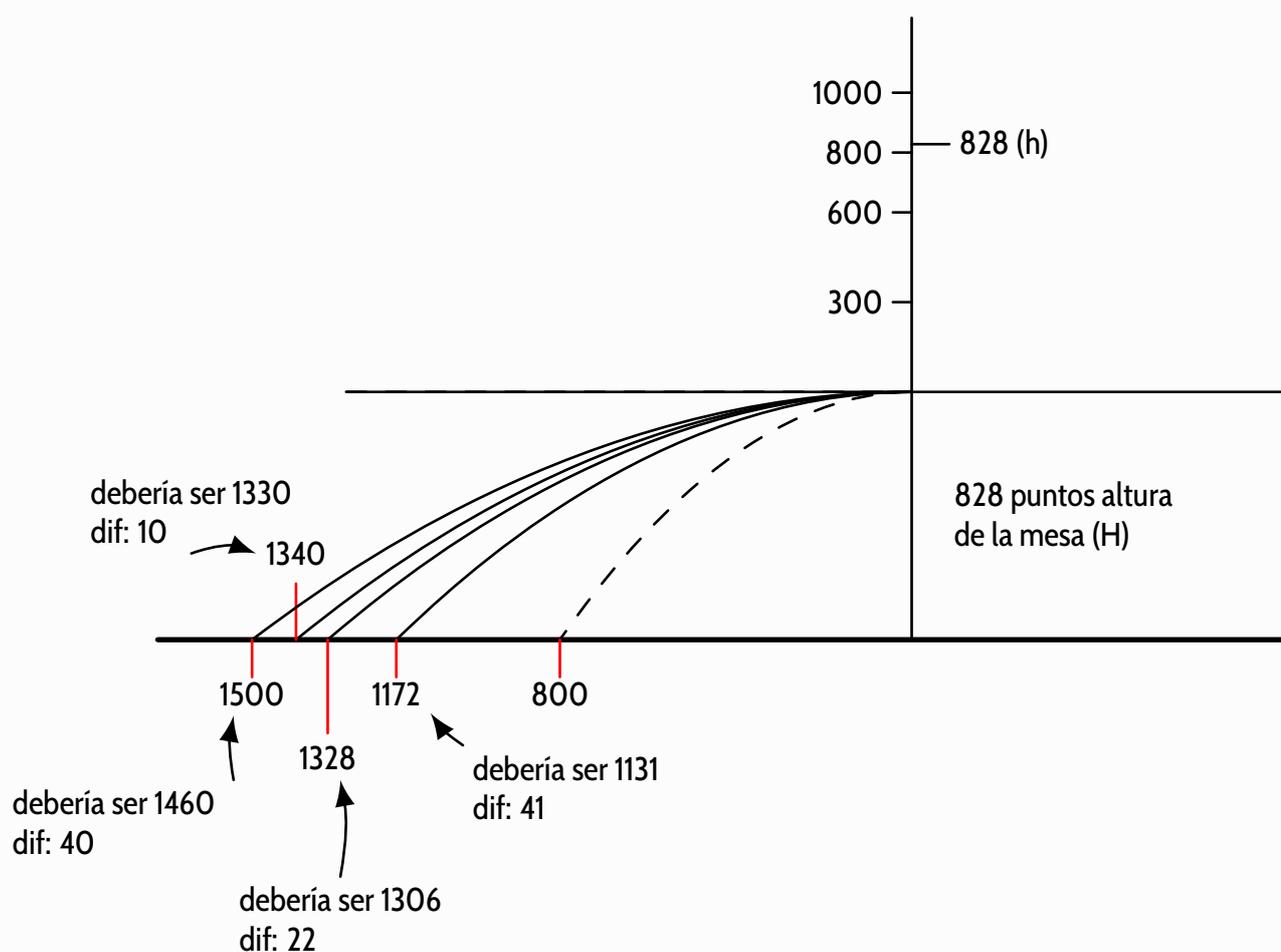
### El folio 116<sup>v</sup>

Texto original de 2003 revisado en 2005

---

#### 5.1. Descripción

En noviembre de 1985 leí un artículo de Pierre Thuillier (Thuillier, 1983) titulado «Galileo y la experimentación». A través de él me enteré de que Stillman Drake (Drake, 1973) había publicado otro, en 1973, acerca del reverso (<sup>v</sup>) del folio 116 del volumen 72 de los manuscritos no publicados de Galileo conservados en la Biblioteca Nacional de Florencia (folio 116<sup>v</sup>). En el reverso del citado folio aparecen un gráfico y unas anotaciones de Galileo que reproducimos a en la Figura 5.1.



**Figura 5.1:** Reproducción del folio  $\text{II6}^{\text{V}}$

## 5.2. La interpretación de Stillman Drake

Stillman Drake considera que las curvas representan trayectorias parabólicas descritas por una bola, que sale horizontalmente hacia la izquierda por el borde de una mesa, después de haber sido acelerada desde el reposo a lo largo de un plano inclinado provisto de un deflector horizontal en su extremo inferior. Las anotaciones junto al eje vertical corresponderían a las alturas  $h$ , medidas desde la superficie de la mesa, de los puntos del plano inclinado desde los que se ha dejado partir la bola en cada caso. Las anotaciones junto al eje horizontal (posiblemente el suelo) corresponderían a las distancias  $d$ , medidas desde

el pie de la mesa, a las que habría ido a parar la bola después de cada uno de sus vuelos parabólicos. Las anotaciones precedidas por la frase «debería ser» serían las distancias  $d$  calculadas por Galileo de acuerdo con alguna hipótesis que intentaría someter a verificación empírica.

Lo que Galileo pretendería con tal experimento sería, según Drake, comprobar si la *velocidad* de la esfera, al salir por el borde del deflector, se mantiene *constante* como *componente horizontal* de la que animará a la bola a lo largo de cada vuelo parabólico.

Según Drake, Galileo debería haber identificado ya, hacia 1609, la *rodadura de una esfera sobre un plano inclinado* y la *caída libre de cualquier cuerpo en el aire* como movimientos de aceleración constante. Esto le capacitaba para deducir que el cuadrado de la velocidad de la esfera al salir por el borde del deflector debería ser directamente proporcional a  $h$ . A partir de ese instante, si su hipótesis fuera correcta, las distancias  $d$  deberían ser directamente proporcionales a dicha velocidad y, por lo tanto, el cuadrado de  $d$  resultaría ser directamente proporcional a  $h$ . O sea, expresado matemáticamente:

$$d^2 = \underline{K} h \quad (5.1)$$

Determinar de antemano, *por cálculo*, el valor de  $\underline{K}$  requeriría, por parte de Galileo, conocer el valor de la aceleración en la caída libre  $g$  y la dinámica del movimiento conjunto de rotación-traslación que anima a la bola a lo largo del plano inclinado, ambos conocimientos, obviamente, fuera de su alcance. Por eso, según Drake, Galileo usó la pareja de valores experimentales ( $h = 300$  p y  $d = 800$  p) —la única del gráfico 5.1 que no aparece acompañada de la frase

«debería ser»— para obtener *un* valor de  $\underline{K}$ :

$$\underline{K} = \frac{800^2}{300} = 2\,133\text{ p}$$

a partir del cual calculó los demás («debería ser») para compararlos con los supuestamente experimentales. Es significativo que Galileo anotase la diferencia en cada caso, aparte de que en el mismo folio aparecen los pertinentes cálculos.

(La unidad de longitud, el *punto* p que usa Galileo, podemos expresarla en centímetros ya que, según Thuillier, 180 p equivalen a 169 mm)<sup>1</sup>

### 5.3. El significado físico de la constante $\underline{K}$

En el artículo de Thuillier no aparece el desarrollo de ningún argumento físico-matemático favorable a esta interpretación. Ignoro si Stillman Drake esgrime alguno en el suyo original, pues no he podido hacerme con él, y bien que me gustaría consultarlo.

Supongo que a cualquier interesado en este tema pueden habersele ocurrido en su momento los argumentos que voy a presentar a continuación, y no descarto la posibilidad de que así haya sido. Pero lo cierto es que a mí se me han ido apareciendo a medida que profundizaba en el tema, y creo —por eso voy

<sup>1</sup> **Nota del editor:** Sobre las medidas en la época de Galileo, incluido el *punctus*, ver (Caffarelli, 2009). Sobre el laboratorio de Galileo en Florencia ver (Teichmann, 2015)

a exponerlos— que tales argumentos favorecen la interpretación que Stillman Drake nos ofrece del gráfico presente en el folio 116<sup>v</sup>.

Para interpretar *físicamente* el significado de  $\underline{K}$  partiremos de un par de supuestos:

- a) Que la *rodadura* de la esfera a lo largo de *todo* su recorrido es *pura*, o sea, que se produce *sin deslizamiento* del punto de contacto entre la esfera y su soporte material.
- b) Como carecemos de datos acerca de la *forma* y las *dimensiones* del *deflector*, supondremos que se trata de un *ente ideal* que *no influirá* sobre el valor de la *velocidad del centro de masa (CM) de la esfera*, limitándose a *modificar su orientación espacial original* —la impuesta por la *inclinación del plano*— hasta convertirla en *horizontal*.

Por lo tanto, aplicando nuestros actuales conocimientos acerca del *valor de  $g$*  y del *movimiento simultáneo de rotación / traslación de la esfera en su rodadura pura carente de fricción*, llegaremos a las conclusiones siguientes:

- La *aceleración del CM de la esfera a lo largo del plano inclinado* vendrá dada por:

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha$$

siendo  $\alpha$  **ángulo del plano con la horizontal**.

- Por otra parte el *cuadrado de la velocidad instantánea del CM de la*

esfera al alcanzar el deflector será<sup>2</sup>:

$$v^2 = \frac{2 a h}{\text{sen } \alpha}$$

$h$  es el **desnivel del punto de partida**.

- El tiempo de vuelo de la esfera (el mismo en todas las parábolas) vendrá dado por:

$$t^2 = \frac{2H}{g}$$

$H$  es la **altura de la mesa**.

- Como la distancia  $d$  recorrida en horizontal en cada vuelo *debe poder calcularse* mediante:

$$d = v t$$

de acuerdo con la hipótesis que, según Drake, *Galileo pretendía probar con su experiencia*, ya lo tenemos todo a punto para llegar a

$$d^2 = \frac{20}{7} H h \quad (5.2)$$

de donde resulta que la *interpretación física* de la constante  $\underline{K}$  de la Ecuación 5.1—la llamaremos ahora  $K$  ya veremos por qué— es la siguiente:

<sup>2</sup> **Nota del editor:** En estas ecuaciones  $H$  es la altura de vuelo libre o altura de la mesa y  $h$  el desnivel del punto de partida en la rodadura, la altura desde la que empieza a rodar la bola sobre el tablón del plano inclinado. Se pueden ver mejor en la Figura 6.2

«Los veinte séptimos del valor  $H$  de la caída libre en vertical del CM de la esfera»

o sea:

$$K = \frac{20}{7} H \quad (5.3)$$

- En el caso del folio 116<sup>v</sup> su valor numérico «debería ser»:

$$K = \frac{20 \times 828}{7} = 2\,366 \text{ p}$$

- Como hemos hecho la *deducción y el cálculo* de  $K$  sin tener en cuenta la *disipación de energía* que se produce en el proceso hemos de concluir que el valor *experimental*  $\underline{K} < K$ , hallado y usado por Galileo en sus cálculos, tiene en cuenta —ignorándolo él mismo por supuesto— la ineludible presencia de tal disipación. Dicho de otro modo: **Los valores consignados por Galileo son experimentales sin ningún género de duda**<sup>3</sup>. El gráfico del folio 116<sup>v</sup> refleja una experiencia no sólo *imaginada* —en el sentido koyresano de la palabra— sino también *realizada* con sus propias manos por el mismísimo Galileo.

<sup>3</sup> Nota del editor: Negritas del editor

## 5.4. Evaluación de la energía disipada

Demostraremos ahora que *el tanto por ciento*  $\chi$  *de la energía inicial disipada en los procesos descritos en el folio 116<sup>v</sup> vendrá dado por:*

$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{K}{K} \right) \quad (5.4)$$

Veamos, tomando la superficie de la mesa como referencia, la *energía mecánica disponible al inicio de cada rodadura* viene dada por la ecuación:

$$E_p = mgh$$

que se *conservará finalmente como energía cinética al inicio del vuelo parabólico* que viene dada por:

$$E_{c_T} = \frac{7}{10} m v^2$$

y que es la misma que *debe conservarse como cinética* —procedente de  $v$  (la *componente horizontal de la velocidad durante el vuelo*)— cuando la esfera toque el suelo. Podemos pasar por alto la energía disipada por fricción con el aire durante el corto vuelo.

El cociente:

$$\frac{E_{c_T}}{E_p} = \frac{7 m v^2}{10 mgh}$$

representa el *tanto por uno de energía aprovechada*, y se reduce con facilidad

a<sup>4</sup>:

$$\frac{E_{c_T}}{E_p} = \frac{d^2}{h} \times \frac{7}{20H} = \frac{d^2/h}{20H/7h}$$

o bien

$$\frac{E_{c_T}}{E_p} = \frac{\underline{K}}{K}$$

Desde aquí, llegar hasta la ecuación 5.4 es ya algo inmediato.

En la Tabla 5.1 aparecen los porcentajes de energía disipados en cada uno de los cinco procesos registrados por Galileo en el folio 116<sup>v</sup>. Ya es suficiente-

$h_p$	$d_p$	$\underline{K}$	$\underline{K}/K$	$\chi$ % disipado
300	800	2 133	0,901	9,8
600	1 172	2 289	0,967	3,2
800	1 328	2 204	0,932	6,8
828	1 340	2 168	0,916	8,3
1 000	1 500	2 250	0,951	4,9

**Tabla 5.1:** Energías disipadas en experimento de Galileo del folio 116<sup>v</sup>

mente significativo, a favor de la tesis de Drake, que todos los cocientes  $\underline{K}/K$  resulten ser inferiores a la unidad.

Galileo no pudo *inventarse* unos datos tan realistas, a partir de los cuales el análisis actual puede deducir y calcular el porcentaje de energía disipado en cada una de las rodaduras de la esfera.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> **Nota del editor:**  $v^2$  en función de la distancia horizontal recorrida en el vuelo libre se toma de A.13 y dividimos por  $mgh$  que es la  $K$  de partida. Se ha añadido una más detallada deducción en el Apéndice A

<sup>5</sup> **Nota del editor:** Negritas del editor

## 5.5. La inclinación del plano

Según Thuillier, en 1975 Stillman Drake repitió el experimento sugerido en el folio 116<sup>v</sup> y publicó un nuevo artículo (Drake y MacLachlan, 1975) en colaboración con James McLachlan. Buscaba con ello mejorar la demostración hecha en el anterior. De éste nuevo artículo dice Thuillier:

*«En un principio pensó que el plano inclinado formaba con la mesa un ángulo de 64°. Pero cuando reconsideró el problema más concretamente, Drake llegó a una evaluación mucho más baja: 30°. Habiendo reconstruido el dispositivo, los dos historiadores-experimentadores obtuvieron resultados muy parecidos a los de Galileo. Los autores precisan, sin embargo, que los valores absolutos eran algo mayores. Es de lamentar que dichos valores no hayan sido publicados: se podría apreciar con mayor exactitud el verdadero alcance de este control...»*

Respecto al contenido de este párrafo cabe señalar lo siguiente:

La inclinación del plano es desconocida, ya que Galileo no hace constar este dato en el folio 116<sup>v</sup>. Pero es que, además, *cualquier inclinación es válida en principio*, siempre que el plano sea lo suficientemente *largo* como para permitir al experimentador alcanzar un *desnivel máximo* de 1 000 p sobre la mesa, que es precisamente *el mayor* de todos los ensayos por Galileo en la experiencia descrita. Desconozco la razón por la que Drake y McLachlan comenzaron a probar con una inclinación de 64° y el criterio seguido para detenerse y *dar por bueno* el de 30°.

Copio a continuación un fragmento del citadísimo y muy discutido pasaje de

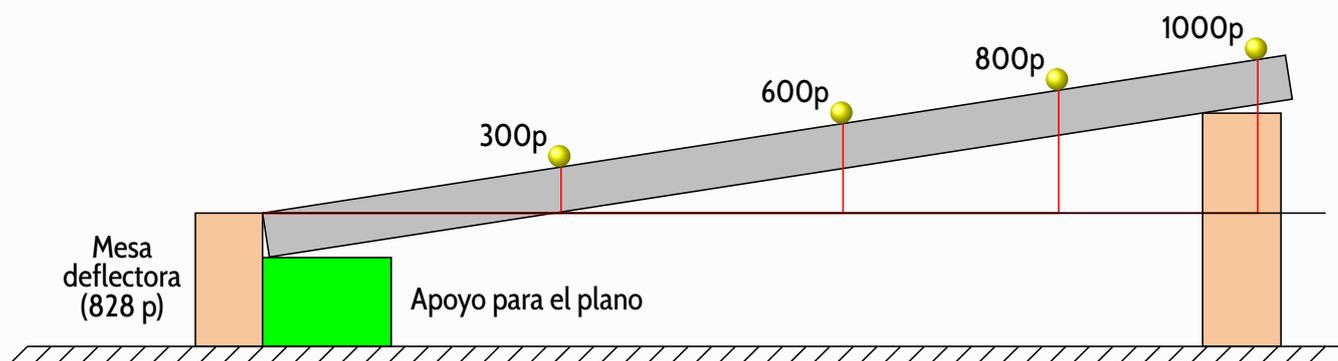
los «Discorsi» (Galilei, 1981) donde el propio Galileo describe el plano *que dice haber usado en sus presuntas experiencias*:

«En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso, colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce muy dura, bien redonda y pulida.

»Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta una altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho) la bola por dicho canal, tomando nota como en seguida he de decir del tiempo que tardaba en recorrerlo todo.»

Si concedemos crédito al autor de esta descripción la inclinación de su plano debió oscilar entre  $4,8^\circ$  y  $9,6^\circ$  —«según pareciera»— y la bola, debería mantener *una única zona de contacto* con el canal, pues, de no ser así, carecería de sentido colocar «*dentro de él un papel de pergamino lustrado al máximo*».

En la Figura 5.2 aparece fielmente representado (a escala) el plano descrito por Galileo dotado *precisamente de una inclinación de dos codos*. Dispuesto de este modo Galileo tendría el plano *justamente* necesario para tomar los datos citados en el folio 116<sup>v</sup>. ¿Por qué no conceder crédito a las descripciones que el propio autor hace?



**Figura 5.2:** Reproducción fiel del experimento para el folio  $\text{II6}^{\text{V}}$ . El *codo florentino* usado por Galileo, según Alexandre Koyré (Koyré, 1977) (pág. 280), equivale a 50,8 cm <sup>a</sup>

<sup>a</sup> **Nota del editor:** *La coudée florentine, utilisée sans doute par Galilée, contient 20 pouces, c'est-à-dire 1 pied et 8 pouces, et le pied florentin est égal au pied romain, qui est égal à 29,57 cm. El codo florentino, probablemente utilizado por Galileo, contiene 20 pulgadas, es decir, 1 pie y 8 pulgadas, y el pie florentino es igual al pie romano, que equivale a 29,57 cm.*

## 5.6. Una experiencia de 1979

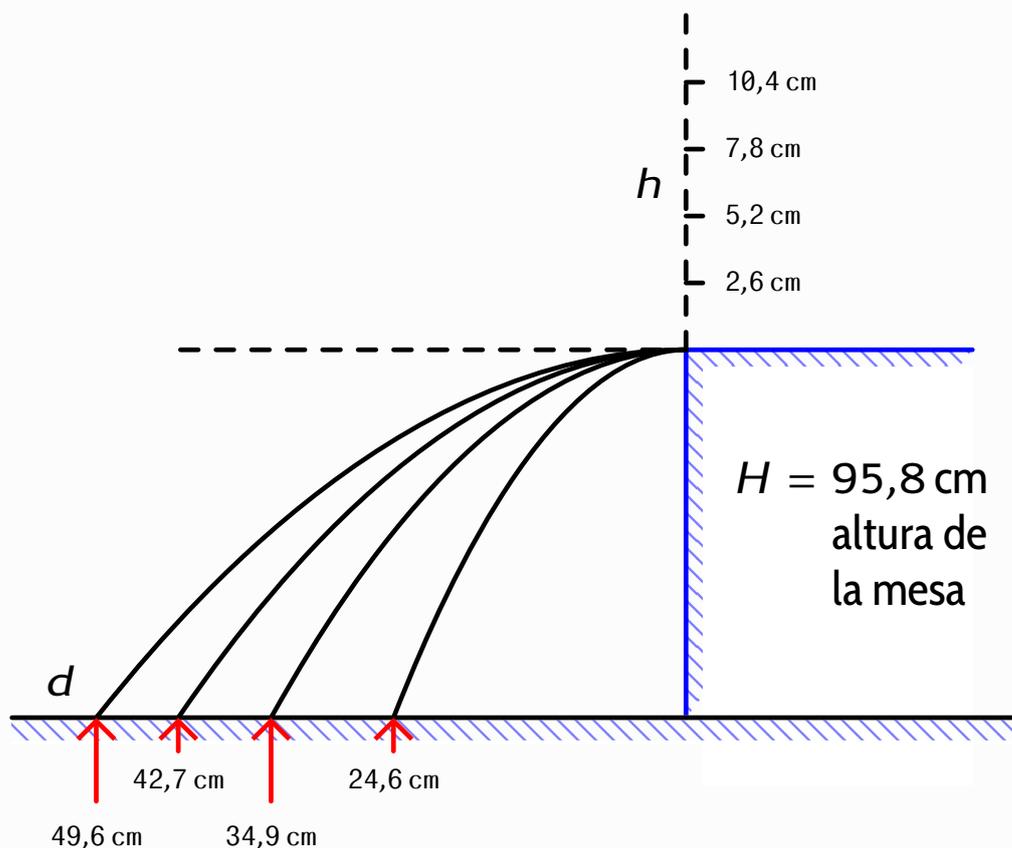
El análisis de los datos de la experiencia realizada por mí entre los días 17 y 20 de noviembre de 1979 quizás pudiera servirnos para apoyar lo que acabamos de exponer.

Los *registros horizontales* obtenidos en tal experiencia aparecen en el Capítulo 4 (pág. 90) dedicado a «Las trayectorias parabólicas». Si se consultan allí tales datos nos encontramos con una réplica *no intencionada* del folio  $\text{II6}^{\text{V}}$ . Y la califico de «*no intencionada*» porque el artículo de Thuillier tardaría aún seis años en llegar a mis manos, aunque el de Stillman Drake —que sigo sin conocer— había sido publicado seis años antes.

Hay que tener en cuenta que el deflector usado en estas experiencias medía 38,3 cm de longitud, por lo que podemos considerarlo responsable de parte de la energía disipada. Además el plano inclinado acelerador formaba un

ángulo de 3,32° con la horizontal.

Las alturas  $h$  no fueron *medidas* originalmente, pero han podido ser calculadas a partir de los datos que aparecen en el capítulo citado.



**Figura 5.3:** Registros horizontales de Galileo

La constante  $K$  vale:

$$K = \frac{20 \times 95,8}{7} = 273,7 \text{ cm}$$

Los valores  $\underline{K}$ , obtenidos a partir de  $d$  y  $h$ , oscilan entre 236,6 y 232,7 cm, por lo que los porcentajes de energía disipada están entre el 14% y el 15%. Si descontamos el que podemos atribuir al largo deflector horizontal los resultados no difieren demasiado del que hemos calculado para la experiencia del

folio 116<sup>v</sup>. Otro factor a tener en cuenta es que el ángulo  $\alpha$  en esta experiencia es de  $3,32^\circ$ , y no de  $9,6^\circ$  que es el que atribuimos al de Galileo, y ya hemos demostrado en el Capítulo 2 (pág. 51) que entre el *ángulo de inclinación*  $\alpha$  y el *rendimiento energético*  $\chi$  existe una relación cuantificable.

## 5.7. Para terminar

El artículo de Thuillier llegó a mis manos en 1985 a través de Juan Falgueras, líder del grupo de alumnos que durante el verano de 1977 se entretuvo trabajando en el problema de las trayectorias parabólicas. Juan Falgueras, que fue mi mejor alumno de aquellos años, acabó licenciándose en Físicas y en la actualidad ejerce como profesor universitario. La lectura del artículo me emocionó en su momento por el paralelismo que guardaba la experiencia de Galileo, interpretada por Drake, con el estimulante trabajo escalonado que diseñé para mis grupos de alumnos durante el curso 1979-80, trabajo que describo brevemente en el Capítulo 4 (pág. 90) que titulo «Las trayectorias parabólicas».

A finales del 2003, cuando redactaba precisamente el Capítulo 4, el artículo de Thuillier volvió a mi memoria y profundicé más en su contenido encontrando algunos de los argumentos que expongo en éste. Pero ha sido durante estos últimos días (escribo estas líneas el 7 de marzo de 2005) cuando he llegado, a mi parecer, hasta el fondo de la cuestión. Es como la culminación de un curioso «puzzle» en el que las piezas se hubieran ido ordenando por sí mismas a lo largo de los años.

Mi simpatía por Galileo se inició en 1957, cuando estudiaba 6° de Bachillerato y nuestro profesor de Religión defendió en clase la postura de la Iglesia en el «caso Galileo» usando los argumentos de Bertrand L. Conway, CSP. (Conway, 1957). Dicha simpatía no ha hecho sino aumentar a lo largo de los años. Por eso me llamó mucho la atención el entusiasmo puesto por Stillman Drake en la redacción de su biografía (Galilei, 1981) (pág. 160–161) y en el examen de estos folios no publicados buscando pruebas de la vertiente de Galileo como experimentador, tan desacreditada por Alexandre Koyré.

Por eso también me divertí enormemente, recién leído en 1985 el artículo de Thuillier, rehaciendo la experiencia ética de James McLachlan —quien a su vez rehacía la descrita por Galileo (Koiré, 1977) (pág. 252)— sacrificando gustosamente en ello una botella de vino tinto...

*«Se trata de lo siguiente: si lleno de agua un globo de cristal en el que se ha hecho un agujero tan pequeño como el grosor de una paja, y si, una vez lleno, lo vuelco con el agujero hacia abajo, el agua, a pesar de su peso y prontitud para descender en el aire, y el aire, igualmente dispuesto a elevarse en el agua dada su extrema ligereza, no se ponen de acuerdo, la una para caer, saliendo por el orificio, y el otro para subir, entrando por el mismo. Por el contrario, permanecen los dos hostiles y desconfiados. Si presento, por el contrario, a aquel orificio un vaso con vino tinto, que es una medida casi insensible más ligero que el agua, lo veremos inmediatamente elevarse lentamente a través del agua en forma de trazos rojizos, mientras que el agua, con la misma lentitud, descenderá en el vino sin mezclarse hasta que el globo esté completamente lleno de vino, por lo que el agua caerá al fondo del vaso colocado debajo»*

Salviati se muestra perplejo ante este relato, por lo que Alexandre Koyré (Koyré, 1977) (pág. 252) aprovecha la ocasión para lanzarse al ataque diciendo:

*«Confieso que comparto la perplejidad de Salviati. Es efectivamente difícil proponer una explicación del sorprendente experimento que acaba de referir. Tanto más cuanto que si se hiciera de nuevo tal como lo describe, veríamos el vino subir al recipiente de cristal (lleno de agua) y el agua bajar al vaso (lleno de vino); pero no veríamos el agua y el vino sustituirse pura y simplemente uno a otro: veríamos producirse una mezcla.»*

Koyré se pregunta:

*«¿Qué hay que concluir? ¿Hay que admitir que los vinos (tintos) del siglo XVII poseían cualidades que no poseen ya los vinos de hoy (...)?»*

¿O podemos suponer que Galileo, que sin duda no había puesto nunca agua en su vino —el vino era para él «la reencarnación de la luz del sol»— no hizo nunca este experimento, sino que, habiendo oído hablar de él, lo reconstituyó en su imaginación, admitiendo como algo indudable la incompatibilidad esencial y total del agua y del vino? Por mi parte creo que esta última suposición es la buena.

Lo cierto es que las experiencias —tanto la de McLachlan como la mía propia— *ratifican la veracidad del relato de Galileo*, con lo que se demuestra que Koyré, en su afán desmedido por hacer de Galileo un platónico puro, no se tomó la molestia de verificar por sí mismo el relato sino que, con alegría excesiva, llegó

a la conclusión de que Galileo no había hecho más que «*presentarnos como realizados efectivamente experimentos que se había limitado a imaginar...*»

Quizás del éxito que obtuve al rehacer la experiencia ética proceda la pregunta que me hago más arriba: «*¿Por qué no conceder crédito a las descripciones que el propio autor hace?*» Eso, sin duda, es lo me ha llevado a comprobar si la *descripción* y la *inclinación* del plano reseñadas por Galileo en el «Discorsi» son coherentes con los datos contenidos en el gráfico del folio 116<sup>v</sup>.

La afirmación koyresana de que los descubrimientos de Galileo (caída de cuerpos, trayectorias parabólicas) tienen una raíz platónica no es incompatible con el hecho que éste realizara las experiencias comprobatorias que describe. La dificultad principal (carencia de medios para medir con exactitud pequeños intervalos de tiempo) está ingeniosamente soslayada en el experimento que se condensa en el folio 116<sup>v</sup>. Por otra parte está la función «heurística» —como dice Thuillier— del experimento para «*sugerir de forma más o menos directa una idea teórica nueva*». Modestamente doy fe de la eficacia de esa «función heurística del experimento» para asimilar correctamente ideas teóricas aunque sean viejas.

Finalmente, en el artículo de Thuillier se cita a Pierre Costabel (Bonelli y Shea, 1975) como autor de un argumento, publicado en 1975, *en contra del carácter experimental del folio 116<sup>v</sup>*. Tampoco lo desarrolla porque «*es*» —dice— «*bastante complicado para detallarlo aquí*». Por supuesto que también me encantaría conocer ese argumento de Pierre Costabel.

## 5.8. Apéndice

### 30 de octubre de 2008

En un artículo de Alexander Hahn (Hahn, 2002) se habla de una revisión hecha por Stillman Drake, hacia 1985, de su primera interpretación del folio 116<sup>v</sup> intentando mejorar los resultados obtenidos en la primera. No me queda muy claro lo que pretendía Drake con ello. Para entenderlo tendría que reunir y traducir varios de los artículos citados por Hahn en el suyo, tarea que puede ser ideal para un jubilado como el que esto escribe.

La revisión consistió en considerar que la bola usada por Galileo medía 20 p de diámetro y el canal del plano 8,5 p de anchura, de modo que la bola rodaría manteniendo dos puntos de contacto con el plano, casos que yo mismo he tratado experimentalmente con mis alumnos. Intentaría con ello acercarse más, mediante una reconstrucción *puramente matemática*, a los valores experimentales de Galileo.

Este nuevo intento me confirma en la sospecha de que a nadie se le ha ocurrido pensar en la disipación de energía, *o bien que han considerado despreciable de antemano la influencia de este factor*, adjudicándole a la *fuerza de rozamiento* la tarea *estática y exclusiva* de evitar el deslizamiento y asegurar la rotación sincronizada con la traslación de la bola.

Aun sin conocer a fondo las razones que impulsaron a S. Drake a hacer esta revisión no la veo acorde con la descripción del plano que Galileo hace en el «Discorsi». ¿De dónde saca Drake el dato del diámetro de la bola? ¿Por qué habría de colocar Galileo «*dentro (del canal) un papel de pergamino lustrado al máximo*» si la bola no iba a tocar el fondo sino a rodar apoyándose en los bordes?

## Referencias

- Bonelli, Maria Luisa Righini y William R Shea (1975). *Reason, experiment, and mysticism in the scientific revolution*. Neal Watson Academic Publications, Inc. New York.
- Caffarelli, Roberto Vergara (2009). *Galileo Galilei and Motion: A Reconstruction of 50 Years of Experiments and Discoveries*. Springer, pág. 298. ISBN: 978-3-642-42730-5.
- Conway, Bertrand L. (1957). *Buzón de preguntas. Objeciones contra la religión más corrientes en nuestros días*.
- Drake, Stillman (1973). «Galileo's Experimental Confirmation of Horizontal Inertia: Unpublished Manuscripts». En: *Isis* 64.3, págs. 291-305.
- Drake, Stillman y James MacLachlan (1975). «Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory». En: *Scientific American* 232.3, págs. 102-111. ISSN: 00368733, 19467087.
- Galilei, Galileo (1981). *G. Galilei. "Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias"*. Ed. por Javier Sádaba Garay y Carlos Solís Santos. Editora Nacional. Madrid. ISBN: 9788439544975.
- Hahn, Alexander (2002). «The Pendulum Swings Again: A Mathematical Reassessment of Galileo's Experiments with Inclined Planes». En: *Archive for History of Exact Sciences* 56, págs. 339-361.
- Koiré, Alexander (1977). «Un experimento de medición». En: *Estudios de historia del pensamiento científico*. Siglo XXI. Madrid, págs. 274-305. ISBN: 968-23-0003-7.
- Teichmann, Jürgen (feb. de 2015). «Historical Experiments and Science Education - From Conceptual Planning of Exhibitions to Continuing Education for Teachers». En: *Interchange* 46.
- Thuillier, Pierre (1983). «Galileo y la experimentación». En: *Mundo Científico* 3.26, págs. 585-597.

### Los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup>

#### 6.1. Introducción

El día en que comienzo la redacción de este capítulo —6 de enero de 2007— se cumplen casi dos meses de mi iniciación como internauta. He localizado en Internet —pero no he logrado acceder a ellos— los artículos que Stillman Drake (solo o en colaboración con J. McLachlan), R.H. Naylor y D. Hill dedicaron en su día a estos folios inéditos de Galileo. Por otra parte he localizado reproducciones electrónicas a tamaño natural de los mencionados folios (Galilei, 1981), así como dos artículos —uno en castellano (Álvarez y Posadas, 2003) y otro en inglés (Hahn, 2002)— con abundante información sobre el contenido de los antes mencionados que por ahora me son inaccesibles.

Aunque conocía la existencia del folio 114<sup>v</sup> —una reproducción del mismo aparece en el artículo de Thuillier ya citado— el gráfico que aparece en el *anverso* de folio 81<sup>r</sup> —<sup>r</sup> por *recto* o *anverso*— ha constituido para mí una completa novedad. La intención inicial de mi búsqueda en Internet era satisfacer la curiosidad de por qué Drake y McLachlan abordaron la reconstrucción de la experiencia del folio 116<sup>v</sup> eligiendo para el plano una inclinación de 30°, después de iniciar la prueba con un ángulo de 64°, pero todo el material acumulado durante estos días ha disparado mi curiosidad e imaginación más allá

de este modesto límite, así que me he propuesto elaborar una opinión propia acerca de los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup>.

Después de mucho tiempo dedicado a traducir el artículo de Alexander Hahn (Hahn, 2002) —mis conocimientos de inglés son muy rudimentarios— he llegado a la conclusión de que los investigadores implicados en esta aventura utilizaron argumentos cinemáticos y dinámicos —e incluso puramente matemáticos— para elaborar sus propias reconstrucciones, pero que *ignoraron o soslayaron el aspecto energético*. Parece como si para ellos no existiera disipación de energía por rodadura o, al menos, no se alude a este tema en el extenso resumen del profesor Hahn. Él mismo —matemático— obtiene en el caso del folio 116<sup>v</sup> una relación entre la altura de la mesa  $H$ , las de partida de la bola  $h$  y el alcance horizontal de los vuelos  $d$  idéntica a la obtenida por mí en el capítulo anterior, pero no se basa para ello en argumentos energéticos sino en los cinemáticos y dinámicos ya mencionados. Él la escribe de este modo:

$$d = 2\sqrt{\frac{5}{7}}H\sqrt{h} \quad (6.1)$$

y aclara que con ella se obtendrían los valores de  $d$  en unas condiciones ideales, entre las que se cuenta «*una fuerza de fricción que haga rotar la bola sin deslizamiento y sin provocar impedimento adicional*». No se percata, al parecer, del interesante significado de la *constante teórica*:

$$K = \frac{20H}{7} \quad (6.2)$$

que junto a sus *valores empíricos aproximados*:

$$\underline{K} = \frac{d^2}{h} \quad (6.3)$$

siendo  $H$ ,  $d$  y  $h$  los datos facilitados por el propio Galileo, permiten calcular el porcentaje de la energía forzosamente disipada, como ya he demostrado en el capítulo anterior.

No obstante comenta que «*alternativamente esta ecuación puede ser establecida usando la ley de conservación de la energía*» y nos remite a un artículo (Hahn, 2002) (pág. 397–400) de W. R. Shea y N. S. Wolf —físicos al parecer— que polemizaron muy pronto con Drake acerca de la reconstrucción de la experiencia del folio 116<sup>v</sup>. Tengo localizado este artículo, pero tampoco he podido acceder a él, por lo que ignoro si estos autores aluden al efecto disipativo.

El artículo en castellano (Álvarez y Posadas, 2003) lo firman J. L. Álvarez G. e Y. Posadas V., profesores de la Universidad Nacional Autónoma de México. En él aparecen tablas con los resultados numéricos de las reconstrucciones llevadas a cabo por los historiadores ya citados, así como las alturas de salida de la bola  $h$  y los ángulos  $\alpha$  que dieron a sus planos inclinados.

En cuanto al efecto disipativo de las fuerzas de fricción por rodadura tampoco resulta aludido en este texto, limitándose sus autores a hacerlas responsables del movimiento acoplado de rotación y traslación de la bola, comentando que esto «*no representó ningún problema para que Galileo tuviera éxito...*» «*Aunque Galileo no era consciente de la influencia de estos factores, sus investigaciones de carácter experimental resultaron con un margen de error muy pequeño. En este punto no podemos decidir si fue suerte o intuición de visionario*»

## 6.2. Mis supuestos de partida

En capítulos anteriores he citado por extenso la descripción que Galileo hizo de su plano, de cómo elevaba uno de sus extremos «*hasta la altura de uno o dos codos, según pareciera*»<sup>1</sup>, y demostré que una inclinación de dos codos es suficiente —*disponiendo de toda la longitud del plano*— para alcanzar la  $h$  máxima de 1 000 p registrada en el folio 116<sup>v</sup>. ¿Por qué habría de elevarlo hasta 64° ó 30° como pretenden Drake y McLachlan? Tengo la intuición, bastante lógica por otra parte, de que Galileo *obtuvo sus resultados experimentales usando los medios más simples*. No creo que empleara —en las experiencias que se sugieren en estos folios— ángulos mayores al de los 9,5° que puede obtenerse elevando como máximo dos codos (101,6 cm) uno de los extremos de su plano de doce codos (609,6 cm)

Por otra parte estoy convencido de que los *datos* registrados en estos polémicos folios son experimentales y no producto de cálculos. Eso está muy claro en el folio 116<sup>v</sup>, en el que los *datos calculados* («*debería ser*») y los *valores experimentales* aparecen bien diferenciados y comparados entre sí, pero no ocurre lo mismo en los otros dos folios.

Utilizaré las ecuaciones 6.2 y 6.3 en las discusiones que siguen para estimar los valores de  $h$  posiblemente usados por Galileo. La confianza que deposito en su palabra —junto a esos valores estimados de  $h$ — me permitirá asignar valores a los ángulos de inclinación  $\alpha$  *de forma inexorable*. Es decir, estableceré una *relación forzosa* entre ambos parámetros ( $h, \alpha$ ) aplicando la lógica más estricta al relato del propio Galileo. Después reconstruiré teóricamente

<sup>1</sup> **Nota del editor:** Un *cubit* es una antigua unidad de longitud basada en la distancia desde la punta del dedo corazón de una persona hasta el codo

las experiencias de los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup>, y sólo los resultados obtenidos podrán servirnos para juzgar sobre la verosimilitud de la historia que propongo.

Otra de mis intuiciones me dicta que Galileo era consciente de lo que buscaba al diseñar las experiencias de los folios 81<sup>r</sup> y 114<sup>v</sup>, y que las diseñó y las realizó hasta llegar a la perfección en la del folio 116<sup>v</sup>. En la única experiencia con el plano inclinado que Galileo describió detalladamente (Galilei, 1981) (pág. 299) confirmó la ley que relaciona los recorridos  $s$  con los cuadrados de los tiempos  $t$  invertidos en la rodadura partiendo del reposo. Después supuso extensible esta ley a la caída libre de cualquier cuerpo, partiendo también del reposo. Llegar poco más adelante a la conclusión de que en los registros de los vuelos parabólicos debe cumplirse que:

$$d^2 \propto h \quad (6.4)$$

o, lo que es lo mismo:

$$v^2 \propto h \quad (6.5)$$

es algo que —implicando además el principio de la inercia y la superposición de movimientos— puede esperarse razonablemente del genio de Galileo. La relación 6.4 la somete *explícitamente* a prueba en el folio 116<sup>v</sup>, estando también *implícita* en el folio 114<sup>v</sup>, y la ecuación 6.5 —donde  $v$  es la velocidad de la bola en el instante en que alcanza el borde inferior del plano— está, a mi parecer, en el origen de la experiencia descrita en el folio 81<sup>r</sup>.

La opinión de Drake, compartida por otros estudiosos, de que los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup> corresponden a *experimentos fallidos* porque (Hahn, 2002) «sin geometría analítica (Galileo) careció de la herramienta matemática (necesaria) para obtener el éxito, siendo esa la razón de que nunca mencione estas investigacio-

nes», me parece poco afortunada. Por mi parte estoy de acuerdo total con la opinión expresada por Naylor que dice así (Hahn, 2002) (pág. 105–134): «*La opinión de que Galileo hiciera rodar esferas sobre planos inclinados, compilara una lista de observaciones y después se diera cuenta de su incapacidad para interpretar dicha información, ciertamente me parece poco propia del personaje*».

Quien haya leído los capítulos anteriores estará ya al tanto de mi familiaridad con el plano inclinado y con la disipación de energía correspondiente. Todo ese trabajo creo que me capacita para aventurar una interpretación verosímil de los folios 114<sup>v</sup> y 81<sup>r</sup>.

### 6.3. El folio 114<sup>v</sup>

Se trata más bien de un fragmento de folio en el que aparecen un diagrama y unos números que copiamos en la Figura 6.1. El resto del folio está repleto de cálculos que no arrojan ninguna luz sobre el enigmático diagrama.

Todos los historiadores antes citados se muestran de acuerdo en que se trata de una serie de trayectorias parabólicas *obtenidas sin deflector horizontal*, representando los números al pie de cada parábola los alcances horizontales  $d$  respectivos. Galileo no informa de la altura sobre el suelo  $H$  a la que se encuentra el borde inferior del plano inclinado, ni de las alturas  $h$  desde las que parte la bola para volar después hasta tocar el suelo, ni del ángulo  $\alpha$  que forma el plano inclinado con la horizontal...

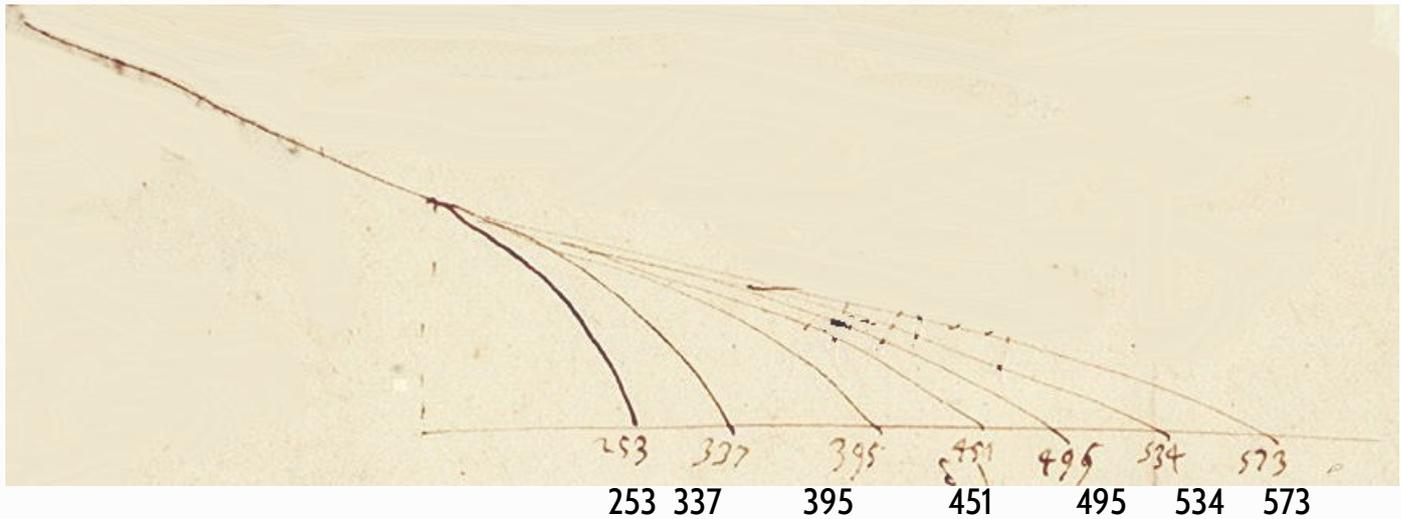


Figura 6.1: Transcripción del folio 114<sup>v</sup>

La herramienta matemática necesaria para abordar este problema de *proyección oblicua* se detalla a continuación y para captarlo bien he dibujado la Figura 6.2.

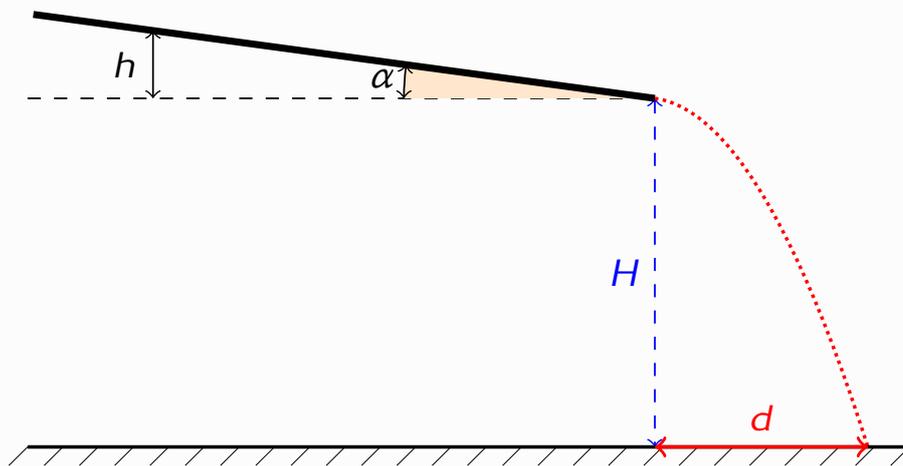


Figura 6.2: Datos para el problema de la *proyección oblicua*

La ecuación:

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} \quad (6.6)$$

en la que  $g$  es la aceleración en caída libre, nos permite calcular la velocidad del CM de la esfera al asomar por el borde inferior del plano inclinado. Se obtiene mediante un balance de energía en el supuesto de que esta se conserve íntegramente como cinética. Las ecuaciones:

$$d = vt \cos \alpha \quad (6.7)$$

y

$$H = vt \sin \alpha + \frac{1}{2} gt^2 \quad (6.8)$$

relacionan los alcances horizontales  $d$  y la distancia  $H$  con el tiempo de vuelo  $t$  y el ángulo  $\alpha$  que forma el plano con la horizontal. No son más que aplicaciones a este caso de las ecuaciones paramétricas de la parábola. Combinado estas ecuaciones entre sí se obtiene:

$$d = -\frac{5}{7} h \sin(2\alpha) + \sqrt{\left[\frac{5}{7} h \sin(2\alpha)\right]^2 + \frac{20}{7} h H \cos^2 \alpha} \quad (6.9)$$

En definitiva, si queremos *reproducir idealmente* los valores  $d$  que aparecen al pie de cada una de las supuestas parábolas del folio 114<sup>v</sup> tendremos que elegir ternas de *valores adecuados* para  $h$ ,  $H$  y  $\alpha$ . ¿Qué criterio seguir para hacer tal elección?

Drake usó un ángulo de  $26^\circ$  en la reconstrucción que hizo en solitario. En una posterior, con McLachlan, lo aumentó hasta  $30^\circ$ . En ambos casos ignoro el criterio seguido para hacer tales elecciones. Tampoco sé por qué Hill usó un ángulo de  $12,5^\circ$  para hacer la suya. No he encontrado justificación alguna para fijar las series de alturas  $h$  ni para la elección de  $H$  en ningún caso. Todos

ellos obtienen valores para  $d$  cercanos a los registrados por Galileo... Algo parece claro, y es que el problema admite *infinitas soluciones, como infinitas son las combinaciones que podemos hacer asignando valores a las tres variables manejadas*.

Para elaborar mi propia reconstrucción teórica empiezo suponiendo que  $H = 828$  p, lo que Galileo llama «*altura de la mesa*» en el folio 116<sup>v</sup>. Esta suposición es fruto consecuente de otras dos previas, a saber, que según la numeración de los folios la experiencia del folio 114<sup>v</sup> debió ser *algo anterior* en el tiempo a la del folio 116<sup>v</sup> y que Galileo tendría ya instalado su plano, pero aún sin el añadido del deflector horizontal.

Esta suposición justifica que, *en principio*, le asignemos a la constante teórica  $K$  el mismo valor que le correspondió en el folio 116<sup>v</sup>, o sea:  $K = 2\,366$  p. Ahora podemos aventurarnos al cálculo *estimativo* de la serie de valores  $h$  que pudo elegir Galileo para dejar partir la bola, puesto que debe cumplirse en cualquier caso que tales  $h$  deberían ser mayores que los obtenidos mediante los cocientes  $d^2/K$ , siendo  $d$  los valores de la serie registrada experimentalmente por Galileo en el folio 114<sup>v</sup>, y  $K$  la constante teórica que ya hemos supuesto.

En la experiencia del folio 116<sup>v</sup> Galileo ensayó *explícitamente* con valores enteros de  $h$ . Esto nos autoriza a redondear los valores estimados mediante  $d^2/K$  hasta números enteros, teniendo en cuenta la ineludible disipación de energía que acompañará a cada rodadura. El resultado de todo esto se recoge en la Tabla 6.1. Podemos estimar  $\alpha$  dividiendo  $h = 150$  p entre los 6 500 p que mide el plano:

$$\text{sen } \alpha = \frac{150}{6\,500} = 0,02307 \quad \text{que corresponde a: } \alpha = 1,32^\circ$$

Galileo $d$	Valores estimados $d^2/K$	Valores enteros de $h$ elegidos
253	27,0	30,00
337	48,0	50,00
395	65,9	70,00
451	85,9	90,00
495	103,5	110,00
534	120,5	130,00
573	138,7	150,00

**Tabla 6.1:** Valores estimados de  $h$  para el folio  $116^v$

Ya tenemos todo lo necesario para obtener *los valores ideales* de los desplazamientos horizontales  $d$  a partir de la ecuación 6.9. Ver la Tabla 6.2.

Los valores así calculados son *mayores que los experimentales* registrados en el folio  $114^v$ , pero las diferencias quedan sobradamente justificadas por la disipación ineludible de energía a lo largo de la rodadura. La constante teórica

Valores calculados $H = 828;$ $\alpha = 1,32^\circ$		Galileo $114^v$	Diferencias
$h$	$\underline{d}$	$d$	$\Delta$
30	265	253	12
50	342	337	5
70	404	395	9
90	458	451	7
110	506	495	11
130	549	534	15
150	589	573	16

**Tabla 6.2:** Valores calculados y los tomados por Galileo

$K$  y la fórmula para calcular el porcentaje de la energía que se disipa por roda-

dura son válidos estrictamente en las condiciones (proyección horizontal de la bola) en las que fueron deducidas. Si me he atrevido a usarlas aquí para hacer un cálculo *estimativo* de los valores de  $h$  ha sido en base a mi convicción —ya veremos por qué— de que Galileo debió hacer uso de valores muy pequeños para el ángulo  $\alpha$ . Véase que la proyección de la esfera en la experiencia registrada en el folio 114<sup>v</sup> resulta ser *casi horizontal*.

Me atrevo ahora a hacer un cálculo estimativo de los porcentajes de energía disipados. Ver la Tabla 6.3. Son algo menores, pero del mismo orden, que los obtenidos en su día para la experiencia del folio 116<sup>v</sup>. Recuérdese que en la experiencia que ahora analizamos no hay deflector horizontal, lo que supone un ahorro en la energía disipada. Opino, por lo tanto, que Galileo *no necesitaba*

$h$	$K = \underline{d}^2/h$	$\underline{K} = d^2/h$	$\chi = 100(1 - \underline{K}/K)$
30	2,341	2,133	8,9
50	2,339	2,271	2,9
70	2,334	2,229	4,5
90	2,329	2,260	3,0
110	2,326	2,227	4,3
130	2,322	2,193	5,6
150	2,319	2,189	5,6

**Tabla 6.3:** Verificación de Galileo de  $d^2 \propto h$  en el folio 114<sup>v</sup>

*de la geometría analítica para interpretar la experiencia del folio 114<sup>v</sup>.*

*Para someter a prueba su deducción previa  $d^2 \propto h$  necesitaba impulsar la esfera de desde una altura  $h$  y que la velocidad de salida fuera casi horizontal  $\alpha \rightarrow 0$ .*

Para ello, *disponiendo de la longitud total de su plano*, pudo realizar hasta siete ensayos espaciados de veinte en veinte puntos para  $h$ . En los cocientes de

la tercera columna de la Tabla 6.3, los numeradores  $d$  son *medidas realizadas* por el propio Galileo, y los denominadores  $h$  *medidas proyectadas y realizadas* también por él mismo de acuerdo con un plan que se revela trazado conscientemente. A mi parecer esta es la solución más económica que se le puede dar al enigma planteado por el folio 114<sup>v</sup>.

## 6.4. El folio 81<sup>r</sup>

Se trata de un folio casi en blanco en el que aparecen tres curvas —Figura 6.3— así como una frase latina, cuya traducción ofrecemos en la misma figura, y dos grupos de números que tienen evidente relación con el gráfico.

Todos los estudiosos del tema se muestran de acuerdo en que las tres curvas representan registros «horizontales», consistentes en interceptar el vuelo de la bola mediante un tablero, paralelo al suelo, colocado a distintas *distancias verticales* (ordenadas) del borde inferior del plano inclinado, para registrar sobre él las *distancias horizontales* (abscisas) de algunos puntos de las *presuntas* trayectorias parabólicas descritas en cada vuelo. Existe similitud con el folio 114<sup>v</sup>, salvo que en aquel se registraba un solo punto por cada trayectoria y se sugería la ausencia de deflector horizontal, cosa que aquí no se hace.

En su artículo (Álvarez y Posadas, 2003) (pág. 62–74) los profesores Álvarez y Posadas escriben: «Alrededor de 1600, el marqués Guidobaldo del Monte sugirió a Galileo un experimento capaz de revelar la forma de la trayectoria seguida por los graves al caer después de rodar a través de un plano inclinado» Añaden

más adelante que: «En 1603, Galileo intenta repetir la experiencia de Guidoaldo» Describen a continuación el montaje consabido para llevar a cabo la experiencia y suponen que la del folio 81<sup>r</sup> va encaminada a demostrar que dichas trayectorias son parabólicas.

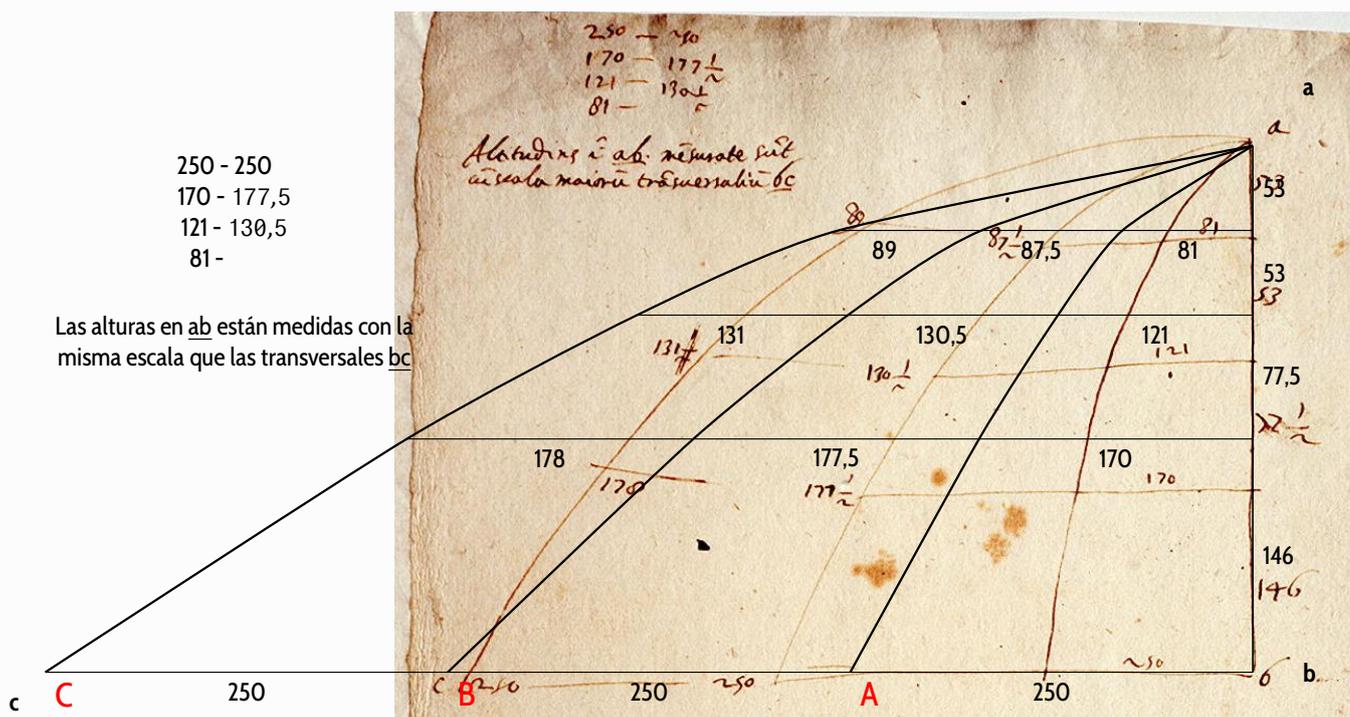


Figura 6.3: Transcripción del folio 81<sup>r</sup>

## 6.5. Mi opinión sobre el folio 81<sup>r</sup>

Empecé suponiendo que la bola era proyectada oblicuamente, pero con un ángulo pequeño y fijo, ya que en la figura no aparece sugerencia alguna y a la vista del precedente sentado en el folio 114<sup>v</sup>. Me dispuse a calcular el valor teórico aproximado de la constante  $K$  considerando la distancia  $(a, b)$  como

el valor  $H = 329,5$  p, resultando ser  $K = 941,43$  p.

Tomé los valores mayores correspondientes a  $d$  en las tres parábolas para *estimar* los de las alturas  $h$  desde las que Galileo debería haber dejado partir la esfera en cada caso. Convencido de que Galileo habría elegido los valores de  $h$  de acuerdo con alguna secuencia me dispuse a averiguarla dividiendo cada valor  $h$  estimado entre el menor de todos ellos  $h_A$ , encontrando algo *nada sorprendente*, como consta en la cuarta columna de la Tabla 6.4. Pero

Galileo 81 <sup>r</sup>	$d$	$h \geq d^2/K$	$h/h_A$
Curva (A)	250	66,389	1,0
Curva (B)	500	265,555	4,0
Curva (C)	750	597,495	9,0

**Tabla 6.4:** Comprobación de  $d^2 \propto h$  en el folio 81<sup>r</sup>

esta *obviedad* me hizo sospechar de inmediato que *Galileo estaba intentando comprobar la validez de la relación entre la altura de salida  $h$  y la velocidad de la bola  $v$  al llegar al borde inferior del plano, o sea, comprobar si se cumple que:*

$$v^2 \propto h$$

o, lo que es lo mismo, si:

$$v \propto \sqrt{h}$$

*y habría elegido para ello alturas relacionadas entre sí de modo tal que las velocidades al llegar al pie del plano fueran  $v$ ,  $2v$  y  $3v$ , lo que se traduciría en alcances horizontales  $d$ ,  $2d$  y  $3d$  relacionados del mismo modo.*

Pero esto implicaría que *el tiempo de vuelo debería ser el mismo en todas las parábolas, o sea, que la bola debería salir proyectada horizontalmente...* Sin

embargo, como los cocientes  $y/x^2$  *no se mantienen constantes* para cada parábola, como sería lo obligado en tal caso, *debe tratarse, sin duda, de proyecciones oblicuas...* (No es posible describir la excitación que provoca darse de bruces y de repente con toda esta información aparentemente contradictoria)

Una vez calmado *supuse* que Galileo debió partir de las alturas  $h_A = 70$  p,  $h_B = 280$  p y  $h_C = 630$  p *por aquello de la predilección que le atribuyo hacia los números enteros...*

Por mi parte justifiqué esta elección como propia para intentar una *reconstrucción teórica*, puesto que resulta ya evidente que parte de la *energía potencial inicial* se disipará por la rodadura. Pero, ¿qué ángulo de proyección elegir?

Pensé que si Galileo usó el mismo plano del que dispuso en las experiencias de los folios 114<sup>v</sup> y 116<sup>v</sup>, *aplicando el criterio de aprovechar toda su longitud*, tendríamos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{630}{6\,500} = 0,0969$$

o sea:

$$\alpha = 5,56^\circ$$

Calculé los valores de  $d$ , tomando el ángulo de  $5,56^\circ$ , y comprobé que se ajustan bastante bien los de la curva A, *pero que son disparatados los correspondientes a las curvas B y C*. Pensé entonces si la longitud del plano le permitiría realizar al menos *dos ensayos*, o sea:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{280}{6\,500} = 0,0431$$

de modo que:

$$\alpha = 2,47^\circ$$

Al probar con este nuevo ángulo obtuve para  $\underline{d}$  los valores que se recogen en la Tabla 6.5.

Altura $h_e$	Valor teórico $\underline{d}$	Galileo $d_e$	Diferencia $\Delta$
<b>Curva A</b> $h = 70 \text{ p}; \alpha = 2,47^\circ$			
53,0	98,6	81	17,6
106,0	141,2	121	20,1
183,5	187,1	170	17,1
329,5	252,1	250	2,1
<b>Curva B</b> $h = 280 \text{ p}; \alpha = 2,47^\circ$			
53,0	189,2	168,5	20,7
106,0	274,2	251,5	22,7
183,5	365,9	347,5	18,4
329,5	496,0	500,0	-4,0
<b>Curva C</b> $h = 630 \text{ p}; \alpha = 2,47^\circ$			
53,0	272,2	257,5	14,7
106,0	399,3	382,5	16,8
183,5	536,7	525,5	11,2
329,5	731,6	750,0	-18,4

**Tabla 6.5:** Diferencias entre las curvas teórica y de Galileo en folios 114<sup>v</sup> y 116<sup>v</sup>

Los tres primeros puntos de cada curva se ajustan bastante bien a lo que cabe esperar: los valores calculados son superiores a los experimentales, como era previsible, estando las diferencias comprendidas entre los 11 y los 22 p, siempre a favor de los calculados, ya que lo han sido suponiendo que no se disipa energía alguna por la rodadura. Incluso el cuarto punto de la curva A cumple todos los requisitos, salvo que la diferencia es demasiado pequeña respecto a las tres anteriores.

En cuanto al cuarto punto de las otras dos curvas las diferencias resultan negativas. Este detalle, desconcertante por lo absurdo en relación a los demás

datos, me hizo pensar que de las tres anotaciones hechas por Galileo en la transversal inferior tan sólo la primera —los 250 p correspondientes a la curva A— *corresponde a un dato experimental necesario para diseñar el ensayo, siendo las otras dos expresiones anticipadas de los resultados que esperaba obtener si la hipótesis que estaba sometiendo a verificación resultara ser correcta.*

Pero tal hipótesis no puede ser refrendada con toda exactitud mediante una experiencia en la que la bola es proyectada oblicuamente, como parece serlo en este caso. Galileo quizás fuera perfectamente consciente de ello, pero, a mi parecer, *se veía obligado a buscar un procedimiento que le permitiera conciliar dos necesidades antagónicas: impulsar la bola de forma medible  $h$  y lograrlo sin distorsionar demasiado la horizontalidad.* Todavía no se le habría ocurrido la idea de acoplar un deflector horizontal para independizar la *condición de horizontalidad de la necesidad de medir  $h$ .* Es posible que la idea del deflector surgiera inmediatamente después de la experiencia folio 114<sup>v</sup>.

Naturalmente Galileo ignoraba todo lo referente a la inevitable disipación de energía, pero esta circunstancia, *que afectaría con cierta uniformidad a todos sus resultados,* no le impediría una confirmación aproximada de su hipótesis. *Lo que me resulta muy extraño es que los historiadores y matemáticos que se han ocupado de este asunto durante los últimos treinta años no hayan involucrado la disipación de energía en sus reconstrucciones.*

Otro enigma secundario es el de cómo lograría Galileo registrar los puntos relativos a la curva C, cuyas coordenadas constan en el diagrama, *pero no están registradas en la lista que aparece en el ángulo superior izquierdo del folio.* Supongo que Galileo diseñaría inicialmente la experiencia para las alturas  $h$  de 70 y 280 p que le resultaban accesibles con su plano de doce codos. Debió pensar después que *«una sola golondrina no hace verano»*, y es posible que

decidiera cazar una segunda golondrina usando el plano de doce codos como deflector, sin alterar el ángulo de  $2,47^\circ$  logrado, acoplándole en la parte superior otro plano *con una inclinación superior* que le permitiera alcanzar los 630 p necesarios sin recurrir a una longitud exagerada.

Si se admite la interpretación que ofrezco dejan de resultar extraños los *vacíos* del reverso y de la mitad inferior de este folio, *vacíos* que han sido considerados por Alexander Hanh como «*prueba de la incapacidad de Galileo para interpretar las curvas obtenidas*». Pero —a mi parecer— *Galileo no tenía que interpretar nada*. Quizás esperaba *comprobar* solamente si los resultados experimentales se ajustaban a las expectativas creadas por las condiciones que él mismo había impuesto y *acotado empíricamente con el primer ensayo*, el de la curva A. Y lo cierto es que el ajuste resulta bastante bueno y debió satisfacer a su autor. *No se trata, a mi juicio, de un experimento fallido ni abandonado, sino de todo un éxito que revela la sagacidad y la habilidad de Galileo como experimentador.*

Como sugiere la numeración de los folios, la experiencia plasmada en éste debió ser anterior a las de los otros dos. La opinión generalizada entre los historiadores, de que Galileo intentaba probar con el folio 81<sup>r</sup> la sugerencia de Guidobaldo del Monte acerca de «*la forma de la trayectoria seguida por los cuerpos que caen después de ser impulsados*», me resulta muy extraña y rebuscada. Si era eso lo que pretendía Galileo bien pudo centrarse en *una sola curva y obtener más puntos de ella* en lugar de registrar solamente *cuatro puntos de tres curvas distintas*.

Pretendo sugerir con esto que la experiencia del folio 81<sup>r</sup> debió ir encaminada más bien a verificar la hipótesis  $v^2 \propto h$  que a probar algo *que resultaría ser matemáticamente cierto* si sus experimentos se vieran coronados por el éxito.

## 6.6. Conclusiones

Creo haber ofrecido una interpretación coherente de las experiencias contenidas en los folios 81<sup>r</sup> y 114<sup>v</sup> basándome en:

- a) La descripción que Galileo hace de su plano
- b) El propósito que le atribuyo de aprovechar toda su longitud en cada ensayo
- c) La interpretación ofrecida por Stillman Drake del folio 116<sup>v</sup>
- d) La interpretación del significado teórico que yo mismo hago de la constante  $K$
- e) Mi propia labor experimental de años en torno a este asunto

Estas piezas de procedencias tan distintas parecen encajar razonablemente bien.

El hecho de que parte de la energía potencial gravitatoria inicial debería disiparse por la rodadura —que parece no haber sido tenido en cuenta hasta ahora— se me antoja fundamental para interpretar estos folios. Una interpretación *puramente matemática* —como la que hace Hanh de los datos registrados en el folio 81<sup>r</sup>— más bien ensombrece que aclara la intención perseguida por Galileo con el diseño de esta experiencia.

### Referencias

Álvarez, J. L. e Y. Posadas (2003). «La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física». En: *Revista mexicana de física* 49.1, págs. 62-74.

- Galilei, Galileo (1981). *G. Galilei. "Consideraciones y demostraciones sobre dos nuevas ciencias"*. Ed. por Javier Sádaba Garay y Carlos Solís Santos. Editora Nacional. Madrid. ISBN: 9788439544975.
- Hahn, Alexander (2002). «The Pendulum Swings Again: A Mathematical Reassessment of Galileo's Experiments with Inclined Planes». En: *Archive for History of Exact Sciences* 56, págs. 339-361.

### Un relato ilustrado

16 a 19 de marzo de 2009

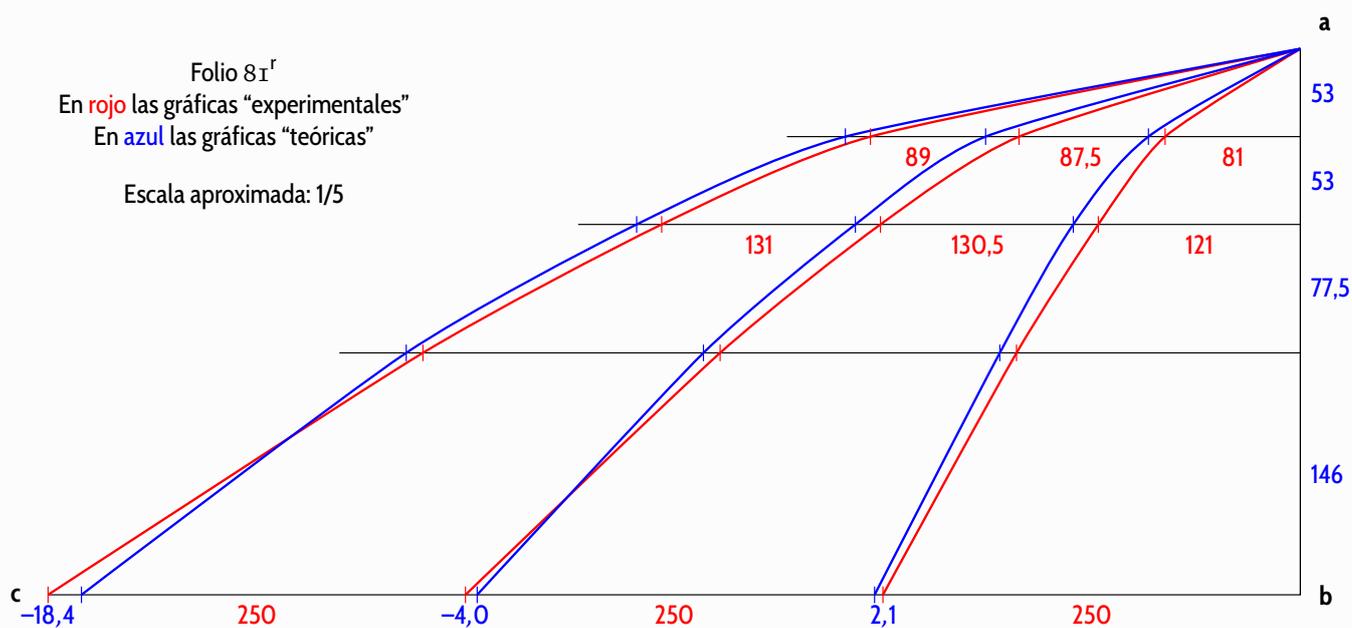
---

Ayer, 16 de marzo, me desperté a las siete y media de la mañana, como viene siendo habitual en mí de un tiempo a esta parte. Sin nada mejor que hacer pensé dedicar unas horas a ejercitarme con el programa de dibujo, muy abandonado durante los últimos meses.

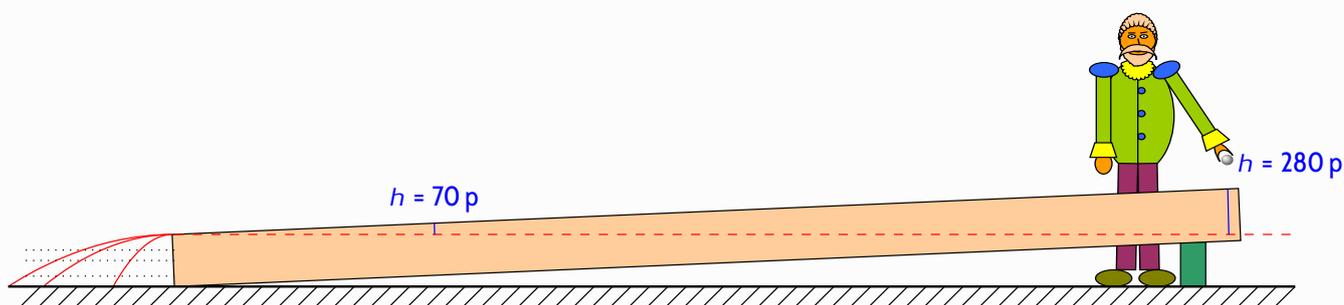
Decidí, además, abordar un proyecto largamente aplazado: hacer reproducciones a escala  $1/5$  de las trayectorias dibujadas por Galileo en el folio  $8I^r$  y de las que se habrían obtenido en ausencia de fricción, de acuerdo con la teoría que expuse en el Capítulo 6 (pág. 126). Al cabo de un rato había terminado mi labor que paso a exponer en la Figura 7.1. Como tenía tiempo por delante decidí dibujar el plano usado por Galileo, según su propia descripción, disponiéndolo con el ángulo de  $2,47^\circ$  que —según mi reconstrucción teórica— debió darle Galileo para obtener las curvas que aparecen en el folio  $8I^r$ . Elegí la escala  $1/50$  y me entretuve dibujando también a la misma escala una figura humana de  $1,70$  m de estatura que debería representar al propio Galileo.

*¿Por qué —me pregunté— no añadir al pie del plano una reproducción a la misma escala del folio  $8I^r$ ?*

Lo hice... Y obtuve la Figura 7.2, que me deparó una curiosa sorpresa.



**Figura 7.1:** Reproducción de las trayectorias del folio 81<sup>r</sup>



**Figura 7.2:** Galileo tomando los datos de las dos primeras parábolas del folio 81<sup>r</sup>

*¡Dios mío, —pensé— cuando Galileo hizo esta experiencia lo más probable es que tuviera el plano situado en el suelo!*

Recordé que Galileo asigna a su plano «medio codo de anchura más o menos». Calculé que medio codo son 272 p frente a los 329,5 p que mide el eje vertical que aparece en el folio 81<sup>r</sup>. Pero el propio Galileo matiza su afirmación con un «más o menos». Debemos tener en cuenta que esta descripción del plano se redactó treinta años después de unos hechos que debieron acontecer entre 1603 y 1604, cuando Galileo contaba 39 años y era un tipo fornido capaz de

manejar —solo o con ayuda de otro— un tablón de más de cincuenta kilos de masa...

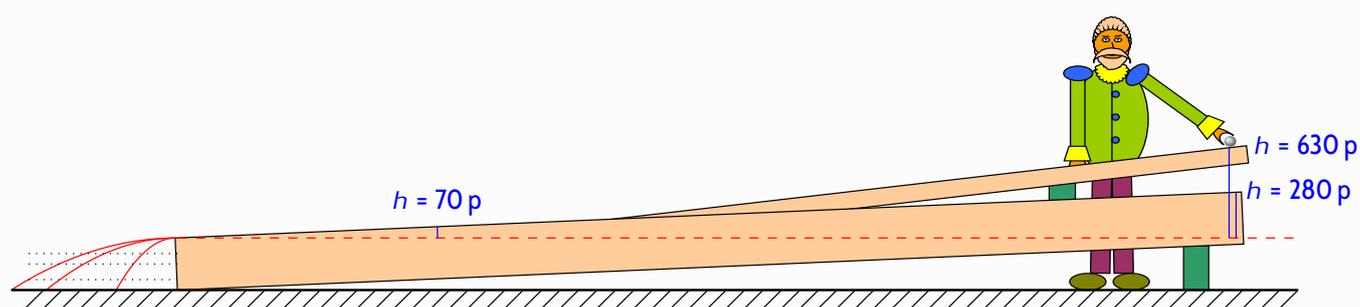
Es posible que antes de tomar los datos del folio 81<sup>r</sup> Galileo hubiera estado realizando —con su plano de escasa inclinación apoyado en el suelo— las experiencias que describe en los «Discorsi» para justificar *empíricamente* la relación  $s \propto t^2$ .

(En un artículo —que ya he comentado— T. B. Settle describe la reconstrucción que él mismo hizo de estas experiencias —las únicas relativas al plano inclinado narradas con cierto detalle en los «Discorsi»— demostrando que es posible medir tiempos con un margen de error inferior a «una décima de pulsación» con unos medios análogos a los usados en su día por Galileo.)

Echándole al asunto un poco de imaginación podemos suponer que después de realizar esta famosa y discutida experiencia —y sin cambiar la inclinación del plano— Galileo pudo pasar a comprobar si era cierto que  $v \propto h$  —consecuencia de la ley que acababa de descubrir extendida a la caída libre combinada con el principio de la inercia y el de superposición de movimientos— como ya he desarrollado en el Capítulo 6 (pág. 126). *Tomaría el primer dato experimental sobre el suelo ( $d = 250$  p para  $h = 70$  p), y es posible que también el otro dato ( $d = 500$  p para  $h = 280$  p), que vendrían a confirmar su sospecha. Después recurriría a gruesos libros en los que apoyar un papel para registrar los seis puntos restantes de las dos parábolas más cerradas, que, bien mirado, vienen a confirmar también su sospecha dentro de unos límites de error admisibles.*

Para obtener los datos correspondientes a la tercera parábola —la más abierta— Galileo debería haber dispuesto de un plano de unos 14 m de longitud

para mantener el mismo ángulo de inclinación de  $2,47^\circ$ . Para obviar este inconveniente bien pudo colocar un corto plano auxiliar acoplado al primero pudiendo así alcanzar la altura  $h = 630 p$  conservando el primer plano como deflector *no horizontal*  $\alpha = 2,47^\circ$  tal como se muestra en la Figura 7.3.



**Figura 7.3:** ¿Cómo pudo Galileo tomar los datos correspondientes a la tercera parábola del folio 81<sup>r</sup>

*Un factor que ha contribuido a mi despiste durante años es que, siendo los originales de los tres folios 81<sup>r</sup>, 114<sup>v</sup> y 116<sup>v</sup> de dimensiones análogas, las parábolas del folio 81<sup>r</sup> aparecen muy amplificadas en relación a las de los otros dos. Me sonroja reconocer que hasta que no he reducido los tres a la misma escala 1/50 para hacer los dibujos precedentes no he caído en la cuenta de las nuevas posibilidades de interpretación que se me ofrecen.*

He demostrado en el Capítulo 6 (pág. 126) que disponiendo ese mismo plano con una inclinación  $\alpha = 1,32^\circ$  y colocando el extremo inferior a una altura de  $828 p$ , pueden explicarse las parábolas que aparecen en el folio 114<sup>v</sup> según se ilustra en la Figura 7.4.

Galileo pretende comprobar experimentalmente si  $d^2/h$  se mantiene constante con cierta aproximación —otra de las consecuencias de la extensión de

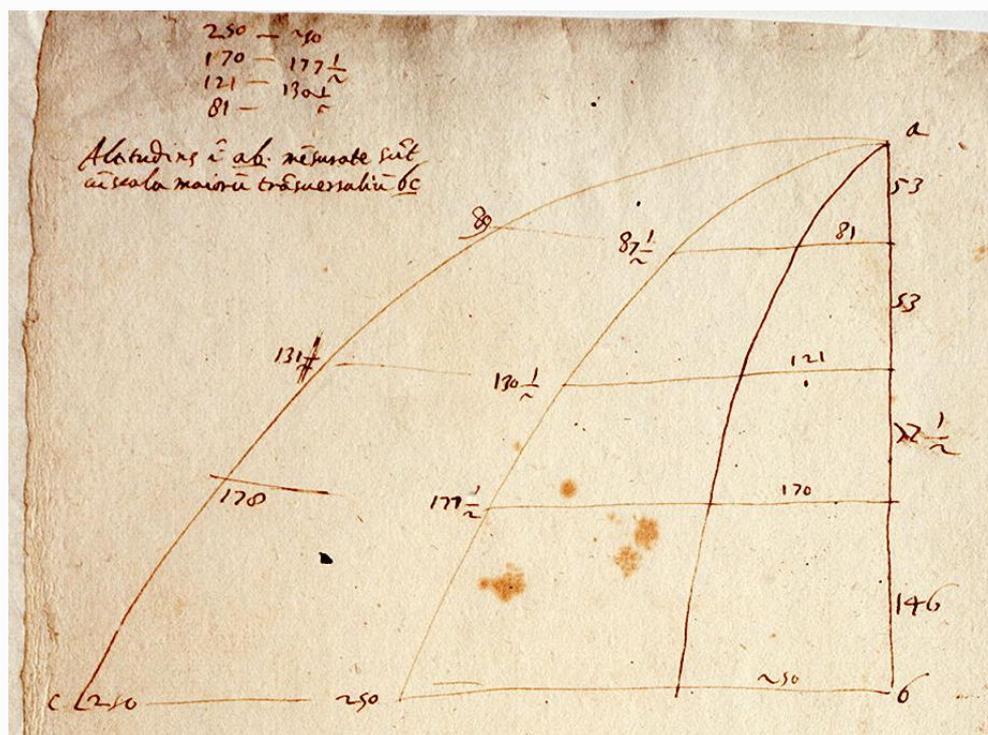


Figura 7.4: Fragmento del folio 81<sup>r</sup>

su ley recién descubierta de la caída libre combinada con el principio de la inercia— intuyendo que la cosa debería salir tanto mejor cuanto más próxima a la horizontal sea la disposición del plano. Los 828 p de caída libre no se han elegido al azar: *Se trata de la altura de la mesa que va a servir como deflector horizontal en la experiencia siguiente contenida en el folio 116<sup>v</sup>.*

Entre las explicaciones que ofrezco de los folios 81<sup>r</sup> y 114<sup>v</sup> existe un claro nexo de unión: *El plano usado es el mismo en ambos casos y se aprovecha su longitud íntegra, lo que determina de forma inexorable los valores de  $\alpha$  en ambos casos. Por otra parte los folios 114<sup>v</sup> y 116<sup>v</sup> están ligados entre sí, además, por la altura de la mesa deflectora.*

Por supuesto la perfección la logra Galileo con la experiencia reflejada en el folio 116<sup>v</sup>. Cuando añade el *deflector horizontal* las cosas empiezan a funcionar mejor *porque en esta serie de experiencias el tiempo invertido en recorrer cada una de las parábolas es el mismo con total independencia de  $h$ .* Pero se ignora

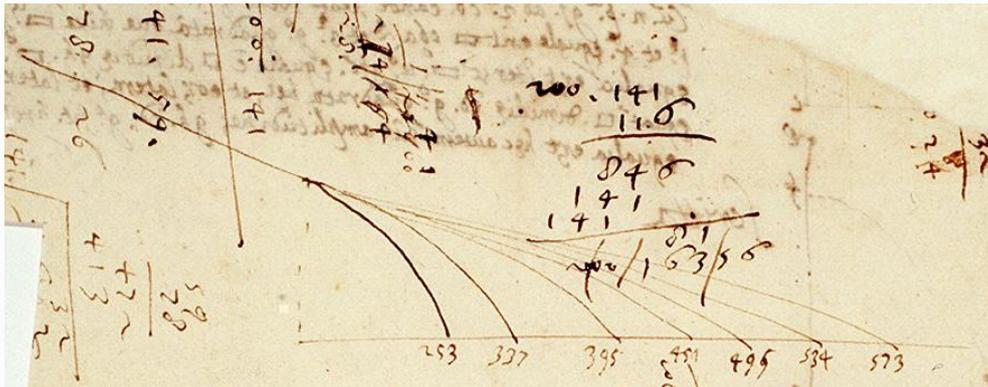


Figura 7.5: Fragmento del folio II4<sup>V</sup>

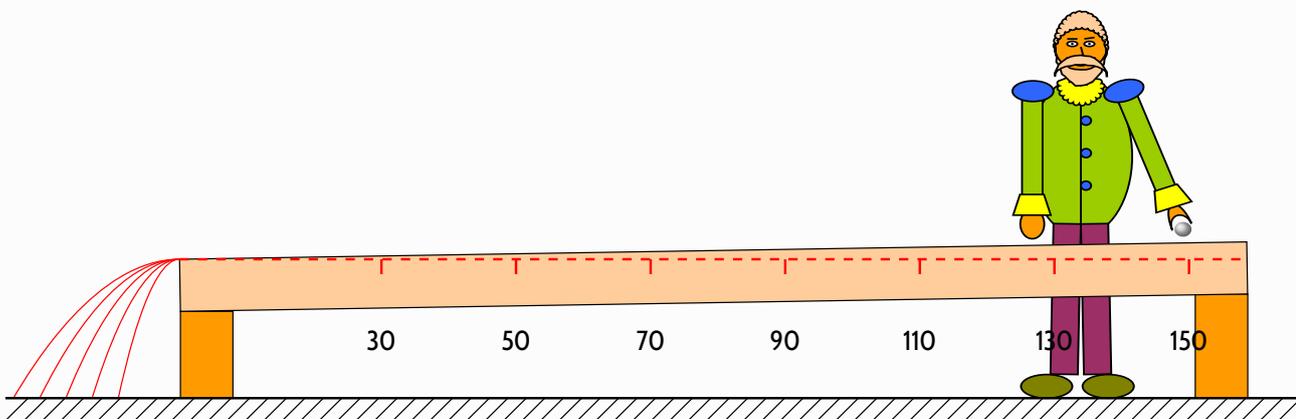


Figura 7.6: Galileo tomando los datos del folio II4<sup>V</sup>

cual fue ángulo elegido por Galileo para inclinar el plano. De nuevo, siguiendo su propia descripción, calculo que debió ser un ángulo de  $9,6^\circ$ , lo que permite usar el mismo plano en toda su longitud y que Galileo pudiera colocar la bola en el punto más alto posible, como se muestra en la Figura 7.5.

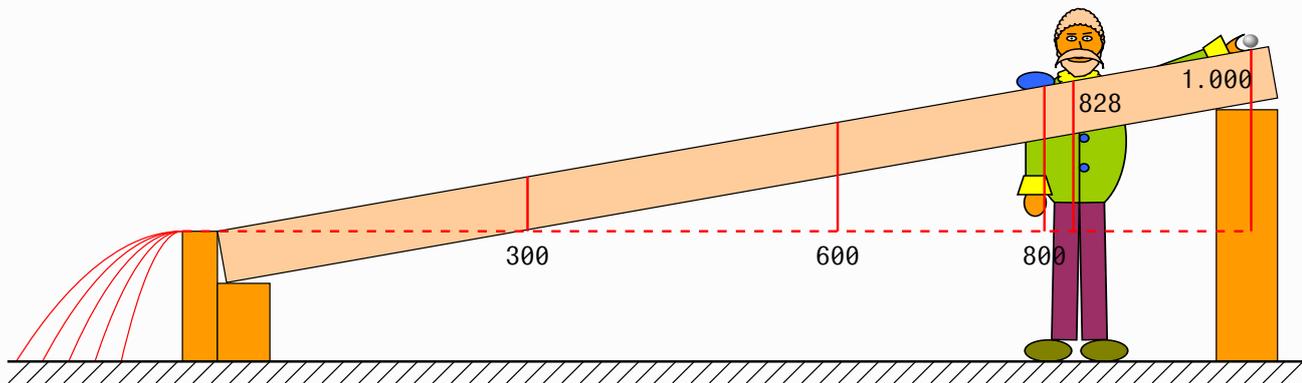


Figura 7.7: Galileo tomando los datos del folio II 16<sup>V</sup>

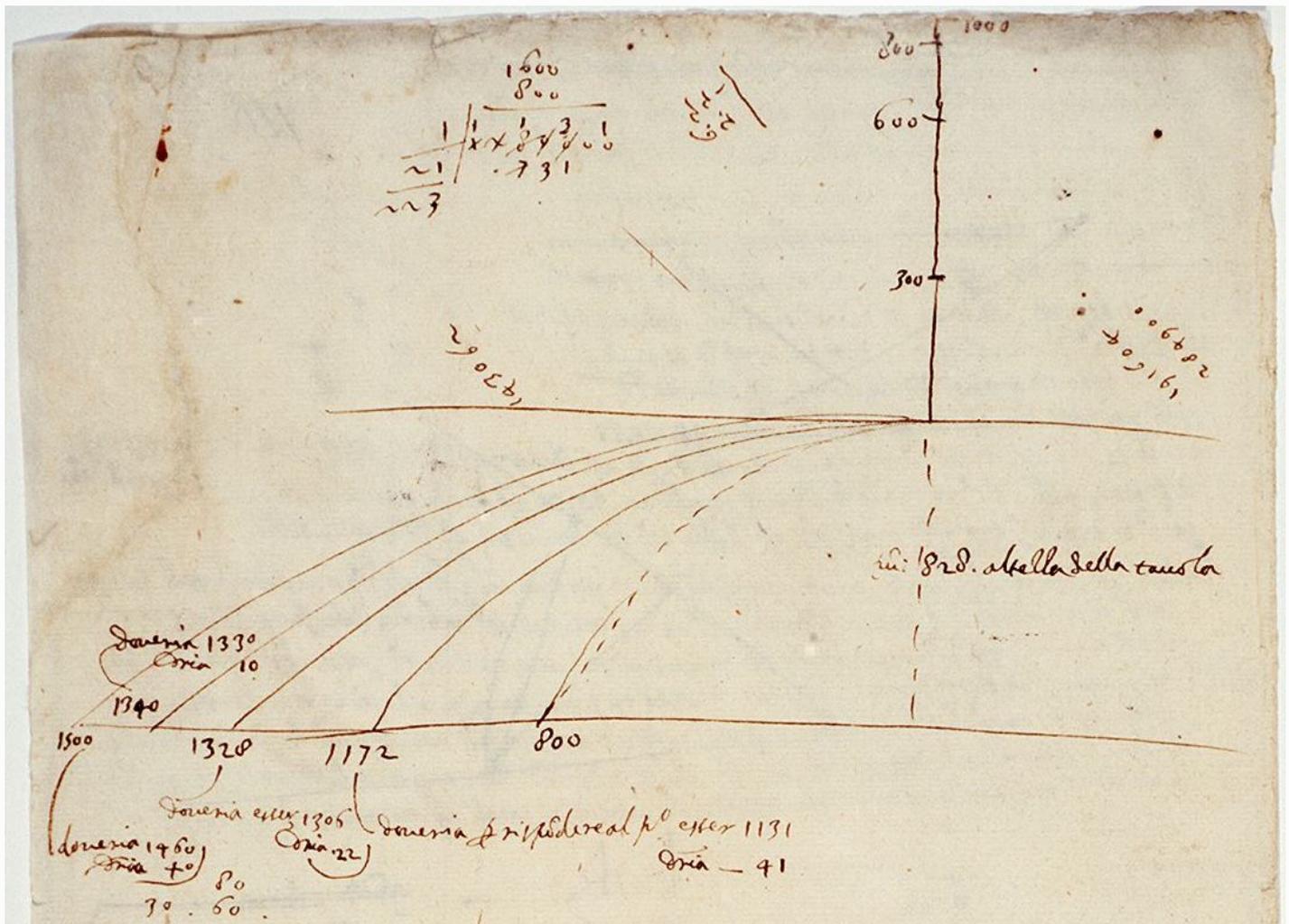


Figura 7.8: Fragmento del folio II 16<sup>V</sup>

## Últimos comentarios y experiencias

### 8.1. 23 de abril de 2009

La sospecha expuesta al principio del capítulo anterior acerca de la génesis del folio 81<sup>r</sup> me ha impulsado a profundizar en el estudio que inicié en el Capítulo 6 (pág. 126).

Para facilitar el trabajo he pasado al Sistema Cegesimal de Unidades los datos experimentales registrados en «puntos» (p) por Galileo. Esos datos —altura de caída  $H$  y distancia recorrida en horizontal  $d$ — vienen relacionados mediante las ecuaciones 6.7 y 6.8 que nos permiten calcular la velocidad  $v_{\text{CM}}$  del centro de masa de la esfera rodante en el instante en que asoma por el borde del plano para describir cada una de las parábolas. Combinando esas ecuaciones se obtienen estas otras:

$$t = \sqrt{\frac{2(H - d \tan \alpha)}{g}} \quad (8.1)$$

y

$$v_{\text{CM}} = \frac{d}{t \cos \alpha} \quad (8.2)$$

Los resultados obtenidos para  $v_{CM}$  permitirían juzgar si el valor  $2,47^\circ$ , que atribuí en su momento al ángulo  $\alpha$ , resulta convincente.

Por otra parte la ecuación 6.6 permite el cálculo de la velocidad  $\underline{v}_{CM}$  que debería presentar en ese mismo instante el centro de masa de la bola rodante en el caso ideal de ausencia de fricción. El porcentaje de energía disipado en cada rodadura podemos obtenerlo mediante la ecuación 1.15.

Este porcentaje puede también suministrarnos indicios para juzgar acerca de la bondad de la interpretación que proponemos.

## 8.2. ¿Fue Galileo muy cuidadoso al medir longitudes?

Parece que sí, puesto que se muestra capaz de aquilatar hasta el «medio punto» en cuatro de las anotaciones que aparecen en el folio 8I', lo cual parece increíble si tenemos en cuenta que el punto equivale a  $0,94$  mm. Pero mi propia experiencia me enseña que puedo apreciar hasta «medio milímetro» al localizar el centro de la huella circular dejada por una bola al impactar, de modo que vamos a concederle a Galileo un margen de confianza.

Pero ¿qué referencia usó Galileo para *medir* las abscisas anotadas en el mencionado folio? Se trata, al parecer, de un eje «vertical», pero a la vista de las Figura 7.2 y 7.3 del Capítulo 7 (págs. 147 y 149) podemos preguntarnos si tal eje no formaría un ángulo de  $2,47^\circ$  a la derecha de la vertical.

Según mi opinión Galileo diseñó este experimento para someter a prueba una idea que ya expuse en su momento. Podemos ahora imaginar que dejando

rodar la bola desde los 70 p de altura anotó que venía a impactar sobre el suelo a 250 p contados a partir de... ¿dónde? Es posible que tomara como referencia el punto en el que el plano inclinado se apoyaba sobre el suelo, con lo que estaría cometiendo un error *por exceso* de unos 14 p al anotar el alcance horizontal de ese impacto... *Todas las abscisas que aparecen en el folio 81<sup>r</sup> vendrían afectadas por errores fáciles de calcular si aceptamos esta hipótesis.*

Ya he expresado en otro lugar mi opinión de que la abscisa de *ese punto concreto* es *experimental*, pero que *no lo serían las de los otros dos puntos registrados sobre la misma horizontal*, sino que más bien expresarían las expectativas albergadas por Galileo si la idea que estaba sometiendo a prueba resultara ser correcta. Todos los demás puntos registrados, *salvo esos dos*, serían *experimentales* y aptos para proceder al cálculo de  $v_{CM}$  por aplicación de las ecuaciones 8.1 y 8.2 después de practicadas las oportunas correcciones en  $d$ . (Ver Figura 8.1) En la Tabla 8.1 se muestran los resultados obtenidos aplicando tales

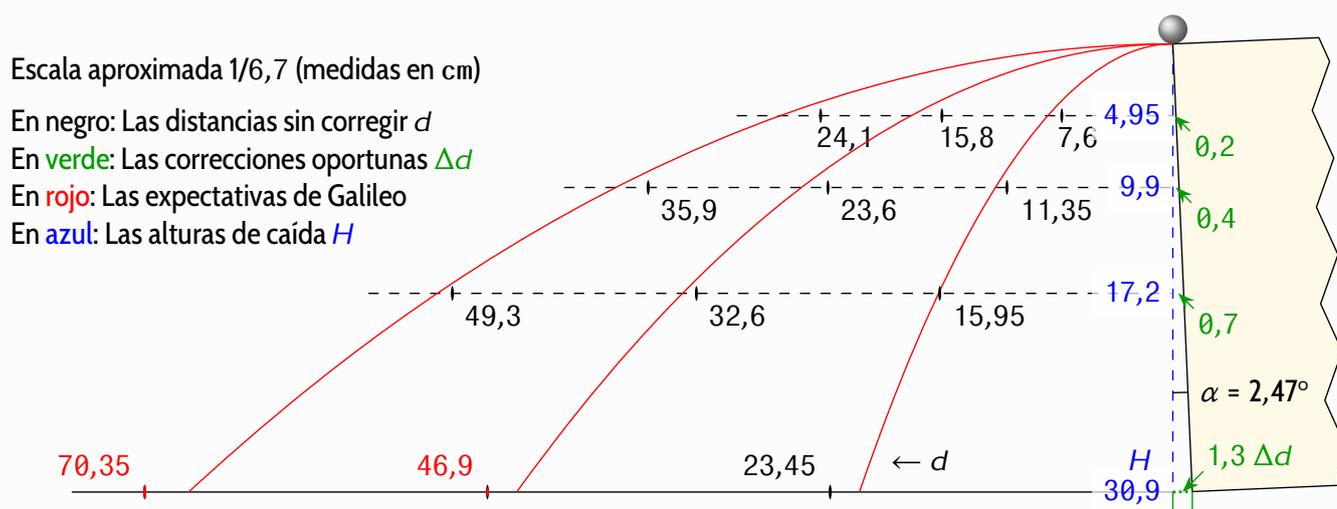


Figura 8.1: Precisión de los datos de Galileo

ecuaciones a la parábola más cerrada. Le velocidad  $v_{CM}$  en ausencia de fricción

sería:

$$\underline{v}_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{10 \times 980 \times 6,57}{7}} = 95,7 \text{ cm/s} \quad (70 \text{ p equivalen a } 6,57 \text{ cm})$$

$H$ cm	$d$ cm	$v_{\text{CM}}$ cm/s	$\chi$ %
4,95	7,4	76,2	37
9,9	10,95	78,9	32
17,2	15,25	82,9	25
30,9	22,15	89,7	12

**Tabla 8.1:** Ecuaciones de las parábolas en el folio 8I'

Lo ideal para nuestros propósitos hubiera sido que en las columnas encabezadas por  $v_{\text{CM}}$  y  $\chi$  aparecieran valores *constantes*. De todas formas los últimos valores, señalados en azul, son los más fiables puesto que los datos de partida son los que resultan afectados por un error relativo mínimo. La progresión creciente (76,2 hasta 89,7), registrada en la columna de la velocidad, se haría mucho más acusada (78,3 hasta 95,8) si hubiéramos usado los valores  $d$  *sin corregir*. Por otra parte, el valor (95,8) es *precisamente* el que resulta del cálculo de  $\underline{v}_{\text{CM}}$  *en ausencia de fricción*, lo cual lo convierte absurdo puesto que, como ya sabemos, la fricción es ineludible. *Estas consideraciones demuestran que las correcciones practicadas en  $d$  son oportunas.*

Para la parábola intermedia resulta:

$$\underline{v}_{\text{CM}} = 191,8 \text{ cm}$$

La Tabla 8.2 muestra los resultados obtenidos para esta parábola.

Debemos descartar los valores señalados en rojo por dos razones:

$H$ cm	$d$ cm	$v_{CM}$ cm/s	$\chi$ %
4,95	15,6	167,1	24
9,9	23,2	172,3	19
17,2	31,9	177,6	15
30,9	45,6	187,8	4

**Tabla 8.2:** Valores de la parábola intermedia

- a) La distancia horizontal (45,6 cm) *no es un valor experimental*
- b) La velocidad obtenida (187,8 cm/s) *resulta ser muy próxima a la ideal sin fricción*

Por lo tanto los valores más fiables son los señalados en azul, ya que han sido calculados a partir de datos experimentales corregidos y presentan un porcentaje de energía disipada del mismo orden que el resultado más fiable de la parábola anterior.

Para la parábola más abierta tendremos:

$$\underline{v}_{CM} = 291,6 \text{ cm/s}$$

La Tabla 8.3 muestra los resultados obtenidos para ella. Debemos descartar

$H$ cm	$d$ cm	$v_{CM}$ cm/s	$\chi$ %
4,95	23,9	267,2	16
9,9	35,5	272,1	13
17,2	48,6	277,1	10
30,9	69,05	289,5	1,4

**Tabla 8.3:** Valores de la parábola más abierta

los resultados señalados en rojo por las dos razones ya expuestas.

El señalado en azul es el mejor, pero los otros dos son también bastante buenos. No es de extrañar, puesto que los datos de partida en esta parábola vienen afectados por valores mínimos de error relativo. En las tres tablas los resultados señalados en azul presentan valores para  $\chi$  comprendidos entre un 10 y un 15 %. Más adelante volveremos sobre este hecho. El análisis que acabo de hacer de estas parábolas confirma que:

- a) Las dos primeras parábolas fueron obtenidas con un plano de doce centímetros, apoyado quizás en el suelo, e inclinado un ángulo de  $2,47^\circ$  sobre la horizontal, como se había previsto.
- b) Para obtener la tercera parábola Galileo debió hacer uso de un plano auxiliar.
- c) La experiencia fue diseñada por Galileo para confirmar empíricamente una hipótesis genial, y no era necesario hacer de ella interpretación matemática alguna.
- d) La experiencia resultó un rotundo éxito confirmándose la hipótesis de partida.

### 8.3. Reproducción de la experiencia reseñada en el folio 81<sup>r</sup> 25 de abril de 2009

Ayer no pude resistirme a la tentación de desempolvar mi viejo plano inclinado —el que se describe en el Capítulo 4 (pág. 90)— para intentar una reproducción de la experiencia de Galileo en el folio 81<sup>r</sup>. Doté a mi plano de una inclinación

de  $2,37^\circ$ , ángulo muy próximo al que supongo que usó Galileo, y calculé que marcando sobre él las distancias  $s$  de 20, 80 y 180 cm, a partir de su extremo inferior, obtendría las alturas  $h$  necesarias. A saber:

$$\begin{array}{lll} h_1 = 0,827 \text{ cm} & & \text{para } s = 20 \text{ cm} \\ h_2 = 3,308 \text{ cm} & (h_1 \times 2^2) & \text{para } s = 80 \text{ cm} \\ h_3 = 7,443 \text{ cm} & (h_1 \times 3^2) & \text{para } s = 180 \text{ cm} \end{array}$$

Dispuse un tablero  $37 \times 24 \times 1,6$  cm —cuya horizontalidad fui comprobando en cada cambio de posición con un nivel de burbuja— para registrar los impactos sobre una hoja de papel blanco recubierta por otra de papel carbón. Fui elevando el tablero gradualmente usando como soporte gruesos libros obteniendo de ese modo dieciocho pares de coordenadas de otros tantos puntos correspondientes a tres parábolas análogas a las supuestamente obtenidas por Galileo. Las velocidades de salida *sin fricción previa* (o teóricas) obtenidas mediante cálculo resultan ser:

$$\underline{v}_1 = 34,0 \text{ cm/s} \quad \underline{v}_2 = 68,0 \text{ cm/s} \quad \underline{v}_3 = 102,0 \text{ cm/s}$$

En la Tabla 8.4 aparecen los resultados obtenidos, usando los valores  $d$  corregidos, en el análisis de la parábola más cerrada. En las Tablas 8.5 y 8.6 aparecen los resultados obtenidos del mismo modo en los análisis de las parábolas intermedia y exterior, respectivamente.

Resulta curioso que en esta experiencia los porcentajes *más fiables* de energía disipada oscilen entre un 9,4 y un 14,2 %, análogos a los más fiables también calculados por mí sobre los datos del folio 81<sup>r</sup>, que oscilan entre un 10 y un 15 %. Está muy claro, como ya he comentado en el Capítulo 3 (pág. 64), que la

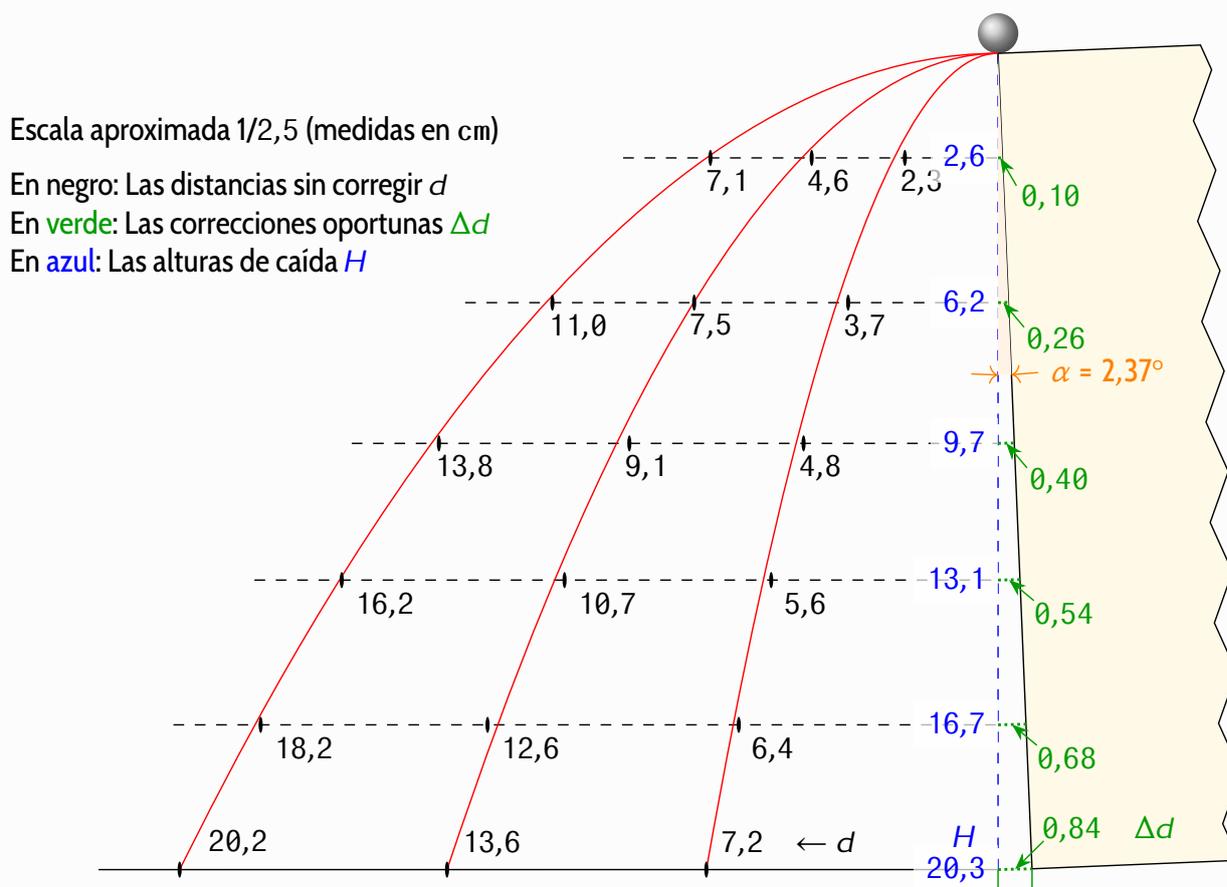


Figura 8.2: Correcciones a los datos del folio 8I<sup>r</sup>

$H$ cm	$d$ cm	$v_{CM}$ cm/s	$\chi$ %
2,6	2,20	30,7	18,5
6,2	3,44	30,6	19,0
9,7	4,40	31,6	13,6
13,1	5,06	31,2	15,8
16,7	5,72	31,2	15,8
20,3	6,36	31,5	14,2

Tabla 8.4: Correcciones a los datos de Galileo

esfera no rueda nunca dos veces exactamente igual, por lo que el porcentaje de energía disipada resulta ser algo aleatorio, pero en la sección 2.5 del Capítulo 2 (pág. 58) se apunta a la posibilidad de que —superpuesta a esa aleatoriedad— exista una relación entre el porcentaje y el ángulo de inclinación  $\alpha$  del plano.

$H$ cm	$d$ cm	$v_{CM}$ cm/s	$\chi$ %
2,6	4,50	64,2	10,9
6,2	7,24	66,0	5,8
9,7	8,70	63,1	13,9
13,1	10,16	63,2	13,6
16,7	11,91	65,5	7,2
20,3	12,76	63,6	12,5

Tabla 8.5: Correcciones a parábola intermedia

$H$ cm	$d$ cm	$v_{CM}$ cm/s	$\chi$ %
2,6	7,00	101,9	0,4
6,2	10,74	99,1	5,6
9,7	13,40	98,1	7,5
13,1	15,66	98,2	7,3
16,7	17,51	97,0	9,6
20,3	19,36	97,1	9,4

Tabla 8.6: Corrections to external parabola

(Por supuesto el resultado señalado en rojo en la Tabla 8.6 es claramente erróneo).

## 8.4. Reproducción de la experiencia reseñada en el folio I I 6<sup>V</sup> 26 de abril de 2009

En el Capítulo 5 (pág. 107) imaginé que Galileo dispuso su plano de doce codos con una inclinación de  $9,6^\circ$  para lograr una altura máxima de 1 000 p. En la Tabla 5.1 del mismo capítulo aparecen los porcentajes de energía disipados, que oscilan entre un mínimo del 3,2 y un máximo de 9,8%. He dedicado el día de hoy a reproducir con mi plano la experiencia del folio I I 6<sup>V</sup> para obtener datos empíricos y decidir, de paso, si es razonable admitir que exista alguna relación entre la inclinación  $\alpha$  y el porcentaje de energía que se ha disipado  $\chi$ . Las limitaciones impuestas por el mobiliario de mi despacho y la carencia de material idóneo para el montaje no me han permitido dotar a mi plano de una inclinación de  $9,6^\circ$ , de forma que he debido conformarme con  $7,75^\circ$ . Las alturas  $h$  no han sido *medidas* sino *calculadas* a partir de longitudes medidas

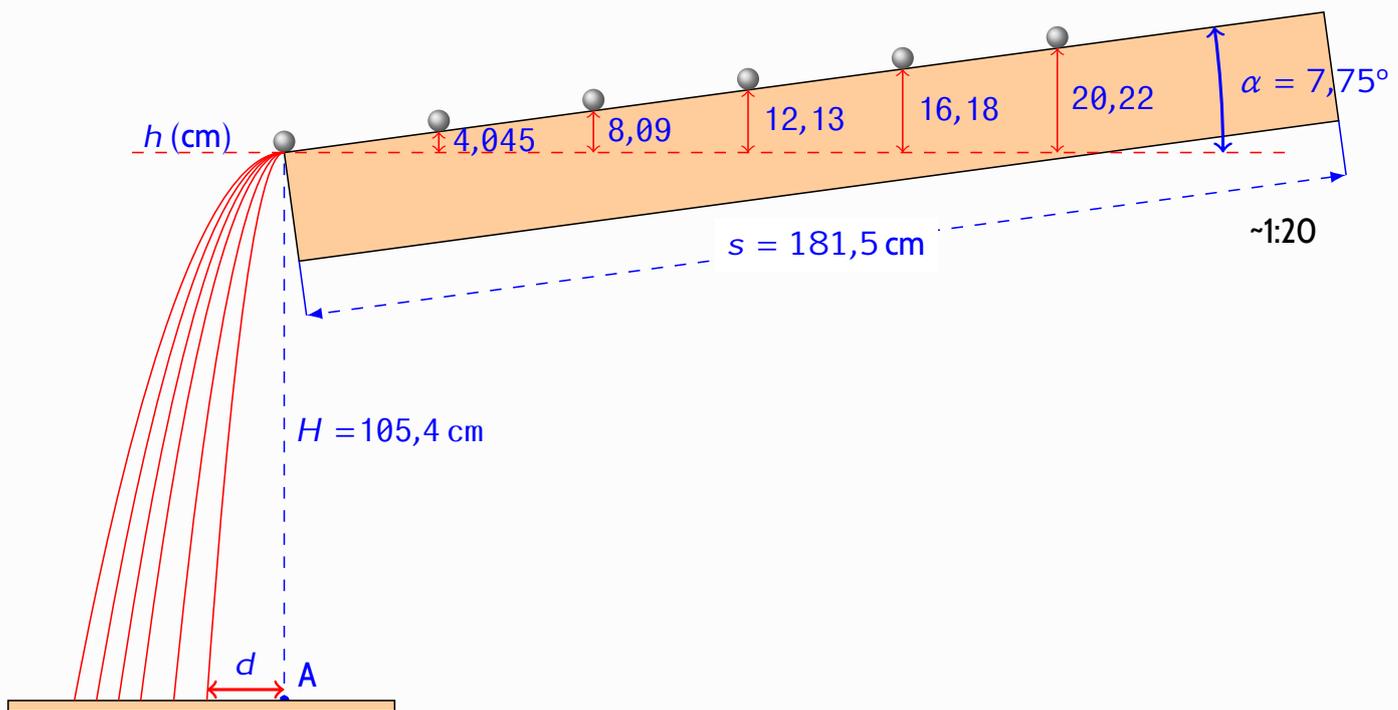


Figura 8.3: Reproducción de la experiencia del folio 116<sup>v</sup>

(30; 60; 90; 120 y 150 cm) sobre la longitud total del plano. He repetido diez veces el lanzamiento para cada  $h$  y he usado para el cálculo del porcentaje de la energía disipada el *valor medio*  $d_m$  de las diez lecturas.

Recordemos —ver Capítulo 5 (pág. 107)— que:

$$\chi = 100 \left( 1 - \frac{\underline{K}}{K} \right)$$

siendo

$$\underline{K} = \frac{d^2}{h} \quad \text{y} \quad K = \frac{20H}{7}$$

En nuestro caso  $K = 301,1$  cm, como puede comprobarse. En la Tabla 8.7 se resume el resultado de esta experiencia. Si se comparan con los resultados que aparecen en la Tabla 5.1 del Capítulo 5 (pág. 115) el paralelismo es sorprendente, hasta en el detalle de que  $\chi$  sea máximo para la  $h$  mínima.

En la reproducción de la experiencia reseñada en el folio 81<sup>r</sup> me limité a tomar

#	$h$ cm	$d_m$ cm	$\underline{K} = d_m^2/h$ cm/s	$\chi$ %
1	4,045	33,3	274,1	9,0
2	8,09	47,6	280,0	7,0
3	12,13	58,8	285,0	5,3
4	16,18	68,5	290,0	3,7
5	20,22	75,8	284,1	5,6

**Tabla 8.7:** Experiencia del folio I16<sup>V</sup> considerando pérdida de energía

un valor único de las coordenadas de los puntos de cada parábola y los usé en los cálculos pertinentes. En la reproducción de la experiencia relativa al folio I16<sup>V</sup>, como ya he dicho, he tomado *diez veces* las coordenadas de cada punto y he usado en los cálculos los valores medios  $d_m$ .

Quizás no resulte superfluo anotar las observaciones que he hecho al respecto:

- a) En el registro de impactos las huellas circulares dejadas por la bolita presentan 3 mm de diámetro. He señalado el *centro* de cada huella mediante un punto —practicado con un bolígrafo rojo de punta fina— para medir las distancias  $d$  hasta el punto A, marcado sobre el registro mediante una plomada suspendida del borde del deflector horizontal. (Ver Figura 8.3).
- b) Por supuesto las diez huellas correspondientes a cada  $h$  aparecen dispersas en una pequeña área que va aumentando a medida que  $h$  crece. Por ejemplo, las huellas que corresponden a  $h = 4,045$  cm se concentran en un círculo de 0,75 cm de radio. Radio que va aumentando de forma progresiva hasta alcanzar 1,5 cm para las huellas correspondientes a  $h = 20,22$  cm. Esta *dispersión* confirma que *la bola no rueda dos veces exactamente igual* pese a que intentemos reproducir al

máximo las condiciones iniciales.

- c) He anotado los valores  $d$  máximos y mínimos para cada  $h$  y he procedido al cálculo de los valores correspondientes al porcentaje  $\chi$  de energía disipada. Es lo que se recoge en las Tabla 8.8 y 8.9.

#	$h$ cm	$d_{\min}$ cm	$\underline{K} = d_{\min}^2/h$ cm/s	$\chi$ %
1	4,045	32,7	264,7	12,1
2	8,09	47,2	275,4	8,5
3	12,13	57,8	275,4	8,5
4	16,18	67,7	283,3	5,9
5	20,22	74,5	274,5	8,8

**Tabla 8.8:** Cálculos de la energía disipada mínima

#	$h$ cm	$d_{\max}$ cm	$\underline{K} = d_{\max}^2/h$ cm/s	$\chi$ %
1	4,045	33,6	279,1	7,3
2	8,09	48,2	287,2	4,6
3	12,13	59,8	294,8	2,1
4	16,18	69,0	294,2	2,3
5	20,22	77,1	294,0	2,4

**Tabla 8.9:** Cálculos de la energía máxima

Se comprueba, pues, que para un ángulo de  $7,75^\circ$  el porcentaje de energía disipada puede variar de forma *aleatoria* entre un *mínimo* de un 2% y un *máximo* de un 12% y que ese porcentaje  $\chi$  *disminuye* progresivamente a medida que *aumenta*  $h$ .

Para poder decidir *experimentalmente* sobre la dependencia de  $\chi$  frente a  $\alpha$  necesitaríamos más datos, aunque disponemos ya de los relativos al ángulo de  $2,37^\circ$  que, junto a los que acabamos de obtener, parecen confirmar nuestra sospecha.

## 8.5. Reproducción de la experiencia reseñada en el folio $\text{II4}^{\text{V}}$

La interpretación de este folio, expuesta en el Cap. 6 (pág. 126), encaja bien con las de los otros dos, salvo en el detalle de que los porcentajes de energía que se disipan se me antojan demasiado bajos en relación al ángulo de inclinación  $1,32^\circ$  que debo atribuirle al plano. Para reproducir en lo posible esta

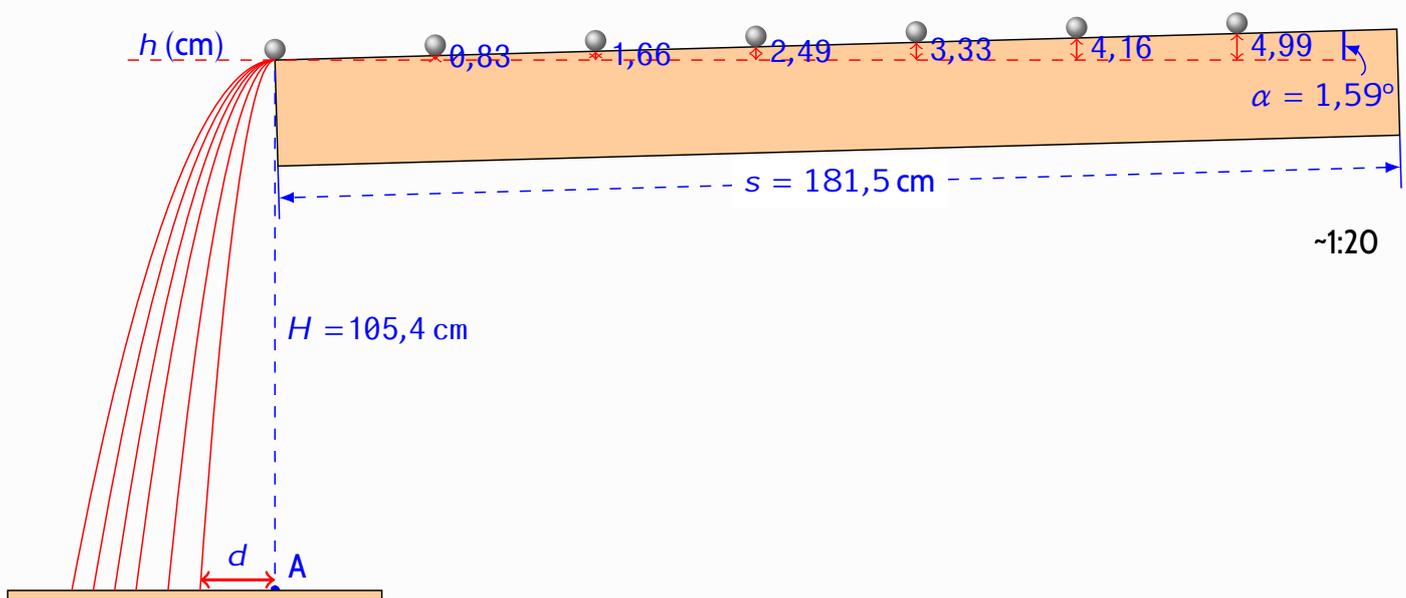


Figura 8.4: Reproducción de la experiencia del folio  $\text{II4}^{\text{V}}$

experiencia doté a mi plano de una inclinación de  $1,59^\circ$ , de modo que las longitudes medidas sobre el mismo (30; 60; 90; 120 y 150 cm) se corresponden a las alturas que se indican en la Figura 8.4. Tomé diez medidas de  $d$  para cada  $h$  y usé el valor medio  $d_m$  para hacer los cálculos usando las ecuaciones reseñadas en la sección 8.1 (pág. 153), que son las adecuadas en este caso en que no existe deflector horizontal. Los resultados se resumen en la Tabla 8.10. Se observa, como en el caso anterior, que  $\chi$  disminuye a medida que  $h$  aumenta, variando entre un 18 a un 14 %. Haciendo un estudio similar al anterior, que no detallo para abreviar, usando los  $d_{\text{máx}}$  y los  $d_{\text{mín}}$  se comprueba que los límites de esta variación se extienden aún más entre un 20 y un 12 %.

#	$H$ cm	$h$ cm	$d_m$ cm	$v$ cm/s	$\underline{v}$ cm/s	$\chi$ %
1	105,4	0,83	14,3	30,9	34,1	17,9
2	"	1,66	20,4	44,1	48,2	16,3
3	"	2,49	25,3	54,7	59,0	14,0
4	"	3,33	29,0	62,8	68,3	15,4
5	"	4,16	32,8	71,0	76,3	13,4
6	"	4,99	35,8	77,6	83,6	13,8

**Tabla 8.10:** Variación de la energía disipada con  $h$

Estos resultados confirman *experimentalmente*, en líneas generales, nuestra sospecha de que entre el porcentaje de energía disipada  $\chi$  y el ángulo de inclinación  $\alpha$  existe relación, como se demostró ya en la penúltima sección (2.5) del Capítulo 2 (pág. 58).

Como ya he señalado la explicación del folio  $\text{II4}^v$  adolece de un defecto:

*Los porcentajes de energía disipada calculados en el Capítulo 6 (pág. 126) son demasiado bajos para que puedan hacerse compatibles con el escaso ángulo de inclinación que le atribuyo al plano en el análisis que allí hago.*

Pero hemos visto ya que un ligero error en la medida de  $d$  influye decisivamente en los valores de  $\chi$ . Por eso se me ocurre pensar si Galileo pasó por alto, en este caso, otro *detalle nimio*, como supuse que le pasó al tomar las medidas que constan en el folio  $8\text{I}^r$ .

Si observamos la Figura 8.4 y suponemos que Galileo usó como referencia para medir  $d$  la base del mueble sobre el que imaginamos que se apoya el plano, es fácil demostrar que estaría cometiendo un *error sistemático* de 0,71 cm por

exceso al medir  $d$ . He calculado que este simple error elevaría el valor de  $\chi$  hasta un 15 % en la parábola más cerrada, y entre un 7 % y un 8,5 % en las demás.

### EPÍLOGO

15 de septiembre de 2009

---

La ecuación empírica:

$$a_{\text{CM}} = A(H - B)$$

y la teórica:

$$\lambda = \sec \alpha \left( \sin \alpha - \frac{7a}{5g} \right)$$

de cuya confluencia nace esta otra:

$$\lambda = \sec \alpha (CH + D)$$

no las he visto reflejadas hasta ahora en ningún texto, por lo que me atrevería a considerarlas de mi propiedad sin que esto signifique que otros no las hayan podido encontrar antes, después o simultáneamente. Tampoco he encontrado nada parecido a mis elucubraciones en torno a cómo calcular el *porcentaje de la energía disipada por la rodadura sin deslizamiento de una esfera*. Por eso en la introducción del Capítulo 1 (pág. 33) expreso mi sospecha de que este tema debe ser de muy escaso interés práctico.

Los historiadores de la ciencia —desde Alexandre Koyré a Stillman Drake, pasando por Thomas B. Settle— cumplen con su misión descubriendo nuevos documentos, analizándolos, criticándolos e incluso intentando reproducir los

experimentos sugeridos en ellos. Por otra parte los físicos profesionales no pueden dedicarse a estos menesteres porque otras investigaciones más serias reclaman su ingenio y su esfuerzo.

Yo —que no soy físico profesional sino un químico aficionado a la Física— he dedicado muchos años de mi vida a enseñar ambas ciencias a nivel de secundaria, y he tenido la suerte de tropezar al final de mi vida profesional con un pequeño enigma histórico que me ha mantenido ilusionado y entretenido durante estos últimos años.

Pero la resolución que brindo de este pequeño enigma histórico es posible que tenga cierto interés. En primer lugar puede contribuir a un mejor *entendimiento* del *proceso mental* que pudo llevar a Galileo al descubrimiento de sus leyes cinemáticas, proceso que no debió ser puramente platónico, mal que le pese a Alexandre Koyré.

En segundo lugar está su posible interés *didáctico*: El papel de las *fuerzas de fricción por la rodadura pura* está tratado en la mayoría de los textos que he consultado de forma muy superficial, cuando no francamente descabellada. Otro tanto sucede con el concepto físico de *trabajo de (sic) una fuerza*.

La parte *experimental* de mi trabajo se interrumpió en junio de 2002, a raíz de mi jubilación. Como me encanta escribir y había redactado unos minuciosos «Diarios» de clases y de laboratorio durante los últimos veintitrés años de vida activa, decidí iniciar la redacción de una serie de artículos sobre mi experiencia como profesor, por si pudieran ser útiles a alguien.

Para mi sorpresa yo resulté ser el primer beneficiado, porque encontré que *podía y debía* ahondar más en la *parte teórica de la rodadura*, de manera que las secciones 1.4 y 1.6 del Capítulo 1 (págs. 42 y 48) y la 2.5 (pág. 58) del segundo son de redacción muy reciente, así como el análisis exhaustivo de los datos que

constan en la sección 2.6 (pág. 60) de este mismo Capítulo 2, que en su día fueron tomados con todo cuidado sin otro interés que el puro gusto y recreo.

Fue entonces cuando decidí profundizar más en la interpretación de los enigmáticos folios de Galileo aplicando mis propias ideas acerca del *porcentaje de energía disipada*. Culminado este análisis en la primera mitad del Capítulo 8 recuperé mi plano —que había dejado en mi antiguo centro de trabajo— para someter a verificación experimental lo recién hallado en esa primera mitad. Con todo esto mi distracción de jubilado se ha estirado hasta finales de abril del año en curso con gran satisfacción por mi parte.

**Juan Luis Alcántara López**



### Teoria del rodamiento sin rozamiento

---

Suponemos una esfera que cae, partiendo del reposo, **sin ningún rozamiento**, por un plano inclinado un ángulo  $\alpha$ , recorriendo una superficie de longitud  $s$  desde una altura  $h$ .

#### A.1. Velocidad

La aceleración es debida a fuerzas (gravedad, y reacción del plano) que permanecen constantes todo el recorrido, así que la aceleración es constante y por lo tanto:

$$v_{\text{CM}} = a_{\text{CM}} t \quad (\text{A.1})$$

pero siendo este un movimiento uniformemente acelerado

$$s = \frac{1}{2} a_{\text{CM}} t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 2s/a_{\text{CM}}$$

que nos da la velocidad en función de la aceleración y el espacio recorrido A.1

$$v_{\text{CM}}^2 = (a_{\text{CM}} t)^2 = a_{\text{CM}}^2 \times 2s/a_{\text{CM}} = 2 a_{\text{CM}} s \quad (\text{A.2})$$

pero como conocemos la altura y ángulo

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{A.3})$$

queda

$$v_{\text{CM}}^2 = (a_{\text{CM}} t)^2 = a_{\text{CM}}^2 \times 2s/a_{\text{CM}} = 2 a_{\text{CM}} \frac{h}{\text{sen } \alpha} \quad (\text{A.4})$$

La aceleración, si fuese una partícula sin rodamiento, correspondería solamente a la componente de la gravedad paralela al plano  $mg \text{ sen } \alpha$ , y sería  $g \text{ sen } \alpha$ . Pero el rodamiento retrasa esta aceleración de  $1 \rightarrow \frac{5}{7}$ , cerca de un 30% independientemente del radio  $r$  ya que la disminución del radio hace disminuir por un lado el momento de inercia  $I_{\text{CM}}$  y por otro hace aumentar la velocidad de rotación  $\omega$ , ambos con el mismo factor  $r^2$ .

En 1.4 se obtuvo la siguiente expresión

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \text{ sen } \alpha$$

que corresponde a la aceleración debida a la gravedad (sin rozamiento:  $\lambda = 0$ ) y teniendo en cuenta la inercia y el momento de inercia de la esfera.

Podemos obtener esta expresión que proviene de los torques de las fuerzas que producen la rotación de la esfera, por un lado la

componente no vertical del peso, debida a la inclinación:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} = r m g \sin \alpha \quad (\text{A.5})$$

y, por otro, la fuerza debida al rozamiento que mejor llamaremos acoplamiento al plano, ya que no es un deslizamiento y no produce ningún trabajo: el punto en el que se produce no se mueve y la distancia de aplicación de la fuerza es nula, el punto A. Este torque sería (ver Figura 1.6):

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} + \mathbf{q} \times \mathbf{F} = I_A \gamma$$

esto es:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} = I_A \gamma$$

y como se trata de una rotación alrededor, no del CM sino del punto A, el momento de inercia no es el de una esfera

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} m r^2 \quad (\text{A.6})$$

sino el indicado en 1.3:  $I_A = 7/5 m r^2$ . Por otro lado, la aceleración angular es

$$\gamma = \frac{a_{\text{CM}}}{r} \quad (\text{A.7})$$

con lo que queda

$$r m g \sin \alpha = \frac{7}{5} m r^2 \gamma = \frac{7}{5} m r^2 \frac{a_{\text{CM}}}{r} = \frac{7}{5} m a_{\text{CM}} r \quad (\text{A.8})$$

y de aquí lo obtenido en 1.4

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha \quad (\text{A.9})$$

Uniendo A.2 con A.3 y la expresión obtenida para  $a_{\text{CM}}$  en A.9:

$$v_{\text{CM}}^2 = 2 \frac{5}{7} g \sin \alpha \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{10}{7} gh$$

La velocidad final teórica del centro de masas es

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{10}{7} gh \quad (\text{A.10})$$

Velocidad del centro de masas de la esfera, independiente del radio y de la masa de la esfera y, por ende, independiente de su material.

## A.2. Distancia horizontal en el vuelo libre

En el vuelo libre tenemos una esfera rotando con una velocidad de rotación constante y que no afecta su caída libre y con el centro de masas con una velocidad horizontal  $v_{\text{CM}}$  que también es constante ya que ya no hay fuerzas horizontales. Esta esfera empieza a caer libremente desde una altura  $H$ , y dado que a la componente vertical no es afectada por la componente horizontal,

hará ese recorrido  $H$  vertical en  $t$  segundos:

$$H = \frac{1}{2} g t^2 \quad (\text{A.11})$$

de donde el tiempo de vuelo será

$$t^2 = \frac{2H}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (\text{A.12})$$

¿Cuál será el recorrido horizontal  $d$  que consigue en este tiempo de vuelo? Dado que la velocidad horizontal es constante  $v_{\text{CM}}$ :

$$d = v_{\text{CM}} t = v_{\text{CM}} \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow d^2 = v_{\text{CM}}^2 \frac{2H}{g} \quad (\text{A.13})$$

### A.3. Energía cinética total

La energía cinética total final  $E_{c_T}$  es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masas CM ( $E_{\text{CM}}$ ) y de la energía cinética de rotación ( $E_{\omega}$ ):

$$E_{c_T} = E_{\text{CM}} + E_{\omega}$$

y aquí  $E_{\omega}$  es la energía cinética de rotación alrededor del CM

$$E_{\omega} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{A.14})$$

El momento de inercia  $I$  aquí se refiere no al de rotación alrededor del punto de contacto A sino directamente alrededor del CM que

es A.6, así que

$$E_{c_T} = E_{c_M} + E_{\omega} = \frac{1}{2} m v_{c_M}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{c_M}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} m r^2 \right) \omega^2$$

y como

$$v_{c_M} = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{c_M}}{r}$$

queda

$$E_{c_T} = \frac{1}{2} m v_{c_M}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m r^2 \frac{v_{c_M}^2}{r^2} = \frac{1}{2} m v_{c_M}^2 + \frac{1}{5} m v_{c_M}^2$$

dando

$$E_{c_T} = \frac{7}{10} m v_{c_M}^2 \quad (\text{A.15})$$

#### A.4. Medición de la fricción en el plano inclinado a partir de la longitud alcanzada en el vuelo libre

La energía cinética teórica total de la esfera al llegar al final de su recorrido para comenzar el vuelo horizontal viene dada por la ecuación A.15. En este movimiento mantendrá la misma energía cinética de rotación  $E_{\omega}$  y, dado que la deflexión mediante el plano deflector cambia su velocidad a una velocidad con solo componente horizontal, lo comenzará con una energía cinética dada por la velocidad final tras la caída sobre el plano inclinado  $E_{c_M}$ .

La distancia horizontal  $d$  recorrida desde que inicia la caída libre con velocidad inicial horizontal  $v_{\text{CM}}$  se debe deducir de la mecánica de movimiento bajo una fuerza constante, la del peso, y supondremos despreciable, el rozamiento del aire.

Esta velocidad inicial nos va permitir medir la pérdida real de energía debida al rozamiento de rodadura en la caída sobre el plano inclinado. Para, ello, medimos la distancia horizontal  $d$  recorrida en la caída libre  $H$  y de la ecuación A.13 obtenemos la  $v_{\text{CM}}$  que tenía la esfera al final de la caída sobre el plano inclinado:

$$v_{\text{CM}}^2 = d^2 \frac{g}{2H} \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, si la bola alcanza una distancia horizontal  $d$ , la ecuación A.16 nos da su velocidad horizontal a la altura  $H$ . Esta velocidad horizontal corresponde a una cinética total  $E_{\text{CT}}$ :

$$E_{\text{CT}} = \frac{7}{10} m v_{\text{CM}}^2 = \frac{7}{10} m d^2 \frac{g}{2H} = d^2 mg \frac{7}{20H} \quad (\text{A.17})$$

Si a la energía cinética total  $E_{\text{CT}}$  con la que ha llegado la bola a la mesa la dividimos por la energía potencial inicial al empezar su recorrido desde el reposo,  $E_p = mgh$  siendo  $h$  la altura del plano inclinado, tenemos

$$\frac{E_{\text{CT}}}{E_p} = d^2 \cancel{mg} \frac{7}{20H} / \cancel{mgh} = \frac{d^2/h}{20H/7} = \frac{K}{\underline{K}} \quad (\text{A.18})$$

donde directamente hemos sustituido los valores de  $K$  y  $\underline{K}$  de las ecuaciones 6.3 y 6.2.

Recordemos que el autor define en 1.13 la constantes  $K$  como el

simple coeficiente entre la energía cinética total  $E_{c_T}$  y el cuadrado de la velocidad del centro de masas  $v_{c_M}^2$  a la llegada a la base del plano inclinado.

La definición de la constante  $\underline{K}$  es la del coeficiente entre la distancia horizontal recorrida en vuelo libre,  $d$ , y la altura de la mesa: 5.1.

### Sobre la fricción de rodadura de una bola

---

Se puede encontrar un sencillo estudio experimental sobre la fricción y pérdida de energía de rodadura en una bola sobre un surco de madera en (Minkin y Sikes, 2018). Estos autores parten de la suposición práctica de que el rozamiento de rodadura es constante e independiente del material, sólo depende de la fuerza normal que ejerce la bola sobre la superficie, como ocurre con la fricción estática y dinámica por deslizamiento. La ecuación de la que parten es, pues:

$$F_r = \mu N$$

Estos autores realizan un experimento sencillo en el que esperan a que una bola oscilando sobre un canal de madera y también sobre un canal de plástico, se detenga. Para ello usan tablas cortas pero curvadas en forma cóncava de forma que el movimiento final de la bola se parece al de un péndulo. En cualquier caso, tras una serie de oscilaciones que asemejan un péndulo amortiguado, la bola terminará deteniéndose. El motivo principal, despreciando otros factores de mucha menor influencia, por el cual la bola se detendrá es por su fricción con la superficie acanalada. Con lo cual, si partimos de que la fuerza que frena la bola es independiente de la velocidad, toda su energía cinética al principio

se convertirá en calor por el trabajo de la fuerza de rozamiento.

La fuerza normal al plano se puede aproximar al peso. El error será de menos de un 30 % dado que la superficie tenía una inclinación de menos de  $15^\circ$ , y sería

$$N = mg \cos(0,15/0,57) = 0,97mg$$

Con todo eso podemos suponer un recorrido horizontal hasta pararse y un trabajo total:

$$W = \mu m g s$$

siendo  $s$  la distancia total recorrida hasta pararse. Los cálculos de estos autores les llevan a los valores

$$\mu_{\text{madera}} = 2,0 \times 10^{-3}$$

y

$$\mu_{\text{plástico}} = 0,75 \times 10^{-3}$$

Este trabajo que realiza la bola es a su vez la pérdida de energía cinética y potencial que la hace disminuir de velocidad y altura en cada oscilación.

## B.1. Evaluación fácil del coeficiente de fricción de rodadura

En la Figura B.1 se esquematiza un sencillo experimento. Suponiendo que la pérdida de energía mecánica ( $\Delta E = E_B - E_A$ ) la consume únicamente el rozamiento:  $F_r$ , y teniendo en cuenta que el rozamiento de rodadura lo produce una fuerza *constante*, como afirman estos estudios, tendríamos:

$$E_A = E_B + F_r s_r; \quad \Delta E = F_r s_r \quad (\text{B.1})$$

Siendo  $s_r$  la distancia *real* recorrida por la bola desde que parte de extremo **A** con  $v_0 = 0$  hasta que llega al otro extremo **B** con  $v_f = 0$  a una altura algo menor en  $\Delta h$  debido a la energía perdida.

Por simplicidad, estamos tomando medio oscilación ya que el movimiento tiene periodo constante aunque con decrecimiento de amplitud lineal debido a la constancia de  $F_r$ . El decremento de energía, dado que la energía total inicial, sólo potencial, es  $E_i = mgh$  y la energía final, sólo potencial, es  $E_f = mg(h - \Delta h)$ :

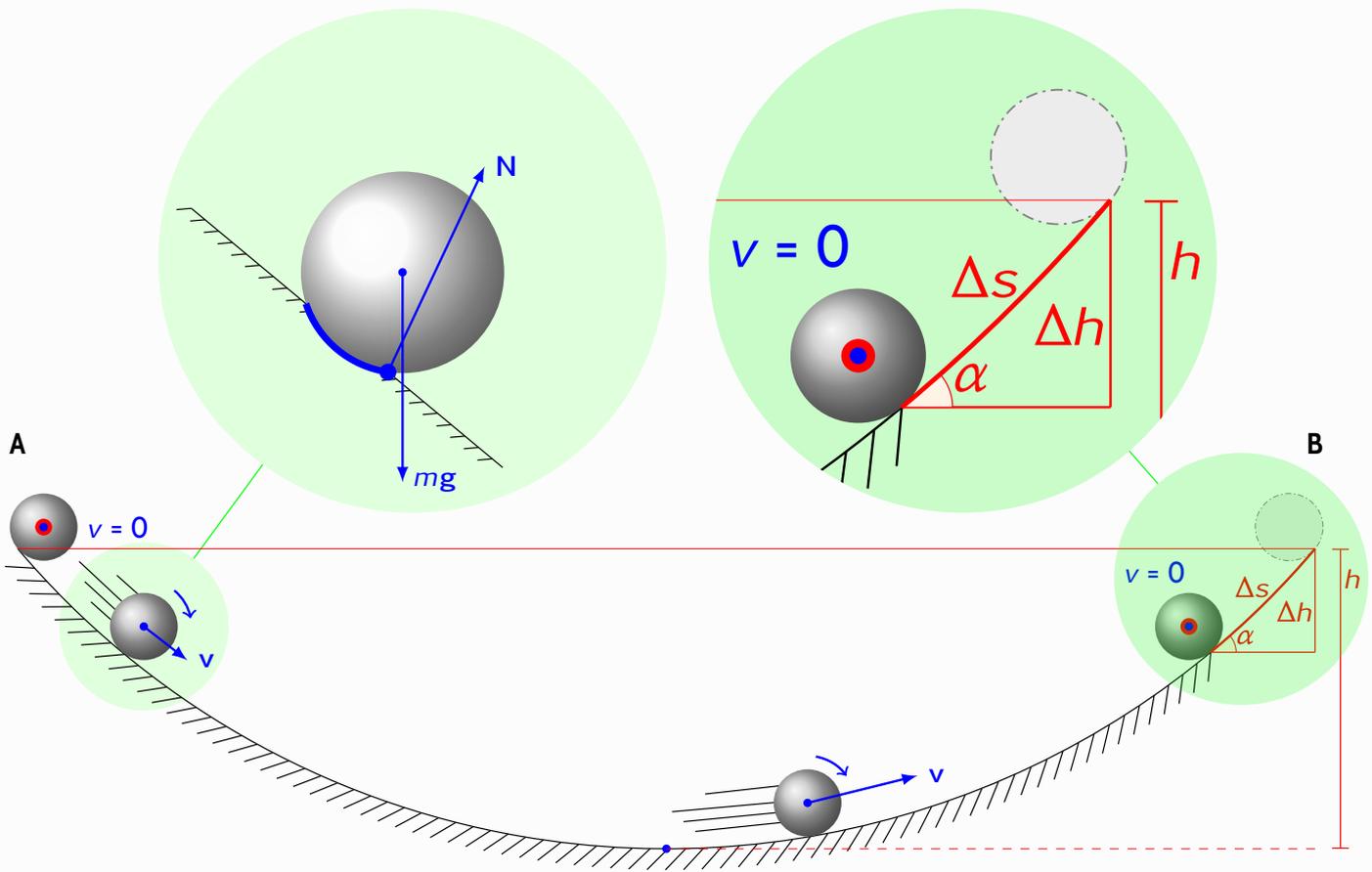
$$\Delta E = mg \Delta h = F_r s_r$$

siendo  $s_r$  el espacio recorrido en esa oscilación.

$$F_r s_r = F_r (s - \Delta s) = mg \Delta h$$

o bien

$$F_r = \frac{mg \Delta h}{s - \Delta s}$$



**Figura B.1:** Pérdida de energía por rozamiento

Teniendo en cuenta que  $F_r$  es constante a lo largo del recorrido y proporcional a la fuerza normal que podemos aproximar directamente con el peso ya que el ángulo de inclinación de la pista es pequeño, sería:

$$\mu mg = \frac{mg \Delta h}{s - \Delta s}$$

y dado que  $\Delta h$  es más difícil de medir que  $\Delta s$  usamos  $\Delta h = \text{sen } \alpha \Delta s$  con lo que, aproximando con  $\text{sen } \alpha = h/(s/2)$ , nos queda:

$$\mu = \frac{\Delta s \text{ sen } \alpha}{s - \Delta s} = \frac{\text{sen } \alpha}{\frac{s}{\Delta s} - 1} \tag{B.2}$$

## Referencias

Minkin, Leonid y Daniel Sikes (ene. de 2018). «Coefficient of rolling friction - Lab experiment». En: *American Journal of Physics* 86.1, págs. 77-78. ISSN: 0002-9505.