

M.C. PEDRAZA RODRÍGUEZ  
J.A. MARTÍN ROMERO

***ELASTICIDAD Y RESISTENCIA  
DE MATERIALES***



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA / MANUALES





# **ELASTICIDAD y RESISTENCIA de MATERIALES**

**C. PEDRAZA.  
A. MARTÍN.**



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

*Reimpresión, 2001*

© M.C. Pedraza Rodríguez y J.A. Martín Romero

© UMA editorial

Bulevar Louis Pasteur, 30 (Campus de Teatinos)

29071 - Málaga

[www.uma.es/servicio-publicaciones-y-divulgacion-cientifica](http://www.uma.es/servicio-publicaciones-y-divulgacion-cientifica)

Colección: Manuales

Diseño de la colección: J. M. Mercado

ISBN: 4-7496-719-8

Depósito Legal: MA-1513-98

Impreso en Andalucía



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-  
NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización  
pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o  
hacer obras derivadas.

## PRESENTACION

La Elasticidad y Resistencia de Materiales, es una disciplina, ya clásica y demostradamente necesaria en los Planes de Estudio de casi todas las Ingenierías. Hay que decir de todas formas que los Ingenieros que mas han hecho por su avance, impulsados por sus necesidades, son aquellos dedicados a los temas estructurales.

Mientras que en sus inicios, la Resistencia de Materiales fue mas ingenieril, y la Elasticidad mas del dominio de los Ingenieros dedicados a las matemáticas, actualmente se considera que el conocimiento de ambos niveles resulta necesario para el correcto entendimiento del problema elástico en sí.

Con esta perspectiva, el libro que aquí se presenta puede ser de gran utilidad, ya que aborda tanto el problema a nivel de punto, Elasticidad, como a nivel de sección, o sea Resistencia de Materiales.

Los autores son miembros del área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, y gracias a su tesón y dedicación han conseguido trasladar al papel tanto su experiencia docente como la de los profesores que les precedieron en la impartición de esta disciplina en esta universidad como D. Juan Bermúdez, D. José Espejo, D. Alfonso Calatrava, y yo mismo, que nunca conseguimos sacar el tiempo necesario para realizar esta obra. También es necesario destacar el buen clima de colaboración que han encontrado entre sus compañeros que actualmente imparten también docencia en la materia como D. Felipe García y D. Jorge Veintimilla.

Es sumamente gratificante para mi, como Catedrático del área en la Universidad de Málaga, ver que mi insistencia sobre la necesidad de editar manuales para los alumnos, que hago continuamente desde que llegue a esta Universidad, va dando sus frutos gracias a personas con una gran dedicación a sus tareas como son los autores ; a ellos mi enhorabuena.



**ALFONSO CORZ RODRÍGUEZ**

*Catedrático del Area de  
Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras  
Universidad de Málaga*



*A mis padres José Luis y  
M<sup>a</sup> del Carmen*



## *Prólogo*

Este libro se configura como una iniciación al estudio de los sólidos elásticos orientado tanto a alumnos de Escuelas Técnicas como para profesionales que necesiten refrescar los conocimientos adquiridos en su día, así como a aquellos que por pertenecer a otras especialidades no los adquirieron. En su exposición se desarrolla tanto el enfoque puntual cubierto por la Elasticidad como el enfoque de sección que desarrolla la Resistencia de Materiales.

El texto puede ser consultado en su orden natural, estudiando secuencialmente los dos niveles del problema, o pasando desde el primer capítulo al sexto, si el lector pretende centrarse con cierta celeridad en la Resistencia de Materiales sin entrar en el estudio de la Elasticidad. En este sentido este libro pretende tener el enfoque de los manuales clásicos en estas materias.

Se ha pretendido dar una completa visión de los problemas teóricos huyendo, sin embargo, de complicados desarrollos matemáticos en la medida que ello ha sido posible. No obstante no han podido evitarse algunos que, si bien no resultan necesarios para seguir la línea conceptual de los temas, si lo son para dejar constancia de la veracidad de algunas afirmaciones, fundamentalmente en los capítulos dedicados a la Elasticidad.

En la idea que esta visión sea tan didáctica como completa, todos los conceptos expuestos se encuentran apoyados por sencillos ejemplos explicados de forma muy detallada para simplificar su comprensión.

En la primera parte se puede encontrar un detallado análisis del campo de tensiones y deformaciones de un medio elástico con forma genérica, analizando los aspectos más destacados del problema como condiciones de contorno, tipos de cargas, formulación y resolución del problema elástico, evaluación de la energía de deformación, para terminar con una descripción detallada de los criterios de fallo más usuales.

En los temas dedicados a Resistencia de Materiales se aplican las conocidas hipótesis de esta disciplina a la formulación desarrollada previamente para sentar las bases del cálculo de elementos lineales, tipo barra.

Algunos de los aspectos que pueden encontrarse a lo largo de estos capítulos son, enunciados en forma somera, los siguientes: determinación e indeterminación estática bajo diversas condiciones de carga y apoyo. tratamiento de los esfuerzos, axiales, de flexión y torsión, de forma separada y combinadamente, ofreciendo al lector un abanico amplio de

metodologías para resolver problemas hiperestáticos que va desde métodos de compatibilidad a los principales métodos energéticos.

Para finalizar se hace un pormenorizado análisis del importante problema de inestabilidad en barras aisladas como base fundamental para futuros estudios de inestabilidad estructural global de tanta importancia en el diseño y el cálculo de estructuras.

No queremos terminar la presentación de este texto sin expresar nuestro más profundo agradecimiento a todo el Grupo de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras durante los años de gestación de esta obra. Especialmente queremos agradecer a D. Juan Antonio Bermúdez Fernández de Soto y a D. Alfonso Corz Rodríguez la aportación de sus ideas y a D. Felipe García Sánchez la tediosa labor de corrección del texto.

Los autores  
Málaga, Noviembre de 1998

# ÍNDICE

## ELASTICIDAD

### CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD Y A LA RESISTENCIA DE MATERIALES.

1.1.	Introducción .....	1
1.2.	Sistema real, esquema de cálculo .....	1
1.3.	Sólido rígido, elástico y real .....	2
1.4.	Fuerzas interiores y exteriores. Equilibrio estático y elástico .....	2
1.5.	Esfuerzos de la barra prismática .....	4
1.6.	Concepto de tensión .....	5
1.7.	Concepto de deformación .....	6
1.8.	El problema elástico .....	8
1.9.	Hipótesis de la Elasticidad .....	9

### CAPÍTULO 2: EL TENSOR DE TENSIONES

2.1.	Introducción .....	11
2.2.	Componentes intrínsecas del vector tensión .....	11
2.3.	El tensor de tensiones .....	12
2.4.	Ecuaciones de equilibrio interno .....	14
2.5.	Reciprocidad de las tensiones tangenciales .....	17
2.6.	Lema de Cauchy .....	18
2.7.	Cambio de sistemas de referencia .....	21
2.8.	Tensiones y direcciones principales .....	22
2.9.	Representación gráfica del tensor de tensiones. Elipsoide de Lamé. ....	24
2.10.	Representación gráfica del tensor de tensiones. Círculos de Möhr. ....	25
2.11.	Tensiones tangenciales máximas .....	32
2.12.	Tensiones octaédricas .....	34
2.13.	Tensor esférico y tensor desviador .....	35
2.14.	Tensión plana .....	36

### CAPÍTULO 3: EL TENSOR DE DEFORMACIÓN

3.1.	Concepto de desplazamiento y deformación .....	41
3.2.	Deformación en el entorno de un punto .....	42
3.3.	Significado físico del tensor deformación y de la matriz de giro .....	44

3.4.	El vector deformación. Componentes intrínsecas .....	47
3.5.	Correlación entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones .....	49
3.6.	Tensor esférico y tensor desviador .....	50
3.7.	Ecuaciones de compatibilidad .....	52
3.8.	Obtención del vector desplazamiento a partir del tensor de deformación .....	59
3.9.	Deformación plana .....	62

#### CAPÍTULO 4: LEY DE COMPORTAMIENTO

4.1.	Introducción.....	65
4.2.	El ensayo de tracción.....	66
4.3.	Ley de Hooke generalizada .....	72
4.4.	Módulo transversal de Elasticidad.....	73
4.5.	Ley de comportamiento unas coordenadas cualesquiera.....	76
4.6.	El problema elástico .....	80
4.7.	El problema térmico .....	83
4.8.	Energía de deformación.....	85
4.9.	Principio de Saint-Venant.....	87

#### CAPÍTULO 5: CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA

5.1.	Introducción.....	89
5.2.	Representación en el espacio de tensiones principales.....	90
5.3.	Superficies de plastificación y de rotura .....	91
5.4.	Comportamiento dúctil y frágil .....	95
5.5.	Criterios de fallo .....	96
5.6.	Teoría de los estados límites de Möhr.....	104
5.7.	Tensión equivalente, coeficiente de seguridad y tensión de trabajo .....	107

### RESISTENCIA DE MATERIALES

#### CAPÍTULO 6: RESISTENCIA DE MATERIALES. CONCEPTOS BÁSICOS

6.1.	Introducción.....	109
6.2.	Barra prismática.....	110
6.3.	Planteamiento general del modelo de barras .....	112
6.4.	Tensiones en la sección. Esfuerzos internos.....	113
6.5.	Fuerzas y apoyos .....	115

#### CAPÍTULO 7: TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

7.1.	Introducción.....	117
7.2.	Tracción y Compresión. Tensiones y alargamientos.....	118
7.3.	Deformaciones producidas en una barra por su propio peso.....	121

7.4.	Problemas estáticamente indeterminados o hiperestáticos .....	124
7.5.	Tensiones iniciales y térmicas .....	127

## CAPÍTULO 8: FLEXIÓN. TENSIONES

8.1.	Introducción. Diagramas de vigas isostáticas .....	129
8.2.	Tensiones en la barra sometida a flexión pura.....	138
8.3.	Tensiones en la barra sometida a flexión simple .....	142
8.4.	Tensiones principales en la barra debidas a flexión simple.....	148
8.5.	Dimensionamiento de barras sometidas a flexión simple .....	149

## CAPÍTULO 9: FLEXIÓN. DEFORMACIONES

9.1.	Ecuación general de la elástica .....	151
9.2.	Teoremas de Möhr para el cálculo de deformaciones en flexión .....	156
9.3.	Teoremas de la viga conjugada para el cálculo de deformaciones en flexión .....	160
9.4.	Efecto del esfuerzo cortante en la deformación de las vigas.....	165

## CAPÍTULO 10: FLEXIÓN. HIPERESTATICIDAD

10.1.	Introducción .....	167
10.2.	Viga empotrada por un extremo y apoyado por el otro .....	167
10.3.	Viga con los dos extremos empotrados .....	173
10.4.	Vigas continuas.....	180
10.5.	Pórticos y cuadros.....	183

## CAPÍTULO 11: FLEXO-COMPRESIÓN DESVIADA

11.1.	Introducción .....	189
11.2.	Flexión disimétrica en barras que tienen, al menos, un eje de simetría .....	189
11.3.	Flexión en barras sometidas a dos momentos según dos ejes cualesquiera .....	192
11.4.	Flexión compuesta .....	195
11.5.	Compresión excéntrica. Núcleo central.....	196

## CAPÍTULO 12: TORSIÓN EN PERFILES CIRCULARES

12.1.	Introducción .....	201
12.2.	Torsión en perfiles circulares. Tensiones y Giros .....	203
12.3.	Torsión hiperestática.....	206
12.5.	Torsión combinada con flexión. Estudio de ejes .....	208
12.6.	Torsión libre en perfiles no circulares .....	209

### CAPÍTULO 13: TRACCIÓN, FLEXIÓN Y TORSIÓN EN PERFILES DE PARED DELGADA

13.1.	Introducción.....	213
13.2.	Tensiones normales debidas a flexión compuesta.....	214
13.3.	Tensiones tangenciales debidas a los esfuerzos cortantes.....	215
13.4.	Centro de esfuerzos cortantes.....	225
13.5.	Perfiles de pared delgada sometidos a torsión libre. Analogía de la membrana.....	232
13.6.	Perfiles abiertos y cerrados sometidos a torsión libre.....	237

### CAPÍTULO 14: POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS

14.1.	Introducción.....	245
14.2.	Trabajo producido por las fuerzas externas.....	245
14.3.	Potencial elástico y energía potencial.....	247
14.4.	Teorema de reciprocidad o de Betti.....	251
14.5.	Principio de los trabajos virtuales.....	254
14.6.	Principio de Castigliano.....	264

### CAPÍTULO 15: INESTABILIDAD DE BARRAS PRISMÁTICAS. PANDEO

15.1.	Introducción.....	271
15.2.	Teoría clásica. Problema de Euler.....	272
15.3.	Influencia de las grandes deformaciones en el pandeo.....	275
15.4.	Dependencia de las cargas críticas con las condiciones de apoyo.....	280
15.5.	Influencia de la excentricidad y de una deformada previa en el fenómeno del pandeo.....	281
15.6.	Tensión crítica. Hipérbola de Euler.....	286
15.7.	Método práctico de cálculo a pandeo. Método $\omega$ .....	288
15.8.	Secciones óptimas a pandeo.....	291

BIBLIOGRAFÍA.....	293
-------------------	-----

## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN A LA ELASTICIDAD Y A LA RESISTENCIA DE MATERIALES

### 1.1. INTRODUCCIÓN

La Elasticidad y la Resistencia de Materiales son dos disciplinas, íntimamente ligadas, encuadradas dentro de la Mecánica de Medios Continuos que, a su vez, forma parte de la Mecánica, entendida ésta como una rama de la Física.

En un sentido amplio puede decirse que la Elasticidad estudia los efectos que las solicitaciones externas provocan sobre un sólido. El estudio de la Elasticidad es genérico, en el sentido de que estudia sólidos de forma cualesquiera sometidos a todo tipo de cargas.

Este estudio genera un aparato matemático muy complejo que, si bien puede llegar a resolverse con la ayuda de complicados programas informáticos, en la mayoría de los casos, suele ser inabordable sin esa ayuda.

La introducción de ciertas hipótesis simplificadoras, de cara a hacer más cómodamente resolubles cierto tipo de problemas muy frecuentes en Ingeniería, da lugar a la Resistencia de Materiales.

Debe quedar bien entendido que el objeto de estudio de ambas disciplinas es el medio sólido deformable, frente a la Mecánica Racional, la otra gran parte de la Mecánica, que estudia el comportamiento del sólido rígido.

### 1.2. SISTEMA REAL, ESQUEMA DE CÁLCULO

El primer aspecto que hay que tener en cuenta cuando nos enfrentamos a un problema real de Ingeniería con todas sus peculiaridades (variables, datos geométricos, etc.) es el paso al modelo o esquema de cálculo, en el cual gran parte de los elementos se reducen o se obvian para simplificar la resolución sin perder mucha precisión en los resultados que se quieren obtener.

Este paso que, para un problema simple, puede ser inmediato, en un problema complejo puede ser muy delicado y requerir una cantidad de tiempo nada despreciable, máxime teniendo presente que, por muy buenos que sean los cálculos posteriores, si el modelo no reproduce con la fidelidad necesaria el problema real, dará lugar a resultados que pueden llegar a ser francamente malos.

En el caso de que se esté trabajando sobre un problema de Elasticidad o de Resistencia de Materiales, hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Geometría
- Variables que intervienen en el proceso (temperatura, presión atmosférica, peso, campos electromagnéticos, cargas,...)
- Propiedades y comportamiento de los materiales.

### 1.3. SÓLIDO RÍGIDO, ELÁSTICO Y REAL

Si se asume que el sólido no ofrece variaciones de posición relativas de unos puntos frente a otros, se estaría modelando el sólido como rígido. En tal caso, y como ya se ha indicado, se estaría dentro de la disciplina de la Mecánica Racional, estudiando problemas en los que los movimientos de todo el conjunto son los que realmente importan en el análisis, desestimando los movimientos relativos. Al suponer que el sólido es rígido se está realizando una hipótesis sobre el comportamiento del material, como ya se detallará más adelante.

Asumiendo la idea contraria, es decir que los puntos de un sólido varían sus posiciones relativas bajo la acción de cargas externas, se está tratando el sólido como deformable. Si además se admiten una serie de hipótesis que se desarrollarán al final de este capítulo se tiene lo que se conoce como sólido elástico.

En general un sólido real no es, exactamente, ni rígido ni elástico; el sólido rígido no existe porque para que un sólido pueda resistir unos esfuerzos aplicados debe deformarse, y el elástico tampoco porque el sólido incumple en mayor o menor medida las hipótesis mencionadas anteriormente, sin embargo la admisión de estas hipótesis no nos aleja tanto del medio real como para dar lugar a resultados inexactos.

### 1.4. FUERZAS INTERIORES Y EXTERIORES. EQUILIBRIO ESTÁTICO Y ELÁSTICO

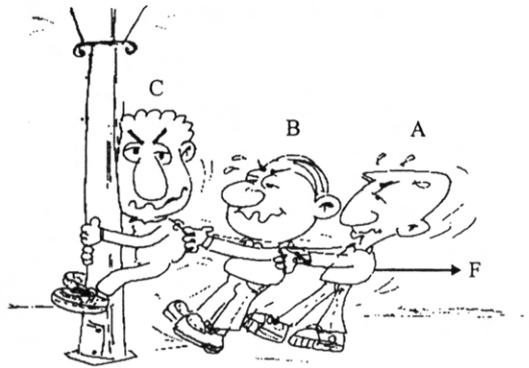
Las fuerzas externas que actúan sobre un sólido se dividen en dos:

*Las fuerzas de superficie*, que actúan sobre el contorno del cuerpo. Ejemplos de fuerzas de superficie son el empuje del terreno, la presión de un fluido, ya sea líquido o gaseoso o el peso de personas o vehículos que transitan sobre el sólido.

Las *fuerzas de volumen*, que actúan en los elementos de volumen del cuerpo. Ejemplos de fuerzas de volumen son las fuerzas gravitatorias o las fuerzas provocadas por un campo electromagnético.

Cuando sobre un cuerpo deformable actúa un sistema de fuerzas externas, éstas provocan en todas las partículas del sólido una serie de fuerzas internas que transmiten las fuerzas exteriores a través del sólido. Estas fuerzas interiores son fuerzas de origen molecular.

Para entender el concepto de fuerza interior se asemejará el sólido a una cadena humana, figura 1.1, en la que el primer individuo se halla sometido a una fuerza  $F$  y el último se encuentra sujeto a la farola, cada persona de la cadena sería una partícula del sólido y la fuerza  $F$  que actúa sobre el individuo A, es una fuerza externa.



**Figura 1.1.** Individuos que representan un conjunto de partículas que forman un sólido.

Si se tira del individuo A con una fuerza  $F$  éste, a su vez, ejercerá una fuerza  $F$  sobre el individuo B que a su vez ejercerá una fuerza  $F$  sobre el C, la fuerza que ejerce un individuo sobre otro equivaldría a las fuerzas interiores de los sólidos.

Asumida la existencia de estas fuerzas internas, cuyo tratamiento y cálculo se verán con posterioridad, se puede introducir la idea de equilibrio del sólido deformable. Así como en el sólido rígido las condiciones necesarias y suficientes de *equilibrio estático* son:

$$\sum F = 0; \quad \sum M = 0 \quad [1.1]$$

En el caso del sólido deformable, estas condiciones son necesarias pero no suficientes; se necesita, además, que para cada parte del sólido las fuerzas interiores equilibren a las exteriores, esto es lo que se denomina *equilibrio elástico*.

## 1.5. ESFUERZOS DE LA BARRA PRISMÁTICA

Se define la barra prismática como el volumen generado por una superficie plana A, que se denomina *sección transversal generatriz*, o simplemente *sección transversal*, al moverse recorriendo su centro de gravedad G una curva D, denominada *directriz*, manteniéndose A normal a D y permaneciendo un eje de la sección en el plano de la directriz.

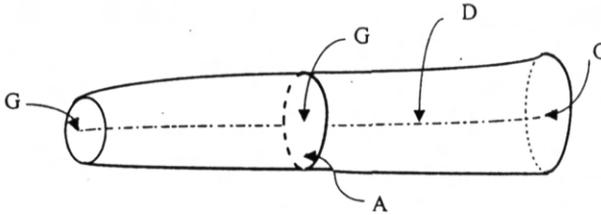


Figura 1.2. Barra prismática.

Además se han de cumplir las siguientes restricciones cualitativas:

- La directriz no puede tener curvatura pronunciada.
- No pueden existir cambios bruscos de sección.

Si la directriz es alabeada, plana o recta, el prisma mecánico se denominará alabeado, plano o recto, respectivamente.

Si, además, el área de la sección transversal A no varía en ninguna sección, el prisma se denominará de sección constante, siendo este caso el más generalizado.

La necesidad de esta definición se debe a que las simplificaciones que se impondrán a la Teoría de Elasticidad para obtener la Teoría de Resistencia de Materiales se realizarán sobre sólidos elásticos materializados en barras prismáticas.

Para definir el concepto de esfuerzo se utilizará el método de las secciones; esto es suponer que en la barra prismática se realiza un corte por un plano y que se elimina uno de los dos semisólidos en que este corte divide a la barra. Si se elimina este semisólido, sin más, se está rompiendo el equilibrio; se hace necesario, pues, sustituir el semisólido eliminado por la resultante de fuerzas y momentos que el sólido eliminado ejerce sobre el sólido que se va a dejar. Es obvio que cuando se menciona la palabras “cortar” y “eliminar”, sólo es en un sentido figurado.

Cuando el plano de corte determina en el prisma una sección recta, es decir cuando el plano es perpendicular a la directriz, y cuando el punto donde se toma resultante es el centro de gravedad de la sección, las componentes de las resultantes de fuerzas y momentos en un cierto sistema de referencia se denomina esfuerzo. Estos conceptos se estudiarán más detalladamente en el capítulo 6 y, posteriormente, en el resto de los capítulos que tratan sobre la Resistencia de Materiales.

## 1.6. CONCEPTO DE TENSION

Como se ha indicado anteriormente, el objetivo de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales es estudiar el comportamiento del sólido elástico deformable; mas cabría pensar qué se entiende con el nombre genérico de “comportamiento”. Simplificando se puede decir que si se somete al sólido a una serie de fuerzas, las partículas que lo constituyen se desplazan, dedicándose la Elasticidad a la determinación de estos desplazamientos en función de las fuerzas que lo solicitan. Sin embargo esta relación no resulta inmediata: hay que definir unas variables intermedias: la tensión y la deformación, que permitan terminar relacionando la fuerza y el desplazamiento.

Considérese un sólido cualquiera sometido a una serie de fuerzas exteriores y a unas condiciones de apoyo que le permiten estar en equilibrio, figura 1.3. Se dividirá el sólido en dos partes mediante un plano imaginario  $\pi$ , siendo  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$ ,  $\vec{f}_3$  y  $\vec{f}_4$  fuerzas interiores que representan la acción que el subdominio A ejerce sobre el subdominio B y viceversa.

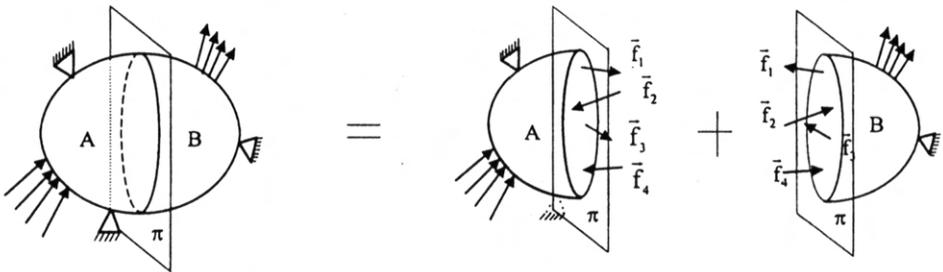


Figura 1.3. División imaginaria del sólido mediante el plano  $\pi$ .

Como se indica las fuerzas interiores sobre A son iguales y de sentido contrario a las fuerzas sobre B. Esto se entiende fácilmente si se vuelve al símil de la cadena humana: la fuerza que ejerce el individuo A sobre el individuo B es igual y de sentido contrario que la que ejerce el individuo B sobre el A.

De las dos partes en que se divide el sólido se separa una pequeña superficie  $\delta s$  que rodee al punto genérico P :

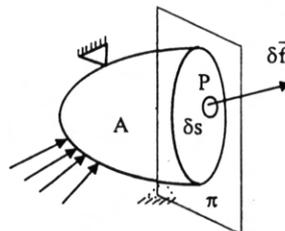


Figura 1.4. Superficie infinitesimal en torno al punto P.

En la superficie  $\delta s$  existen una gran cantidad de partículas, cada una de ellas sometidas a una fuerza interior, siendo la resultante de todas las fuerzas interiores  $\delta \vec{f}$ .

Se define el vector tensión asociado al punto P y al plano  $\pi$  como:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{f}}{\delta s} \quad [1.2]$$

Observe que la tensión tiene dimensión de presión, fuerza partido entre superficie, pero no tiene por qué tener dirección de presión, perpendicular a la superficie, sino una dirección cualquiera.

Resumiendo, se puede decir que el vector tensión es un vector:

- con unidades de fuerza/superficie.
- asociado a un punto y a un plano.

## 1.7. CONCEPTO DE DEFORMACIÓN

Éste es el otro gran concepto que queda por definir para poder cerrar el problema elástico. Las partículas de un sólido sometido a una serie de sollicitaciones se desplazan. Parte de este desplazamiento produce el desplazamiento del sólido como sólido rígido y parte se encamina a producir en el sólido una deformación.

Para entender esta división se representa un sólido con forma de rectángulo, como se indica en la figura 1.5, en el que nos vamos a fijar en la evolución del punto A.

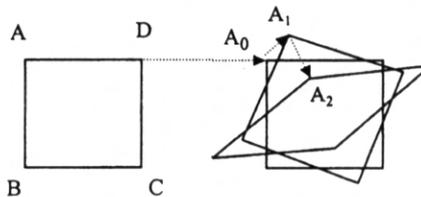


Figura 1.5. Variación de superficie infinitesimal.

El desplazamiento total del punto A es  $\vec{AA}_2$ :

$$\vec{AA}_2 = \vec{AA}_0 + \vec{A_0A_1} + \vec{A_1A_2}$$

Donde:

$\vec{AA}_0 + \vec{A_0A_1}$  representa el desplazamiento como sólido rígido con:

$\vec{AA}_0$  : Traslación.

$\vec{A_0A_1}$  : Rotación.

Y  $\vec{A_1A_2}$  representa la deformación.

La deformación puede ser *lineal* o *angular*.

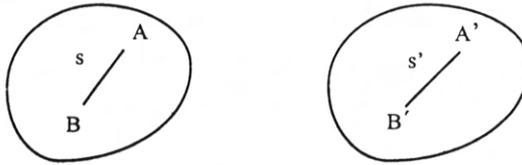
Se define la *deformación lineal* media del segmento  $s$ , figura 1.6, determinada por dos puntos cualesquiera del sólido A y B como:

$$\epsilon_m = \frac{s' - s}{s} \quad [1.3]$$

La expresión anterior depende de los puntos A y B; si se quiere que la deformación sea, exclusivamente, función del punto se debe acercar A infinitesimalmente a B; o sea:

$$\epsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s' - s}{s} \quad [1.4]$$

La expresión anterior es lo que se conoce como *deformación lineal instantánea* y es función únicamente del punto.



**Figura 1.6.** Alargamiento longitudinal.

Para definir la deformación angular se considerará el mismo sólido anterior sometido a las mismas sollicitaciones; en lugar de los dos puntos anteriores A y B se considerarán tres puntos: O, A y B, como muestra la figura 1.7.



**Figura 1.7.** Distorsión angular.

Se define la *deformación angular media* como:

$$\gamma_m = \theta - \theta' \tag{1.5}$$

Para que la deformación angular sea función de un sólo punto, al igual que sucedía con la deformación lineal, se debe acercar infinitesimalmente los puntos A y B al punto O.

$$\gamma = \lim_{\substack{A \rightarrow O \\ B \rightarrow O}} (\theta - \theta') \tag{1.6}$$

La deformación, lineal o angular, es una magnitud *adimensional*. Esto se desprende de la definición de deformación. La deformación lineal es adimensional porque se define como el cociente entre dos longitudes y la deformación angular es adimensional por tratarse de un ángulo.

### 1.8. EL PROBLEMA ELÁSTICO

Una vez definidos los conceptos de tensión y deformación, se puede completar el problema elástico:

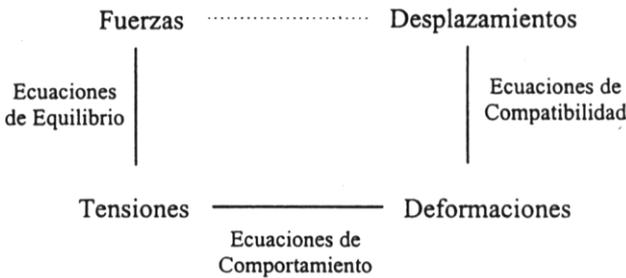


Figura 1.8. Esquema del problema elástico.

El esquema de la figura 1.8 muestra el problema elástico, ya cerrado; o sea que ya se pueden obtener los desplazamientos de los puntos del sólido a partir de las solicitaciones, pasando por las tensiones y las deformaciones. La relación entre fuerzas y tensiones constituyen las *ecuaciones de equilibrio*, la relación entre desplazamientos y deformaciones constituyen las *ecuaciones de compatibilidad* y la relación entre tensiones y deformaciones, *las ecuaciones de comportamiento*.

De las variables que entran en juego en el problema elástico: fuerzas, tensiones, deformaciones y desplazamientos; es de especial relevancia el conocimiento de las tensiones y de los desplazamientos, los valores de ambos deben estar acotados, estas acotaciones constituyen los estados límites. La limitación de las tensiones debe realizarse para que el sólido no “rompa”, en realidad se suele hacer para que el sólido no plastifique, mientras que la limitación de los desplazamientos tiene como finalidad asegurar que se

cumpla la hipótesis de pequeñas deformaciones. Todos estos conceptos se aclararán en el tema siguiente así como en los sucesivos capítulos.

## 1.9. HIPÓTESIS DE LA ELASTICIDAD

Ya se ha dicho que la Elasticidad y Resistencia de Materiales estudia el sólido elástico que es un sólido deformable al que se le suponen determinadas hipótesis.

La primera hipótesis es la *aplicación progresiva de las fuerzas*: la aplicación de las fuerzas es tan lenta que se pueden considerar despreciables los efectos de inercia. En definitiva, se puede considerar que se cumplen las leyes de la Estática: ( $\sum F = 0$ ;  $\sum M = 0$ ).

El resto de las hipótesis se pueden englobar, bien como *hipótesis de constitución* del material, bien como *hipótesis de comportamiento*.

### Hipótesis de Constitución:

**Homogeneidad:** El sólido es igual en todos y cada uno de sus puntos.

**Continuidad:** El sólido no varía de punto a punto. No existen huecos ni intersticios.

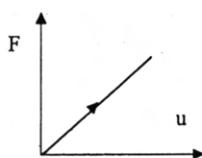
**Isotropía:** El sólido mantiene sus propiedades en todas las direcciones.

**Hipótesis de Comportamiento:** Son hipótesis sobre la relación entre tensión y deformación, extrapolable a la relación entre fuerza y desplazamiento.

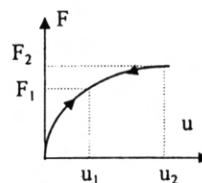
**Linealidad:** La ley de comportamiento es lineal, figura 1.9.a.

**Elasticidad:** La ley de comportamiento es biunívoca: a cada fuerza le corresponde un desplazamiento. Si se carga con una fuerza  $F_1$  y se alcanza un desplazamiento  $u_1$ , se aumenta la carga hasta un valor  $F_2$  y se alcanza un desplazamiento  $u_2$ , si se descarga volviéndose a una fuerza  $F_1$  se vuelve a tener un desplazamiento  $u_1$ , figura 1.9.b.

**Pequeñas deformaciones:** Se supone que los desplazamiento que sufren los puntos del sólido son tan pequeños que para cualquier análisis de fuerzas etc. se considera el sólido indeformado.



a) Linealidad



b) Elasticidad

Figura 1.9. Hipótesis de comportamiento del material.

Las hipótesis de comportamiento del material permiten la aplicación del *principio de superposición* que dice que si las causas se suman, se suman también los efectos. La necesidad de considerar la linealidad resulta obvia, puesto que el principio de superposición no es más que admitir que la relación entre fuerzas y desplazamientos es una aplicación lineal, matemáticamente:

$$u(\alpha F_1 + \beta F_2) = \alpha u(F_1) + \beta u(F_2) \quad \forall \alpha \text{ y } \beta \quad [1.7]$$

En la expresión anterior  $u$  es una aplicación lineal,  $F_1$  y  $F_2$  son vectores y  $\alpha$  y  $\beta$  son dos escalares cualesquiera.

La necesidad de considerar la elasticidad para que se verifique la igualdad anterior se pone de manifiesto para el caso de  $\alpha = 1$  y de  $\beta = 1$ , con  $F_1 = F$  y  $F_2 = -F$ ; o sea primero una carga y luego una descarga, para que se cumpla la igualdad anterior el desplazamiento final debe ser nulo, hecho que no sucede si no se admite la Elasticidad.

La hipótesis de pequeñas deformaciones hay que admitirla para considerar el estudio del sólido indeformado porque si se considera deformación al someter el sólido a una fuerza  $F_2$  después de estar sometido a  $F_1$  el sólido es diferente del inicial.

## Capítulo 2

## EL TENSOR DE TENSIONES

## 2.1. INTRODUCCIÓN

Cuando en el apartado 1.6 se definió el vector tensión se dijo que era un vector que dependía del punto y estaba asociado a un plano. Como en el sólido hay infinitos puntos, y por cada punto pasan infinitos planos: hay infinitos vectores tensión. En este tema se va a encontrar una matriz que va a permitir obtener el vector tensión asociado a un plano sin más que conocer esa matriz, el tensor de tensiones, y la normal al plano.

El otro objetivo de este tema es encontrar la relación entre las tensiones y las fuerzas mediante las ecuaciones de equilibrio, que es el primer paso para desarrollar el problema elástico.

## 2.2. COMPONENTES INTRÍNSECAS DEL VECTOR TENSION

Como todo vector, el vector tensión se puede descomponer en tres componentes del espacio. Sin embargo, existe una descomposición muy usada y con gran significado físico, que es la descomposición en componentes intrínsecas; en la figura 2.1 el vector tensión sobre el plano al que está asociado, y está descompuesto según sus componentes intrínsecas.

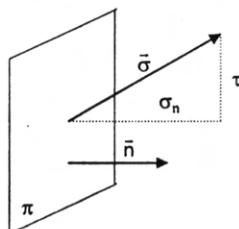


Figura 2.1. Componentes intrínsecas del vector tensión.

Las componentes intrínsecas son dos:

- *Tensión normal*  $\sigma_n$ : Es la proyección del vector tensión  $\vec{\sigma}$  sobre la normal al plano  $\pi$ :  $\vec{n}$ .
- *Tensión tangencial*  $\tau$ : Proyección del vector tensión  $\vec{\sigma}$  sobre el propio plano  $\pi$ .

El significado físico de cada componente es el que sigue:

- La tensión normal provoca en la pieza un cambio de volumen. Si la tensión normal es positiva; o sea tiene el sentido de la normal al plano, el volumen de la pieza aumenta, se dice que la pieza está sometida a *tracción* y si la tensión normal es negativa produce una disminución de volumen y la pieza está sometida a *compresión*. La normal al plano puede tener dos sentidos, se tomará siempre la normal externa al semisólido considerado, figura 1.4.
- La tensión tangencial provoca en la pieza un cambio de forma. El sentido de la tensión tangencial no tiene una trascendental importancia.

En cuanto a la forma de calcular cada componente:

- La tensión normal se calcula proyectando el vector tensión sobre la normal al plano, como se desprende de la propia definición de componente normal:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad [2.1]$$

- Para hallar la componente tangencial se aplica el teorema de Pitágoras:

$$\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2} \quad [2.2]$$

### 2.3. EL TENSOR DE TENSIONES

Al depender el vector tensión del punto y del plano, existen infinitos vectores tensión en un punto al existir infinitos planos que pasen por el punto. Sin embargo, se demostrará más adelante que esos vectores tensión se pueden determinar a partir de la normal al plano correspondiente, si se conoce el tensor de tensiones.

Considérese un sólido cualquiera en el que se aísla un punto material entre seis planos, tal y como se muestra en la figura 2.2.

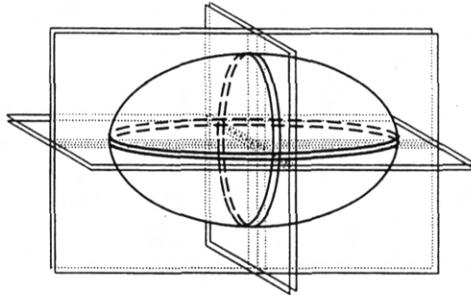


Figura 2.2. Aislamiento de un punto material mediante seis planos.

Si se aísla el punto hay que sustituir el resto del sólido por el efecto que sobre el punto produce. El efecto del resto del sólido se pone de manifiesto a través de las fuerzas interiores, que se cuantifican mediante los vectores tensión, asociados a cada uno de los seis planos anteriores. Haciendo coincidir estos planos con los planos coordenados, la situación que tendríamos sería la de la figura 2.3.

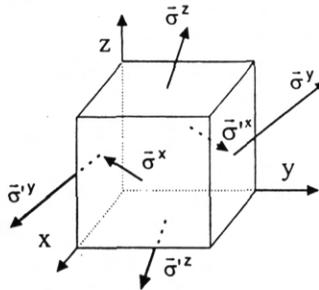


Figura 2.3. Vectores tensión asociados a los planos coordenados.

Los vectores tensión asociados a cada plano coordenado son:  $\vec{\sigma}^x$ , asociado al plano OYZ,  $\vec{\sigma}^y$ , asociado al plano OXZ y  $\vec{\sigma}^z$ , asociado al plano OXY. Los vectores tensión  $\vec{\sigma}'^x, \vec{\sigma}'^y, \vec{\sigma}'^z$  son los vectores correspondientes a las caras ocultas y son iguales y de sentido contrario a  $\vec{\sigma}^x, \vec{\sigma}^y$  y  $\vec{\sigma}^z$ , respectivamente, por el principio de acción-reacción.

Los vectores tensión anteriores, como cualquier otro vector del espacio, consta de tres componentes:

$$\vec{\sigma}^x = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\sigma}^y = \begin{bmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\sigma}^z = \begin{bmatrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \text{ ó } \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Donde las componentes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ , denotadas por  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  se denominan componentes normales, al llevar la dirección de la normal a cada plano, y las componentes  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}$ ,

$\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zy}$ , también nombradas como  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  se denominan componentes tangenciales, al estar contenidas en el plano, respecto al cual se determina el vector tensión. Las componentes de los vectores tensión asociados a los planos coordenados, en función de sus componentes vienen representados en la figura 2.4.

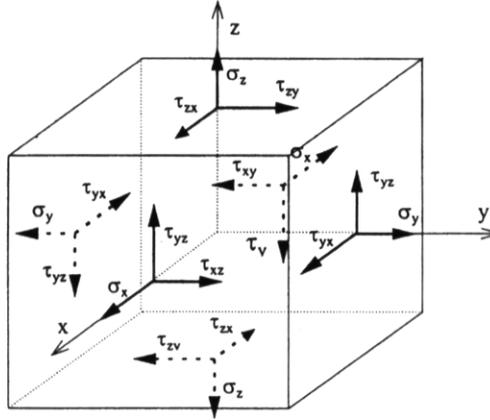


Figura 2.4. Componentes de los vectores tensión de un punto material asociados a los planos coordenados.

Si se colocan los vectores tensión asociados a los planos coordenados como los vectores columna de una matriz, ésta constituye lo que se conoce como el *tensor de tensiones*, por ello en el apartado de introducción se decía que, a todos los efectos, se puede identificar el tensor de tensiones con una matriz.

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad [2.3]$$

## 2.4. ECUACIONES DE EQUILIBRIO INTERNO

Bajo este enunciado se pretende encontrar la relación entre las fuerzas volumétricas y las componentes del tensor de tensiones.

En el apartado anterior se ha aislado un punto material de un sólido encerrándolo entre seis planos coordenados, ahora se va a aislar un volumen infinitesimal, también entre seis planos coordenados. En el caso del volumen infinitesimal el vector tensión asociado a las caras vistas no es igual y de sentido contrario al vector tensión asociado a las caras ocultas, sino “casi igual”. Esto se traduce, matemáticamente, en que se puede hacer un desarrollo en serie de Taylor para obtener los vectores tensión asociados a las caras vistas a partir de los vectores tensión asociados a las caras ocultas.

El desarrollo en serie de una función en torno a un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  es:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} dz + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z^2} (dz)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y \partial z} dy \cdot dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z \partial x} dz \cdot dx + \\ & + R(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Donde el término  $R(x_0, y_0, z_0)$  es el resto del desarrollo en serie y engloba a los términos de tercer orden o superior. En el caso de variación en un sólo eje, por ejemplo el eje OX:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + R'(x_0, y_0, z_0)$$

Si se desprecian los infinitesimos de segundo orden o superior, la expresión anterior queda:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx$$

Esta expresión, válida para variaciones de la función según el eje OX, también es extensible si la variación se efectúa según los otros ejes. Aplicando este desarrollo a cada componente del vector tensión, considerando las coordenadas afectadas por el subíndice 0 las correspondientes a las caras ocultas y las coordenadas sin el subíndice 0 las correspondientes a las caras vistas del paralelepípedo elemental, se tienen las componentes de los vectores tensión, asociados a los planos coordenados, que se muestran en la figura 2.5.

Además de las fuerzas interiores, cuantificadas mediante los vectores tensión asociados a los planos coordenados, se va a considerar que sobre el volumen anterior actúan unas fuerzas volumétricas, que van a venir caracterizadas mediante unas fuerzas específicas por unidad de volumen X, Y, Z, según los ejes OX, OY y OZ, respectivamente.

Ahora se va a realizar el equilibrio de fuerzas según el eje OX. Debe de quedar bien claro que siempre que se hable de equilibrio se trata de un equilibrio de fuerzas, no de tensiones. Para obtener fuerzas las tensiones se multiplicarán por la superficie sobre la que actúan y las fuerzas volumétricas por el volumen.

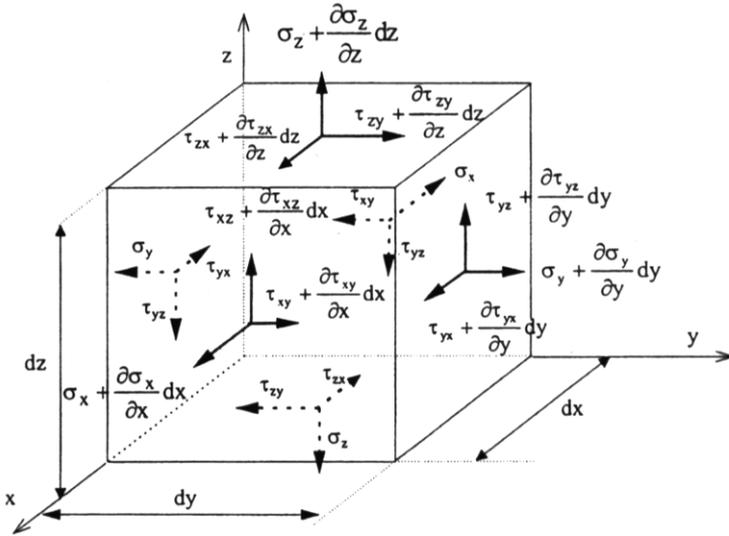


Figura 2.5. Componentes de los vectores tensión de un volumen infinitesimal.

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dydz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy + X dx dy dz = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) dx dy dz = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Como se observa de la expresión anterior las componentes correspondientes a las caras vistas tienen signo positivo, al llevar el mismo sentido que el eje OX, mientras que las componentes asociadas a las caras ocultas llevan signo negativo, al tener signo contrario al eje OX.

El resultado obtenido para el eje OX se puede extender al resto de los ejes coordenados, con lo que las ecuaciones para los tres ejes queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad [2.4]$$

Las ecuaciones [2.4] se conocen como *ecuaciones de equilibrio interno* y relacionan las componentes del tensor de tensiones con las fuerzas volumétricas.

## 2.5. RECIPROCIDAD DE LAS TENSIONES TANGENCIALES

Se va a ver como el tensor de tensiones definido por nueve valores se puede reducir a un tensor que venga determinado por sólo seis, esto es así porque el tensor es simétrico. Para lograr demostrar esto se va a imponer equilibrio de momentos, según el centro del paralelepípedo, punto O, de la figura 2.5. Se supondrá que las tensiones actúan en el centro de las caras. Los momentos los produce las fuerzas; para obtener fuerzas a partir de tensiones se multiplicará éstas por la superficie sobre la que actúan, al igual que se hizo en el apartado anterior.

En principio se va a tomar momentos según el eje OX. Lo primero que habrá que ver es qué tensiones provocan momentos y cuales no. Las tensiones que no producen momentos son, tanto en las caras vistas como en las ocultas:

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  no producen momentos al pasar por el punto O.

$\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$  no producen momentos según el eje OX al llevar la misma dirección.

$\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  no producen momentos según el eje OX porque el vector que une el punto O con el centro de aplicación de estas tensiones tiene la dirección del eje OX.

Quitando las tensiones que no producen momentos se puede representar el paralelepípedo de la figura 2.6 a una sola vista, si se lo mira desde el eje OX:

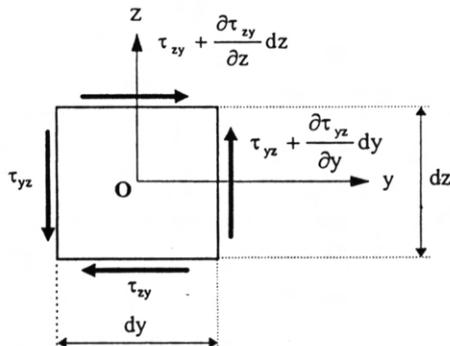


Figura 2.6. Paralelepípedo de la figura 2.5 visto desde el eje OX.

$$\Sigma M_x = 0:$$

$$\left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) \cdot \underbrace{dx \cdot dz}_{\text{Area}} \cdot \underbrace{\frac{dy}{2}}_{\text{Distancia}} + \tau_{yz} dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) \cdot \underbrace{dy \cdot dx}_{\text{Area}} \cdot \underbrace{\frac{dz}{2}}_{\text{Distancia}} +$$

$$-\tau_{zy} dy \cdot dx \cdot \frac{dz}{2} = 0 \Rightarrow \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy + \tau_{yz} - \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz - \tau_{zy} \right) \frac{dx dy dz}{2} = 0$$

Despreciando infinitesimos de orden superior, y teniendo en cuenta que el volumen del paralelepípedo nunca puede ser igual a cero, se llega a:

$$2\tau_{yz} - 2\tau_{zy} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Así se ha demostrado la reciprocidad de las tensiones tangenciales, para el resto de los ejes el resultado es análogo, con lo que, en definitiva, se puede establecer las igualdades:

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 &\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \Sigma M_y = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \Sigma M_z = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned} \quad [2.5]$$

No se ha tenido en cuenta el momento provocado por las fuerzas volumétricas al ser despreciable frente al momento provocado por las tensiones. Siempre que se trabaje con volúmenes diferenciales puede establecerse esta simplificación porque el volumen,  $dV$ , es un infinitesimo de mayor orden que la superficie de las caras,  $dS$ :

$$dS \sim dx dy \Rightarrow \text{Infinitésimo de segundo orden.}$$

$$dV \sim dx dy dz \Rightarrow \text{Infinitésimo de tercer orden.}$$

El tensor de tensiones se puede poner definitivamente:

$$[\vec{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad [2.6]$$

## 2.6. LEMA DE CAUCHY

Cuando se definió, en el capítulo anterior, el vector tensión se dijo que era un vector asociado a un punto y a un plano; como por un punto pasan infinitos planos habrá infinitos vectores tensión asociados a un punto. Esto se traduce en que se deben conocer infinitos valores para determinar el estado tensional de un punto. Sin embargo se va a demostrar

que esto no será necesario, sólo con conocer el tensor de tensiones asociado a un punto y la normal a un plano se puede determinar el vector tensión asociado a ese plano. Para obtener este resultado se va a considerar un volumen infinitesimal; pero en este caso no va a ser un paralelepípedo sino un tetraedro, figura 2.7, en el que tres de sus caras van a ser los planos coordenados y la cara restante el plano oblicuo del que se quiere conocer su vector tensión.

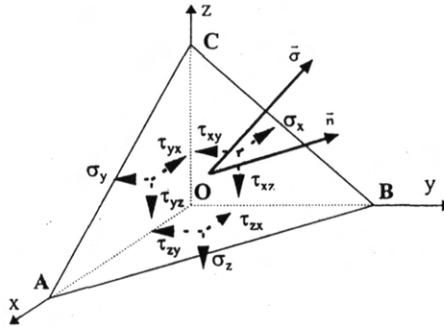


Figura 2.7. Vectores tensión de las caras de un tetraedro infinitesimal.

Se aplicará equilibrio de fuerzas, teniendo presente que son despreciables las fuerzas volumétricas en función de las superficiales al ser el volumen infinitesimal:

El vector  $\vec{\sigma} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$  es el vector tensión asociado al plano definido por la normal  $\vec{n}$ .

Las componentes de ambos vectores son:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Siendo  $l$ ,  $m$  y  $n$  los cosenos directores del vector  $\vec{n}$ ,  $l = \cos\alpha$ ,  $m = \cos\beta$ ,  $n = \cos\gamma$  que deben verificar que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad [2.7]$$

Las áreas son de las caras del tetraedro son:

$$\begin{aligned} \text{Área ABC} &= dS \\ \text{Área OBC} &= dS_x = dS \cos\alpha \\ \text{Área OCA} &= dS_y = dS \cos\beta \\ \text{Área OAB} &= dS_z = dS \cos\gamma \end{aligned}$$

Las áreas  $dS_x$ ,  $dS_y$  y  $dS_z$  son las caras del tetraedro situadas sobre los planos perpendiculares a los ejes OX, OY y OZ, respectivamente, que se obtienen proyectando el área de la cara oblicua,  $dS$ , sobre los planos coordenados, tal y como se ha hecho en las expresiones anteriores.

Para obtener fuerzas a partir de tensiones se debe multiplicar por el área sobre la que actúa. Tomando equilibrio de fuerzas según el eje OX:

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$\begin{aligned} & (-\sigma_x dS_x) + (-\tau_{yx} dS_y) + (-\tau_{zx} dS_z) + \rho_x dS = 0 \\ & -\sigma_x dS \cos\alpha - \tau_{yx} dS \cos\beta - \tau_{zx} dS \cos\gamma + \rho_x dS = 0 \\ & (-\sigma_x \cos\alpha - \tau_{yx} \cos\beta - \tau_{zx} \cos\gamma + \rho_x) \cdot dS = 0 \\ & -\sigma_x \cos\alpha - \tau_{yx} \cos\beta - \tau_{zx} \cos\gamma + \rho_x = 0 \Rightarrow \rho_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos para el equilibrio en los otros ejes es análogo, con lo que se obtienen las expresiones.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \Rightarrow \rho_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \cos\beta + \tau_{zx} \cos\gamma \\ \Sigma F_y = 0 & \Rightarrow \rho_y = \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{zy} \cos\gamma \\ \Sigma F_z = 0 & \Rightarrow \rho_z = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma \end{aligned}$$

Las expresiones anteriores puestas en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad [2.8]$$

O sea:

$$\vec{\sigma} = [\vec{\sigma}] \cdot \vec{n} \quad [2.9]$$

La expresión anterior se conoce con el nombre de *lema de Cauchy* y relaciona el vector tensión asociado a un punto y a un plano con el tensor de tensiones del punto y la normal al plano. Al relacionar el tensor de tensiones dos vectores: la normal y el vector tensión se puede considerar como una aplicación lineal.

Pero la expresión [2.9] tiene una importancia adicional: al ser el vector tensión una fuerza por unidad de superficie, cuando esa superficie sea del contorno coincide con la fuerza superficial, luego la expresión [2.9] relaciona fuerzas superficiales con el tensor de tensiones; por esto el lema de Cauchy también recibe el nombre de *ecuaciones de equilibrio*

*externo*. Si el contorno no es plano la fuerza superficial coincide con el vector tensión asociado al plano tangente al contorno.

## 2.7. CAMBIO DE SISTEMAS DE REFERENCIA

Se ha mencionado que el tensor de tensiones depende del punto considerado; pero esto no es del todo exacto, depende del punto y del sistema de referencia elegido. Si embargo si se conoce el tensor de tensiones en un sistema de referencia se puede conocer en cualquier otro sin más que cambiar de sistema de referencia al igual que se cambian las matrices que definen una aplicación lineal, porque como se ha dicho un tensor no es más que una aplicación lineal y, además, el estado tensional de un punto independiente de cómo se represente.

Dados dos sistemas de referencia el OXYZ y el OX'Y'Z' como los de la figura 2.8:

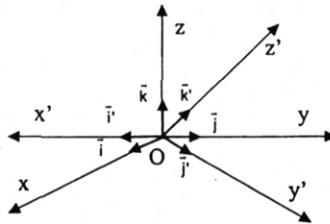


Figura 2.8. Cambio de sistemas de referencia.

Para pasar un vector de un sistema a otro hay que premultiplicar por la matriz de paso. La matriz de paso [P] puede definirse como:

$$[P] = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \text{ con } \vec{i}' = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}; \vec{j}' = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}; \vec{k}' = \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

O sea los vectores columna de [P] son los vectores unitarios que definen el sistema OX'Y'Z' expresadas sus componentes en el sistema OXYZ. Esta matriz tiene la peculiaridad de ser ortonormal, es decir que la matriz inversa existe y además coincide con la traspuesta. De Álgebra Vectorial se sabe que para transformar un vector  $\vec{u}$ , expresado en los ejes OXYZ, a los ejes OX'Y'Z', como  $\vec{u}'$ , se premultiplica por la matriz inversa a la de paso:

$$\vec{u}' = [P]^T \cdot \vec{u}$$

Como cualquier otro vector se puede transformar el vector tensión  $\vec{\sigma}$  y el vector normal  $\vec{n}$ :

$$\bar{n}' = [P]^T \cdot \bar{n}; \quad \bar{\sigma}' = [P]^T \cdot \bar{\sigma}$$

Teniendo en cuenta la ley de Cauchy, tanto en unos ejes como en los otros:

$$\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}] \cdot \bar{n} \text{ y } \bar{\sigma}' = [\bar{\sigma}'] \cdot \bar{n}' :$$

$$\bar{\sigma}' = [\bar{\sigma}'] \cdot \bar{n}' \Rightarrow [P]^T \cdot \bar{\sigma} = [\bar{\sigma}'] \cdot [P]^T \cdot \bar{n}$$

Premultiplicando por  $[P]$  y teniendo en cuenta que  $[P]^{-1} = [P]^T$  :

$$[P] \cdot [P]^T \cdot \bar{\sigma} = [P] \cdot [\bar{\sigma}'] \cdot [P]^T \cdot \bar{n} \Rightarrow \bar{\sigma} = [P] \cdot [\bar{\sigma}'] \cdot [P]^T \cdot \bar{n} .$$

Y como  $\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}] \cdot \bar{n}$  se puede identificar:

$$[\bar{\sigma}] = [P] \cdot [\bar{\sigma}'] \cdot [P]^T \quad [2.10]$$

$$[\bar{\sigma}'] = [P]^T \cdot [\bar{\sigma}] \cdot [P] \quad [2.11]$$

Así se ha llegado a transformar el tensor de tensiones de un sistema de ejes a otro sin más que premultiplicar y postmultiplicar por la matriz de paso o su traspuesta.

## 2.8. TENSIONES Y DIRECCIONES PRINCIPALES

En el apartado 2.1 se definieron las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a un plano, se vio como ese vector tenía una componente normal y otra tangencial, ahora se va a ver si es posible encontrar un plano en el que sea posible que el vector tensión sólo tenga componente normal, es decir que se pueda obtener multiplicando la normal por un escalar  $\sigma$ :

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{n} \Rightarrow [\bar{\sigma}] \cdot \bar{n} = \sigma [I] \cdot \bar{n} \Rightarrow ([\bar{\sigma}] - \sigma [I]) \cdot \bar{n} = 0$$

La expresión anterior constituye un sistema de ecuaciones homogéneo, con todos los términos independientes nulos, de tres ecuaciones con tres incógnitas: l, m, y n.

$$\left[ \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El problema anterior es un problema típico de autovalores y autovectores. Para obtener los autovalores hay que admitir que el sistema de ecuaciones homogéneo anterior presente una

solución distinta de la trivial, todas las incógnitas iguales a cero. Para que esto ocurra el determinante de los coeficientes ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} - \sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como resultado de desarrollar el determinante anterior se obtiene una ecuación polinómica de grado 3, conocida como *ecuación característica*:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad [2.12]$$

De la resolución de la expresión [2.12] se obtienen tres valores, los autovalores del tensor, que corresponden a los vectores tensión que sólo tienen componente normal. Al ser el tensor de tensiones una matriz simétrica se puede demostrar que sus autovalores son números reales. Estos autovalores se conocen como *tensiones principales*,  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$ , admitiéndose, por convenio, que  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ . Los vectores directores asociados a cada tensión principal, los autovectores, son las *direcciones principales*  $\bar{n}_I$ ,  $\bar{n}_{II}$  y  $\bar{n}_{III}$ , respectivamente., que se puede demostrar que son ortogonales y, por tanto, constituyen una base de un sistema de referencia.

El tensor de tensiones, en ejes principales, es diagonal; esto es así porque las componentes del tensor de tensiones son los vectores tensión asociados a los ejes coordenados y cuando esos ejes coinciden con los ejes principales sus vectores tensión sólo tienen componente normal, figura 2.9, y las componentes normales vienen en la diagonal:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \quad [2.14]$$

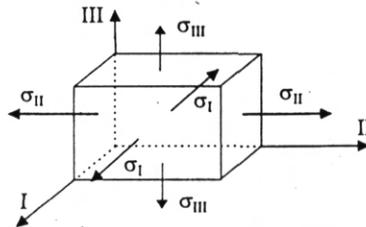


Figura 2.9. Volumen infinitesimal en ejes principales.

Los coeficientes de la ecuación característica son *invariantes* del tensor de tensión. Un invariante de un tensor es un valor del mismo que permanece inalterable si cambia el sistema de referencia. Es lógico que estos coeficientes sean invariantes ya que se obtendrán las mismas tensiones principales desde cualquier sistema de referencia.

Las invariantes son:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\
 I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III} \\
 I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

### 2.9. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TENSOR DE TENSIONES. ELIPSOIDE DE LAMÉ

Sea  $\vec{\sigma} = (\sigma^I, \sigma^{II}, \sigma^{III})$  el vector tensión asociado a  $\vec{n}$ , en ejes principales, según el lema de Cauchy  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ , donde  $\vec{\sigma}$  viene dado por la expresión [2.14]:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I l \\ \sigma_{II} m \\ \sigma_{III} n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^I \\ \sigma^{II} \\ \sigma^{III} \end{pmatrix} \Rightarrow l = \frac{\sigma^I}{\sigma_I}; m = \frac{\sigma^{II}}{\sigma_{II}}; n = \frac{\sigma^{III}}{\sigma_{III}}$$

Como  $\vec{n}$  es un vector unitario  $l^2 + m^2 + n^2 = 1 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\sigma^I}{\sigma_I}\right)^2 + \left(\frac{\sigma^{II}}{\sigma_{II}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma^{III}}{\sigma_{III}}\right)^2 = 1 \tag{2.15}$$

La ecuación [2.15] corresponde a un elipsoide, denominado *elipsoide de Lamé*, figura 2.10, y que representa el lugar geométrico del extremo de todos los posibles vectores tensión  $\vec{\sigma}$  en un punto.

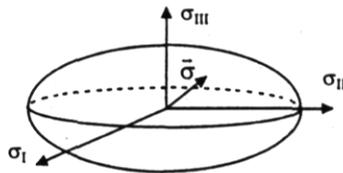


Figura 2.10. Elipsoide de Lamé.

## 2.10. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TENSOR DE TENSIONES. CÍRCULOS DE MÖHR

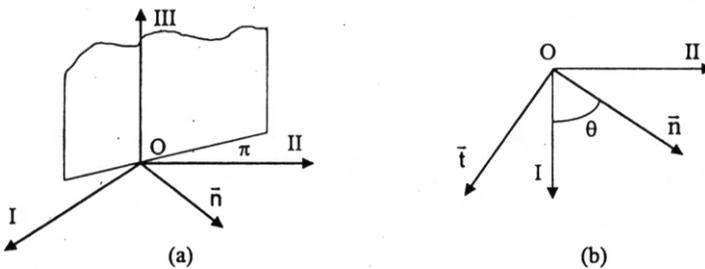
La representación de los vectores tensión mediante el elipsoide de Lamé es bastante intuitiva pero tiene sus inconvenientes:

- No permite determinar el vector tensión a partir de una normal determinada.
- Es una representación tridimensional que no es muy operativa.
- No se pueden obtener las componentes intrínsecas asociadas a cada plano.
- No distingue entre componente normal de tracción y componente normal de compresión.

Para solventar estos inconvenientes se realiza la representación gráfica mediante círculos de Möhr. La representación mediante círculos de Möhr es una representación bidimensional. Cabría pensar cómo es posible representar un vector tridimensional en dos dimensiones, la respuesta es intuitiva: se consideran como ejes las coordenadas intrínsecas del vector tensión. Al tener cada vector tensión unos ejes intrínsecos diferentes hay que tener en cuenta que para cada vector los ejes son diferentes pero se dibujan solapados.

Si se toma un plano paralelo al eje OIII, figura 2.11. La normal al plano,  $\vec{n}$ , se encuentra en el plano formado por los ejes OI y OII, luego sus componentes referido a ejes principales son:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Figura 2.11.** Plano paralelo a un eje principal (a) y visto de perfil (b).

Con estos valores de la normal y teniendo en cuenta que el tensor de tensiones está referido a ejes principales se puede obtener el vector tensión y sus componentes intrínsecas:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I l \\ \sigma_{II} m \\ \sigma_{III} n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I \cos \theta \\ \sigma_{II} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} &= (\sigma_I \cos \theta \quad \sigma_{II} \sin \theta \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_I \cos^2 \theta + \sigma_{II} \sin^2 \theta = \sigma_I \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \\ &+ \sigma_{II} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\tau = \vec{\sigma} \cdot \vec{t} = (\sigma_I \cos \theta \quad \sigma_{II} \sin \theta \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_I \cos \theta \sin \theta - \sigma_{II} \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\theta$$

Se obtienen que las componentes intrínsecas asociadas a un plano paralelo al eje principal OIII son:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\theta \quad [2.16]$$

$$\tau = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\theta \quad [2.17]$$

Para hallar la componente tangencial en vez de aplicar el teorema de Pitágoras se ha proyectado el vector tensión sobre un vector unitario perpendicular al normal. De los dos posibles vectores tangenciales se ha escogido aquel que va de  $\vec{t}$  a  $\vec{n}$  por el camino más corto realizando un giro positivo.

De las expresiones anteriores se deduce que si la normal está contenida en el plano formado por los ejes OI y OII los extremos de todos los vectores tensión correspondientes se pueden representar en un círculo de centro  $(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0)$  y radio  $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$  cuya ecuación sería:

$$\begin{aligned} \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\theta \right)^2 + \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\theta \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta = \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \\ \left( \sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} \right)^2 + \tau^2 &= \left( \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad [2.18]$$

Análogamente sucede para normales contenidas en el plano formado por los ejes OII y OIII y para las contenidas en el plano por los ejes OI y OIII, luego los extremos de los posibles vectores tensión asociados a estos tres haces de planos se pueden representar mediante tres circunferencias, denominadas circunferencias de Möhr, que se muestran en la figura 2.12..

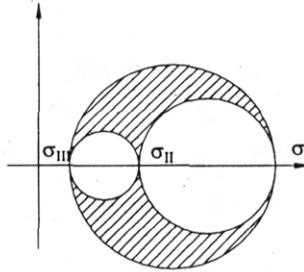


Figura 2.12. Circunferencias de Möhr.

A continuación se va a demostrar cómo el extremo de todo vector tensión asociado a una normal cualquiera se encuentra comprendido entre estas tres circunferencias.

En lo que sigue, al igual que se ha hecho anteriormente, se va a trabajar en ejes principales:

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I l \\ \sigma_{II} m \\ \sigma_{III} n \end{pmatrix}$$

El módulo al cuadrado de  $\vec{\sigma}$  es  $\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_I^2 l^2 + \sigma_{II}^2 m^2 + \sigma_{III}^2 n^2$ , y la tensión normal

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma_I l \quad \sigma_{II} m \quad \sigma_{III} n) \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \sigma_I l^2 + \sigma_{II} m^2 + \sigma_{III} n^2. \text{ Teniendo en cuenta los dos}$$

resultados anteriores, y que la normal es un vector unitario se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sigma_I^2 l^2 + \sigma_{II}^2 m^2 + \sigma_{III}^2 n^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 \\ \sigma_I l^2 + \sigma_{II} m^2 + \sigma_{III} n^2 = \sigma_n \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

Si se considera  $l$  constante:

$$\begin{aligned}\sigma_{II}^2 m^2 + \sigma_{III}^2 n^2 &= \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 l^2 \\ \sigma_{II} m^2 + \sigma_{III} n^2 &= \sigma_n - \sigma_I l^2 \\ m^2 + n^2 &= 1 - l^2\end{aligned}$$

Se tiene un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas;  $m^2$ ,  $n^2$ ; que para que sea compatible el rango de la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas ha de ser igual al de la matriz ampliada con los términos independientes; para que esto se verifique el determinante de la matriz ampliada debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{II}^2 & \sigma_{III}^2 & \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_I^2 l^2 \\ \sigma_{II} & \sigma_{III} & \sigma_n - \sigma_I l^2 \\ 1 & 1 & 1 - l^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante anterior, lo más fácil es hacerlo por la tercera columna:

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_{II} + \sigma_{III}) + \sigma_{II}\sigma_{III} - l^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II}) &= 0 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II})\end{aligned}$$

La expresión anterior corresponde a una familia de circunferencias representadas en los ejes

$O\sigma_n\tau$ , de centro  $\left(\frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}, 0\right)$  y radio  $r$  con  $r^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II})$ .

$$\text{Como } \begin{cases} \sigma_I \geq \sigma_{II} \\ \sigma_I \geq \sigma_{III} \\ l^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow l^2(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_I - \sigma_{II}) \geq 0 \Rightarrow r^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \Rightarrow r \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)$$

O sea es una familia de circunferencias concéntricas y de radio superior al radio dado para la circunferencia de Möhr correspondiente al haz de planos paralelos al eje  $OI$ .

Si se considera  $m$  constante al sistema de tres ecuaciones con dos variables que se llega es:

$$\begin{aligned}\sigma_I^2 l^2 + \sigma_{III}^2 n^2 &= \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_{II}^2 m^2 \\ \sigma_I l^2 + \sigma_{III} n^2 &= \sigma_n - \sigma_{II} m^2 \\ l^2 + n^2 &= 1 - m^2\end{aligned}$$

Para que sea compatible se debe verificar que:

$$\begin{vmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_{III}^2 & \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_{II}^2 m^2 \\ \sigma_I & \sigma_{III} & \sigma_n - \sigma_{II} m^2 \\ 1 & 1 & 1 - m^2 \end{vmatrix} = 0$$

Que desarrollado se obtiene la familia de circunferencias de centro  $\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}, 0\right)$  y radio  $r$

$$\text{con } r^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + m^2(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III}):$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + m^2(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})$$

$$\text{Como } \begin{cases} \sigma_{II} \leq \sigma_I \\ \sigma_{II} \geq \sigma_{III} \\ m^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m^2(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III}) \leq 0 \Rightarrow r^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \Rightarrow r \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)$$

La familia de circunferencias que se obtiene es de radio inferior al radio dado para la circunferencia de Möhr correspondiente al haz de planos paralelos al eje OII.

Si lo que es constante es  $n$ :

$$\begin{aligned} \sigma_I^2 l^2 + \sigma_{II}^2 m^2 &= \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_{III}^2 n^2 \\ \sigma_I l^2 + \sigma_{II} m^2 &= \sigma_n - \sigma_{III} n^2 \\ l^2 + m^2 &= 1 - n^2 \end{aligned}$$

Para que el sistema sea compatible:

$$\begin{vmatrix} \sigma_I^2 & \sigma_{II}^2 & \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_{III}^2 n^2 \\ \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_n - \sigma_{III} n^2 \\ 1 & 1 & 1 - n^2 \end{vmatrix} = 0$$

Que desarrollado se obtiene la familia de circunferencias de centro  $\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}, 0\right)$  y radio  $r$

$$\text{con } r^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 + n^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}):$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 + n^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})$$

$$\text{Como } \begin{cases} \sigma_{III} \leq \sigma_I \\ \sigma_{III} \leq \sigma_{II} \\ n^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow n^2(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II}) \leq 0 \Rightarrow r^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \Rightarrow r \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)$$

La familia de circunferencias que se obtiene es de radio superior al radio dado para la circunferencia de M6hr correspondiente al haz de planos paralelos al eje OIII.

Luego las componentes intrínsecas del vector tensión deben verificar:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \\ C_2 &\equiv \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{III} + \sigma_I}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \\ C_3 &\equiv \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad [2.19]$$

Las desigualdades anteriores obligan a que el extremo del vector tensión se encuentre entre las tres circunferencias de M6hr, la zona rallada en la figura 2.12, correspondiendo cada circunferencia,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , a los planos que cumplen que  $l = 0$ ,  $m = 0$  y  $n = 0$ , respectivamente.

Hasta ahora se conoce el lugar geométrico de los extremos del vector tensión, como ocurría con el elipsoide de Lamé, pero no se sabe calcular el vector tensión a partir de las componentes de la normal. Para obtener esto hay que introducir el concepto de *potencia de una circunferencia*.

Dada la circunferencia de la figura 2.13 y el punto P para definir la potencia de P respecto a la circunferencia se traza desde P una línea recta que corte a la circunferencia en dos puntos, siendo la potencia el producto de la distancia de P a un punto por la distancia de P al otro. Si la línea corta a la circunferencia en un solo punto, porque sea tangente a ella, la potencia es la distancia de P a ese punto al cuadrado.

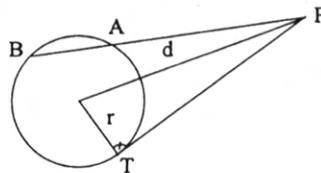


Figura 2.13. Potencia de una circunferencia respecto a un punto.

$$\text{Potencia de P} \equiv \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

Si P es exterior  $d > r \Rightarrow \text{Potencia} > 0$

Si P es interior  $d < r \Rightarrow \text{Potencia} < 0$

Si  $P \in \text{circunferencia} \Rightarrow \text{Potencia} = 0$

Todos los puntos concéntricos a la circunferencia tienen la misma potencia.

Sea el punto M, el extremo de un vector de componentes  $\sigma_n$  y  $\tau$ , figura 2.14. Debido a que M y H son puntos situados en una circunferencia concéntrica a la circunferencia  $C_1$ , la potencia de la circunferencia respecto a ambos puntos es la misma:

$$\text{Pot}(M) = \text{Pot}(H)$$

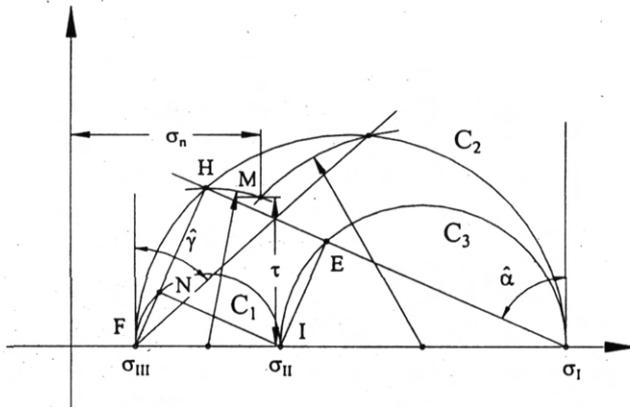


Figura 2.14. Construcción de Mohr.

$$\begin{aligned} \text{Pot}(M) &= d^2 - r^2 = \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 + l^2(\sigma_I - \sigma_{III}) \cdot (\sigma_I - \sigma_{II}) - \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 = \\ &= l^2(\sigma_I - \sigma_{III}) \cdot (\sigma_I - \sigma_{II}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Pot}(H) &= \overline{HN} \cdot \overline{HF} = \overline{IE} \cdot \overline{HF} \\ \overline{IE} &= (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos \hat{\alpha} \\ \overline{HF} &= (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos \hat{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Pot}(H) = (\sigma_I - \sigma_{II}) \cdot (\sigma_I - \sigma_{III}) \cos^2 \hat{\alpha}$$

$$\text{Pot}(M) = \text{Pot}(H) \Rightarrow l^2 = \cos^2 \hat{\alpha} \Rightarrow l = \cos \hat{\alpha}$$

Si se toma ahora potencia respecto a  $C_3$ :

$$\text{Pot}(M) = \text{Pot}(K) \Rightarrow n^2 = \cos^2 \hat{\gamma} \Rightarrow n = \cos \hat{\gamma}$$

Resumiendo: a través de los círculos de Möhr se pueden relacionar las componentes intrínsecas del vector tensión,  $\sigma_n$  y  $\tau$ , con las componentes de la normal,  $l$ ,  $m$  y  $n$ . Esta relación es biunívoca:

- Si se obtienen  $\sigma_n$  y  $\tau$  a partir de  $l$ ,  $m$  y  $n$  estamos ante un *problema directo*: desde  $\sigma_I$  se traza una vertical y una recta que forme un ángulo  $\alpha$  según el sentido contrario a las agujas del reloj con la vertical, desde el punto donde corte esa recta a la circunferencia  $C_2$  se traza un arco con centro el de la circunferencia  $C_1$ . Desde  $\sigma_{III}$  se traza una vertical y una recta que forma  $\gamma$  con ésta y según el sentido de las agujas del reloj, desde el punto de corte de esa recta con la circunferencia  $C_3$  se traza un arco con centro el de la circunferencia  $C_1$ . El punto de corte de los dos arcos es el extremo del vector tensión.
- Si se obtiene  $l$ ,  $m$  y  $n$  a partir de  $\sigma_n$  y  $\tau$  estamos ante un *problema inverso* y se procede de forma contraria a como se hizo en el apartado anterior: se parte del punto desde el que se trazan los arcos: uno concéntrico a  $C_1$  y el otro concéntrico a  $C_3$ . Desde donde corte el primer arco a  $C_2$  se traza una línea hasta  $\sigma_I$ , el ángulo que forma esa línea con la vertical es  $\gamma$ ; desde donde corte el segundo arco a  $C_2$  se traza una línea hasta  $\sigma_{III}$  y el ángulo que forma esta línea con la vertical es  $\gamma$ . Para obtener  $\beta$  se tiene en cuenta que la normal es un vector unitario, expresión [2.7].

## 2.11 TENSIONES TANGENCIALES MÁXIMAS

De las circunferencias de Möhr se pueden ver cuales son las tensiones tangenciales máximas de cada circunferencia, figura 2.15

Las tensiones tangenciales máximas relativas son  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  con:

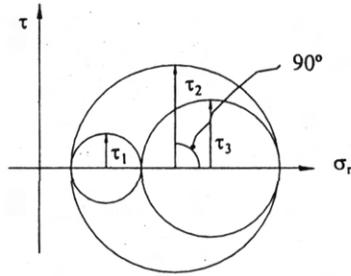
$$\tau_1 = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad [2.20]$$

Los ángulos correspondientes a las tensiones tangenciales máximas son:

Para  $\tau_1$ :  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$

Para  $\tau_2$ :  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$

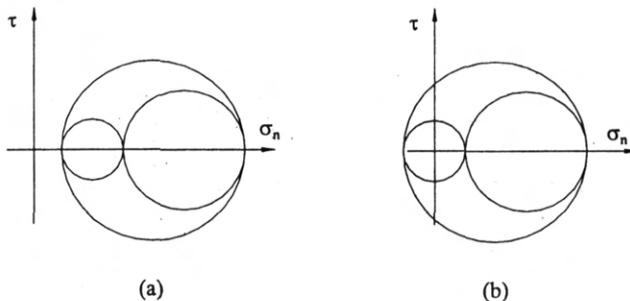
Para  $\tau_3$ :  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 45^\circ$ ;  $\gamma = 90^\circ$



**Figura 2.15.** Tensiones tangenciales máximas.

Aunque se han puesto todos los ángulos en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica, también valdrían los ángulos correspondientes de los otros tres cuadrantes. Estos resultados se desprenden de los círculos de Möhr: El ángulo de  $90^\circ$  resulta obvio porque al estar el punto en un círculo la normal al plano correspondiente forma  $90^\circ$  con uno de los ejes; los ángulos de  $45^\circ$  se obtienen directamente de cada círculo en el que los ángulos reales vienen multiplicados por dos y en el ángulo que forma el vector correspondiente a las tensiones tangenciales máximas con las direcciones principales es de  $90^\circ$ , esto se verá más claramente en el apartado 2.14.

También se observa en esta representación gráfica que, aunque siempre van a existir vectores tensión en los que sólo existe componente normal, las tensiones principales, no tiene por qué ocurrir así con las tensiones tangenciales, así en el caso representado en la figura 2.16.a. no hay ningún plano en el que las tensiones normales sean nulas. Este caso sí se da en la figura 2.16.b.



**Figura 2.16.** Estado tensional sin tensión normal nula: a) y con tensión normal nula: b).

## 2.12. TENSIONES OCTAÉDRICAS

Las tensiones octaédricas son las componentes intrínsecas del vector tensión asociado a un plano que forman ángulos iguales con los tres ejes principales.

$$\left. \begin{array}{l} l = m = n \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 3l^2 = 1 \Rightarrow l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

En realidad se trata de ocho planos que forma los mismos ángulos con los tres ejes y que constituyen el octaedro de la figura 2.17.

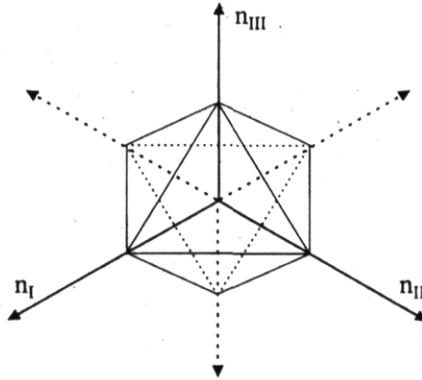


Figura 2.17. Octaedro.

Las normales correspondientes a estos ocho planos son:

$$l = +\frac{1}{\sqrt{3}}; m = +\frac{1}{\sqrt{3}}; n = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{1}{\sqrt{3}}; m = +\frac{1}{\sqrt{3}}; n = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = +\frac{1}{\sqrt{3}}; m = -\frac{1}{\sqrt{3}}; n = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = +\frac{1}{\sqrt{3}}; m = +\frac{1}{\sqrt{3}}; n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{1}{\sqrt{3}}; m = -\frac{1}{\sqrt{3}}; n = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = +\frac{1}{\sqrt{3}}; m = -\frac{1}{\sqrt{3}}; n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{1}{\sqrt{3}}; m = +\frac{1}{\sqrt{3}}; n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{1}{\sqrt{3}}; m = -\frac{1}{\sqrt{3}}; n = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los vectores tensión asociados a estas ocho normales son:

$$\vec{\sigma}^{\text{oct}} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\sigma_I}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{\sigma_{II}}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que el tensor de tensiones se debe poner en principales, ya que la normal forma ángulos iguales con los ejes principales.

Las componentes intrínsecas del vector anterior son:

$$\sigma_n^{\text{oct}} = \sigma_{\text{oct}} = \vec{\sigma}^{\text{oct}} \cdot \vec{n}^{\text{oct}} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} = \frac{I_1}{3} \quad [2.21]$$

$$\tau_{\text{oct}}^2 = |\vec{\sigma}^{\text{oct}}|^2 - \sigma_{\text{oct}}^2 = \frac{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2}{3} - \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{9} =$$

$$= \frac{1}{9} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] = \frac{2}{9} I_1^2 - \frac{2}{3} I_2 \quad [2.22]$$

La expresiones anteriores dependen de las invariantes del tensor de tensiones; es decir para conocer las tensiones octaédricas no hace falta obtener las tensiones principales, se pueden obtener en cualquier sistema de ejes. Esto es equivalente a decir que las tensiones octaédricas son invariantes.

### 2.13. TENSOR ESFÉRICO Y TENSOR DESVIADOR

Una de las funciones de las tensiones octédricas es la descomposición del tensor de tensiones en el tensor esférico y el tensor desviador.

Todo tensor de tensiones es susceptible de descomponerse en un tensor esférico y un tensor desviador:

$$[\sigma] = \underbrace{\sigma_{\text{oct}}[I]}_{\text{Tensor Esférico}} + \underbrace{[\sigma] - \sigma_{\text{oct}}[I]}_{\text{Tensor Desviador}}$$

$$[\sigma]^0 \quad [\sigma]^{\text{desv}}$$

Donde:

$$[\sigma]^0 = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \quad [2.23]$$

Y las componentes intrínsecas del tensor esférico son  $\sigma_{\text{oct}} = \frac{I_1}{3}$  y  $\tau_{\text{oct}} = 0$

$$[\sigma]^{\text{desv}} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \frac{I_1}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \frac{I_1}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \frac{I_1}{3} \end{pmatrix} \quad [2.24]$$

Y las componentes intrínsecas del tensor desviador son  $\sigma_{\text{oct}} = 0$  y  $\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{2}{9}I_1^2 - \frac{2}{3}I_2$

Se puede ver que el tensor esférico sólo tiene tensión normal octaédrica, que coincide con la del tensor original, y la tensión tangencial octaédrica es nula; mientras que en el tensor desviador ocurre al contrario: la tensión normal octaédrica es nula y la tensión tangencial octaédrica coincide con la del vector original.

La importancia de esta descomposición se detallará más adelante, pero se puede anticipar que el tensor esférico es el responsable del cambio de volumen y el tensor desviador es el responsable del cambio de forma.

## 2.14. TENSIÓN PLANA

El problema de la tensión plana junto con el de la deformación plana constituyen un apartado amplio de la Elasticidad que es el de la Elasticidad Plana. Los problemas de Elasticidad Plana son problemas de Elasticidad sujetos a ciertas simplificaciones debido a

una geometría y distribución de cargas particular. El caso de tensión plana se da en sólidos en los que una dimensión es mucho menor que las otras dos; vienen definidos por un plano medio perpendicular a la sección menor y las cargas actúan en ese plano medio, así como las restricciones al desplazamiento, un ejemplo se muestra en la figura 2.18.

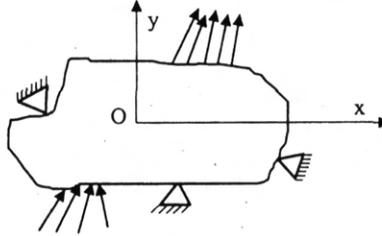


Figura 2.18. Sólido sometido a tensión plana.

Al ser las cargas que actúan según el eje OZ nulas, son también nulas las tensiones según ese eje,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$ , esto lleva a que el tensor de tensiones tenga términos

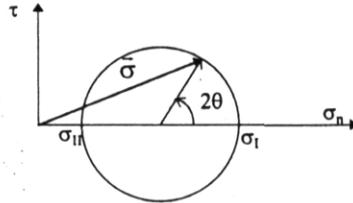
nulos: 
$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 y permite que se pueda reducir a un tensor de la forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad [2.25]$$

En general, siempre que el tensor tenga todas las tensiones asociadas a un eje coordinado nulas, y el tensor de tensiones se pueda reducir a un tensor bidimensional, se puede hablar de tensión plana. Este sería el caso de una superficie de contorno libre o sea sobre la que no hubiese cargas aplicadas. Si esa superficie es normal al eje OZ, sería nulo el vector tensión asociado a este eje, cuyas componentes son  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , lo que implicaría que el tensor de tensiones, sólo para el caso de los puntos de la superficie, se puede reducir a uno bidimensional.

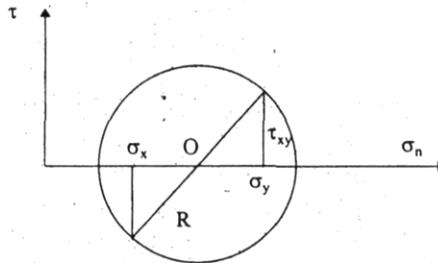
El estudio de círculos de Mohr también queda reducido al estudio de una sola circunferencia de Mohr porque, en la mayoría de los casos, sólo interesa evaluar los planos paralelos al eje OZ que, al ser un eje principal, puede considerarse el eje OIII, pues aunque haya una tensión principal negativa, con lo que sería menor que  $\sigma_{III}$ , y esto iría en contra del criterio de signos que se ha tomado ( $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ ) matemática y conceptualmente sería equivalente. Los extremos de los vectores tensión asociados a los planos paralelos al eje OIII forman la circunferencia cuya ecuación se desarrollaba en [2.18]. Las componentes intrínsecas del vector tensión obedecen a las ecuaciones [2.16] y [2.17]. De estas expresiones se deduce que si  $\theta$  es el ángulo que forma la normal al plano con el eje principal I, para calcular las componentes intrínsecas se traza una recta desde el centro del círculo y que forma un

ángulo de  $2\theta$  con la horizontal, figura 2.19. Teniendo en cuenta que el vector tensión correspondiente al eje principal  $O\bar{I}$  está en la horizontal se dice que el círculo de Möhr *duplica los ángulos*.



**Figura 2.19.** Circunferencia de Möhr en tensión plana.

Para construir una circunferencia de Möhr en tensión plana no es necesario tener el tensor en ejes principales: se puede construir, directamente, a partir del tensor en ejes cualesquiera, tal y como aparecen en la expresión [2.29]. Hay que tener en cuenta que las columnas del tensor representan el vector tensión asociados a los ejes coordenados, en concreto la primera columna representa el vector tensión asociado al plano perpendicular al eje  $OX$ ,  $\sigma_x$  es la componente normal y  $\tau_{xy}$  es la componente tangencial, y la segunda columna es el vector tensión asociado al plano perpendicular al eje  $OY$ , siendo  $\sigma_y$  la componente normal y  $\tau_{xy}$  es la componente tangencial. Ambos vectores deben formar respecto al centro del círculo de Möhr un ángulo de  $180^\circ$  pues las normales a sus planos forman  $90^\circ$ . Esto supone que mientras que una componente tangencial es positiva la otra es negativa, ver figura 2.20. Pero ¿cuál?



**Figura 2.20.** Tensor de tensiones en el círculo de Möhr.

Para saber qué tensión tangencial se pone positiva y cuál negativa hay que recordar que el vector tangente  $\bar{t}$  se tomaba de forma que se iba de  $\bar{t}$  a  $\bar{n}$  por el camino más corto, siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj, ver figura 2.11. Si la normal es el eje  $OX$ , el eje  $OY$  no correspondería con el vector tangencial sino su opuesto, figura 2.21.a, pero si la normal fuera el eje  $OY$ , el eje  $OX$  sí sería el vector tangencial correspondiente, figura 2.21.b, por ello: la componente tangencial se pone con su signo sobre  $\sigma_y$  y con signo contrario sobre  $\sigma_x$ . Si en lugar de tratarse del plano  $OXY$  se tratara del plano  $OYZ$  la

tensión tangencial se pondría con su signo sobre  $\sigma_z$  y si se tratase de OZX se pondría sobre  $\sigma_y$ .



**Figura 2.21.** Vectores unitarios normal y tangencial cuando el vector normal coincide con el eje  $OX$ , (a) y cuando el vector normal coincide con el eje  $OY$ , (b).

Para la construcción del círculo de Mörh a partir del tensor de tensiones resulta útil conocer, a partir de las componentes del tensor, el centro del mismo,  $O$ , y su radio,  $R$ . En la figura 2.20 se puede ver el punto  $O$  es el punto medio entre las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  y el radio  $R$  se puede obtener aplicando el teorema de Pitágoras:

$$O = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad [2.26]$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad [2.27]$$

Las tensiones principales, a partir del centro y del radio son:

$$\sigma_I = O + R; \quad \sigma_{II} = O - R; \quad \sigma_{III} = 0 \quad [2.28]$$

Y las componentes intrínsecas de un vector que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $OI$ :

$$\sigma_n = O + R \cos 2\theta; \quad \tau = R \sin 2\theta \quad [2.29]$$

Para terminar hay que resaltar que aunque en tensión plana se trabaje con un único círculo *siempre serán tres los círculos que definan el estado tensional del punto.*



## Capítulo 3

## EL TENSOR DE DEFORMACIONES

## 3.1. CONCEPTO DE DESPLAZAMIENTO Y DEFORMACIÓN

Los puntos de un sólido elástico deformable que están sometidos a unas solicitaciones sufren una variación de posición en el espacio. El vector que une la posición inicial a la deformación con la posición final, una vez que el sólido ha deformado, es el vector desplazamiento.

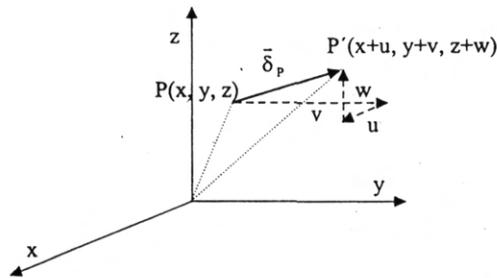


Figura 3.1. Vector desplazamiento del punto P.

Como se observa en la figura 3.1 el punto P se desplaza a P', siendo  $\bar{\delta}_p$  el vector de desplazamiento. Las componentes del vector desplazamiento  $\bar{\delta}_p$ , u, v y w; reciben el nombre de *desplazamientos, recorridos* o *corrimientos*.

$$d\bar{s} = \overrightarrow{PP'} = (x+u, y+v, z+w) - (x, y, z) = (u, v, w) \quad [3.1]$$

En cuanto a la deformación, en el apartado 1.7 se definían dos tipos: la deformación lineal, que representa el alargamiento lineal unitario, y la deformación angular que representa la variación angular. Tanto una deformación como otra son características del punto material.

La deformación lineal es propiedad del punto y de la dirección respecto a la que se esté calculando el alargamiento y la deformación angular es propiedad del punto y de las dos direcciones que forman el ángulo cuya variación se pretende calcular.

### 3.2. DEFORMACIÓN EN EL ENTORNO DE UN PUNTO

En el apartado anterior se vio como el punto P se desplazaba a P' en el proceso de deformación, obviamente lo mismo le ocurre al punto Q, se desplaza a Q', figura 3.2. Si P y Q son dos puntos infinitamente próximos los desplazamientos de ambos serán similares, esto matemáticamente se traduce en que se puede desarrollar en serie las componentes del vector desplazamiento de Q en torno a P. Este desarrollo en serie se puede limitar al término lineal al estar los dos puntos muy próximos. Un análisis similar se hizo en el apartado 2.4. del capítulo 2, con las componentes del tensor de tensiones.

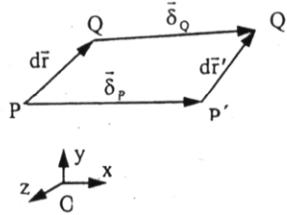


Figura 3.2. Desplazamientos de puntos infinitamente cercanos.

Los vectores desplazamiento de P y Q son, respectivamente:

$$\vec{\delta}_P = u_P \vec{i} + v_P \vec{j} + w_P \vec{k}; \quad \vec{\delta}_Q = u_Q \vec{i} + v_Q \vec{j} + w_Q \vec{k} \quad [3.2]$$

Considerando que u, v y w son funciones de x, y y z, continuas y derivables, de derivada continua, es posible efectuar un desarrollo en serie en torno al punto P y finalizar el desarrollo en el término de primer orden. Así si se considera las coordenadas de P:  $\vec{OP} = (x_0, y_0, z_0)$  y las de Q:  $\vec{OQ} = (x, y, z)$  y que las coordenadas de los desplazamientos son  $u_P = u(x_0, y_0, z_0)$ ,  $v_P = v(x_0, y_0, z_0)$ ,  $w_P = w(x_0, y_0, z_0)$  y  $u_Q = u(x, y, z)$ ,  $v_Q = v(x, y, z)$ ,  $w_Q = w(x, y, z)$ .

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy + \frac{\partial u}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz$$

$$v(x, y, z) = v(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy + \frac{\partial v}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz$$

$$w(x, y, z) = w(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)dx + \frac{\partial w}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)dy + \frac{\partial w}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)dz$$

La expresión anterior se puede poner en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_Q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_P + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad [3.3]$$

que en notación simplificada:

$$\bar{r}_Q = \bar{r}_P + [M] \cdot d\bar{r} \quad [3.4]$$

Donde:

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Toda matriz cuadrada se puede descomponer en una matriz simétrica y una antisimétrica, luego la matriz  $[M]$  es susceptible a esta descomposición:

$$[M] = \frac{[M] + [M]^T}{2} + \frac{[M] - [M]^T}{2}$$

La matriz simétrica es el tensor de deformación,  $[\epsilon]$ , y la matriz antisimétrica es la matriz de giro,  $[H]$ .

$$[\epsilon] = \frac{[M] + [M]^T}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad [3.5]$$

$$[H] = \frac{[M] - [M]^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{pmatrix} \quad [3.6]$$

### 3.3. SIGNIFICADO FÍSICO DEL TENSOR DE DEFORMACIÓN Y DEL TENSOR DE GIRO.

Se va a considerar un volumen infinitesimal de un sólido solicitado que, por comodidad, se tomará plano extrapolándose luego los resultados a un volumen tridimensional. Se tomará un rectángulo de lados  $dx$  y  $dy$ , figura 3.3. Si ese rectángulo está sometido a unas solicitaciones los puntos del mismo sufrirán un desplazamiento, como se vio en el apartado 1.7. En este apartado se detalló la descomposición del vector desplazamiento en una parte de desplazamiento como sólido rígido y otra parte que produce la deformación; del desplazamiento como sólido rígido hay una parte de traslación y otra de rotación.

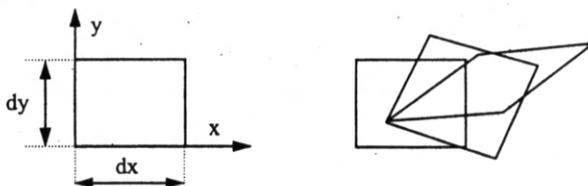


Figura 3.3. Deformación de un cuadrilátero elemental.

Estos desplazamientos se van a descomponer en tres fases:

- Desplazamiento según OX, de todo el sólido, figura 3.4.
- Desplazamiento según OY, figura 3.5.
- Giro, figura 3.6.

#### Desplazamiento según OX:

Si el desplazamiento de A y B es igual a  $u$ , el desplazamiento de los puntos C y D, que se distancia de los anteriores  $dx$  se podrá obtener a partir del desplazamiento anterior desarrollando en serie en torno al origen, y considerando, en ese desarrollo, sólo la variación según  $x$ , que es el eje que los distancia:

$$u_A = u_B = u; \quad u_C = u_D = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

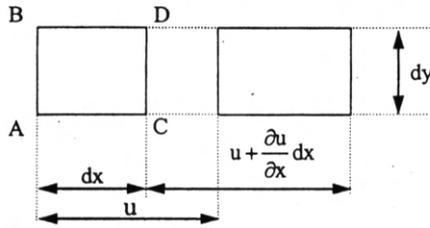


Figura 3.4. Deformación según el eje OX de un cuadrilátero elemental.

Teniendo en cuenta la definición de deformación lineal  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , en la dirección de OX la

deformación que se obtiene es:  $\frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , expresión ésta que coincide con el término  $\epsilon_{xx}$  del tensor de deformaciones.

**Desplazamiento según OY:**

Si el desplazamiento de A y C es de v, el desplazamiento de los puntos B y D, que se distancia de los anteriores dy se podrá obtener desarrollando en serie en torno al origen, y considerando, sólo, la variación según y, que es la magnitud que los distancia:

$$v_A = v_C = v; \quad v_B = v_D = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

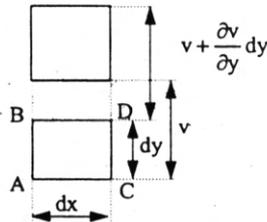


Figura 3.5. Deformación según el eje OY de un cuadrilátero elemental.

Teniendo en cuenta la definición de deformación lineal  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , en la dirección de OY la

deformación que se obtiene es:  $\frac{\Delta(dy)}{dy} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ , expresión ésta que coincide con el término  $\epsilon_{yy}$  del tensor de deformaciones.

### Giro

En el giro de los elementos de la sección se puede apreciar la variación de ángulo, así el ángulo inicial  $\hat{BAC}$  de  $90^\circ$  se transforma a  $90 + \gamma_1 - \gamma_2$ .

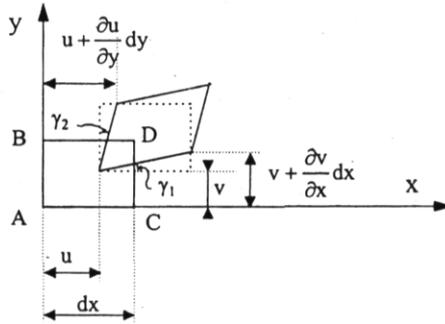


Figura 3.6. Deformación angular de un cuadrilátero elemental.

En la figura 3.6 se puede apreciar que  $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ , para entender esto no hay más que observar que entre A y C hay una variación de la coordenada x luego si se desarrolla en serie el desplazamiento en torno al punto A para hallar el desplazamiento de C sólo influirá la variación con el eje x, en concreto, el desplazamiento según el eje y de C será:  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  pues v es el desplazamiento de A. Por tanto:

$$\tan \gamma_1 = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Y como las deformaciones son pequeñas los ángulos también lo serán y  $\tan \gamma_1 \approx \gamma_1$ . Análogamente se puede obtener que  $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

La variación del ángulo en la deformación es:  $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ , esta expresión es el doble del término  $\epsilon_{xy}$  o  $\epsilon_{yx}$ ; luego los términos ajenos a la diagonal del tensor de deformaciones representan la mitad de la variación del ángulo coordenado correspondiente a ese plano.

En definitiva se ha demostrado que las componentes de la diagonal del tensor de deformaciones representan la variación unitaria de longitud respecto a cada uno de los ejes coordenados y los elementos de fuera de la diagonal representan la mitad de la variación angular en los planos coordenados. Debido a que los elementos de fuera de la diagonal se

pueden identificar con la mitad de las distorsiones angulares es frecuente ver el tensor de deformaciones representado por:

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad [3.7]$$

A continuación se va a ver el significado físico de las componentes de la matriz de giro. Para determinar el giro de una sección se considerará el giro de la bisectriz del ángulo, que antes de la deformación se encontrará a  $45^\circ$  del eje horizontal. La bisectriz debido al efecto del ángulo  $\gamma_1$  girará  $\frac{\gamma_1}{2}$  y debido a  $\gamma_2$  girará  $-\frac{\gamma_2}{2}$ ; por tanto el giro total de la sección será

$$\frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

expresión ésta que coincide con el término  $h_{yx}$  de la matriz [H].

Luego las componentes de la matriz de giro representan el giro del prisma elemental en cada plano coordenado. Este hecho justifica la denominación de [H] como matriz de giro.

Resulta interesante la relación entre la matriz de giro y el rotacional del vector desplazamiento. El producto vectorial del rotacional del vector desplazamiento por el diferencial del vector de posición  $d\vec{r}$  es:

$$(\bar{\nabla} \wedge \bar{u}) \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = [H] \cdot d\vec{r} \quad [3.8]$$

Esta relación entre matriz de giro y rotacional tiene bastante sentido físico pues el rotacional representa el giro.

### 3.4. EL VECTOR DEFORMACIÓN. COMPONENTES INTRÍNSECAS.

De la misma forma que se definió un vector tensión se puede definir un vector deformación que está, al igual que el vector tensión, asociado a un punto y a una dirección. Este vector deformación se puede obtener a partir del tensor de deformación, asociado a un punto, y de la normal al plano como:

$$\bar{\varepsilon} = [\bar{\varepsilon}] \cdot \bar{n} \quad [3.9]$$

donde:

$\bar{\varepsilon}$  : vector deformación.

$[\bar{\varepsilon}]$  : tensor de deformaciones.

$\bar{n}$  : normal asociada al plano.

El significado físico de la expresión anterior se puede ver a partir de la expresión [3.3], que establece la relación entre el desplazamiento relativo de dos puntos infinitamente cercanos con el tensor de deformación y la matriz de giro. El término que engloba a la matriz de giro, es el representado en [3.8] y representa el giro como sólido rígido de un punto respecto a otro y el término que depende de la deformación será:

$$d\bar{u} = [\varepsilon] \cdot d\bar{r}$$

Si se divide la expresión anterior por el módulo del vector que representa la posición,  $|d\bar{r}|$ , se obtiene la expresión [3.9], siendo  $\bar{n}$  el vector unitario en la dirección del vector  $d\bar{r}$ . Así el vector deformación representaría la variación de una dirección en el proceso de deformación.

Esa variación se puede descomponer en una variación de longitud y en una variación angular, por ello el vector deformación, al igual que el vector tensión, se puede descomponer en dos componentes, figura 3.7.

*Componente normal.* Representa la deformación longitudinal unitaria en la dirección de  $\bar{n}$ .

$$\varepsilon_n = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{n} \quad [3.10]$$

*Componente angular.* Representa la variación de dirección de la dirección original de  $\bar{n}$ .

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{(\bar{\varepsilon})^2 - \varepsilon_n^2} \quad [3.11]$$

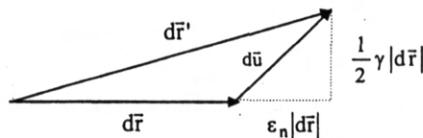


Figura 3.7. Componentes intrínsecas del vector deformación.

### 3.5. CORRELACIÓN ENTRE EL TENSOR DE TENSIONES Y EL TENSOR DE DEFORMACIONES

Una mirada al tensor de tensiones  $[\sigma]$  y al de deformaciones  $[\epsilon]$  es suficiente para apreciar la similitud entre ambos tensores. Los dos tensores son simétricos y a partir de ambos se puede obtener un vector asociado a una dirección determinada. Asimismo las representaciones gráficas, tanto la tridimensional del elipsoide de Lamé como la plana de los círculos de Móhr es completamente análoga. También se podrá definir un problema de deformación plana.

$$[\bar{\sigma}] \Leftrightarrow [\bar{\epsilon}]$$

Tensor simétrico.

Componentes intrínsecas:  $\sigma_n$  y  $\tau$ .

Tensiones y Direcciones Principales:

$$\begin{aligned} &\sigma_I; \sigma_{II}; \sigma_{III} \\ &\bar{n}_I; \bar{n}_{II}; \bar{n}_{III} \end{aligned}$$

Elipsoide de Lamé:

$$\frac{x^2}{\sigma_I^2} + \frac{y^2}{\sigma_{II}^2} + \frac{z^2}{\sigma_{III}^2} = 1$$

Círculos de Móhr

Invariantes

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_I \cdot \sigma_{II} \cdot \sigma_{III}$$

Tensiones octaédricas,  $\sigma_{oct}$   $\tau_{oct}$ ,

Tensor esférico y desviador

Tensión Plana

Tensor simétrico.

Componentes intrínsecas:  $\epsilon_n$  y  $\gamma/2$ .

Deformaciones y Direcciones Principales:

$$\begin{aligned} &\epsilon_I; \epsilon_{II}; \epsilon_{III} \\ &\bar{n}_I; \bar{n}_{II}; \bar{n}_{III} \end{aligned}$$

Elipsoide de Lamé:

$$\frac{x^2}{\epsilon_I^2} + \frac{y^2}{\epsilon_{II}^2} + \frac{z^2}{\epsilon_{III}^2} = 1$$

Círculos de Móhr

Invariantes

$$J_1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III}$$

$$J_2 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{xz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 = \epsilon_I \epsilon_{II} + \epsilon_{II} \epsilon_{III} + \epsilon_I \epsilon_{III}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix} = \epsilon_I \cdot \epsilon_{II} \cdot \epsilon_{III}$$

Deformaciones octaédricas,  $\epsilon_{oct}$  y  $\gamma_{oct}/2$

Tensor esférico y desviador

Deformación Plana

### 3.6. TENSOR ESFÉRICO Y TENSOR DESVIADOR

En el apartado anterior se comparó el tensor de deformaciones con el tensor de tensiones en cuanto a la forma se refiere; uno de los aspectos que se compararon fue la descomposición del tensor en tensor esférico y tensor desviador. Se va a insistir en este tema porque esta descomposición tiene un gran sentido físico cuando de deformaciones se trata.

En principio se va a ver el significado físico de la primera invariante del tensor de deformaciones. Supóngase que el prisma infinitesimal de la figura 3.8. se ha deformado únicamente alargando o acortando cada dirección del espacio. La deformación en la dirección de cada eje vendrá reflejada por la deformación normal correspondiente a cada eje, de forma que el alargamiento que sufren las tres direcciones del espacio serán:

$$\Delta(dx) = \varepsilon_x dx; \Delta(dy) = \varepsilon_y dy; \Delta(dz) = \varepsilon_z dz$$

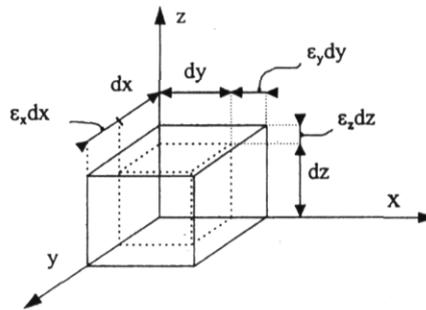


Figura 3.8. Incremento de volumen de un sólido infinitesimal.

El incremento de volumen que sufre este sólido elemental es:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}} = (dx + \varepsilon_x dx) \cdot (dy + \varepsilon_y dy) \cdot (dz + \varepsilon_z dz) - dx dy dz = \\ &= [(1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) - 1] dx dy dz = [(1 + \varepsilon_x) \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot (1 + \varepsilon_z) - 1] dx dy dz = \\ &= (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z) dx dy dz \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta que las deformaciones son pequeñas, son infinitésimos, el producto de dos deformaciones es aún más pequeño, es un infinitésimo de segundo orden y con más razón el triple producto, que es un infinitésimo de tercer orden, luego despreciando infinitésimos de segundo y de tercer orden en la expresión anterior se reduce el incremento de volumen a:

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dx dy dz$$

Considerando, ahora, un incremento unitario:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \equiv e \quad [3.12]$$

Como se ve, el incremento unitario de volumen,  $e$ , coincide con la primera invariante del tensor de deformaciones que se denota por  $J_1$ . Ahora bien, del apartado 2.12 del capítulo anterior, en el que se estableció la descomposición del tensor de tensiones en un tensor esférico y otro desviador, se vio que el tensor esférico dependía únicamente del primer invariante del tensor de tensiones; análogamente ocurre con el tensor esférico del tensor de deformaciones:

$$[\varepsilon] = \underbrace{\varepsilon_{\text{oct}}[I]}_{\text{Tensor Esferico}} + \underbrace{[\varepsilon] - \varepsilon_{\text{oct}}[I]}_{\text{Tensor Desviador}}$$

$$[\varepsilon]^0 \quad [\varepsilon]^{\text{desv}}$$

El tensor esférico es:

$$[\varepsilon]^0 = \begin{pmatrix} \frac{e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e}{3} \end{pmatrix} \quad [3.13]$$

Y sus tensiones octaédricas son:

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{e}{3} \quad \text{y} \quad \gamma_{\text{oct}} = 0 \quad [3.14]$$

Y el tensor desviador:

$$[\varepsilon]^{\text{desv}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \frac{e}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{e}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{e}{3} \end{pmatrix} \quad [3.15]$$

Y las tensiones octaédricas son:

$$\varepsilon_{\text{oct}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{4}\gamma_{\text{oct}}^2 = \frac{2}{9}J_1^2 - \frac{2}{3}J_2 \quad [3.16]$$

Al depender el tensor esférico, únicamente, del primer invariante del tensor de deformaciones, que se puede identificar con el incremento unitario de volumen; se puede

inferir que el tensor esférico de deformaciones representa el cambio de volumen que conlleva el tensor de deformaciones  $[\varepsilon]$  y por contra el tensor desviador representa el cambio de forma.

### 3.7. ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

En principio cualquier campo de desplazamientos univaluado, que en cada punto tome un sólo valor, y continuo, para que no se rompa el sólido, puede ser la solución de un problema elástico. Se ha visto, por otro lado, que, a partir del campo de desplazamientos se puede obtener un campo de deformaciones representado por el tensor simétrico de deformaciones a través de las expresiones:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad [1] \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad [2] \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad [3]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad [4] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad [5] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad [6]$$

El conocimiento de un campo de desplazamientos univaluado y continuo lleva a la determinación inmediata de un campo de deformaciones mediante la aplicación de las expresiones anteriores; ahora bien, cabría preguntar si cualquier tensor de deformaciones lleva asociado un campo de desplazamientos o, por el contrario, es necesario que verifiquen algunas condiciones adicionales.

Para plantear esta cuestión se puede suponer el sólido formado por infinitos puntos, cada uno de ellos considerado como un paralelepípedo elemental que lleva asociado un tensor de deformaciones. Si el sólido se deforma se deformarán cada uno de esos infinitos paralelepípedos; las deformaciones serán compatibles si, después de efectuarse la deformación, esos infinitos paralelepípedos se pueden montar como piezas de un rompecabezas y no lo será si ese montaje se hace imposible.

A partir de las expresiones anteriores se pueden obtener una serie de expresiones que tienen que verificar las componentes de un tensor para que pueda ser un tensor de deformaciones y le corresponda un campo de desplazamientos.

Derivando [1] con respecto a  $y$  dos veces:  $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$

Derivando [2] con respecto a  $x$  dos veces:  $\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$

Derivando [4] con respecto a  $y$  y a  $x$ :  $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$

Se observa de las expresiones anteriores que:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad [3.17]$$

Ésta es la primera ecuación de compatibilidad. Si se conmutan los ejes se pueden extraer otras dos ecuaciones de compatibilidad :

$$\text{Derivando [2] con respecto a z dos veces: } \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y}$$

$$\text{Derivando [3] con respecto a y dos veces: } \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$$

$$\text{Derivando [5] con respecto a z y a y: } \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z}$$

Se obtiene la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \quad [3.18]$$

$$\text{Derivando [3] con respecto a x dos veces: } \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z}$$

$$\text{Derivando [1] con respecto a z dos veces: } \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x}$$

$$\text{Derivando [6] con respecto a z y a x: } \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z}$$

Se obtiene la tercera ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad [3.19]$$

Las otras tres ecuaciones de compatibilidad se obtienen de forma análoga:

$$\text{Derivando [4] respecto a z: } \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad [7]$$

$$\text{Derivando [6] respecto a y: } \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad [8]$$

Derivando [5] respecto a x:  $\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$  [9]

Sumando las expresiones [7] y [8] y restándole [9]:  $\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$

Se deriva la expresión anterior respecto a x:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$

La expresión anterior también se puede obtener derivando [1] respecto a y y a z:

$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ; con lo que se tiene ya la 4ª ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad [3.20]$$

La 5ª y la 6ª ecuación de compatibilidad se obtienen análogamente:

Sumando las expresiones [7] y [9] y restándole [8]:  $\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$ .

Se deriva la expresión anterior respecto a y:  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y \partial z}$

La expresión anterior también se puede obtener derivando [2] respecto a x y a z:

$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z}$ ; con lo que se tiene ya la 5ª ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \quad [3.21]$$

Para obtener la última ecuación se suma las expresiones [9] y [8] y se le resta [7]:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Se deriva la expresión anterior respecto a z:  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y \partial z}$

La expresión anterior también se puede obtener derivando [3] respecto a  $x$  y a  $y$ :

$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}$ ; con lo que se tiene ya la 6ª ecuación de compatibilidad:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \quad [3.22]$$

Con lo que se han obtenido las seis ecuaciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (\text{I}) & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \quad (\text{IV}) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \quad (\text{II}) & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \quad (\text{V}) \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \quad (\text{III}) & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \quad (\text{VI}) \end{aligned} \quad [3.23]$$

Se ha demostrado la necesidad de las ecuaciones de compatibilidad; o sea que si las deformaciones llevan asociadas unos desplazamientos univaluados y continuos deben cumplirse las ecuaciones de compatibilidad. Se va a demostrar, a continuación, la suficiencia; es decir si las deformaciones cumplen las ecuaciones de compatibilidad se pueden obtener, a partir de ellas, un campo de desplazamientos univaluados, continuos, derivables de derivada continua, como demostró Cesaro (1.906):

Supóngase un dominio simplemente conexo, las derivadas de la componente  $u$  del desplazamiento, según se desprende de la definición del tensor de deformación, [3.5], y de la definición de matriz de giro, [3.6], son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \varepsilon_{xy} + h_{xy} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \varepsilon_{xz} + h_{xz} \end{aligned}$$

Se desea obtener el desplazamiento a partir de las deformaciones; o sea se conoce el vector  $\bar{\nabla}u$  y se desea obtener  $u$ . Ahora bien en virtud de cierto teorema<sup>1</sup> se debe verificar que:  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}u) = 0$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} + h_{xy} & \varepsilon_{xz} + h_{xz} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial h_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial h_{xy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial h_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial h_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial h_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial h_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial h_{yz}}{\partial x}$$

La igualdad anterior se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_{xz}}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial h_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \end{aligned}$$

Para el resto de las componentes del vector desplazamiento se obtiene un resultado análogo.

De  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla}v) = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{xx}}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial h_{yz}}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Teorema: Dado un vector  $\bar{B}$  continuo y derivable y de derivada continua, existe un escalar  $\phi$  tal que  $\bar{B} = \bar{\nabla}\phi$   
 $\Leftrightarrow \bar{\nabla} \times \bar{B} = 0$ .

De  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} w) = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \\ \frac{\partial h_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z}\end{aligned}$$

Si se observan las nueve expresiones anteriores dan los gradientes de los tres componentes de la matriz de giro que son distintos de cero. Se recuerda que la matriz de giro es una matriz antisimétrica: los elementos de la diagonal son nulos y los elementos de fuera de la diagonal son opuestos.

$$\bar{\nabla} h_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad \bar{\nabla} h_{yz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} \\ -\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \end{pmatrix}; \quad \bar{\nabla} h_{yz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \\ -\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Se puede aplicar el teorema que se aplicó a las componentes del vector desplazamiento, a las componentes de la matriz de giro, como si fuera un vector:

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} h_{xy} \\ h_{yz} \\ h_{zx} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} h_{xy}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} & -\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zy}}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} h_{yz}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} & -\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} h_{zx}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} & \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yx}}{\partial z^2} = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (9)$$

Un examen pormenorizado de las nueve expresiones anteriores, teniendo en cuenta que la deformación angular es el doble de la componente de fuera de la diagonal del tensor de deformaciones, permite ver que hay expresiones iguales entre sí y coinciden con las seis ecuaciones de compatibilidad, [3.23], en concreto:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \equiv \text{(3)} & \text{(IV)} \equiv \text{(2)} \equiv \text{(9)} \\ \text{(II)} \equiv \text{(4)} & \text{(V)} \equiv \text{(1)} \equiv \text{(6)} \\ \text{(III)} \equiv \text{(8)} & \text{(VI)} \equiv \text{(5)} \equiv \text{(7)} \end{array}$$

La demostración que se ha hecho para demostrar la suficiencia de las ecuaciones de compatibilidad sirve también para demostrar la suficiencia de las mismas porque el teorema sobre el que se basa lleva una doble implicación:  $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Luego no era necesaria la demostración de la necesidad anterior.

### 3.8. OBTENCIÓN DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO A PARTIR DEL TENSOR DE DEFORMACIÓN

Considérese que se conoce el tensor de deformaciones compatible y que se quiere obtener las componentes del desplazamiento. Las componentes del desplazamiento de un punto infinitamente cercano, separado de éste un vector  $(dx, dy, dz)$ , al punto  $(x_0, y_0, z_0)$  son:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= u(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_x dx + (\varepsilon_{xy} + h_{xy}) dy + (\varepsilon_{xz} + h_{xz}) dz \\ v(x, y, z) &= v(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = \\ &= v(x_0, y_0, z_0) + (\varepsilon_{yx} + h_{yx}) dx + \varepsilon_y dy + (\varepsilon_{yz} + h_{yz}) dz \\ w(x, y, z) &= w(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = \\ &= w(x_0, y_0, z_0) + (\varepsilon_{zx} + h_{zx}) dx + (\varepsilon_{zy} + h_{zy}) dy + \varepsilon_z dz \end{aligned}$$

Para hallar las componentes del desplazamiento de un punto cualquiera, de coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$ , sólo hay que integrar la expresión anterior:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1, z_1) &= u(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial u}{\partial y} dy + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial u}{\partial z} dz = \\ &= u(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_x dx + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{xy} + h_{xy}) dy + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{xz} + h_{xz}) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x_1, y_1, z_1) &= v(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial v}{\partial z} dz = \\
 &= v(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{yx} + h_{yx}) dx + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_y dy + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{yz} + h_{yz}) dz \\
 w(x_1, y_1, z_1) &= w(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial w}{\partial y} dy + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \\
 &= w(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{zx} + h_{zx}) dx + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{zy} + h_{zy}) dy + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_z dz
 \end{aligned}$$

Se va a desarrollar la expresión de  $u$ . Las otras componentes del desplazamiento son análogas:

$$u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0) + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_x dx + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{xy} + h_{xy}) dy + \int_{P_0}^{P_1} (\varepsilon_{xz} + h_{xz}) dz$$

A continuación se realizará la integral de las componentes de la matriz de giro.

Realizando una integración por partes:

$$\begin{aligned}
 \int_{P_0}^{P_1} h_{xy} dy &= \int_{P_0}^{P_1} h_{xy} d(y - y_1) = h_{xy}(y - y_1) \Big|_{P_0}^{P_1} - \int_{P_0}^{P_1} (y - y_1) dh_{xy} = \\
 &= h_{xy} \Big|_{P_0}^{P_1} (y_0 - y_1) - \int_{P_0}^{P_1} (y - y_1) dh_{xy}
 \end{aligned}$$

Despreciando infinitesimos de segundo orden:

$$\begin{aligned}
 dh_{xy} &= \frac{\partial h_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial h_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial h_{xz}}{\partial x} dz \\
 \int_{P_0}^{P_1} (y - y_1) dh_{xy} &= \int_{P_0}^{P_1} (y - y_1) \left( \frac{\partial h_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial h_{xy}}{\partial y} dy + \frac{\partial h_{xz}}{\partial x} dz \right) = \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial h_{xy}}{\partial x} (y - y_1) dx + \\
 &+ \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial h_{xy}}{\partial y} (y - y_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial h_{xz}}{\partial z} (y - y_1) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \\ &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\end{aligned}$$

Si se hace un desarrollo análogo para la integral  $\int_{P_0}^{P_1} h_{xz} dz$  queda completamente obtenida la componente del desplazamiento según la coordenada x a partir del tensor de deformaciones.

$$\begin{aligned}u &= u_0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_x dx + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{xy} dy + \int_{P_0}^{P_1} \left[ \varepsilon_{xz} dz + h_{xy} \right]_{P_0}^{P_1} (y_0 - y_1) + h_{xz} \Big|_{P_0}^{P_1} (z_0 - z_1) + \\ &+ \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right) (y - y_1) dx + \int_{P_0}^{P_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right) (y - y_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) (y - y_1) dz + \\ &+ \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} \right) (z - z_1) dx + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) (z - z_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) (z - z_1) dz \quad [3.24]\end{aligned}$$

Un resultado análogo se puede obtener para el desplazamiento según las otras dos coordenadas del espacio:

$$\begin{aligned}v &= v_0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_y dy + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{yz} dz + \int_{P_0}^{P_1} \left[ \varepsilon_{yx} dx + h_{yz} \right]_{P_0}^{P_1} (z_0 - z_1) + h_{yx} \Big|_{P_0}^{P_1} (x_0 - x_1) + \\ &+ \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \right) (z - z_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} \right) (z - z_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) (z - z_1) dx +\end{aligned}$$

$$+ \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial y} \right) (x - x_1) dy + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) (x - x_1) dz + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) (x - x_1) dy \quad [3.25]$$

$$w = w_0 + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_z dz + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{zx} dz + \int_{P_0}^{P_1} \varepsilon_{zy} dy + h_{zx} \Big|_{P_0} (x_0 - x_1) + h_{zy} \Big|_{P_0} (y_0 - y_1) +$$

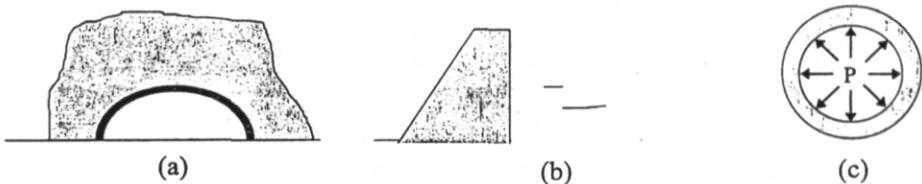
$$\int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial z} \right) (x - x_1) dz + \int_{P_0}^{P_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial x} \right) (x - x_1) dz + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right) (x - x_1) dy +$$

$$+ \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} \right) (y - y_1) dz + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) (y - y_1) dx + \int_{P_0}^{P_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) (y - y_1) dz \quad [3.26]$$

Las expresiones [3.24], [3.25] y [3.26] dan el desplazamiento de un punto cualquiera conocidos: el desplazamiento en un punto cualquiera, en el también se conoce [h] y  $[\varepsilon]$  en todo el dominio.

### 3.9. DEFORMACIÓN PLANA

Al igual que existían unos determinados problemas cuyos tensores de deformación se podían simplificar a un tensor de segundo orden por tener todas las componentes asociadas a un eje nulas, existen otros problemas que se pueden representar mediante un tensor de deformación de segundo orden que son los problemas de deformación plana. Físicamente estos problemas responden a sólidos en los que una dimensión es mucho mayor que las otras dos y las fuerzas se encuentran aplicadas según esas dos dimensiones. Unos ejemplos de estos sólidos los constituyen las presas, los túneles y las tuberías a presión, figura 3.9.



**Figura 3.9.** Problemas de deformación plana: túnel (a), presa (b) y tubería a presión (c).

En estos problemas de deformación plana la deformación según la dimensión mayor es nula: suponiendo que en esa dimensión se ponga el eje OZ serían nulos los términos  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ . Luego el tensor de deformación se puede reducir a:

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad [3.27]$$

Al igual que sucedía con tensión plana interesa estudiar los vectores tensión asociados a direcciones contenidas en el plano XY, y estos vectores tensión se pueden determinar a partir de una única circunferencia de Möhr, cuyo centro y radio son:

$$O = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}; \quad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad [3.28]$$

El cálculo de deformaciones principales y de componentes intrínsecas del vector deformación se haría de forma similar a como se hizo para la tensión plana.



## Capítulo 4

### LEY DE COMPORTAMIENTO

#### 4.1. INTRODUCCIÓN

En los dos capítulos precedentes se han relacionado las fuerzas con las tensiones, mediante las ecuaciones de equilibrio, y los desplazamientos con las deformaciones, mediante las ecuaciones de compatibilidad. En este capítulo se va a cerrar el problema elástico, tal y como se vio en el tema de introducción, relacionando las tensiones y las deformaciones, mediante las ecuaciones de comportamiento, tal y como se ve en el esquema de la figura 4.1.



**Figura 4.1.** Esquema del problema elástico.

A diferencia de las ecuaciones de equilibrio y de las ecuaciones de compatibilidad que se obtuvieron de forma analítica, las ecuaciones de comportamiento se obtendrán de forma experimental. Existen diversos ensayos para la obtención de las leyes de comportamiento de los materiales pero el más representativo, debido a la sencillez de preparación de la probeta y de ejecución del ensayo así como a la repetitividad y fiabilidad de los mismos, es el ensayo de tracción.

## 4. 2. EL ENSAYO DE TRACCIÓN

En este ensayo se somete a tracción, o sea, a extensión, una barra prismática. La forma de la probeta suele ser cilíndrica con un diámetro menor por la parte central y mayor por los extremos. La probeta se sujeta con unas mordazas por la parte de mayor diámetro. Un esquema de una probeta se muestra en la figura 4.2.

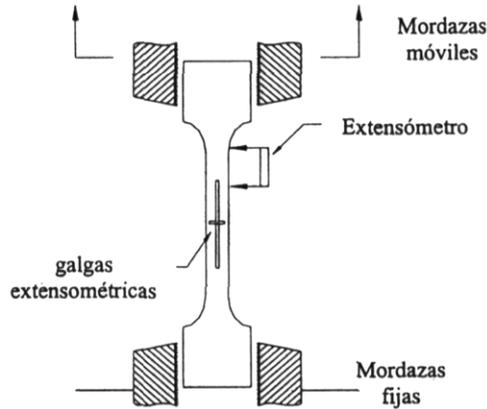


Figura 4.2. Probeta del ensayo de tracción

El ensayo consiste en aplicar una fuerza  $F$  longitudinal a la barra a través de las mordazas. La información que se precisa en este ensayo es la fuerza  $F$  y el alargamiento que sufre la barra,  $\Delta L$ . Para la medida de este alargamiento existen diversas alternativas. La más sencilla y que, además, no requiere instrumentación adicional sobre la probeta es medir la distancia entre mordazas. Al iniciar la aplicación de la fuerza suele haber desplazamientos relativos entre mordazas y probeta; a pesar de todo esta opción produce luego un resultado bastante representativo. No obstante, dado que la medida de separación entre mordazas incluye las zonas de mayor área, que no se desean medir, se pueden usar métodos de medida alternativos sobre la parte central de la probeta. Uno de ellos es el extensómetro que es un instrumento que se fija a dos puntos de la probeta y que mide la distancia entre ambos. Es un elemento reutilizable a cuantos ensayos se deseen realizar. Otro procedimiento es el uso de bandas extensométricas que se adhieren a la probeta en la dirección en que se quiera medir el alargamiento unitario. En la figura 4.2 se han dibujado dos de estas bandas: una en la dirección longitudinal y otra en la dirección transversal.

Habitualmente una mordaza permanece fija y se ejerce la fuerza sobre la otra mordaza que se desplaza. Para controlar el ensayo hay máquinas que controlan la unidad de fuerza aplicada y hay otras que controlan el desplazamiento entre mordazas, que es la forma de control habitual. En cualquier caso la aplicación de la fuerza se debe hacer lentamente para evitar efectos dinámicos.

Del propio ensayo de tracción se puede obtener un diagrama fuerza-alargamiento. La forma de cada diagrama depende del material. En concreto para un acero dulce el diagrama que se obtiene a partir del ensayo tracción es el de la figura 4.3.

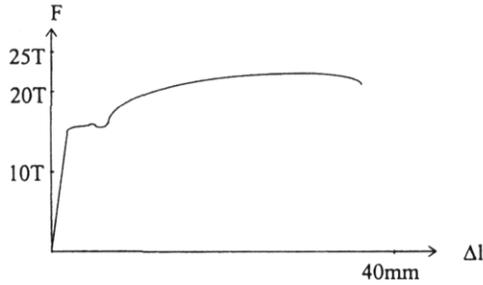


Figura 4.3. Diagrama Fuerza-Alargamiento obtenido para un acero dulce del ensayo tracción.

La tensión es fuerza por unidad de superficie:  $\sigma_0 = \frac{F}{A_0}$ . La deformación es alargamiento

por unidad de longitud:  $\varepsilon_0 = \frac{\Delta l}{l_0}$ .

Al mismo tiempo que la barra se va alargando de su longitud inicial  $l_0$  a la longitud  $l$ ,  $l > l_0$ , se va reduciendo el área transversal de  $A_0$  a  $A$  de forma que  $A < A_0$ . Por tanto ni  $\sigma_0$  ni  $\varepsilon_0$  representan la tensión ni la deformación real de la probeta. En la figura 4.4 se representa la relación entre  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  en trazo continuo y la relación entre  $\sigma - \varepsilon$ , la tensión y la deformación real o instantánea, en trazo discontinuo.

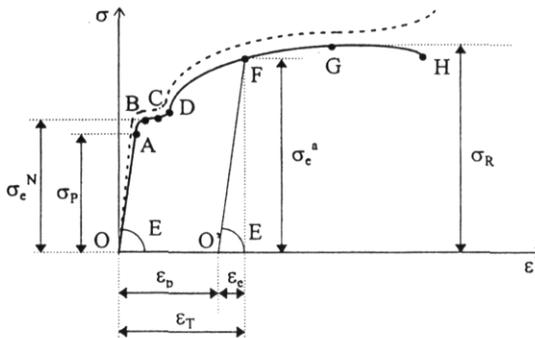


Figura 4.4. Diagrama Tensión-Deformación obtenido para un acero dulce del ensayo tracción.

Para describir el ensayo se recorrerá la línea OABCDFGH explicando el comportamiento del material aclarando algunos puntos de interés.

**Tramo OA:** Tramo de *comportamiento elástico lineal*. En este tramo hay proporcionalidad entre la tensión aplicada y la deformación producida y el proceso es reversible o lo que es lo mismo el material posee la propiedad de la *elasticidad*, propiedad en virtud de la cual el material recupera su forma y tamaño una vez que desaparecen las cargas que lo solicitan. El valor de la tensión que limita este comportamiento se suele denominar límite de proporcionalidad,  $\sigma_p$ . Si la probeta se somete a una tensión menor a  $\sigma_p$  se deforma; pero si esta tensión deja de aplicarse la deformación desaparece recuperando la probeta el tamaño y forma inicial.

**Tramo AB:** Tramo de *comportamiento elástico no lineal*. Se pierde la proporcionalidad entre tensión y deformación, pero se mantiene el carácter elástico, es decir si a la probeta se le aplica una tensión de valor comprendido entre A y B la descarga se produce a lo largo de la curva BAO. El valor de la tensión que limita este comportamiento se conoce como *límite elástico noval*,  $\sigma_e^N$ , del acero.

**Tramo BCD:** Escalón de *cedencia* del material. En este tramo aunque la tensión permanezca constante aumenta la deformación. Este fenómeno se conoce como *fluencia* del material y no se da en todos los materiales. La tensión que caracteriza este tramo es la tensión de fluencia,  $\sigma_F$ . En este tramo ya no hay comportamiento elástico.

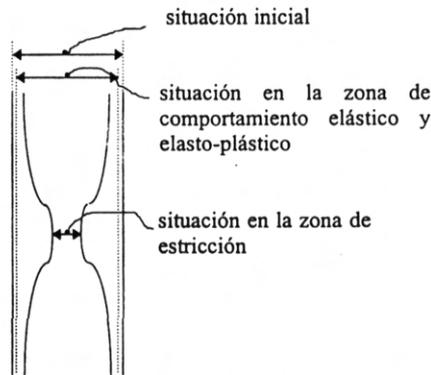
**Tramo DFG:** Tramo de *endurecimiento* por deformación. Una vez pasado el escalón de cedencia del material hay que aumentar la tensión para que aumente la deformación del material. El tramo es no lineal y de pendiente decreciente. En este tramo tampoco hay comportamiento elástico. Para describir el comportamiento en este tramo se va a considerar un punto genérico F a donde se ha llegado después de cargar la probeta. Si se descarga la probeta, esta descarga no se produce por la línea de carga OABCDFG sino por la línea recta FO' paralela a la línea OA, alcanzando el estado descargado, el punto O'. Esta situación es la que caracteriza al comportamiento elastoplástico: de la deformación total  $\epsilon_T$  parte se recupera elásticamente,  $\epsilon_e$ , y parte se queda almacenada en el material,  $\epsilon_p$ . La deformación que queda almacenada en el material recibe el nombre de deformación *plástica, permanente o remanente*:

$$\epsilon_T = \epsilon_e + \epsilon_p$$

Si una vez descargada la probeta, alcanzado el punto O' se vuelve a cargar, la nueva línea de carga es la línea O'F de manera elástica y lineal de forma análoga a la línea OA. Lo que se hace, en definitiva, es aumentar el límite elástico del material desde el límite elástico noval a un *límite elástico aparente*  $\sigma_e^a$ . Esto podría ser una forma de aumentar el límite elástico de material y, de hecho, hay aceros estirados en frío, que no son otra cosa que aceros que ha sido deformados hasta plastificar.

El proceso de carga-descarga no sufre el cambio de pendiente brusco en el punto F que aparece en la figura 4.4; pero lo que no se produce es escalón de cedencia. En este tramo queda por describir el punto G donde se considera que el material alcanza la máxima tensión: su tensión de rotura,  $\sigma_R$ .

**Tramo GH:** Zona de *estricción*. A partir del punto G aunque se aplique una fuerza menor aumenta la deformación. Aunque aparentemente la tensión va disminuyendo en este tramo en la realidad no es así. No hay que olvidar que  $\sigma_0$  no es la tensión real sino la fuerza real dividida entre el área inicial y en este tramo se produce una *estricción* de la probeta: una disminución localizada y claramente perceptible del área transversal tal y como se ve en la figura 4.5. Al ser el área real mucho menor que el área inicial ( $A \ll A_0$ ) la tensión real es mucho mayor que la tensión  $\sigma_0$  por eso las curvas  $\sigma_0 - \varepsilon_0$  y  $\sigma - \varepsilon$  que permanecen bastante cercanas hasta llegar al punto G, a partir de este punto divergen bastante. Aunque la rotura real de la probeta se produce en el punto H y la tensión real en ese punto es mayor que en el punto G se considera como tensión de rotura la de este punto pues, a partir de ahí sin aumentar la carga se produce la rotura.

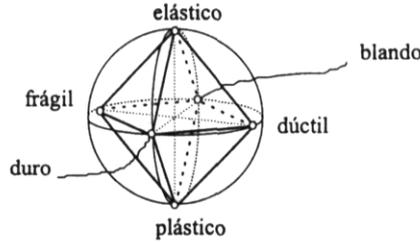


**Figura 4.5.** Probeta del ensayo de tracción en sus diferentes fases de deformación.

El comportamiento descrito aquí correspondiente a un acero dulce responde a un comportamiento de rotura dúctil: se alcanzan grandes deformaciones antes de llegar a la rotura, entre un 20% y un 40%. Hay materiales como la fibra de vidrio o de carbono que producen valores muy pequeños de deformación antes de llegar a la rotura, entre el 1% y el 2%. Estos materiales presentan un comportamiento frágil. El mismo acero tendría un comportamiento frágil si se estira en frío hasta un punto muy cercano a G.

Los conceptos de fragilidad y ductilidad son mucho más complicados de lo que aparece reflejado en el párrafo anterior. Un mismo acero dulce sometido a un sistema de cargas y a una geometría determinadas puede presentar un comportamiento frágil.

Existen otras propiedades que se pueden poner de manifiesto mediante la curva del ensayo de tracción y que se pueden englobar en el octaedro de Ross, figura 4.6.



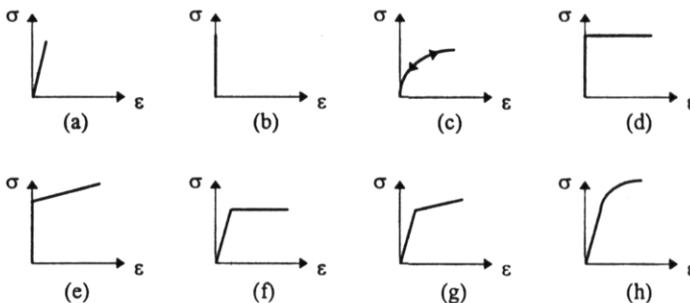
**Figura 4.6.** Octaedro de Ross.

En el octaedro de Ross se pone de manifiesto la independencia de cada pareja de propiedades aunque, en la práctica, suelen ir relacionadas.

La pareja *elasticidad-plasticidad* se refiere al modo de deformación, siendo deformación elástica aquella que desaparece en el proceso de descarga y deformación plástica a la que permanece después mismo.

Por último la pareja *duro-blando* representa la resistencia del material a ser rallado. Un material se ralla cuando alcanza una deformación permanente debido a una gran tensión superficial, esa tensión provoca una deformación que llega a ser permanente cuando la tensión supera el límite elástico. Por eso se puede relacionar esta propiedad con el límite elástico. Un material es tanto más duro cuanto más resistencia opone a ser rallado.

En la figura 4.3 se ha representado el diagrama de comportamiento de un acero dulce pero todos los materiales no se comportan igual. En ingeniería se utilizan diversos diagramas de comportamiento idealizados, la mayoría de éstos se muestran en la figura 4.7.



**Figura 4.7.** Diferentes comportamientos idealizados de sólidos deformables: a) elástico lineal, b) rígido, c) elástico no lineal, d) rígido plástico ideal, e) rígido plástico lineal, f) elastoplástico ideal, g) elastoplástico lineal, h) elastoplástico no lineal.

Si se observa la figura 4.3, el diagrama del acero dulce no sigue fielmente ninguna de las leyes de comportamiento representadas en la figura 4.7. Dependiendo de las circunstancias

se aproxima a una u otra ley de comportamiento: es bastante común considerar que el acero dulce tiene un comportamiento elastoplástico perfecto o elastoplástico no lineal. En cualquier caso no hay que olvidar que en el apartado 1.9 de este libro, que hacía mención a las hipótesis de la elasticidad, se admitían las hipótesis de elasticidad y linealidad: esto supone que se está considerando un diagrama de comportamiento como el descrito en la figura 4.6.a. o, lo que es lo mismo, se considera que se está trabajando en el tramo OA del diagrama de comportamiento del acero dulce, figura 4.4.

El valor de la tensión que limita este tramo es el límite de proporcionalidad,  $\sigma_p$ . En la práctica este límite de proporcionalidad, el límite elástico noval, y la tensión de fluencia poseen valores muy parecidos y difíciles de medir, y se toma como valor identificativo la tensión a que tiene que estar sometido un material para que su deformación remanente sea 0.002:

$$\sigma_p \approx \sigma_e^N \approx \sigma_F \approx \sigma_{0.002}$$

La descripción del ensayo de tracción tenía como objetivo encontrar una relación entre las tensiones y las deformaciones. Para lograr este objetivo se pueden medir dos propiedades a partir del ensayo de tracción:

- *Módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young (E)*: Es la pendiente de la recta OA de la figura 4.4. Al ser una pendiente es la relación que hay entre la tensión y la deformación. El valor del módulo de elasticidad longitudinal en los aceros es del orden de  $2.1 \cdot 10^6$  Kp/cm<sup>2</sup>. El módulo de Young da una idea de la rigidez del material; el concepto de rigidez es bastante usado en resistencia de materiales y cuantifica la oposición del material a ser deformado ante unas sollicitaciones determinadas. Cuanto mayor sea E mayor es la deformación para una tensión dada, luego a mayor E mayor es la rigidez de un material.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad [4.1]$$

- *Coefficiente de Poisson (v)*: Además de la deformación longitudinal se produce una contracción del área; o sea una deformación transversal negativa. El coeficiente de Poisson es la relación entre la contracción transversal unitaria y el alargamiento longitudinal unitario. Para el acero el valor de v se encuentra entre 0.25 y 0.33.

$$v = \frac{|\varepsilon_T|}{\varepsilon_L} \quad [4.2]$$

Por tanto la deformación transversal es:

$$\varepsilon_T = -v \varepsilon_L = -v \frac{\sigma}{E} \quad [4.3]$$

Para medir el coeficiente de Poisson mediante el ensayo tracción es necesario medir deformaciones en dos direcciones: en la dirección longitudinal y en la transversal.

El coeficiente de Poisson es una medida de la rigidez transversal; cuanto menor sea el coeficiente de Poisson más rígido es un material transversalmente.

Aunque se ha descrito el ensayo a tracción, el ensayo a compresión es similar y muestra una ley de comportamiento parecida aunque puede presentar problemas de inestabilidad y de descentrado de la carga, ver el tema 15 de estos apuntes, y.

### 4.3. LEY DE HOOK GENERALIZADA

El ensayo de tracción descrito en el apartado anterior establece una relación entre la tensión normal en una dirección y las deformaciones normales en las tres direcciones del espacio. Ahora se va a considerar qué deformaciones aparecen cuando hay tensiones normales en los tres ejes del espacio, figura 4.8.

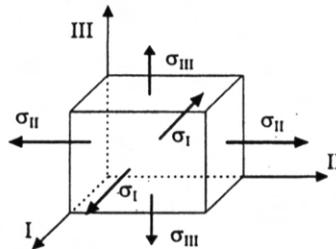


Figura 4.8. Estado tensional de un punto referido a ejes principales.

El estado tensional representado en la figura 4.8, en base al principio de superposición, se puede descomponer en tres considerando la tensión en cada eje independientemente:

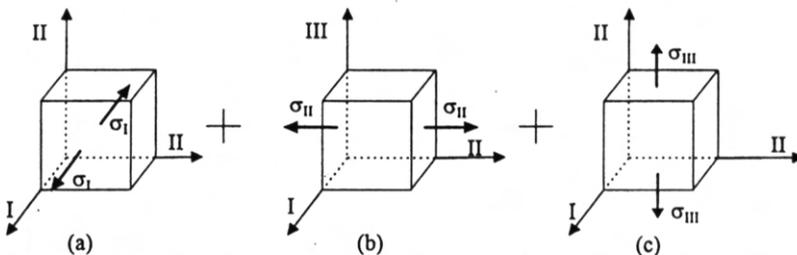


Figura 4.9. Descomposición del estado tensional del punto según una tensión en cada eje principal.

Cada estado representado en la figura 4.9 es un estado monoaxial similar al descrito en el ensayo tracción. Por tanto en cada estado se producirá un campo de deformaciones:

Estado (a)	Estado (b)	Estado (c)
$\varepsilon_I^{(a)} = \frac{\sigma_I}{E}$	$\varepsilon_I^{(b)} = -\nu \frac{\sigma_{II}}{E}$	$\varepsilon_I^{(c)} = -\nu \frac{\sigma_{III}}{E}$
$\varepsilon_{II}^{(a)} = -\nu \frac{\sigma_I}{E}$	$\varepsilon_{II}^{(b)} = \frac{\sigma_{II}}{E}$	$\varepsilon_{II}^{(c)} = -\nu \frac{\sigma_{III}}{E}$
$\varepsilon_{III}^{(a)} = -\nu \frac{\sigma_I}{E}$	$\varepsilon_{III}^{(b)} = -\nu \frac{\sigma_{II}}{E}$	$\varepsilon_{III}^{(c)} = \frac{\sigma_{III}}{E}$

Se puede aplicar el principio de superposición a las expresiones anteriores para obtener las deformaciones totales de la situación descrita en la figura 4.8:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_I &= \varepsilon_I^{(a)} + \varepsilon_I^{(b)} + \varepsilon_I^{(c)} = \frac{\sigma_I}{E} - \nu \frac{\sigma_{II}}{E} - \nu \frac{\sigma_{III}}{E} = \frac{\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})}{E} \\
 \varepsilon_{II} &= \varepsilon_{II}^{(a)} + \varepsilon_{II}^{(b)} + \varepsilon_{II}^{(c)} = -\nu \frac{\sigma_I}{E} + \frac{\sigma_{II}}{E} - \nu \frac{\sigma_{III}}{E} = \frac{\sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III})}{E} \\
 \varepsilon_{III} &= \varepsilon_{III}^{(a)} + \varepsilon_{III}^{(b)} + \varepsilon_{III}^{(c)} = -\nu \frac{\sigma_I}{E} - \nu \frac{\sigma_{II}}{E} + \frac{\sigma_{III}}{E} = \frac{\sigma_{III} - \nu(\sigma_I + \sigma_{II})}{E}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Las ecuaciones anteriores constituyen la ley de comportamiento de un material en ejes principales y se conoce como ley de Hooke generalizada.

#### 4.4. MÓDULO TRANSVERSAL DE ELASTICIDAD

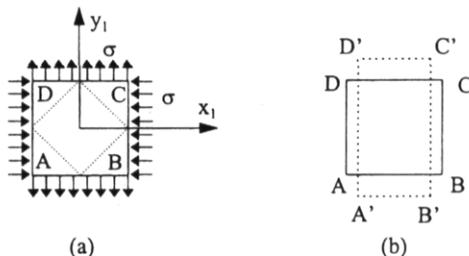
En el apartado anterior se han relacionado las tensiones y las deformaciones en ejes principales de tensión; los vectores tensión asociados a los planos perpendiculares a los ejes principales sólo poseen componente normal siendo su componente tangencial nula, pero hay planos en los que si aparece componente tangencial, que debe poderse relacionar con las deformaciones.

Considérese un estado tensional plano en cortadura pura; o sea con  $\sigma_I = \sigma$ ;  $\sigma_{II} = 0$ ;  $\sigma_{III} = -\sigma$ . Se consideran unos ejes,  $(x_1, y_1, z_1)$ , tales que  $\sigma_{x_1} = -\sigma$ ;  $\sigma_{y_1} = \sigma$ ;  $\sigma_{z_1} = 0$ .

Al ser un estado bidimensional puede ser representado por un tensor de segundo orden:

$$[\sigma_1] = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

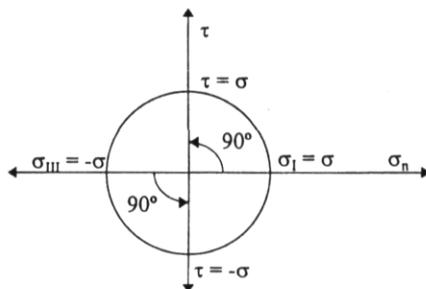
Este estado provoca una deformación tal y como se indica en la figura 4.10.



**Figura 4.10.** Cuadrado infinitesimal sometido a tracción-compresión: a) Tensiones, b) Deformaciones.

El tensor anterior, al estar representado en ejes principales, sólo tiene componentes normales; a continuación se va a obtener el tensor referido a otros ejes en los que sólo tiene componentes tangenciales.

Si se giran los ejes  $45^\circ$ , el tensor bidimensional representado mediante la circunferencia de Möhr se debe girar el doble:  $90^\circ$ , como se observa en la figura 4.11.



**Figura 4.11.** Giro del tensor de tracción-compresión  $45^\circ$ , en la circunferencia de Möhr,  $90^\circ$ .

El tensor bidimensional, una vez realizado el giro de  $45^\circ$ , queda:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad [4.6]$$

Se va a representar el giro en el cuadrado elemental de la figura 4.10. El giro de las tensiones queda reflejado en la figura 4.12.a. y el de las deformaciones en la figura 4.12.b. Este giro del tensor de tensiones queda reflejado en la figura 4.12.a. Este tensor de tensiones, a su vez, provoca unas deformaciones, para calcular estas deformaciones se va a tener en cuenta la figura 4.12.b. Obsérvese el cambio de ángulo en el punto H en el proceso de deformación en el que H pasa a la posición H'. El valor inicial del ángulo es  $\pi/2$  y el valor final  $\pi/2 + \gamma$ . En el apartado 3.1. se definió la distorsión angular como el ángulo deformado menos el ángulo sin deformar. Esta definición hace pensar que el semiángulo en

H debería ser  $\pi/4 - \gamma/2$ ; pero éste es el semiángulo de I: hay que tener en cuenta que al tratarse de un cuadrado hay dos ángulos que aumentan en la misma medida que los otros dos disminuyen. La tangente del semiángulo en H es:

$$\operatorname{tg}(\pi/4 + \gamma/2) = \frac{OI'}{OH'} = \frac{OI + \Pi'}{OH - HH'} = \frac{\frac{OI}{OI} + \frac{\Pi'}{OI}}{\frac{OH}{OH} - \frac{HH'}{OH}} = \frac{1 + \varepsilon_{x1}}{1 + \varepsilon_{y1}} = \frac{1 + \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)}{1 - \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)} \quad [4.7]$$

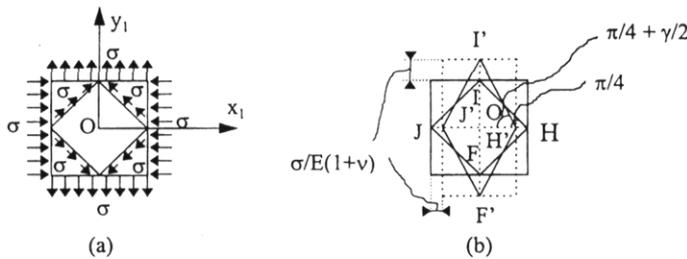


Figura 4.12. Tensiones: a) y Deformaciones: b) del tensor girado 45°.

En la expresión [4.7] se ha tenido en cuenta que se parte de un cuadrado:  $OI = OH$  y se ha aplicado la ley de Hooke generalizada a las deformaciones  $\varepsilon_{x1}$  y  $\varepsilon_{y1}$ , que no hay que olvidar que son deformaciones correspondientes a tensiones principales:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{1}{E}(\sigma_{x1} - \nu(\sigma_{y1} + \sigma_{z1})) = \frac{1}{E}(\sigma - \nu(-\sigma + 0)) = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu)$$

$$\varepsilon_{y1} = \frac{1}{E}(\sigma_{y1} - \nu(\sigma_{x1} + \sigma_{z1})) = \frac{1}{E}(-\sigma - \nu(\sigma + 0)) = -\frac{\sigma}{E}(1 + \nu)$$

La tangente del ángulo en H también se puede desarrollar trigonométricamente:

$$\operatorname{tg}(\pi/4 + \gamma/2) = \frac{\operatorname{tg} \pi/4 + \operatorname{tg} \gamma/2}{1 - \operatorname{tg} \pi/4 \operatorname{tg} \gamma/2} \approx \frac{1 + \gamma/2}{1 - \gamma/2} \quad [4.8]$$

En la expresión [4.8] se ha tenido en cuenta la hipótesis de pequeñas deformaciones de la teoría de la Elasticidad en virtud de la cual se puede aproximar la tangente de un ángulo al ángulo mismo.

Si se igualan las expresiones [4.7] y [4.8] se obtiene:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu) \quad [4.9]$$

Definiendo el *módulo de elasticidad transversal*  $G$  como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad [4.10]$$

Y teniendo en cuenta que la tensión tangencial del tensor girado  $45^\circ$  es  $\tau = \sigma$ , la expresión [4.9] se puede reducir a:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad [4.11]$$

La expresión [4.11] da la relación entre la tensión tangencial y la deformación angular, relacionadas ambas a través del módulo de elasticidad transversal  $G$  definido en [4.10].

Al igual que mediante el ensayo de tracción se mide el módulo de Young, mediante un ensayo monoaxial, también se puede pensar en diseñar un ensayo que genere un ensayo tangencial puro de tensiones y deformaciones que permitan medir la constante  $G$ . Esto se ha hecho en la práctica mediante ensayos a torsión de tubos delgados o ensayos a cortadura de probetas entalladas (ensayo Iosipescu); pero existen bastantes dificultades para garantizar la existencia de un estado tangencial puro, por lo que en materiales isótropos se prefiere determinar  $G$  a través de [4.10] mediante las constantes  $E$  y  $\nu$  obtenidas en el ensayo de tracción.

#### 4.5. LEY DE COMPORTAMIENTO EN UNAS COORDENADAS CUALESQUIERA

En un sistema de coordenadas cualesquiera el tensor de tensiones está compuesto de componentes normales y tangenciales, para obtener las deformaciones hay que aplicar las ecuaciones [4.4], para las tensiones normales, y la [4.11], para las tangenciales, quedando:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad [4.12]$$

Las ecuaciones anteriores, que permiten obtener las deformaciones en función de las tensiones, constituyen la *ley de Hooke generalizada* para un sistema de ejes cualesquiera. A partir de la ley de Hooke resulta fácil deducir la relación inversa, que hace posible determinar las tensiones en función de las deformaciones.

Sumando las tres expresiones de las deformaciones normales de [4.12]:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{I_1}{E} (1 - 2\nu) = \frac{I_1}{3K} \quad [4.13]$$

La expresión [4.13] muestra que la primera invariante del tensor de deformaciones se relaciona, exclusivamente, con el primer invariante del tensor de tensiones, a través de la constante  $K$ , de valor:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad [4.14]$$

que recibe el nombre de *módulo de rigidez volumétrica* y representa la rigidez de un sólido deformable a un cambio de volumen, de forma que si un sólido está sometido a presión hidrostática:

$$\sigma_I = -P; \sigma_{II} = -P; \sigma_{III} = -P \Rightarrow I_1 = -3P$$

De [4.13]:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{I_1}{3K} = -\frac{P}{K} \quad [4.15]$$

A continuación se va a transformar la expresión de las deformaciones normales de las expresiones [4.12], en concreto se va a hacer para la expresión de  $\varepsilon_x$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x + \nu\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right) = \frac{1}{E} \sigma_x (1 + \nu) - \nu I_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_x &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{1 + \nu} I_1 = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta [4.13]. La expresión:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad [4.16]$$

es otra constante elástica, con lo que ya van cinco constantes elásticas:  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$ ,  $\lambda$ ,  $K$ .

Teniendo en cuenta el valor de  $\lambda$ , las expresiones que permiten obtener las tensiones en función de las deformaciones son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda e \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda e \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda e \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de *ecuaciones de Lamé*.

Tanto en la ley de Hooke generalizada como en las ecuaciones de Lamé se puede observar un desacoplamiento entre las tensiones normales y las deformaciones angulares así como entre las tensiones tangenciales y las deformaciones normales. Como consecuencia de este desacoplamiento se puede afirmar *que los ejes principales en tensión coinciden con los ejes principales en deformación* y viceversa. El razonamiento de esta premisa es muy simple: si el tensor de tensiones viene expresado en ejes principales, las componentes tangenciales son nulas, si las componentes tangenciales son nulas, por la ley de Hooke, son nulas también las deformaciones angulares, luego el tensor de deformaciones también viene expresado en ejes principales. Razonamiento análogo se puede hacer partiendo del tensor de deformaciones pero haciendo uso de las ecuaciones de Lamé en lugar de la ley de Hooke.

Por otra parte de la ley de comportamiento, en su versión de ley de Hooke o de ecuaciones de Lamé, se pueden extraer dos importantes conclusiones para la elasticidad plana:

- Un estado plano de tensiones:  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$  no implica estado plano de deformaciones, así de [4.12] se puede inferir que:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\tag{4.18}$$

- Un estado plano de deformaciones:  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{xz} = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$  no implica estado plano de tensiones, así de [4.17] se puede inferir que:

$$\sigma_z = \lambda e\tag{4.19}$$

- Para que coincida un estado plano en tensiones y en deformaciones se deben anular [4.18] y [4.19].

Si se anula [4.18]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 0$$

Si se anula [4.19]:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$$

En los dos casos este estado coincide con el estado de cortadura pura, mediante el cual se dedujo el valor de  $G$  en el apartado anterior.

Las cinco constantes elásticas enunciadas con anterioridad no son independientes, sólo existen dos constantes independientes, que pueden ser dos cualesquiera y las otras constantes se pueden poner en función de estas dos. En la tabla 4.1 se han obtenido cada constante en función de cada par.

El comportamiento de los materiales que se encuentran en la naturaleza permite acotar las constantes elásticas:

$E \geq 0$ . Un sólido sometido a una tensión normal positiva sufre siempre una deformación normal positiva. Si se tracciona una barra, ésta aumenta su longitud, no la disminuye.

$\nu \geq 0$ . Si actúa una tensión normal positiva, que estira en esa dirección, se provoca un acortamiento en la dirección transversal.

$K \geq 0$ . Un sólido sometido a presión hidrostática siempre disminuye su volumen, ver expresión [4.15].

$\nu \leq \frac{1}{2}$ . Si se observa la expresión de  $K$ , expresión [4.13], y teniendo en cuenta que  $K \geq 0$  se puede concluir que  $1 - 2\nu \geq 0$ .

Los valores de  $K = \infty$  y  $\nu = \frac{1}{2}$  están asociados a un sólido incompresible.

$G \geq 0$ . Una tensión tangencial positiva siempre provoca una deformación angular positiva.

	$E$	$\nu$	$G$	$\lambda$	$K$
$E, \nu$	$E$	$\nu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
$E, G$	$E$	$\frac{E-2G}{2G}$	$G$	$\frac{(2G-E)G}{E-3G}$	$\frac{GE}{3(3G-E)}$
$E, \lambda$	$E$	$\frac{-E-\lambda+R}{4\lambda}$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$	$\lambda$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$
$E, K$	$E$	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{3EK}{9K-E}$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$K$

$\nu, G$	$2G(1+\nu)$	$\nu$	$G$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
$\nu, \lambda$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$\nu$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\lambda$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
$\nu, K$	$3K(1-2\nu)$	$\nu$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$K$
$G, \lambda$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$G$	$\lambda$	$\frac{3\lambda+2G}{3}$
$G, K$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{1}{2} \left( \frac{3K-2G}{3K+G} \right)$	$G$	$\frac{3K-2G}{3}$	$K$
$\lambda, K$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\lambda$	$K$

**Tabla 4.1.** Equivalencia entre las constantes elásticas, con  $R = \sqrt{E^2 + 2E\lambda + 9\lambda^2}$ .

Finalmente se puede extraer otra importante consecuencia directamente de la expresión [4.13] en la que se relaciona la primera invariante del tensor de tensiones, única y exclusivamente, con la primera invariante del tensor de deformaciones y viceversa: El tensor de tensiones esférico, que depende de la primera invariante del tensor, genera al tensor de deformaciones esférico, o sea el cambio de volumen y el tensor de tensiones desviador genera al tensor de deformaciones desviador, que representa el cambio de forma.

#### 4.6. EL PROBLEMA ELÁSTICO

Una vez obtenida la ley de comportamiento ya se ha completado el problema elástico: se pueden obtener los desplazamientos en función de las sollicitaciones, queda terminado el problema definido en el esquema de la figura 4.1. Esto supone que queda un sistema de 15 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con 15 incógnitas. Las 15 ecuaciones son las 3 ecuaciones de equilibrio interno definidas en [2.4], las 6 de compatibilidad, que relaciona las deformaciones con los desplazamientos, definidas en [3.5] y las 6 de comportamiento dadas en [4.11] o en [4.16]. Las 15 incógnitas son  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v$  y  $w$ . Las ecuaciones que definen el problema elástico vienen englobadas en [4.20].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \right) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right) \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}
\end{aligned}
\tag{4.20}$$

Las quince ecuaciones anteriores, como cualquier sistema de ecuaciones diferenciales, necesitan, para su resolución, la aplicación de unas condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno, como su propio nombre indica, consiste en una serie de valores conocidos de determinadas variables del problema, o de alguna relación entre éstas, en los puntos del contorno del sólido elástico. En particular, las variables que se pueden conocer en el contorno son las fuerzas aplicadas en los puntos del contorno y los desplazamientos. Las condiciones de contorno pueden ser de tres tipos:

#### Condiciones de contorno en tensiones

Esta situación se da en los casos en los que se conoce la fuerza aplicada en los puntos del contorno. Recuérdese que las fuerzas superficiales coinciden con el vector tensión en los puntos del contorno, ver apartado 2.6 de este libro.

Estas fuerzas exteriores serán fuerzas por unidad de área en un caso tridimensional y fuerzas por unidad de longitud en un caso bidimensional. Si se denotan las fuerzas exteriores  $\vec{F}_e$ , la aplicación de esta condición para un punto M del contorno es:

$$\vec{\sigma}(M) = \vec{F}_e(M) \tag{4.21}$$

Habitualmente será más fácil representar los vectores tensión y fuerza exterior en coordenadas intrínsecas: normal y tangencial al contorno; aunque se puede cambiar fácilmente de coordenadas mediante la matriz de paso.

Un caso típico de este tipo de condición de contorno es el de un recipiente sometido a la presión de un fluido, figura 4.13. La pared interna del recipiente está sometida a una fuerza

superficial dirigida hacia la pared y de valor igual a la presión del fluido, no habiendo fuerzas sobre la pared del recipiente en la dirección tangencial, luego el vector tensión tiene como componentes:

$$\sigma_n = -P; \tau = 0 \quad [4.22]$$

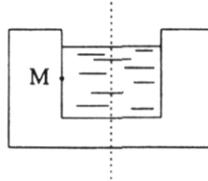


Figura 4.13. Recipiente sometido a presión hidrostática.

### Condiciones de contorno en desplazamientos

Esta situación se da en los casos en los que el desplazamiento en el contorno del sólido viene impuesto. Lo más usual es que el desplazamiento sea nulo, como la pared izquierda del sólido de la figura 4.14, en donde los desplazamientos son:

$$u = 0; v = 0; w = 0 \quad [4.23]$$

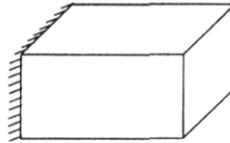


Figura 4.14. Sólido con una cara empotrada.

### Condiciones de contorno mixtas

Esta situación se da cuando es posible aplicar una fuerza en una dirección y forzar el movimiento en otra. Esto se ve reflejado en la figura 4.15. Las condiciones de contorno de esta cara son:

$$u = 0; \tau = 0 \quad [4.24]$$

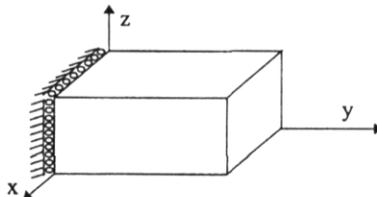


Figura 4.15. Sólido con una cara en la que hay una condición de contorno mixta.

Las condiciones de contorno descritas son las más frecuentes aunque también las puede haber de otro tipo, como los apoyos elásticos en los que se conoce una relación entre las tensiones y los desplazamientos.

Si el problema elástico está bien planteado: sus quince ecuaciones y las condiciones de contorno, se puede asegurar que *existe solución* y además que *ésta es única*.

#### 4.7. EL PROBLEMA TÉRMICO

Hasta ahora siempre que se habla de solicitaciones se hace referencia a fuerzas, bien sea de tipo superficial, bien de tipo volumétrico. Sin embargo, existe otra importante sollicitación: la térmica. Este tipo de sollicitación va asociado a un incremento o decremento de temperatura. Es intuitivo pensar que un aumento de temperatura provoca en el sólido unas dilataciones y si el cuerpo se dilata está sometido a deformaciones. Ahora bien, cabría pensar ¿llevan estas deformaciones, mediante el uso de las ecuaciones de Lamé, asociadas unas tensiones? Esto no siempre tiene que ser así: si se somete a un sólido a un incremento de temperatura y éste se puede dilatar libremente, se producen deformaciones pero no tensiones. Por contra, las condiciones de apoyo del sólido pueden impedir la dilatación del mismo generando unas tensiones en el sólido. Así la varilla de la figura 4.16 que, inicialmente, medía  $l_0$  tras un aumento de temperatura se dilataría libremente hasta alcanzar una longitud  $l$ :

$$l = l_0 + l_0\alpha\Delta T \quad [4.25]$$

donde  $\alpha$  es el *coeficiente de dilatación térmica*.

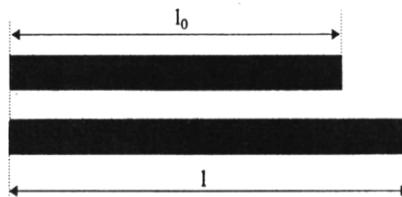


Figura 4.16. Varilla sometida a un incremento de temperatura  $\Delta T$ .

En general,  $\alpha$  es un coeficiente que depende del material y es función de la temperatura, aunque, para no complicar el problema se suele tomar el coeficiente de dilatación correspondiente a temperatura ambiente. Luego, un aumento de temperatura supone un incremento de longitud de  $l_0\alpha\Delta T$ . Este incremento de longitud se traduce en una deformación:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \alpha \Delta T \quad [4.26]$$

Esta deformación no sólo se produce en la dirección longitudinal de la barra sino en las tres direcciones del espacio:

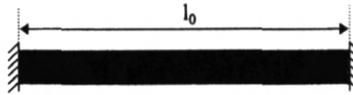
$$\varepsilon_x = \alpha \Delta T; \quad \varepsilon_y = \alpha \Delta T; \quad \varepsilon_z = \alpha \Delta T \quad [4.27]$$

Esto supone un tensor de deformación:

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{pmatrix} \quad [4.28]$$

El tensor de deformación definido en [4.28] se da en un sólido en el que sólo actúa la temperatura y ésta es constante en todo el dominio no estando limitada la expansión del mismo. En cualquier caso para asegurar que el incremento de temperatura no rompa la continuidad del medio se deben cumplir las ecuaciones de compatibilidad [3.24]. Para que se cumplan estas ecuaciones la distribución de temperaturas debe ser lineal. Si la distribución de temperaturas no es lineal tiene que aparecer una distribución de tensiones que genere unas deformaciones para que la suma total de las deformaciones sea compatible.

Al igual que aparecen unas tensiones debido a la existencia de una distribución de temperaturas no lineal, pueden aparecer estas tensiones cuando se restringe la deformación del sólido por efecto de las condiciones de contorno. Supóngase que la varilla de la figura 4.16 tuviera impedido el libre alargamiento, figura 4.17:



**Figura 4.17.** Varilla con los movimientos restringidos en los extremos sometida a un incremento de temperatura  $\Delta T$ .

Si se restringe el movimiento tiene que haber alguna acción que impida esa deformación: una tensión. Esta tensión tiene que ser tal que elimine la deformación que se produciría si la varilla se dilatara libremente. Como la deformación es  $\varepsilon_x = \alpha \Delta T$  la tensión que la anula sería  $\sigma_x = -E\alpha \Delta T$ . También aparecen deformaciones en los ejes transversales debidos al efecto Poisson:  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu E \Delta T$ , que vienen a sumarse a las provocadas por la temperatura.

#### 4.8. ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Cuando una barra uniforme se somete a tracción, las fuerzas que actúan en los extremos realizan trabajo al estirarla, de la misma manera que una fuerza que estira un muelle realiza trabajo al estirarlo. Así se puede establecer una analogía entre el paralelepípedo elemental sometido a tracción y el muelle de la figura 4.18.



Figura 4.18. Similitud entre un paralelepípedo elemental sometido a tracción y un muelle.

La fuerza del muelle es  $F$  y la elongación del muelle es  $\Delta l$ , por otro lado la fuerza del paralelepípedo es  $\sigma_x dy dz$  y su alargamiento  $\Delta x$ ; si se tiene en cuenta la definición de deformación:  $\epsilon_x = \frac{\Delta x}{dx}$ , se puede poner  $\Delta x = \epsilon_x dx$ . El trabajo que realiza la fuerza que actúa en el extremo del muelle es:

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l \quad [4.29]$$

El trabajo se obtiene de integrar la fuerza por el desplazamiento, por este motivo en la derecha de la expresión [4.29] aparece un  $\frac{1}{2}$ , al ser el área del triángulo  $OAB$  de la figura 4.19. Hay que tener en cuenta que la relación entre la fuerza de un muelle y la elongación del mismo es lineal, figura 4.19.

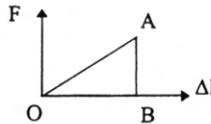


Figura 4.19. Relación fuerza-elongación en un muelle.

Si se aplica analogía entre los dos problemas:

$$F \approx \sigma_x dy dz; \quad \Delta l \approx \Delta x = \epsilon_x dx$$

$$W = \frac{1}{2} F \Delta l \approx \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad [4.30]$$

La expresión [4.30] da el trabajo realizado sobre un paralelepípedo elemental, si se quiere determinar el trabajo por unidad de volumen hay que dividir entre el volumen diferencial:

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \quad [4.31]$$

$$U = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x \quad [4.32]$$

Una vez calculado el trabajo hay que determinar en qué se convierte; así según se muestra en la expresión [4.33] el trabajo se invierte en producir calor,  $Q$ , energía cinética,  $E_C$ , y energía potencial,  $E_p$ .

$$W = Q + E_C + E_p \quad [4.33]$$

Si el proceso de deformación es adiabático no hay generación de calor, pero si es isotermo la generación de calor es tan pequeña que puede considerarse despreciable; luego, en definitiva se puede considerar el calor nulo. Por otra parte se considera que la deformación se produce en régimen cuasiestático por lo que no se genera energía cinética. En definitiva, todo el trabajo se emplea en producir energía potencial, con lo que la expresión [4.33] queda reducida a:

$$W = E_p \quad [4.34]$$

El resultado [4.34] es lógico si se recuerda la naturaleza de la energía potencial: la energía potencial no depende del camino recorrido y concuerda con las hipótesis de la Elasticidad: elasticidad, linealidad y pequeñas deformaciones que permiten que el trabajo realizado no dependa del orden con el que se apliquen las fuerzas. Las mismas consideraciones se aplican cuando sobre el elemento diferencial actúan las seis componentes de la tensión:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zx}$ :

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad [4.35]$$

La expresión [4.35], conocida como *potencial interno* da la energía potencial por unidad de volumen que se genera en el proceso de deformación, si se quiere hallar la energía total hay que integrar a lo largo del volumen:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad [4.36]$$

Al igual que la deformación se puede descomponer en un cambio de volumen, representado por el tensor esférico, y en un cambio de forma, representado por tensor desviador, el potencial interno también se puede descomponer en un potencial producido por el cambio de volumen, generado por el tensor esférico, y otro el cambio de forma generado por el tensor desviador.

**Potencial interno del cambio de volumen:  $U_0$** 

Considerando el tensor de tensiones esférico definido en [2.23] y el tensor de deformaciones esférico definido en [3.13] y aplicando la fórmula [4.35] para la obtención del potencial:

$$U_0 = \frac{1}{2} 3 \frac{eI_1}{9} = \frac{eI_1}{6}$$

Teniendo en cuenta la relación entre el primer invariante del tensor de tensiones y el primer invariante del tensor de deformaciones, expresión [4.13], el valor del potencial interno debido al cambio de volumen es:

$$U_0 = \frac{I_1^2(1-2\nu)}{6E} \quad [4.37]$$

**Potencial interno del cambio de forma:  $U_d$** 

Se puede obtener directamente a partir de los tensores desviador de tensiones y de deformaciones, definidos en las expresiones [2.24] y [3.15], respectivamente; o bien se puede obtener como la diferencia entre las expresiones [4.35] y [4.37] y teniendo en cuenta la relación tensión-deformación [4.12], se obtiene:

$$U_d = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad [4.38]$$

**4.9. PRINCIPIO DE SAINT-VENANT**

Este principio lleva a consecuencias cualitativas importantes no sólo para la Elasticidad sino también para la continuación de la misma: la Resistencia de Materiales. Este principio se puede enunciar así:

*A una determinada distancia de la zona de aplicación de la carga, que debe ser superior a la magnitud característica de esta zona de aplicación, las tensiones, deformaciones y desplazamientos no dependen de la distribución de cargas sino de la fuerza resultante y del momento resultante, de esta distribución de cargas.*

Este principio es muy importante porque en muchos casos no se conoce la distribución de cargas exacta, pero sí su resultante: se conoce el peso de un automóvil más fácilmente que la distribución de fuerzas sobre los neumáticos. Además, en múltiples ocasiones resulta más fácil trabajar con un sistema de cargas estáticamente equivalente en lugar de trabajar con el sistema de cargas real. Esto se pondrá de manifiesto durante el desarrollo de la Resistencia de Materiales.



## Capítulo 5

# CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA

### 5.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 de este libro se mencionó la importancia que el cálculo de las tensiones tiene para poder predecir la rotura de la pieza, en este capítulo no sólo se intenta predecir la rotura sino también la plastificación, porque es habitual trabajar en régimen elástico. En el caso de que el sólido elástico se trate de una probeta a tracción la predicción de la plastificación es sencilla: cuando la única tensión que aparece, la tensión monoaxial, alcanza el límite elástico, la probeta plastifica. Pero la cuestión se complica cuando el estado de tensiones no es monoaxial, sino un estado triaxial cualquiera. En este caso el nivel tensional viene definido por seis cantidades, las seis componentes del tensor de tensiones. Recuerde que el tensor de tensiones viene definido por una matriz cuadrada  $3 \times 3$ , pero simétrica. Para aclarar un poco la idea imagine que se quiere determinar el “valor” de un vector en el espacio. Un vector en el espacio viene determinado por tres cantidades que pueden ser sus tres constantes; sin embargo puede ser “medido” mediante una sola cantidad, esa única cantidad es la norma que puede ser la norma eucladiana, el módulo del vector, o la norma subinfinito, el valor máximo de sus componentes. Eso es lo que se pretende en este capítulo encontrar la norma de un tensor y obligar a que ésta sea menor que el límite elástico para evitar que se produzca la plastificación en el punto del sólido elástico.

Por otra parte si se observa la gráfica representativa del ensayo de tracción, figura 4.4, se ve que una vez superado el límite elástico, cuando ya el material ha plastificado, si se sigue tensionando llega un momento en el que la probeta alcanza el límite de rotura y rompe. Ahora bien, puede ocurrir el sólido alcance el estado de rotura sin que haya plastificado previamente por lo que puede resultar interesante, además de predecir la plastificación, hacer lo mismo con la rotura. Se alcanzará la rotura cuando esa norma del tensor alcance el límite de rotura. En este tema se van a estudiar estas dos formas de fallo: la plastificación y la rotura.

## 5.2. REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE TENSIONES PRINCIPALES

Considérese un tensor representado en ejes principales, en este caso el tensor es diagonal y viene determinado por tres cantidades: las tensiones principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  y  $\sigma_{III}$ . Se puede construir un vector cuyas componentes fueran las tensiones principales y que, de alguna manera, representaría al tensor de tensiones. Este vector no es tal, en el sentido de que no es un elemento de un espacio vectorial, no se puede hacer una transformación de sistemas de coordenadas, pues si se efectúa un cambio de sistema de ejes este vector dejaría de serlo porque el tensor pasaría a tener seis componentes y ya no podría ser representada mediante un vector. Por todo ello a este “vector” se le va a considerar como un “pseudovector” que se va a representar en el espacio de las tensiones principales.

El pseudovector tensión se puede descomponer en un pseudovector esférico y un pseudovector desviador, de forma análoga a como se hizo con el tensor original representado en ejes principales.

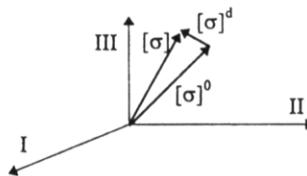
$$[\sigma] = [\sigma]^0 + [\sigma]^d$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 / 3 \\ I_1 / 3 \\ I_1 / 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_I - I_1 / 3 \\ \sigma_{II} - I_1 / 3 \\ \sigma_{III} - I_1 / 3 \end{pmatrix}$$

De las dos componentes anteriores la componente esférica se encuentra en la línea de ecuación  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , al ser iguales sus tres componentes y la parte desviadora se halla situada en un plano perpendicular a la línea anterior, para probar esta ortogonalidad no hay más que realizar el producto escalar del vector unitario en la dirección de la recta, por ejemplo el vector  $\bar{n} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$  y el pseudovector desviador:

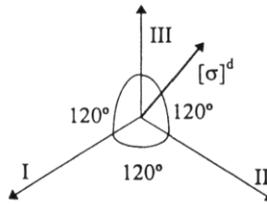
$$[\sigma]^d \cdot \bar{n} = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) \frac{1}{\sqrt{3}} - 3 \frac{I_1}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

La representación del pseudovector tensión, descompuesto en sus componentes esférica y desviadora, se muestra en la figura 5.1:



**Figura 5.1.** Representación del tensor de tensiones en el espacio de tensiones principales.

Hay veces que interesa conocer sólo la componente desviadora del tensor de tensiones, para ello se puede hacer una representación plana del pseudovector de tensiones según un plano perpendicular a la recta  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , a esta representación plana se le conoce como representación de Haig-Westergaard, figura 5.2.



**Figura 5.2.** Representación de Haig-Westergaard

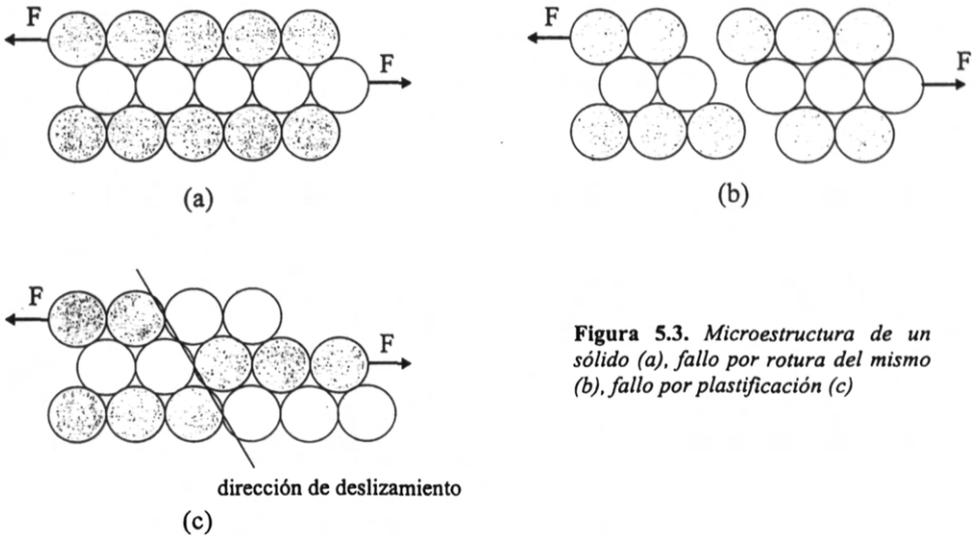
### 5.3. SUPERFICIES DE PLASTIFICACIÓN Y DE ROTURA

En el apartado de introducción se declaró como el objetivo de este tema la obtención de una medida del tensor de tensiones, medida ésta que debe ser una función de las seis componentes del tensor de tensiones, y que acotaremos con valores como el límite elástico o el de rotura según el criterio de fallo que pretendamos establecer.

Para tener una idea de cómo debe ser esta “medida” se deben tener presentes dos factores:

- La microestructura
- La experiencia

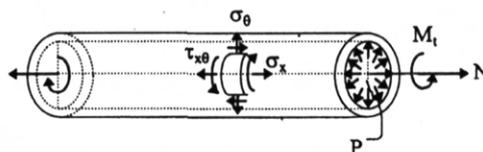
La microestructura no influye sólo en la forma de fallo del material sino en todos los aspectos del comportamiento del mismo. El objetivo de esta disciplina no es describir la microestructura de un sólido, para ello se puede acudir a cualquier texto de Ciencia de los Materiales, o en otro aspecto de Química, pero sí se va a hacer una ruda simplificación de la misma. El sólido se puede considerar formado por partículas, bien sea átomos, moléculas o granos, tal y como se muestra en la figura 5.3.a, en la que se han representado las partículas circulares, por simplicidad. Si este sólido se somete a una fuerza y ésta es suficientemente grande puede romper los enlaces de las partículas, estos enlaces pueden destruirse definitivamente en lo que sería la rotura de la pieza, o bien generarse unos enlaces nuevos al deslizar unas partículas sobre otras, este proceso constituiría la plastificación del material. Estos procesos de fallo vienen representados en las figuras 5.3.b. y 5.3.c. respectivamente.



**Figura 5.3.** Microestructura de un sólido (a), fallo por rotura del mismo (b), fallo por plastificación (c)

En cuanto a los datos experimentales hay que señalar la dificultad que entraña reproducir cualquier posible estado tensional, para facilitar los cálculos se va a considerar que el estado tensional viene representado en ejes principales, con lo que el número de variables que entran en juego pasa de ser seis a tres y de lo que se trataría es de conseguir un método experimental que permita reproducir cualquier combinación de tensiones principales posibles, de forma que, aumentando cada una de las tensiones gradualmente se consiga el fallo, bien sea plastificación o bien rotura.

En la mayoría de los experimentos se utilizan tubos huecos de pared delgada sometidos a esfuerzo axial,  $N$ , o sea una fuerza en la dirección del eje del cilindro, momento torsor,  $M_t$ , o lo que es lo mismo en la dirección del eje, y presión interna,  $P$ . Estas sollicitaciones producen en el sólido una tensión normal en la dirección del eje,  $\sigma_x$ , una tensión tangencial circunferencial,  $\tau_{x\theta}$ , y una tensión normal circunferencial  $\sigma_\theta$ , respectivamente, como se muestra en la figura 5.4. Las tres tensiones son fácilmente obtenibles mediante la teoría de la Elasticidad.



**Figura 5.4.** Ensayo para predecir el fallo bajo cualquier combinación de tensiones.

Cambiando los valores de  $N$ ,  $M_t$  y  $P$  se puede obtener cualquier distribución de tensiones principales. En este tipo de ensayo Lode estudió la importancia relativa de la tensión principal media  $\sigma_{II}$  en la plastificación, para ello definió el parámetro  $\mu$  como:

$$\mu = 2 \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{\sigma_I - \sigma_{III}} - 1 \quad [5.1]$$

Este parámetro varía entre  $\mu = -1$ , para la tracción simple y  $\mu = 1$  para la compresión simple. El caso de  $\mu = 0$  corresponde a cortadura pura:  $\sigma_I = \tau$ ;  $\sigma_{II} = 0$ ;  $\sigma_{III} = -\tau$ . Lode representó cuándo se produce la plastificación en función de  $\mu$ , figura 5.5. El caso de  $\mu = 0$  es particularmente interesante para la plastificación pues, según se observa en la figura 5.3.c. la plastificación se produce debido a un desplazamiento rasante que, parece lógico, sea producido por tensiones tangenciales.

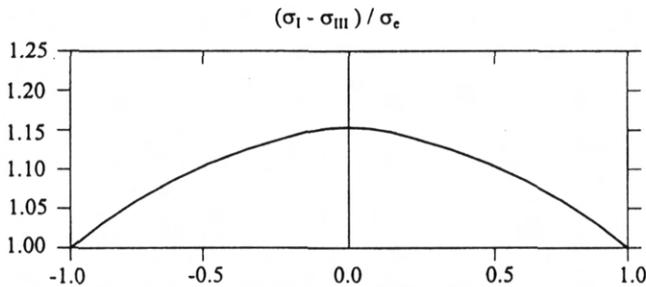


Figura 5.5. Resultado de los ensayos de Lode.

Para el caso de cortadura pura Lode predice que la plastificación tendrá lugar cuando:

$$\tau = 0.56\sigma_e \quad [5.2]$$

Ésta es la base experimental con la que se van a contrastar los resultados teóricos. Estos resultados teóricos pretenden encontrar una función de las tensiones principales que poder comparar con el límite elástico o con el de rotura según sea la forma de fallo que se pretenda predecir, si se considera que se va a predecir la plastificación, se pretende encontrar una función tal que:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_e \quad [5.3]$$

Al igual que se han puesto las tensiones principales se podrían haber puesto los invariantes del tensor de tensiones:

$$g(I_1, I_2, I_3) = \sigma_e \quad [5.4]$$

La expresión anterior puede ser reducida aún más si se consideran los ensayos de Bridman que sometió a los sólidos a una compresión tridimensional, y vio que, en esta situación, toda la deformación que tiene lugar es elástica. Esto demuestra que la plastificación no depende de la primera invariante del tensor de tensiones  $I_1$  y, como esta invariante es la característica del tensor esférico, se puede inducir que ésta sólo depende de la parte desviadora del tensor de tensiones.

$$h(I_2^d, I_3^d) = \sigma_e \quad [5.5]$$

Esta conclusión comulga con lo que se ha visto anteriormente acerca de la microestructura a partir de la cual se dedujo que la tensión tangencial es la que produce la plastificación, pues el tensor esférico no tiene tensión tangencial.

Sabiendo que el tensor esférico no influye en la plastificación se puede deducir que la función indicada en la expresión [5.3] viene representada en el espacio de tensiones principales por una superficie prismática cuyo eje es la recta  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$  y la base se puede representar sola mediante la representación de Haig-Westergaard. A esta superficie se le llama superficie de plastificación y viene representada en la figura 5.6. Si el sólido se somete a un proceso de endurecimiento en frío, esto se traduce en un aumento del límite elástico, o lo que es lo mismo un aumento de la superficie de plastificación.

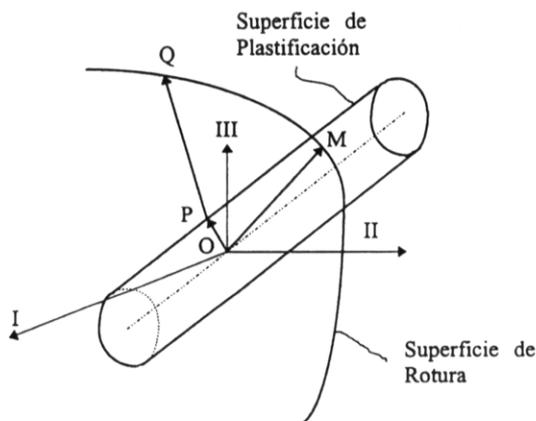


Figura 5.6. Superficies de Plastificación y Rotura.

Al igual que se puede deducir la plastificación representando la superficie de plastificación, se podría deducir la rotura mediante la representación de una superficie de rotura. Ésta, a diferencia de la superficie de plastificación, sí depende del tensor esférico, pero según los ensayos de Bridman un sólido sometido a presión hidrostática es capaz de soportar grandes presiones sin romperse, por otro lado la evidencia experimental pone de manifiesto que un sólido sometido a tracción, sea cual sea su combinación de tensiones, al aumentar su nivel tensional llega a la rotura, por ello la superficie de rotura tiene la forma de un paraboloides

que se abre en la zona de presión hidrostática y se cierra en la tritracción, esta superficie se representa junto con la de plastificación en la figura 5.6.

La expresión matemática que describe la superficie de rotura es similar a la que describe la superficie de plastificación:

$$\alpha(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = \sigma_R \quad [5.6]$$

#### 5.4. COMPORTAMIENTO DÚCTIL Y FRÁGIL

En este capítulo se pretende determinar cuando se produce el fallo de un punto de un determinado sólido sometido a una serie de sollicitaciones que vienen definidas a partir de las tensiones principales. Este fallo puede tratarse de una plastificación o de una rotura. Al aumentar el nivel tensional de un punto de un sólido hasta que se produzca el fallo, se puede evolucionar de dos formas: primero alcanzándose la superficie de plastificación y posteriormente la de rotura, esto supondría que el material plastifica antes de romper, o bien alcanzándose la superficie de rotura directamente sin producirse la plastificación previa. Estos comportamientos se reflejan en la figura 5.6 como OPQ y OM, respectivamente, en los que se supone que se parte de O. Es frecuente que la deformación en periodo plástico sea relativamente grande comparada con la deformación en periodo elástico, luego un punto que ha plastificado antes de romper está mucho más deformado que aquél que no lo ha hecho: si el punto plastifica antes de romper se dice que presenta un comportamiento dúctil y si rompe sin plastificar el comportamiento es frágil. El que un punto se comporte frágil o dúctilmente depende de:

- **La distribución de tensiones.** Cuanto mayor sea la influencia del tensor esférico en el tensor de tensiones mayor será la probabilidad de que el comportamiento sea frágil.
- **El tipo de material.** Aunque todo punto de cualquier material se pueda comportar de forma dúctil y de forma frágil según la distribución de tensiones a que esté sometido, existen materiales más tendentes al primer comportamiento, frente a otros más tendentes al segundo. Esto se refleja en las superficies de plastificación y rotura, que serán características del tipo de material. Los materiales con más tendencia a la rotura dúctil como el acero llegarán más fácilmente a la superficie de plastificación que a la de rotura cuando se aumenta proporcionalmente su nivel tensional, figura 5.7.a, frente a los materiales con más tendencia al comportamiento frágil como el hormigón, figura 5.7.b, que llegan antes a la superficie de rotura.

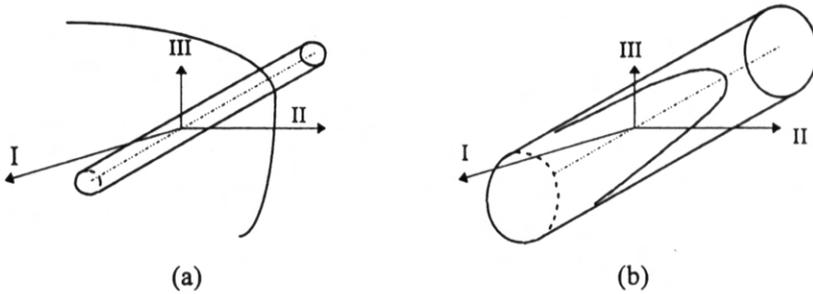


Figura 5.7. Material "dúctil", (a), y Material "frágil", (b).

## 5.5. CRITERIOS DE FALLO

Un criterio de fallo es aquél que permite predecir el fallo de una pieza intentando modelar las superficies de plastificación y rotura, o sea se pretende encontrar las expresiones [5.3] o [5.6]. Las expresiones  $f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  y  $\alpha(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  reciben el nombre de tensión equivalente.

Se considerarán seis criterios, los cinco primeros se deducen al suponer qué aspecto del problema elástico va a provocar el fallo y compararlo con el mismo del ensayo tracción una vez que en éste se ha producido el fallo. En estos criterios se obtendrá la tensión equivalente al despejar la tensión del ensayo monoaxial  $\sigma$  tras igualar las expresiones del estado triaxial con la expresión correspondiente del ensayo monoaxial.

El último criterio parte de un razonamiento distinto y pretende realizar una envolvente experimental a todas las situaciones de fallo que puedan aparecer a un material cualquiera.

Cada uno de estos criterios encuentra una expresión de la tensión equivalente que, en algunos casos, se aproximará más a la superficie de plastificación y en otras a la superficie de rotura. Aunque para la obtención de la superficie de rotura, expresión [5.6], se puede hacer una distinción: si se observa la forma de la superficie de rotura, figura 5.6, se ve que, para niveles tensionales similares, es más fácil que se produzca la rotura cuando el ensayo monoaxial es de tracción que cuando es de compresión, por ello hay criterios que permiten esta diferencia, separando la rotura por tracción de la rotura por compresión:

$$\begin{aligned}\alpha(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) &= \sigma_{RT} \\ \alpha(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) &= \sigma_{RC}\end{aligned}\quad [5.7]$$

A continuación se va a describir brevemente cada criterio y se discutirá brevemente la bondad del mismo.

**Criterio de Rankine o de la tensión normal máxima**

Según este criterio el mecanismo que produce el fallo es la tensión normal máxima y, por tanto, éste se producirá cuando ésta coincida con la única tensión de fallo que existe en el ensayo de tracción. La tensión normal máxima es la tensión principal  $\sigma_I$  o bien la más pequeña en valor absoluto,  $|\sigma_{III}|$ , para entender esto no hay más que ver la representación del tensor de tensiones según los círculos de Mohr, figura 2.12. Comparar la tensión normal máxima con la correspondiente del ensayo de tracción supone igualar:

$$\text{Máx}(\sigma_I, \sigma_{II}, |\sigma_{III}|) = \sigma$$

Esto supone que la tensión equivalente es:

$$\sigma_{eq} = \text{Máx}(\sigma_I, |\sigma_{III}|) \quad [5.8]$$

De la expresión anterior se ha eliminado  $\sigma_{II}$  ante la imposibilidad de que ésta sea la tensión normal máxima.

A continuación se va a discutir la bondad de este criterio frente a la predicción de la plastificación o de la rotura. Para estudiar esto se va a analizar la forma de la superficie de plastificación que este criterio ofrece y se va a comparar también con los resultados experimentales.

- En principio se va a estudiar la superficie. Para que éste criterio sea apropiado para estudiar la plastificación se debe ver si la superficie que, mediante él, se determina se aproxima a la superficie de plastificación de la figura 5.6, o sea si depende de la parte desviadora del tensor de tensiones pero no de la parte esférica. Si se representa la superficie de plastificación sería un cubo de lado  $2\sigma_e$ , figura 5.8. Observe que si se representa la superficie en el espacio de tensiones principales no se tiene en cuenta la desigualdad  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$  sino que se consideran todos los ejes iguales; además se ha limitado de igual manera la tracción y la compresión al límite elástico. Esta superficie no es un cilindro de eje la diagonal principal, más bien se parece, por la parte de tracción, a la superficie de rotura, aunque si se representara ésta el cubo sería más pequeño en la parte de tracción al tenerse que comparar las tensiones principales con la tensión de rotura y se tienen dos tensiones de rotura: una para la tracción,  $\sigma_{RT}$ , y otra para la compresión,  $\sigma_{RC}$ , cumpliéndose siempre que  $\sigma_{RC} \geq \sigma_{RT}$ .
- En cuanto a la verificación experimental se va a comparar la tensión tangencial de plastificación en cortadura pura con la tensión tangencial de Lode. En cortadura pura, con una tensión tangencial de  $\tau$ , las tensiones principales son:  $\sigma_I = \tau$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\tau$ , luego la tensión equivalente según Rankine sería:

$$\sigma_{eq} = \tau$$

La plastificación se produce cuando la tensión equivalente alcanza el límite elástico, luego la tensión tangencial de plastificación que predice este criterio es:

$$\tau = \sigma_e$$

Esta tensión es muy superior a la que obtuvo Lode,  $\tau = 0.56\sigma_e$ , esto implica que si se tuviera una tensión tangencial superior a la de Lode pero inferior al límite elástico según Rankine, este criterio predice que todavía no ha habido plastificación cuando en la realidad sí que ha habido. Esto es peligroso.

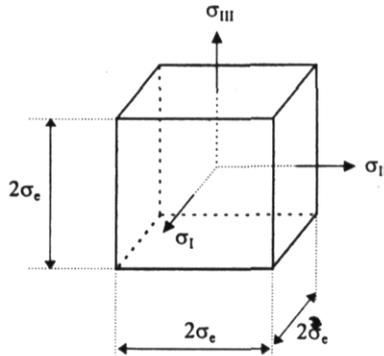


Figura 5.8. Superficie de plastificación de Rankine en el espacio de tensiones principales.

Resumiendo: El criterio de Rankine no es apropiado para predecir la plastificación, pero sí para la predicción de la rotura.

### Criterio de Saint-Venant o de la deformación normal máxima

Según este criterio el mecanismo que produce el fallo es la deformación normal máxima y, por tanto, éste se producirá cuando ésta coincida con la deformación normal máxima que, en el momento del fallo se da en el ensayo de tracción. Esta deformación máxima es la que se da en la dirección del eje de la barra pues las deformaciones transversales toman el mismo valor que la axial multiplicado por el coeficiente de Poisson que como ya se ha demostrado es un número menor que 0.5. Para obtener la tensión equivalente habrá que igualar la deformación máxima del problema tridimensional, o sea la mayor deformación principal a la máxima del ensayo de tracción.

$$\text{Máx} \begin{cases} \frac{1}{E} [\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})] \\ \frac{1}{E} [\sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III})] \\ \frac{1}{E} [\sigma_{III} - \nu(\sigma_{II} + \sigma_I)] \end{cases} = \frac{\sigma}{E}$$

La tensión equivalente de Saint-Venant queda:

$$\sigma_{eq} = \begin{cases} \sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III}) \\ \sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III}) \\ \sigma_{III} - \nu(\sigma_{II} + \sigma_I) \end{cases} \quad [5.9]$$

Para ver la bondad de aplicación del criterio:

- La superficie de plastificación representa un romboedro por lo que no se asemeja a la superficie de plastificación de la figura 5.6, más bien se asemeja a la superficie de rotura.
- En cuanto a la tensión equivalente en cortadura pura,  $\sigma_I = \tau$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\tau$ , se tiene:

$$\sigma_{eq} = (1+\nu)\tau$$

La plastificación se producirá cuando la tensión equivalente anterior se iguale al límite elástico. En el caso de que el coeficiente de Poisson sea el del acero  $\nu = 0.3$ , la tensión tangencial de plastificación:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{1.3} = 0.77\sigma_e$$

Esta tensión es superior a la que obtuvo Lode,  $\tau = 0.56\sigma_e$ , aunque no tanto como la que se obtuvo mediante el criterio de Rankine, luego este criterio no resulta apropiado para estudiar la plastificación, pero es mejor que el de Rankine. Sin embargo sí resulta apropiado para predecir la rotura.

### Criterio de Tresca o de la tensión tangencial máxima

Para este criterio el mecanismo que produce el fallo es la tensión tangencial máxima y éste se producirá cuando ésta coincida con la tensión tangencial máxima que, en el momento del fallo se da en el ensayo de tracción. Para obtener la tensión equivalente habrá que igualar la tensión tangencial máxima del problema tridimensional a la máxima del ensayo de tracción.

$$\text{Máx} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \\ \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \\ \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \end{array} \right. = \frac{\sigma}{2}$$

La tensión equivalente de Tresca queda:

$$\sigma_{eq} = \text{Máx} \begin{cases} \sigma_I - \sigma_{II} \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} \\ \sigma_I - \sigma_{III} \end{cases} \quad [5.10]$$

De los tres posible valores de la tensión equivalente es evidente que el mayor es  $(\sigma_I - \sigma_{III})$ ; pero esto no se tiene en cuenta a la hora de representar la superficie de plastificación. A continuación se va a ver precisamente si este criterio es apropiado para predecir la plastificación.

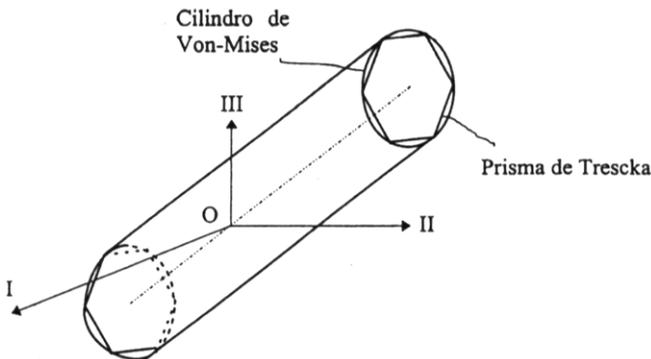
- La superficie de plastificación representa un prisma hexagonal de eje la recta de ecuación  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , tal y como se muestra en la figura 5.9, por lo que se asemeja a la superficie de plastificación de la figura 5.6.
- Por lo que se refiere a la tensión equivalente en cortadura pura,  $\sigma_I = \tau$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\tau$ , se tiene:

$$\sigma_{eq} = 2\tau$$

La plastificación se producirá cuando la tensión equivalente anterior se iguale al límite elástico:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{2} = 0.5\sigma_e$$

Esta tensión tangencial es menor que la que da Lode, luego este criterio parece adecuado para la predecir de la plastificación, al dar un valor más pequeño que el experimental se encuentra del lado de la seguridad. El concepto de seguridad se describirá en el apartado 5.6.



**Figura 5.9.** Superficies de plastificación de Tresca y de Von-Mises.

**Criterio de Beltrami o de la energía de deformación máxima**

Para este criterio, el fallo se produce cuando el punto del sólido alcanza un determinado nivel energético; por ello la tensión equivalente se obtendrá de igualar el potencial elástico del punto al potencial elástico del ensayo de tracción cuando en éste se ha producido el fallo.

$$\frac{1}{2E}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})) = \frac{\sigma^2}{2E}$$

La tensión equivalente de Beltrami es, por lo tanto:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})} \quad [5.11]$$

En cuanto a la aplicabilidad de este criterio:

- La superficie de plastificación representa un elipsoide de eje la recta de ecuación  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , por lo que se asemeja, por la parte de la tracción a la superficie de rotura de la figura 5.6.
- Por lo que se refiere a la tensión equivalente en cortadura pura,  $\sigma_I = \tau$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\tau$ , se tiene:

$$\sigma_{eq} = \tau(1 + \nu)$$

En el caso de que el coeficiente de Poisson sea el del acero  $\nu = 0.3$ , la tensión tangencial de plastificación será:

$$\tau = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2.5}} = 0.63\sigma_e$$

Esta tensión, aunque similar, es superior a la que obtuvo Lode,  $\tau = 0.56\sigma_e$ , pero es inferior a la que obtuvo Rankine y Saint-Venant.

Este criterio, aunque no sea idóneo para predecir la plastificación, cuando surgió introdujo de novedad, respecto a los anteriores, que su tensión equivalente viene definida por una sola expresión. Esto es así porque es un criterio que se basa en la energía, que es un escalar. Las tensiones equivalentes que se obtienen mediante este criterio son bastante grandes, en general, por ello suele ser un criterio que predice la rotura con un cierto margen.

### Criterio de Von-Mises, Hencky o Nadai o de la energía de forma

Aunque se trata, en realidad de tres criterios se engloban bajo el mismo epígrafe porque llegan a la misma tensión equivalente. A continuación se va a ver cómo cada uno de ellos llega a la tensión equivalente.

- Hencky considera que el mecanismo que produce el fallo es la energía de forma, con lo que para obtener la tensión equivalente debe igualar ésta a la del ensayo de tracción.

$$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2] = \frac{(1+\nu)\sigma^2}{3E}$$

La tensión equivalente es, por lo tanto:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]} \quad [5.12]$$

- Nadai considera que el fallo lo provoca la tensión tangencial octaédrica, expresión [2.22], para obtener la tensión equivalente habrá que igualar ésta a la del ensayo de tracción:

$$\frac{1}{9} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] = \frac{\sqrt{2}}{9} \sigma^2$$

Con lo que se obtiene la misma tensión equivalente que según Hencky.

- Von-Mises no intentó buscar ningún mecanismo de fallo sino, simplemente, tomó el prisma de Tresca e intentó encontrar el cilindro circunscrito. Esto permite simplificar los cálculos en el sentido de que la expresión que define la superficie de plastificación es única. La ecuación de este cilindro es la misma si se iguala la tensión equivalente definida mediante [5.12] al límite elástico.

Para estudiar la aplicabilidad de este criterio:

- La superficie de plastificación representa un cilindro de eje la recta de ecuación  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , y que circunscribe el prisma hexagonal de Tresca, tal y como se muestra en la figura 5.9, por lo que, al igual que el criterio de Tresca se asemeja a la superficie de plastificación de la figura 5.6. Al estar el cilindro de Von-Mises circunscrito al prisma de Tresca si se aumenta un estado de carga cualquiera se alcanza antes el prisma: el criterio de Tresca es más conservador al indicar antes la plastificación.
- Por lo que se refiere a la tensión equivalente en cortadura pura,  $\sigma_I = \tau$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\tau$ , se tiene:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} \tau$$

Y, por tanto, la tensión tangencial de plastificación será:

$$\tau = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_c$$

Esta tensión es bastante similar aunque algo superior a la que obtuvo Lode,  $\tau = 0.56\sigma_c$ . Este criterio es el que da un resultado más parecido al de Lode.

Tanto este criterio como el anterior se pueden denominar criterios energéticos al derivar de la energía: el de Beltrami de la energía de deformación y éste de la energía de forma, no distingue la tensión positiva, de tracción, de la negativa, de compresión, al llevar los términos de la tensión al cuadrado.

Resumiendo se puede decir que de los cinco criterios de fallo que se han descrito, los de Rankine y Saint-Venant, son apropiados para predecir la rotura, luego son adecuados para un comportamiento frágil, y los de Tresca y Von-Mises para predecir la plastificación, adecuados por tanto para estudiar el comportamiento dúctil. El criterio de Beltrami se encuentra a caballo entre ambos grupos. para abundar en esto, si se observa la figura 5.9 se llega a que las superficies de plastificación dadas por los criterios de Tresca y Von-Mises son un prisma y un cilindro, respectivamente, de eje la recta  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ , esto implica que si  $\sigma_I \approx \sigma_{II} \approx \sigma_{III}$ , según estos dos criterios, sería muy difícil alcanzar la superficie de fallo: hay que tener mucho cuidado cuidado porque se produce una rotura frágil.

En la tabla 5.1 se muestra una tabla resumen de todos los criterios, en la columna segunda aparece la magnitud que considera el criterio que produce el fallo en función de las tensiones principales y en la tercera columna aparece el valor de esta magnitud en el ensayo monoaxial, en función de la tensión en este ensayo.

	Estado Tridimensional: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Estado Mono-dimensional, $\sigma$
Rankine: Tensión Principal Máxima	$\text{Máx}(\sigma_I, \sigma_{II},  \sigma_{III} )$	$\sigma$
Saint-Venant: Deformación Princi- pal Máxima	$\text{Máx} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E} [\sigma_I - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{III})] \\ \frac{1}{E} [\sigma_{II} - \nu(\sigma_I + \sigma_{III})] \\ \frac{1}{E}  \sigma_{III} - \nu(\sigma_{II} + \sigma_{II})  \end{array} \right\}$	$\frac{\sigma}{E}$
Trescka: Tensión Tangencial Máxima	$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$	$\frac{\sigma}{2}$
Beltrami: Energía de Deforma- ción	$\frac{1}{2E} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})$	$\frac{\sigma^2}{2E}$
Von-Mises: Energía de Forma.	$\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2]$	$\frac{1+\nu}{3E} \sigma^2$

Tabla 5.1. Criterios de Fallo.

## 5.6. TEORÍA DE LOS ESTADOS LÍMITES DE MÖHR

Esta teoría tiene como finalidad encontrar una tensión equivalente, en esto es igual a los criterios que se definieron en el apartado anterior. Se define, sin embargo, en virtud a una base experimental: se ensayan todas las posibles combinaciones de carga hasta que se llega al fallo y se dibuja una envolvente de todos los estados de fallo, es evidente que si un estado de cargas cualquiera corta a esta envolvente es que se ha producido el fallo, que puede ser plastificación o rotura. Möhr, en vez de trabajar con el espacio de las tensiones principales, trabaja en el plano, con coordenadas intrínsecas, y con círculos de Möhr.

Para hallar la envolvente se trazarán las circunferencias de Möhr correspondientes a un estado de carga cualquiera y se irán aumentando las cargas hasta que se origine el fallo. La curva envolvente será aquella que "envuelve" las circunferencias de Möhr que representan el estado tensional en el instante de producirse el fallo, figura 5.10. Sólo se trazará la circunferencia  $C_2$ , correspondiente a los planos paralelos al eje principal  $\bar{n}_{II}$ , porque se trata de hallar la curva envolvente de fallo y la circunferencia  $C_2$ , en componentes intrínsecas, es el límite que envuelve los extremos de todos los vectores tensión posibles.

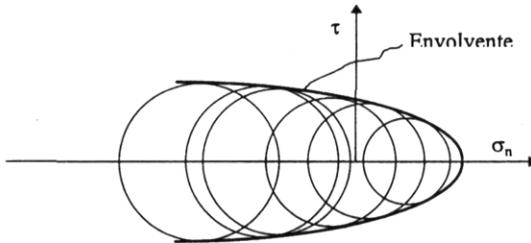


Figura 5.10. Envolvente de fallo de la teoría de Mohr.

Cada material presenta una envolvente. Resulta evidente que si se conoce la envolvente real de cada material, ante un estado tensional cualquiera, se producirá el fallo cuando el círculo de Mohr de ese estado tensional corte a la envolvente. Pero este método presenta una gran dificultad: es difícil reproducir exactamente cualquier estado de cargas, por ello se realiza una simplificación de este método consistente en realizar sólo dos ensayos, que son los más fáciles de reproducir: el ensayo de tracción y el de compresión. Se llega hasta el fallo y se representan los círculos. En el ensayo de tracción las tensiones principales serán:  $\sigma_I = \sigma_t$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = 0$ ; y en el ensayo de compresión serán:  $\sigma_I = 0$ ,  $\sigma_{II} = 0$ ,  $\sigma_{III} = -\sigma_c$ . Donde  $\sigma_t$  y  $\sigma_c$  son las tensiones de fallo del ensayo de tracción y de compresión, respectivamente. En ambos casos los tres círculos degenerarán a uno sólo, y la envolvente de ambos son dos líneas rectas, figura 5.11.

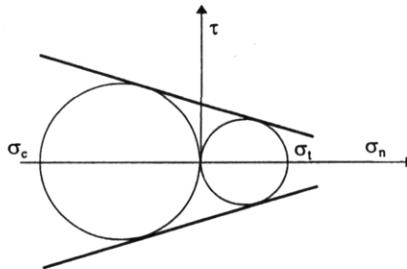


Figura 5.11. Simplificación de la envolvente de fallo.

Con esta simplificación para establecer la tensión equivalente de Mohr, se va a encontrar una combinación de las tensiones principales que se va a comparar con  $\sigma_t$ . Para ello se considerará un estado genérico al que se le incrementarán las tensiones hasta que el círculo que lo representa definido por  $\sigma_I$  y  $\sigma_{III}$  sea tangente, en el punto de tangencia C, a la envolvente de Mohr, figura 5.12. Se aplicará equivalencia de triángulos entre los triángulos ECD y EAB.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{\frac{\sigma_c - \sigma_t}{2} - \frac{\sigma_t}{2}}{\frac{\sigma_c + \sigma_t}{2} - \frac{\sigma_t}{2}} = \frac{\frac{\sigma_I - \sigma_{III} - \sigma_t}{2} - \frac{\sigma_t}{2}}{\frac{\sigma_t - \sigma_I + \sigma_{III}}{2} - \frac{\sigma_t}{2}} \Rightarrow \sigma_t = \sigma_I - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sigma_{III}$$

Llamando  $k = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}$ , queda que la tensión equivalente es:

$$\sigma_{eq} = \sigma_I - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \sigma_{III} = \sigma_I - k \sigma_{III} \quad [5.13]$$

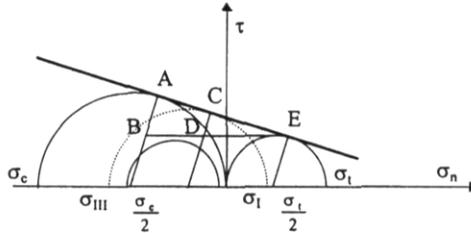


Figura 5.12. Obtención de la tensión equivalente según Mohr.

Queda por ver la eficacia de este método.

- Para predecir la plastificación: En materiales dúctiles se produce antes el fallo por plastificación. El límite elástico es igual para tracción que para compresión, luego  $k \approx 1$  y este método coincide con el de Tresca, cuya conveniencia ya ha sido discutida.
- Para predecir la rotura: En los materiales frágiles el fallo se produce por rotura y la tensión de rotura en tracción no coincide con la tensión de rotura en compresión. Este método resulta bueno, de hecho este método se utiliza, sobre todo, para materiales frágiles.

Por lo que se ha dicho antes puede parecer que este criterio es la panacea de los criterios de fallo, que no hace necesario ninguno de los demás. Esto no es cierto al hacer una simplificación a la envolvente real. Es incapaz de predecir, por ejemplo, la rotura frágil de materiales dúctiles.

## 5.7. TENSIÓN EQUIVALENTE, COEFICIENTE DE SEGURIDAD Y TENSIÓN DE TRABAJO

El objetivo de los criterios de fallo es establecer una tensión equivalente para compararla con el límite elástico en los materiales dúctiles o con la tensión de rotura en los frágiles. Si la tensión equivalente es mayor que la de fallo, se ha producido el fallo, y si es menor, no. Pero se ha visto cuan inexacto resulta el cálculo de la tensión equivalente, por ello se procura que ésta sea una cierta cantidad menor que la tensión de fallo, cuanto menor sea es más improbable que se llegue al fallo, y más seguro está el material. Por esta razón se define el coeficiente de seguridad,  $m$ , como:

$$m = \frac{\sigma_F}{\sigma_{eq}} \quad [5.14]$$

Donde  $\sigma_F$  es la tensión de fallo que coincide con la tensión de fluencia en materiales dúctiles, con la de rotura en materiales frágiles. Precisamente en éstos hay que distinguir entre rotura a tracción y a compresión, así aquellos criterios que distingan entre la tracción y la compresión, o sea Rankine y Saint-Venant, tendrán un coeficiente de seguridad a tracción y otro a compresión.

$$m_t = \frac{\sigma_{Rt}}{\sigma_{eqt}} \quad [5.15]$$

$$m_c = \frac{\sigma_{Rc}}{\sigma_{eqc}} \quad [5.16]$$

Para que no se produzca el fallo el coeficiente de seguridad debe ser mayor que 1.

Para dimensionar una pieza, obtener las dimensiones características, no hay más que comparar la tensión equivalente con la tensión de fluencia minorada por el coeficiente de seguridad, esta tensión minorada es lo que se conoce como tensión de trabajo  $\sigma_t$ :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_F}{m}$$

El coeficiente de seguridad con el que se calcule la tensión de trabajo dependerá de diversos factores como el tipo de material y su función.



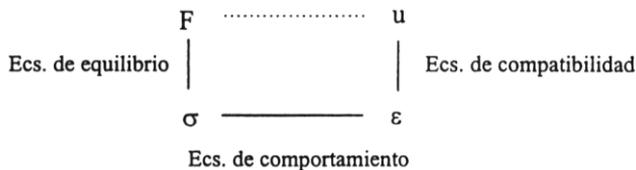
## Capítulo 6

RESISTENCIA DE MATERIALES.  
CONCEPTOS BÁSICOS

## 6.1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Elasticidad ha permitido establecer un modelo matemático del comportamiento de un medio deformable elástico sometido a una serie de sollicitaciones externas. Este modelo ha hecho posible establecer una relación entre las magnitudes físicas reales: fuerzas y desplazamientos, mediante variables introducidas para caracterizar el comportamiento interno de un sólido: tensiones y deformaciones.

Estas cuatro magnitudes: fuerzas ( $F$ ), desplazamientos ( $u$ ), tensiones ( $\sigma$ ) y deformaciones ( $\epsilon$ ) se relacionan a través de una serie de ecuaciones como se muestra de una forma simbólica en la figura 6.1.

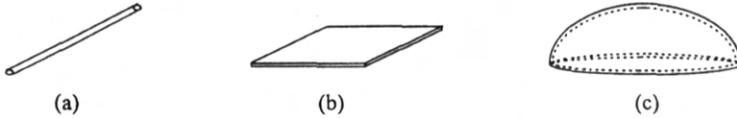


**Figura 6.1.** Esquema del problema elástico

Las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento, generan un problema matemático, una serie de ecuaciones diferenciales, de difícil resolución. Así, la integración de este problema es, en la mayoría de los casos, impracticable y hay que recurrir a métodos experimentales, extensometría y fotoelasticidad, y a métodos numéricos.

Sin embargo, en una gran cantidad de casos prácticos, los sólidos objetos de estudio no presentan una arbitrariedad geométrica. Este es el caso de la *barra prismática*, figura 6.2.a, en la que una magnitud es mucho mayor que las otras dos, la *placa*, figura 6.2.b. en la que una magnitud es mucho menor que las otras dos, que se encuentran en un plano, y la *lámina*

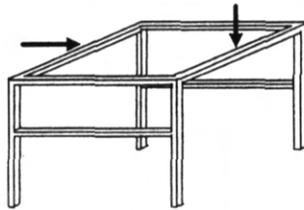
(figura 6.2.c) que tiene, al igual que la placa, una magnitud mucho menor que las otras dos pero, a diferencia de las placas, estas dos magnitudes forman una superficie curva.



**Figura 6.2.** Algunas geometrías particulares tratadas por la Resistencia de Materiales: a) barra, b) placa, c) lámina

Esta disciplina se centrará en el estudio de barras prismáticas. Asimismo se analizará el conjunto de varias piezas prismáticas, que es lo que se denomina una “estructura”, aunque se puede usar esta denominación en un sentido más amplio.

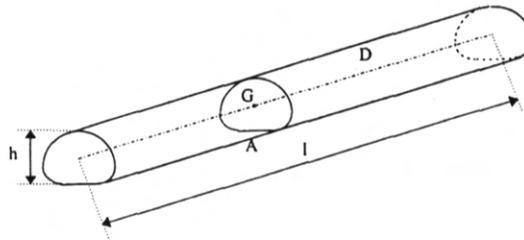
Un sólido genérico puede ser el representado en la figura 6.3.



**Figura 6.3.** Estructura de barras.

## 6.2. BARRA PRISMÁTICA

Se define la barra prismática como el volumen generado por una superficie plana A, que se denomina sección transversal generatriz, o simplemente sección transversal, al moverse recorriendo su centro de gravedad G una curva plana D, denominada directriz, manteniéndose A normal a D y permaneciendo un eje de la sección en el plano de la directriz, figura 6.4.



**Figura 6.4.** Barra prismática.

Esencialmente nos referiremos a barras de directriz recta, como la de la figura 6.4, en las que se admitirá que las dimensiones transversales,  $h$ , son pequeñas comparadas con la longitud de la pieza,  $L$ , es decir  $\frac{h}{L} \ll 1$ . Una cota orientativa podría ser 0.1.

Los resultados que se obtendrán para barras rectas son extensibles a barras curvas de gran radio de curvatura, en las que además de la condición general de  $\frac{h}{L} \ll 1$  se debe verificar que  $\frac{h}{\rho} \ll 1$ , figura 6.5.

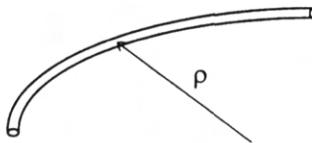


Figura 6.5. Barra Prismática curva.

El estudio de las estructuras de barras apareció antes que la teoría de la Elasticidad; entonces cabría pensar una vez que se conoce la teoría de la Elasticidad que es más genérica ¿por qué no analizar las estructuras de barras a través de la Elasticidad?. La respuesta es que el modelo matemático correspondiente a una estructura de barras, en general, no se puede resolver mediante la teoría de la Elasticidad analíticamente, e incluso un estudio experimental o numérico es bastante ineconómico, por ello resulta conveniente el uso de los modelos de barras como alternativa a la teoría de la Elasticidad, en este tipo de problemas.

Estos modelos se fundamentan en ciertas hipótesis que se pueden establecer sobre las tensiones y los desplazamientos, gracias a las características geométricas particulares. Estas hipótesis permiten obtener las ecuaciones básicas como ecuaciones diferenciales bastante simplificadas y de fácil solución.

Estas ecuaciones nos permitirán la obtención de un campo de tensiones y de desplazamientos. El nivel de las tensiones nos indicará si la estructura resiste. Si se quiere trabajar en el campo de la Elasticidad el nivel tensional no debe sobrepasar el límite de fluencia. Asimismo se deben acotar los desplazamientos para estar dentro de la teoría de pequeñas deformaciones y para asegurar que no se produzcan desplazamientos inadecuados al uso previsto de la estructura, como falta de confort, deterioro de elementos accesorios ...

La teoría que se va a desarrollar será válida en todos los puntos de la estructura menos en:

- Zonas extremas de las barras. En las barras se va a trabajar con esfuerzos, no con tensiones. Los esfuerzos son las componentes de la fuerza y del momento resultante en cada sección. Sin embargo en los extremos es muy importante el valor puntual de la

tensión debido a que en las uniones entre barras se pueden dar altos valores de tensiones por la existencia de concentradores de tensiones.

- Apoyos
- Puntos de aplicación de la carga.

En estas zonas se admitirá la existencia de una plastificación local, que por darse en dominios pequeños no alteran ni el comportamiento ni la resistencia global de la estructura. Esto es aplicable a materiales dúctiles como el acero, en el caso de un material frágil se puede crear una rotura local que puede propagarse produciendo el fallo de la estructura.

El modelo de barras se puede aplicar al cálculo de naves industriales, edificación, elementos de máquinas ...

Durante el desarrollo de esta disciplina se irán haciendo una serie de hipótesis que facilitarán el estudio matemático de las mismas. Estas hipótesis serán, en algunos de los casos rigurosamente ciertas, y en la mayoría de los casos aunque no sean del todo ciertas van a permitir simplificar mucho el problema sin añadir prácticamente error al mismo. Una de las hipótesis que se van a admitir es que la sección transversal no va a cambiar su forma en el proceso de deformación.

### 6.3. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL MODELO DE BARRAS

En el modelo de barras se pretende caracterizar el problema elástico mediante un problema monodimensional en el que todas las variables que aparecen: esfuerzos y desplazamientos, van a depender únicamente de una variable: la coordenada  $x$  que une los centros de gravedad de las secciones transversales.

Sin embargo, la barra o pieza prismática es, realmente, un sólido tridimensional, por ello ha de ser posible hallar las magnitudes tridimensionales en cada punto de la sección a partir de las magnitudes monodimensionales correspondientes y viceversa. Así, se puede completar el esquema usado en Teoría de Elasticidad con las magnitudes monodimensionales obtenidas de las tridimensionales por integración. En definitiva el esquema representado en la figura 6.1 se transforma en el que se representa en la figura 6.6.

En el esquema de la figura 6.6,  $f$ ,  $Q$ ,  $\delta$  y  $e$  representan fuerzas, esfuerzos, desplazamientos y deformaciones monodimensionales, respectivamente, que sólo dependen de la variable  $x$  y que se corresponden con fuerzas, tensiones, desplazamientos y deformaciones tridimensionales, respectivamente.

La relación entre las variables monodimensionales y tridimensionales se establecerá, parte en este capítulo y parte en los posteriores de Resistencia de Materiales.

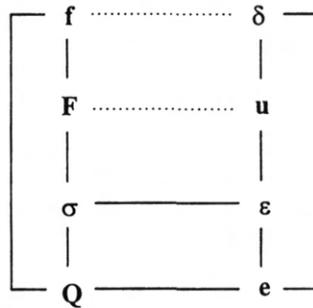


Figura 6.6. Simplificación del problema elástico en Resistencia de Materiales.

**6.4. TENSIONES EN LA SECCIÓN. ESFUERZOS INTERNOS**

En un sólido sometido a fuerzas exteriores, éstas se transmiten, a lo largo del mismo, debido a la actuación de fuerzas interiores entre sus partículas, de forma que si se divide el sólido en dos partes por un plano, cada uno de los semisólidos está en equilibrio elástico.

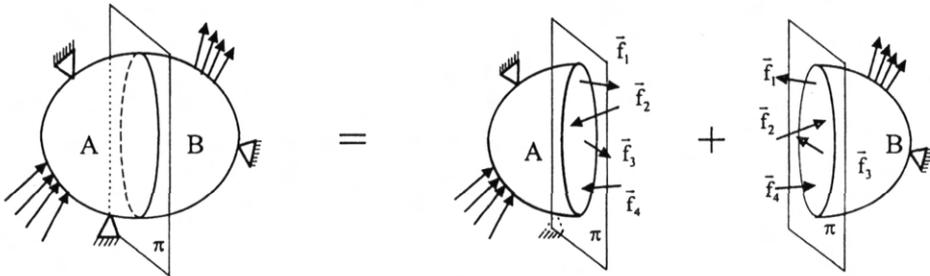
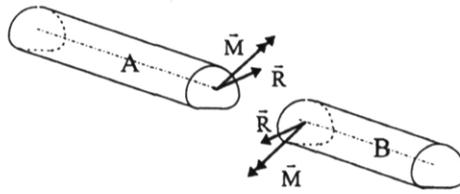


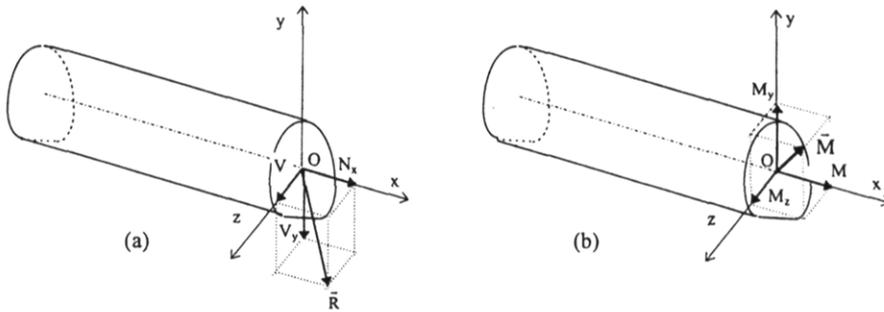
Figura 6.7. División imaginaria del sólido en dos semisólidos: A y B.

Si se observa la figura 6.7 se ha separado imaginariamente un sólido mediante un plano en dos partes A y B. Las fuerzas interiores que ejerce el semisólido A sobre el semisólido B son iguales y de sentido contrario a las que ejerce el semisólido B sobre el semisólido A. Las fuerzas interiores que actúan sobre la sección de corte constituyen un sistema de fuerzas que, como cualquier sistemas de vectores equivale a una resultante y a un momento resultante. En la figura 6.8 se representan esta fuerza y este momento resultante cuando el sólido que se considera es una barra prismática y el plano que la parte se halla sobre la sección transversal. El momento resultante se calculará en el centro de gravedad de la sección transversal.



**Figura 6.8.** División imaginaria de la barra prismática en dos semisólidos: A y B. Resultante y momento resultante de las tensiones que actúan en la misma en el centro de gravedad de la sección.

Las componentes de la fuerza y del momento resultante en la sección transversal, representados en 6.8 son los esfuerzos, figura 6.9.



**Figura 6.9.** Componentes de la resultante (a) y del momento resultante (b) de las tensiones en el centro de gravedad de la sección transversal: esfuerzos.

En la figura 6.9 se han representado todos los esfuerzos de la barra prismática, que son:

#### Componentes de la fuerza resultante.

$N_x$ : Esfuerzo axil.

$V_y, V_z$ : Esfuerzos Cortantes.

#### Componentes del momento resultante.

$M_x$ : Momento torsor.

$M_y, M_z$ : Momentos flectores.

La equivalencia entre esfuerzos, variables monodimensionales, y tensiones, variables tridimensionales, son:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad [6.1]$$

$$V_y = - \int_A \tau_{xy} dA \quad [6.2]$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad [6.3]$$

$$M_x = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA \quad [6.4]$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad [6.5]$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad [6.6]$$

En las expresiones anteriores  $A$  representa el área de la sección transversal. Estas expresiones permiten la obtención de los esfuerzos internos a partir de las tensiones; pero no permite la relación contraria. Ésta se determinará a lo largo de los capítulos siguientes. Sin embargo, de las expresiones anteriores se desprende que las tensiones que entran en juego en la Resistencia de Materiales son  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  mientras que  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{yz}$  no aparecen; esto es porque estas tres tensiones resultan muy pequeñas en comparación con las precedentes. La demostración se puede hacer haciendo un análisis dimensional de las fuerzas que actúan en la barra prismática y teniendo en cuenta las dimensiones de la misma; se deja a cargo del lector interesado.

## 6.5. FUERZAS Y APOYOS

En el apartado 1.4 de Elasticidad se estudiaron las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido clasificándose en fuerzas volumétricas y fuerzas superficiales. En Resistencia de Materiales, sin embargo, las fuerzas pueden ser puntuales o distribuidas. Ahora bien, debe quedar claro que ambas fuerzas, las tratadas en Elasticidad y las tratadas en Resistencia de Materiales, son las mismas; las fuerzas que se vieron en Elasticidad son las fuerzas tridimensionales,  $F$ , y las que se verán a partir de ahora son monodimensionales,  $f$ . Queda por establecer la relación entre ambas fuerzas.

Las fuerzas reales son todas volumétricas o superficiales, una fuerza puntual es una fuerza superficial que actúa sobre una superficie muy pequeña, como la fuerza que ejerce la rueda de un automóvil sobre la carretera o una fuerza volumétrica que actúa sobre un volumen muy pequeño. O bien se pueden considerar las fuerzas volumétricas o superficiales como un sistema de fuerzas y las fuerzas distribuidas y puntuales su resultante de forma que para obtener la fuerza puntual correspondiente no hay más que integrar a lo largo de la superficie o del volumen respectivamente. Para obtener las fuerzas distribuidas hay que tomar las fuerzas superficiales e integrarlas a lo largo de la longitud transversal correspondiente; y tomar las fuerzas volumétricas e integrarlas en la sección transversal, como se indica en las figuras 6.10.

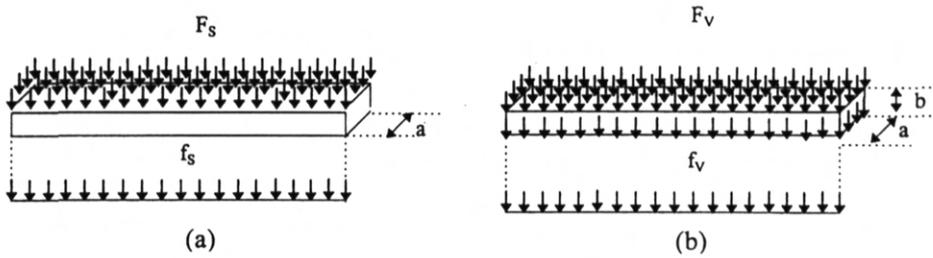


Figura 6.10. Barra prismática sometida a fuerzas reales: a) fuerzas superficiales b) fuerzas volumétricas.

Si se supone que las distribuciones de las fuerzas de la figura 6.10 son constantes a lo largo de toda la barra prismática la integración de las fuerzas para obtener distribución de fuerzas lineales se transforma en una multiplicación. Así la fuerza por unidad de longitud equivalente a las fuerzas superficiales de la figura 6.10. a. es  $f_s = F_s \cdot a$  y la equivalente a la fuerza volumétrica de la figura 6.10. b. es  $f_v = F_v \cdot a \cdot b$ .

Un apoyo es un elemento de unión entre el sólido que se esté estudiando y el exterior. A través del apoyo ejercen su acción la barra sobre el exterior y el exterior sobre la barra, acciones éstas que por la 3ª ley de Newton son iguales y de sentido contrario. Para resolver un problema de estática clásica se libera a la barra de sus vínculos y se sustituyen éstos por reacciones vinculares. Hay que poner una reacción vincular por cada movimiento impedido en el apoyo. En dos dimensiones se considerarán los siguientes tipos de apoyos, en los que se especifica las reacciones vinculares correspondientes a cada uno de ellos, figura 6.11.

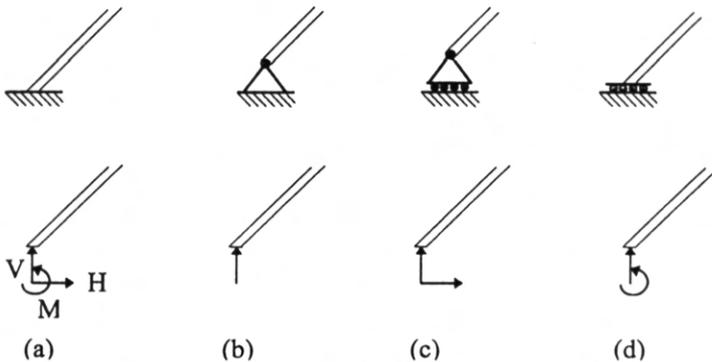


Figura 6.11. Apoyos en estructuras planas: a) empotramiento, b) apoyo simple, c) apoyo deslizante, d) empotramiento con desplazamiento horizontal.

Los apoyos en tres dimensiones son iguales a los apoyos en dos dimensiones pero en lugar de haber tres posibles desplazamientos impedidos, dos desplazamientos y un giro, existen otros tres, un desplazamiento y dos giros.

## Capítulo 7

## TRACCIÓN Y COMPRESIÓN

## 7.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo precedente se introdujo el concepto de esfuerzo como cada una de las componentes de la resultante y del momento resultante correspondiente al sistema de fuerzas constituido por las fuerzas interiores que actúan sobre la sección transversal de la barra prismática.

En este capítulo se estudiará la barra prismática sometida a esfuerzo axial, la componente según el eje OX de la resultante de las fuerzas interiores; el resto de los esfuerzos serán nulos.

Una barra prismática se encuentra sometida a tracción o compresión simple cuando, en su sección transversal sólo es distinto de cero su esfuerzo axial, siendo igual a cero el resto de los esfuerzos. O sea se tienen que cumplir las condiciones [7.1] :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x dA \neq 0 \\
 V_y &= - \int_A \tau_{xy} dA = 0 \\
 V_z &= \int_A \tau_{xz} dA = 0 \\
 M_z &= - \int_A \sigma_x y dA = 0 \\
 M_y &= \int_A \sigma_x z dA = 0 \\
 M_x &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Lo más usual en tracción o compresión de barras es la acción de fuerzas aplicadas en sus extremos; aunque también pueden aparecer fuerzas axiales distribuidas, e incluso fuerzas puntuales en la dirección del eje aplicadas en el interior de la barra. En la figura 7.1 se indican dos casos de tracción de barras producidas por fuerzas que actúan sobre los extremos.



**Figura 7.1.** Algunas barras a tracción.

La compresión se diferencia de la tracción en el signo del axil  $N$ :

$N > 0$  Tracción

$N < 0$  Compresión

Además de esta diferencia matemática existe una diferencia en el comportamiento de los elementos sometidos a esfuerzo axial: la tracción hay que tenerla especialmente en cuenta cuando se estudia el proceso de rotura de los materiales frágiles: hormigón, vidrio, materiales cerámicos ... y la compresión en piezas de gran longitud debido a los fenómenos de inestabilidad que, en estas piezas, se pueden producir y que se verán, con detalle, al final de estos apuntes.

## 7.2. TRACCIÓN Y COMPRESIÓN. TENSIONES Y ALARGAMIENTOS

En el capítulo 6 de este libro, figura 6.6, se mencionó que todas las magnitudes tridimensionales de la Teoría de la Elasticidad, se simplifican en Resistencia de Materiales y se transforman, mediante integración, en magnitudes monodimensionales. Aunque se trabaje con magnitudes monodimensionales es necesario conocer el valor de las tensiones a partir de los esfuerzos, pues el objetivo de la Resistencia de Materiales es, precisamente, la determinación de las tensiones, junto con los desplazamientos, y asegurar que no sobrepasen determinado valor que lleve a la pieza a la plastificación o, directamente, a la rotura. En el caso presente, tracción o compresión el único esfuerzo es el esfuerzo axial,  $N$ . Hay que obtener el tensor de tensiones que, a la vista de las expresiones [7.1], parece razonable suponer que sólo tenga la componente  $\sigma_x$  distinta de cero. Para determinar estas tensiones  $\sigma_x$  hay que admitir el principio de Saint-Venant que se estudió en teoría de la Elasticidad. Este principio establecía que la distribución de deformaciones, y por tanto la de tensiones, en un sólido a una distancia grande de la zona de aplicación de la carga con

relación a la longitud característica de esta zona es independiente de la distribución de carga para una resultante y un momento resultante dados. Una distribución de  $\sigma_x$  uniforme en toda la sección produce una resultante que sólo tiene componente según el eje OX y el momento resultante es nulo, que es, precisamente, la definición de un estado de tracción y compresión. Esta hipótesis será válida en todas las secciones a una distancia considerable del punto de aplicación de la carga. Así, en las barras de la figura 7.1 serán válidas en todas aquéllas situadas entre las líneas quebradas.

Se puede aplicar el principio de Saint-Venant en las barras de la figura 7.1. considerando la equivalencia entre la fuerza puntual P y una distribución constante de tensiones,  $\sigma_x$ , en la sección transversal de forma que  $P = \sigma_x \cdot A$ . Si las tensiones son constantes también lo van a ser las deformaciones y si éstas son constantes, todos los puntos de la sección se acortan o se alargan lo mismo, luego como consecuencia directa del principio de Saint-Venant se impone la Hipótesis de Bernoulli, que establece que las secciones planas permanecen planas y paralelas después de la deformación.

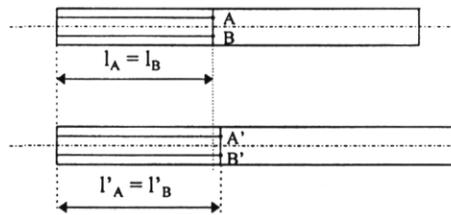


Figura 7.2. Hipótesis de Bernoulli en tracción.

Partiendo de la hipótesis de Bernoulli se puede decir que los puntos A y B de la figura 7.2 pasan a ser los A' y B' después de la deformación, como consecuencia de esto, las deformaciones son constantes para todos los puntos de la sección, y por tanto también lo serán las tensiones.

$$\text{Si } l_A = l_B \text{ y } \Delta l_A = \Delta l_B \Rightarrow \frac{\Delta l_A}{l_A} = \frac{\Delta l_B}{l_B} \Rightarrow \varepsilon_{x_A} = \varepsilon_{x_B} \Rightarrow E\varepsilon_{x_A} = E\varepsilon_{x_B} \Rightarrow \sigma_{x_A} = \sigma_{x_B}$$

Luego bien sea directamente a partir del principio de Saint-Venant, bien sea a partir de la hipótesis de Bernoulli se llega a que las tensiones en la sección transversal son constantes. A continuación se obtendrán las tensiones a partir de la expresión del esfuerzo axial:

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad [7.2]$$

Como  $\sigma_x$  es uniforme en toda el área, puede salir fuera de la integral:

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x A \Rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A}$$

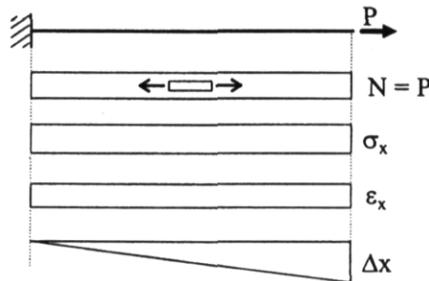
Se ha encontrado el valor de la tensión en el caso de tracción o compresión a partir del esfuerzo axil:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \quad [7.3]$$

Para obtener la deformación se aplicará la ley de Hooke. Ésta, al igual que la tensión, al ser constante en toda la sección sólo dependerá de la coordenada x.

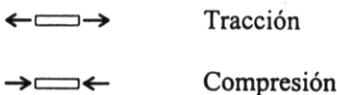
$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA} \quad [7.4]$$

El desplazamiento monodimensional coincide con el alargamiento, en tracción, o acortamiento, en compresión. En la figura 7.3 se representa la deformación, tensión, esfuerzo axil y alargamiento.



**Figura 7.3.** Esfuerzo axil ( $N$ ), tensión ( $\sigma_x$ ), deformación ( $\varepsilon_x$ ) y alargamiento ( $\Delta x$ ) de una barra sometida a una tracción constante.

Si se observa la figura 7.3 sobre la curva que representa el axil se ha colocado un símbolo que representa una longitud diferencial de barra y a las fuerzas internas a que se halla ésta sometida, así cualquier trozo de la barra de la figura 7.3 se halla sometida a unas fuerzas que lo “estiran” tal y como indica el símbolo. Si la barra está comprimida las flechas tendrán sentido contrario:



Para una coordenada x el alargamiento de la barra de la figura 7.3 se calcula como:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{N}{EA}$$

$$\Delta x = \frac{Nx}{EA} \quad [7.5]$$

El alargamiento total de la barra sometido a un axil  $N$  constante, siendo  $l$  la longitud total de la misma, es:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad [7.6]$$

### 7.3. DEFORMACIONES PRODUCIDAS EN UNA BARRA POR SU PROPIO PESO

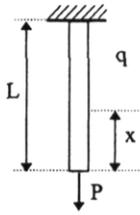
En el apartado 7.2 se dijo que las cargas que actúan sobre una barra sometida a axil suelen estar aplicadas en el extremo de las barras, aunque se puede dar el caso de cargas puntuales aplicadas entre los extremos de una barra y el caso de cargas distribuidas, como ocurre con las barras sometidas a su propio peso. Las cargas distribuidas son cargas que actúan por unidad de longitud, sin embargo se sabe que las cargas de peso son fuerzas de volumen. Para obtener las fuerzas distribuidas a partir de las fuerzas volumétricas se debe integrar el peso específico sobre la sección transversal; como el peso específico es una fuerza volumétrica que suele ser constante a lo largo de todo el volumen, la integral se transforma en el producto del peso específico por la sección transversal. Ver apartado 6.5.

$$q = \gamma \cdot A \quad [7.7]$$

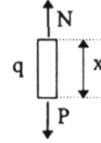
En la expresión anterior  $q$  representa las fuerzas distribuidas,  $\gamma$  el peso específico y  $A$  la sección transversal.

Se va a considerar una barra con una fuerza  $P$  aplicada en el extremo y sometida a su propio peso, como se ve en la figura 7.4. Se van a obtener los esfuerzos axiales, tensiones, deformaciones, desplazamientos y alargamientos; debido a estas fuerzas.

Para hallar el esfuerzo axil se considera una coordenada genérica  $x$  desde el extremo cargado, figura 7.5, y se aplica equilibrio de fuerzas en el trozo de barra limitada por la coordenada  $x$ ; el resto de la barra habría que sustituirla por las tres componentes de fuerza y las tres componentes de momento, de estos seis esfuerzos sólo el axil es distinto de cero.



**Figura 7.4.** Barra sometida a una fuerza en el extremo P y a su propio peso con una fuerza distribuida equivalente de q .



**Figura 7.5.** Rebanada de la barra representada en la figura 7.4.

Las variables del problema son:

$$\Sigma F_v = 0: \quad N - P - qx = 0 \Rightarrow N = P + qx$$

Las tensiones son:

$$N = P + qx = \int \sigma_x dA = \sigma_x A \Rightarrow \sigma_x = \frac{P + qx}{A}$$

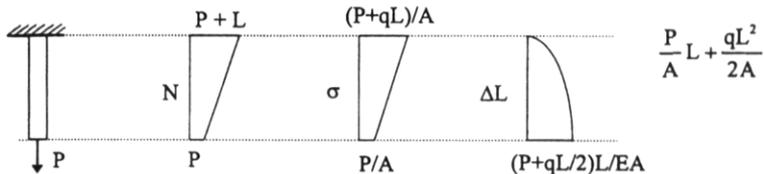
Las deformaciones:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P + qx}{EA}$$

Los alargamientos:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{P + qx}{EA} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta l = u(x) - u(0) \\ u(0) = 0 \end{aligned} \right\} \Delta l = u(x) = \int_{x=0}^{x=x} \frac{P + qx}{EA} dx = \frac{Px + q \frac{x^2}{2}}{EA}$$

La representación gráfica de las magnitudes anteriores se muestran en la figura 7.6.



**Figura 7.6.** Esfuerzo axial (N), tensión (σ) y alargamiento (Δx) de una barra sometida a una fuerza en el extremo y a su propio peso.

Como se observa en la gráfica anterior hay una variación de tensiones a lo largo de la barra desde  $\frac{P}{A}$  hasta  $\frac{P}{A} + \frac{qL}{A}$ . Para que esta barra no falle, plastifique o rompa, la tensión máxima debe ser, como mucho, igual que la tensión de trabajo.

$$\frac{P}{A} + \frac{qL}{A} = \sigma_t \quad [7.8]$$

De la expresión anterior se deduce el área mínima necesaria para soportar las cargas:

$$A = \frac{P + qL}{\sigma_t} \quad [7.9]$$

Ahora bien si se iguala la tensión mayor a la tensión de trabajo se está desaprovechando material, en la zona donde se producen tensiones menores. La forma óptima de la barra sería tal que en todas las secciones se tenga una tensión igual a la tensión de trabajo. Obviamente, el área será máxima en la sección de esfuerzo axial máximo. La forma de la barra será, esquemáticamente, la que se indica en la figura 7.7.

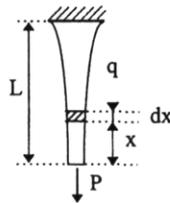


Figura 7.7. Barra ideal sometida a su propio peso.

Considérese el estado tensional de una rebanada de la barra, área rallada de la figura 7.7, dibujada con más detalle en la figura 7.8.

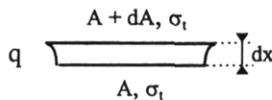


Figura 7.8. Rebanada de la barra representada en 7.7.

Aplicando equilibrio de fuerzas en la dirección del eje OX:

$$\begin{aligned} \sum F_v = 0 &\Rightarrow \sigma_t(A + dA) - \sigma_t A - qdx = 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{q}{\sigma_t} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{A_0}^A \frac{dA}{A} = \int_0^x \frac{q}{\sigma_t} dx \Rightarrow \ln \frac{A}{A_0} = \frac{qx}{\sigma_t} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A = A_0 e^{\frac{qx}{\sigma_1}} \quad [7.10]$$

La expresión que define el área a lo largo de la barra es una exponencial cuya representación gráfica es bastante similar a la representada. Una barra como la representada recibe el nombre de sólido de igual resistencia, al poseer todas sus secciones la misma resistencia.

#### 7.4. PROBLEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS O HIPERESTÁTICOS

Los problemas en estática, o sea que describen sólidos en equilibrio, son de dos tipos:

**Estáticamente determinados:** la sola aplicación de las ecuaciones de equilibrio permiten obtener todas las reacciones y los esfuerzos del problema.

**Estáticamente indeterminados:** para obtener las reacciones y esfuerzos del problema es necesario aplicar, además de las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento.

En el ejemplo siguiente se va a ver como una barra estáticamente determinada, figura 7.9, añadiéndole una coacción más pasa a ser una barra hiperestática.

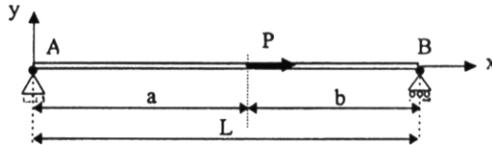


Figura 7.9 Barra estáticamente determinada sometida a tracción

Para obtener las reacciones se sustituye el apoyo por las reacciones vinculares correspondientes y se aplica las ecuaciones de equilibrio, figura 7.10.

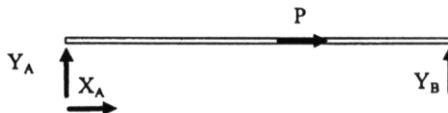
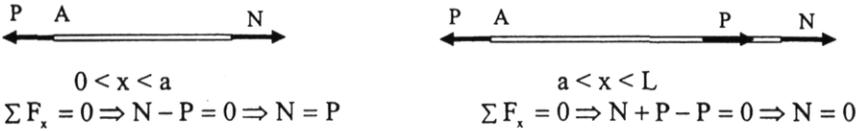


Figura 7.10. Barra de la figura 7.9 en la que se han sustituido los apoyos por las reacciones equivalentes.

Las reacciones verticales son nulas; como se puede obtener del equilibrio de fuerzas verticales y del equilibrio de momentos; la única reacción distinta de cero es la reacción horizontal  $X_A$ , que se obtiene de la aplicación de equilibrio a las fuerzas horizontales.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow X_A + P = 0 \Rightarrow X_A = -P \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Y_A + Y_B = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow Y_B L = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y_A = 0; Y_B = 0$$

Para obtener el diagrama de axiles hay que aplicar equilibrio a un trozo de barra a ambos lados de la fuerza puntual:



Luego el diagrama de axiles queda de la forma mostrada en la figura 7.11:

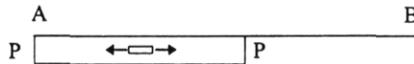


Figura 7.11 Diagrama de axiles de la barra de la figura 7.9

La barra anterior es una barra isostática, se ha resuelto exclusivamente mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio; pero si se añade una nueva coacción, en este caso se va a impedir el desplazamiento horizontal del punto B, se transforma en hiperestática, figura 7.12.

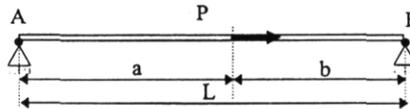


Figura 7.12 Barra hiperestática sometida a esfuerzo axial.

Para obtener las reacciones hay que sustituir los apoyos por las reacciones vinculares y aplicar las ecuaciones de equilibrio, figura 7.13.

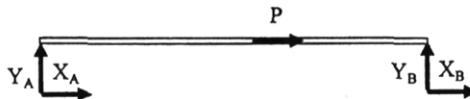


Figura 7.13. Barra de la figura 7.12 en la que se han sustituido los apoyos por las reacciones equivalentes.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_B + P = 0 \Rightarrow X_A + X_B = -P$$

Las reacciones verticales, al igual que antes, son nulas.

De la sola aplicación de las ecuaciones de equilibrio no es posible la obtención de las reacciones y, por tanto, de los axiles. Los axiles quedan en función de las reacciones:

$$\begin{array}{ccc}
 0 < x < a & & a < x < L \\
 \begin{array}{c} \xrightarrow{X_A} \quad \quad \quad \xrightarrow{N} \\ \hline \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N + X_A = 0 \Rightarrow N = -X_A \end{array} & & \begin{array}{c} \xleftarrow{N} \quad \quad \quad \xrightarrow{X_B} \\ \hline \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N + X_B = 0 \Rightarrow N = X_B \end{array}
 \end{array}$$

Hay que aplicar compatibilidad en la dirección del nuevo movimiento impedido; en este caso este movimiento es el del apoyo B, que lo que impide el posible alargamiento o acortamiento de la barra:

$$\Delta L = \Delta a + \Delta b = 0$$

Para obtener los alargamientos hay que aplicar la ley de comportamiento:

$$\begin{aligned}
 \Delta l &= \frac{Nl}{EA} \\
 \Delta L = \Delta a + \Delta b &= \frac{-X_A a}{EA} + \frac{X_B b}{EA} = \frac{1}{EA} (-X_A a + X_B b) = 0 \Rightarrow -X_A a + X_B b = 0
 \end{aligned}$$

Con la ecuación anterior y la que proporcionó la ecuación de equilibrio se tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, las dos reacciones:

$$\left. \begin{array}{l} X_A + X_B = -P \\ -X_A a + X_B b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow X_A = \frac{Pb}{L}; \quad X_B = \frac{Pa}{L}$$

En el ejemplo anterior se ha considerado movimiento impedido el del apoyo B porque en la barra isostática precedente en B estaba permitido el movimiento; pero igual se podría haber elegido el apoyo en A. De hecho si en algo se caracteriza a un problema hiperestático es que hay múltiples caminos para resolverlo.

Cuantas más coacciones se le añadan a una estructura isostática, más hiperestática se volverá esa estructura. La hiperestaticidad se mide mediante el grado de hiperestaticidad. Se define el grado de hiperestaticidad,  $n$ , como la diferencia entre el número de ligaduras y el número de ecuaciones que se pueden obtener de las ecuaciones de equilibrio:

- $n > 0$ : Sistema hiperestático.
- $n = 0$ : Sistema isostático.
- $n < 0$ : mecanismo.

El caso de los mecanismos se escapa del alcance de esta disciplina.

Además del grado de hiperestaticidad, hay que distinguir entre hiperestaticidad externa e hiperestaticidad interna: un sistema es hiperestático externo cuando la coacción se le añade en el apoyo del sistema al exterior, e hiperestático interno cuando se pueden obtener todas las reacciones externas mediante la sola aplicación de las ecuaciones de equilibrio pero no es posible la obtención de todos los esfuerzos de las barras al haber más barras de las necesarias para que el sistema sea isostático.

El ejemplo anterior es un sistema hiperestático externo de grado de hiperestaticidad uno. En la figura 7.14 se observa una estructura isostática que, añadiéndole una nueva barra se transforma en una estructura hiperestática interna de grado de hiperestaticidad uno.

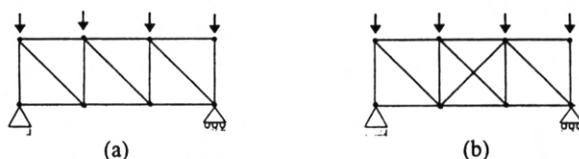


Figura 7.14. a) Estructura isostática, b) estructura hiperestática interna.

## 7.5. TENSIONES INICIALES Y TÉRMICAS

Puede ocurrir en un sistema de barras que las dimensiones teóricas no coincidan con las reales, bien por defecto de fabricación, bien por error en el cálculo, esta diferencia entre valor teórico y valor real es lo que se conoce como defecto de montaje.

Al montar sistemas de barras que poseen estos defectos de montaje puede suceder:

En los *sistemas isostáticos* se producen desplazamientos como sólido rígido; así, si se considera una barra de longitud  $L$  que se desee colocar entre dos apoyos, uno de ellos fijo y el otro móvil, siendo la distancia entre apoyos  $L+\delta$ , el apoyo móvil sufrirá un desplazamiento  $\delta$ , figura 7.15.a.

En los *sistemas hiperestáticos*, al no poder haber desplazamientos libres debido al exceso de ligaduras que posee, se generan unas tensiones denominadas tensiones por defecto de montaje. Si la barra isostática de la figura 7.15.a tuviera los dos apoyos fijos, figura 7.15.b ninguno de los dos apoyos se pueden desplazar y hay que forzar a la barra para poder situarla entre los dos apoyos, como la longitud de la barra es  $\delta$  menor que la distancia entre apoyos hay que estirarla un incremento de longitud  $\delta$ , el esfuerzo necesario que se tiene que realizar es  $N = EA\delta/L$ , esfuerzo que tienen que seguir ejerciendo los apoyos para poder seguir estirada la barra. No hay que perder de vista que este esfuerzo aparece en la estructura aún antes de que ésta entre en carga.

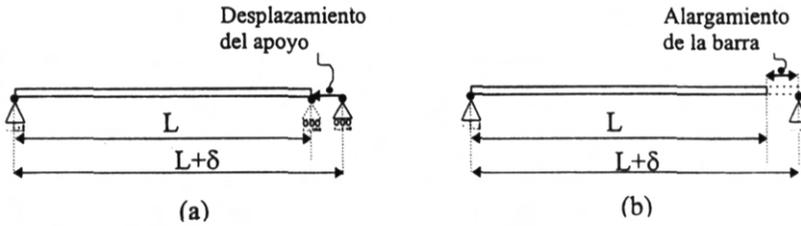


Figura 7.15. Defecto de montaje: a) barra isostática, b) barra hiperestática.

Otro efecto similar al de defecto de montaje es el efecto térmico. Al aumentar la temperatura, se produce una dilatación en el material y al disminuir la temperatura se produce una contracción del material. Este alargamiento o acortamiento se traduce en una deformación unitaria debida a la temperatura:  $\epsilon = \alpha \Delta T$ . La variable monodimensional correspondiente a la variable tridimensional deformación es el alargamiento:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \epsilon l = \alpha l \Delta T \quad [7.11]$$

El alargamiento anterior lo sufre una barra que se pueda deformar libremente, como la de la figura 7.16.

Si la barra de la figura 7.16 tuviera los desplazamientos impedidos, los dos apoyos fijos, la barra no se puede alargar. Este problema es equivalente a considerar un defecto de montaje en una barra de longitud real  $L + \alpha L \Delta T$ ; pero con una longitud entre apoyos fijos de  $L$ ; en definitiva con un "defecto de montaje" de  $\alpha L \Delta T$ , como ninguno de los apoyos se puede desplazar para salvar este alargamiento se produce un axil  $N = EA \Delta l / l = EA \alpha \Delta T$ .

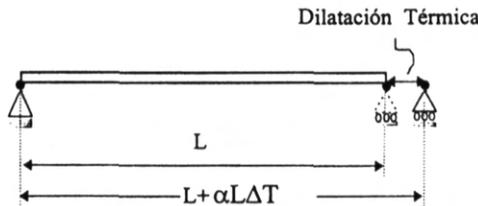


Figura 7.16. Dilatación térmica de una barra isostática.

## Capítulo 8

## FLEXIÓN. TENSIONES

## 8.1. INTRODUCCIÓN. DIAGRAMAS DE VIGAS ISOSTÁTICAS

Se entiende por *flexión* el estado tensional a que se halla sometida la barra prismática cuando en las secciones transversales aparecen momentos flectores. Si el momento flector en la sección es el único esfuerzo existente la flexión se denomina *pura*. En la mayoría de los casos en las secciones transversales de las barras, además de los momentos flectores aparecen, simultáneamente, esfuerzos cortantes. En este caso la flexión es *simple*. La barra que trabaja principalmente a flexión se denomina *viga*.

Para empezar a trabajar con problemas de barras a flexión hay que saber determinar la representación gráfica de esfuerzos cortantes y momentos flectores a lo largo de la barra. Esta representación gráfica, al igual que sucedía con los axiles, es conocida como *diagrama*. También, como ocurría en los problemas de tracción y compresión, hay estructuras en las que es posible determinar los esfuerzos aplicando, sólo, las ecuaciones de equilibrio, estas estructuras son las *estructuras isostáticas* y existen otras estructuras en las que, para determinar los esfuerzos, además de las ecuaciones de equilibrio, hay que acudir a las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento, las *estructuras hiperestáticas*. Se va a empezar a estudiar las estructuras isostáticas, más concretamente, las vigas isostáticas.

Los casos más comunes de vigas isostáticas corresponden a vigas biapoyadas, situadas entre un apoyos simple y otro deslizante, y vigas en voladizo, con un empotramiento en un extremo y libre en el otro extremo, figura 8.1.



Figura 8.1. Barras isostáticas: a) barra biapoyada, b) voladizo.

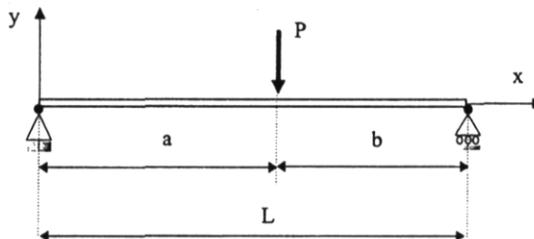
En la barra biapoyada de la figura 8.1.a se ha puesto un apoyo fijo y otro móvil para que el número de reacciones sea tres, igual al número de ecuaciones de equilibrio del problema plano. Este requisito no es imprescindible: en flexión el hecho de que los dos apoyos sean fijos no altera el problema, lo único que cambiaría sería el problema de tracción y compresión.

En este tema se tratarán exclusivamente problemas planos: la viga se moverá en el plano OXY, sólo tendrá sentido las fuerzas en las direcciones de los ejes contenidos en el plano: OX y OY y los momentos según un eje perpendicular al plano de trabajo, OZ, por tanto los esfuerzos a que estará la barra sometida serán  $N$ ,  $V_y$  y  $M_z$ . En este capítulo, que trata de la flexión sólo aparecerán  $V_y$  y  $M_z$ , que, por simplicidad, se representarán sin el subíndice:  $V$  y  $M$ .

El proceso de obtención de los diagramas de cortantes,  $V$ , y de flectores,  $M$ , es similar al que se siguió en tracción y compresión para la obtención de esfuerzos axiales:

- 1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares.
- 2) Obtener las reacciones vinculares mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto.
- 3) Obtención de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en cada sección de la barra, dividiendo la viga en dos partes y sustituyendo una de las partes por su efecto correspondiente, que son precisamente los esfuerzos. Éstos se determinan aplicando equilibrio a la parte de viga que se esté considerando. En este caso se pueden analizar las condiciones de equilibrio de la parte derecha o de la parte izquierda de la barra, siempre teniendo presente que los esfuerzos en ambas partes serán iguales y de sentido contrario. Para poner los signos como se definieron en el capítulo 6 se debe hacer notar que en este capítulo se analizaba la parte izquierda de la barra.

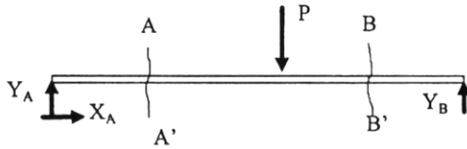
**Barra biapoyada con carga puntual, figura 8.2.**



**Figura 8.2.** Barra biapoyada sometida a carga puntual.

Para obtener los diagramas de esfuerzos se va a proceder como se ha indicado anteriormente:

1) Las reacciones son:



**Figura 8.3.** Barra biapoyada de la figura 8.2 en la que se ha sustituido sus apoyos por reacciones vinculares.

2) Las ecuaciones de equilibrio externo son:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow X_A = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Y_A + Y_B - P = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow Y_B L - Pa = 0 \end{aligned} \right\} Y_A = \frac{Pb}{L}; Y_B = \frac{Pa}{L}$$

3) Para obtener los cortantes y flectores en cada sección se escoge una sección genérica. En este caso, en particular, se escogerá una sección a un lado de la fuerza puntual, sección AA', y otra al otro lado, sección BB'. Lo más cómodo es tomar momentos en el punto genérico en el que se están obteniendo los esfuerzos al no producir momento el esfuerzo cortante en ese punto.

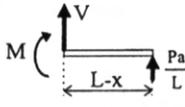
Sección AA': Se analizará la parte izquierda de la barra.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{Pb}{L} - V = 0 \\ \sum M = 0 &\Rightarrow M - \frac{Pb}{L}x = 0 \end{aligned} \right\} V = \frac{Pb}{L}; M = \frac{Pb}{L}x$$

Sección BB': Primero se analizará la parte izquierda.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{Pb}{L} - P - V = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M - \frac{Pb}{L}x + P(x-a) = 0 \end{aligned} \right\} V = -\frac{Pa}{L}; M = \frac{Pb}{L}x - P(x-a)$$

Sección BB': Ahora se analizará la parte derecha para comprobar que los resultados coinciden con los anteriores.



$$\left. \begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow \frac{Pa}{L} + V = 0 \\ \sum M_B = 0 &\Rightarrow -M + \frac{Pa}{L}(L-x) = 0 \end{aligned} \right\} V = -\frac{Pa}{L}; M = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

Los resultados que se obtienen en la sección BB' son iguales, tanto si se efectúa el equilibrio en la parte derecha de la sección como en la parte izquierda. Obsérvese que los signos del esfuerzo cortante y del momento flector que se consideran cuando se analiza la parte izquierda de la viga son de sentido contrario a los signos de los esfuerzos si se establece el equilibrio en la parte derecha.

Con los cálculos anteriores ya se han obtenido los esfuerzos cortantes y los momentos flectores en toda la viga. Las representaciones gráficas de los mismos reciben el nombre de diagramas. En los diagramas siguientes aparecen dos símbolos que representan el esfuerzo cortante y el momento flector: cada uno de ellos presenta dos versiones según sea el esfuerzo positivo o negativo. En cualquiera de los dos símbolos se representa un elemento infinitesimal de viga sometido a equilibrio elástico y como tal las fuerzas que lo solicitan, esfuerzos cortantes, y los momentos que lo solicitan, momentos flectores, son iguales y de sentido contrario.

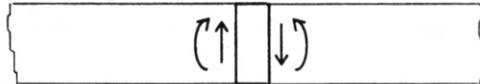
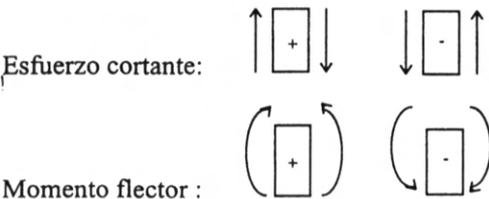
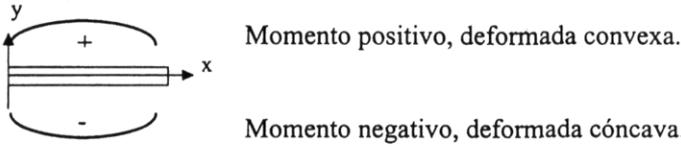


Figura 8.4. Elemento infinitesimal de la barra sometido a esfuerzo cortante y momento flector positivos.

En el elemento de la figura 8.4 los esfuerzos son positivos, en general el signo de los esfuerzos es:



Asimismo, se debe hacer notar que el signo del momento flector está estrechamente relacionado con la curvatura de la deformada.



Fíjese que si en la viga anterior se hubiera puesto el sentido de la coordenada longitudinal al contrario, de derecha a izquierda el sentido de las curvaturas y, por tanto, de los momentos cambia: el sentido del momento flector va asociado al sistema de ejes elegido.

Una vez aclarados los aspectos de la representación gráfica de los esfuerzos, se representarán los cortantes y flectores correspondientes en la figura 8.5.

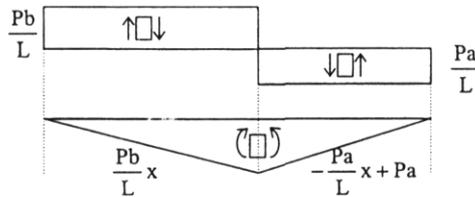


Figura 8.5. Esfuerzos cortantes y momentos flectores en la barra biapoyada de la figura 8.2.

**Barra biapoyada sometida a una distribución de cargas constante, figura 8.6.**

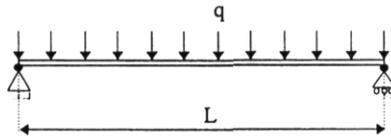


Figura 8.6. Barra biapoyada sometida a carga distribuida.

La viga anterior está sometida a unas cargas distribuidas constantes. Las cargas distribuidas, para la totalidad de la viga, equivalen a una carga concentrada que actúe en el centro de gravedad de la distribución de cargas. Al ser la carga por unidad de longitud constante en toda la viga el centro de gravedad se halla situado en el centro de la viga.

Para hallar los diagramas de cortantes y flectores se procederá como sigue:

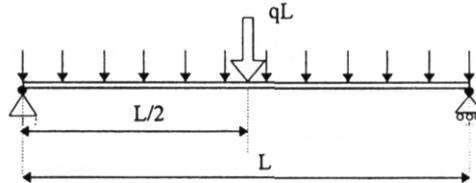
Se sustituye las fuerzas distribuidas por una fuerza concentrada equivalente situada en el centro de gravedad de la distribución de cargas. Si hay varios grupos de fuerzas distribuidas se hará tantas veces como sea necesario. Este paso se puede eliminar pasando a ser primer paso el siguiente.

Se obtienen las reacciones en función de las cargas concentradas determinadas en el apartado anterior y de las fuerzas puntuales si las hubiere.

Se obtiene los esfuerzos cortantes y momentos flectores “cortando” la viga por una sección genérica y aplicando equilibrio en la parte de viga que queda a la derecha o a la izquierda de esa sección genérica. El resto de la viga que no se considere se debe sustituir por el efecto que produce en la parte considerada, o sea los esfuerzos. Se deben tomar tantas secciones genéricas como partes continuas tenga la viga; o sea si la viga tiene una carga puntual se tomará una sección genérica a la izquierda y otra a la derecha de ésta; si la viga tiene una fuerza distribuida que actúa en una parte de la viga y en otra no hay que considerar dos secciones genéricas: una donde actúa la carga y otra donde no actúa.

Para la viga anterior se van a desarrollar cada uno de los pasos anteriores:

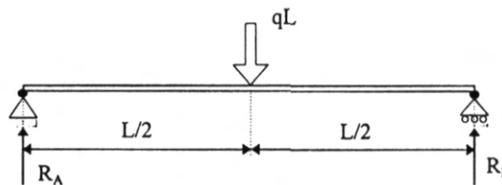
1)



**Figura 8.7.** *Sustitución de la fuerza distribuida por una fuerza puntual equivalente.*

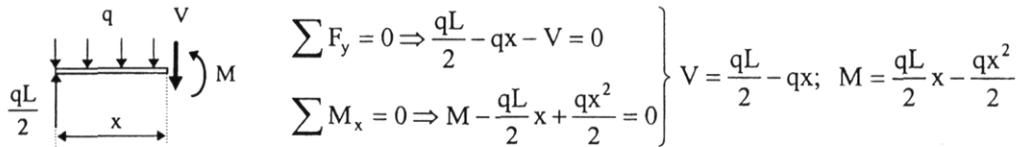
2) Por simetría:

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$



**Figura 8.8.** *Obtención de las reacciones a partir de la fuerza puntual equivalente.*

3) En este caso, como la viga no presenta ninguna discontinuidad sólo hay que ver qué ocurre en una sección genérica:



La representación gráfica del esfuerzo cortante y del momento flector se pone de manifiesto en la figura 8.9.

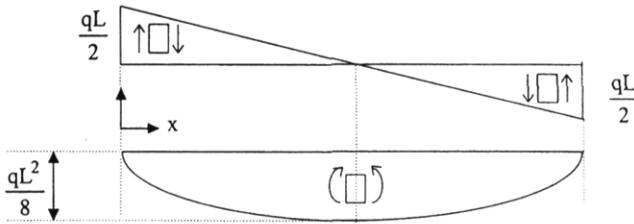


Figura 8.9. Diagramas de esfuerzos en la barra de la figura 8.6.

Dado cualquier estado de cargas es posible obtener los esfuerzos cortantes y los momentos flectores que provocan.

A continuación se va a ver que existe una relación directa entre las expresiones que definen la fuerza, el esfuerzo cortante y el momento flector. Considérese una viga cualquiera sometida a una distribución de cargas que, en principio, se considerará dependiente de la coordenada  $x$ ,  $q(x)$ , como la que se representa en la figura 8.10. Aunque se ha representado una viga biapoyada el resultado es extensible a cualquier tipo de apoyo.

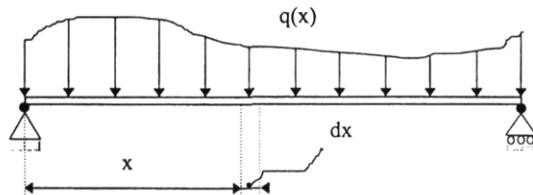
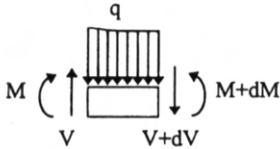


Figura 8.10. Barra biapoyada sometida a una distribución de fuerzas cualquiera.

Si se aísla el trozo diferencial de viga  $dx$  hay que sustituir, tanto la parte izquierda de  $dx$  como la derecha, por sus efectos y los efectos de cada trozo son los momentos flectores y esfuerzos cortantes de cada sección. Si en vez de aislar un diferencial de longitud se hubiese aislado un solo punto, en base al equilibrio al que debe estar sometido todo elemento de un sólido, se ha de verificar que los cortantes a la derecha y a la izquierda del punto deben ser iguales y de sentido contrario, así como los momentos. Si en lugar de tener un punto se tiene

un diferencial esos cortantes y flectores, aunque no iguales, sólo difieren en una cantidad diferencial.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - qdx - V - dV = 0$$

$$\sum M_{der} = 0 \Rightarrow M + dM - M - Vdx + q \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

De las ecuaciones de equilibrio anteriores se obtienen dos expresiones indispensables para el cálculo de esfuerzos:

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad [8.1]$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad [8.2]$$

Para la obtención de la expresión [8.2] se han despreciado los infinitesimos de segundo orden:  $(dx)^2$ . Los signos de las expresiones [8.1] y [8.2] anteriores corresponden al sistema de ejes utilizado y con un criterio que puede cambiar de un autor a otro. Se desprenden tres consecuencias importantes:

- La pendiente del diagrama de esfuerzos cortantes corresponde a las fuerzas distribuidas.
- La pendiente del diagrama de momentos flectores coincide con el diagrama de esfuerzos cortantes.
- Como consecuencia de lo anterior se extrae que si se quiere obtener el esfuerzo cortante máximo se ve el punto en el que se anule el diagrama de fuerzas distribuidas y para ver cuando el momento flector sea máximo se debe ver el punto en el que se anule el esfuerzo cortante.

Además, el resultado anterior puede ser útil a la hora de obtener diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores como se va a ver en el ejemplo siguiente, figura 8.11...

### Barra biapoyada sometida a carga triangular

En esta figura ya se ha puesto la fuerza concentrada equivalente a las fuerzas distribuidas y situada en su centro de gravedad.

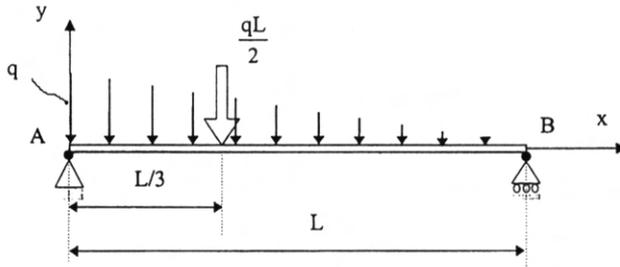


Figura 8.11. Barra biapoyada sometida a una distribución de fuerzas triangular.

Las reacciones son:

$$R_A = \frac{qL}{L} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{qL}{3}; \quad R_B = \frac{qL}{L} \cdot \frac{L}{3} = \frac{qL}{6}$$

Las fuerzas distribuidas no son constantes, son lineales, y se pueden obtener a partir de la ecuación de una recta teniendo en cuenta que en  $x=0$  la carga distribuida es igual a  $q$  y en  $x=L$  la carga distribuida es cero:

$$\left. \begin{array}{l} q(0) = q \\ q(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow q(x) = q - \frac{q}{L}x$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dx} = -q(x) \\ V(0) = R_A = \frac{qL}{3} \\ V(L) = -R_B = -\frac{qL}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{qL}{3} - qx + q \frac{x^2}{2L}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} = V \\ M(0) = 0 \\ M(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \frac{qL}{3}x - q \frac{x^2}{2} + q \frac{x^3}{6L}$$

La representación gráfica del esfuerzo cortante y del momento flector queda reflejado en la figura 8.12.

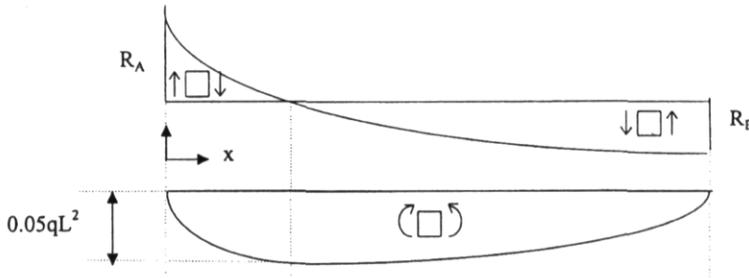


Figura 8.12. Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 8.10.

**8.2. TENSIONES EN LA BARRA SOMETIDA A FLEXIÓN PURA**

Se analizarán las tensiones que se producen en flexión pura. Como ya se indicó en el apartado anterior, se entiende por flexión pura el estado tensional, producido por cargas transversales, en el que, en las secciones transversales de la barra, aparecen, solamente, momentos flectores, siendo el resto de los esfuerzos nulos. Debido a la relación entre esfuerzo cortante y momento flector,  $V = \frac{dM}{dx}$ , es condición necesaria para que el cortante sea nulo que el momento flector sea constante. Esta condición se da en casos muy concretos de geometría y carga. Concretamente se da en los casos representados en la figura 8.13.

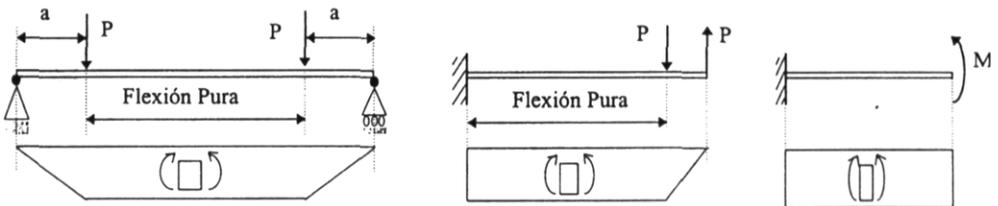


Figura 8.13. Algunos casos de flexión pura.

Prescindiendo de las particularidades de los puntos de aplicación de las cargas y de los puntos de apoyo, donde las tensiones son mayores de las previstas, se estudiará la distribución de tensiones en una sección transversal sometida a flexión pura. Para encontrar esta distribución de tensiones se considerará la deformación de la barra. Para el caso de una barra que tenga un plano longitudinal de simetría y cuando los momentos flectores actúen en ese plano la viga se flexiona en ese plano. En flexión pura el momento flector es constante, luego la flexión de la viga también lo será. Esto supone que la viga no sufrirá un

cambio de curvatura a lo largo de la longitud. Es decir, el eje de la barra adquirirá, después de la deformación, la forma de un arco de circunferencia, figura 8.14.

Se admitirá la hipótesis de que *las secciones permanecen planas después de la deformación; pero sufrirán un giro y un desplazamiento*. La fibra longitudinal permanece perpendicular a la sección.

Se considerará una pequeña longitud de la barra ya deformada. Todas las fibras de esa longitud sufrirán una deformación y tomarán la forma de un arco de circunferencia. Esto supone que habrá fibras que aumenten su longitud y habrá otras que la disminuyan. Si hay fibras que se acortan y fibras que se alargan, por la hipótesis de continuidad, habrá una fibra que no se acorta ni se alarga, que es lo que se conoce como *fibra neutra* y que viene representada en la figura mediante el segmento CD, que tras la deformación pasa a ser C'D'. Todas las fibras describen un arco de circunferencia cuyo centro de curvatura es O. El radio del arco que forma la fibra neutra es el radio de curvatura  $\rho$ . La distancia desde la fibra neutra a una fibra cualquiera es  $y$ , en este caso es la distancia entre CD y la fibra AB.

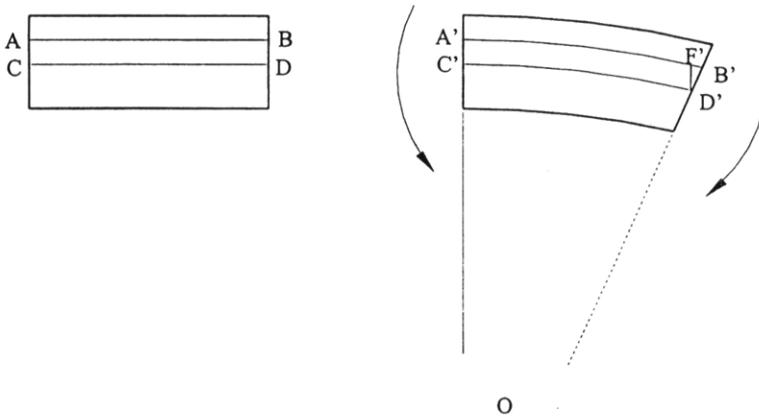


Figura 8.14. Barra deformada por flexión pura.

Se va a aplicar proporcionalidad de triángulos entre el triángulo D'B'F' y el triángulo OD'C'. Y se va a tener en cuenta que, al ser CD la fibra que ni se acorta ni se alarga, o sea  $CD = C'D'$ . La longitud F'B' representa la variación de longitud de la fibra AB, luego el cociente  $\frac{F'B'}{C'D'}$  representa la variación unitaria de longitud de esa fibra en la dirección de OX, o lo que es lo mismo la deformación  $\epsilon_x$ . De la proporcionalidad de triángulos se desprende:

$$\frac{C'D'}{OC'} = \frac{F'B'}{D'F'} \Rightarrow \frac{y}{\rho} = \frac{F'B'}{C'D'} = \epsilon_x$$

Aplicando ahora la ley de Hooke:

$$\frac{y}{\rho} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad [8.3]$$

Teniendo ahora en cuenta que el estado que se tiene es de flexión pura, todos los esfuerzos son nulos excepto el momento flector  $M_z$ , el esfuerzo axil es nulo también:

$$\begin{aligned} N = \int_A \sigma_x dA &= \int_A E \frac{y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = \frac{E}{\rho} \bar{y} A = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{y} = 0 \end{aligned} \quad [8.4]$$

En la expresión [8.4]  $\bar{y}$  representa la posición del centro de gravedad de la sección respecto a unos ejes que pasan por la fibra neutra. Al ser la expresión de  $\bar{y}$  nula, la distancia de la fibra neutra al centro de gravedad es nula, o sea la fibra neutra pasa por el centro de gravedad de la sección.

A continuación se va a aplicar la definición de momento flector  $M_z$  y se va a tener en cuenta [8.3]:

$$\begin{aligned} M_z = - \int_A \sigma_x y dA &= - \int_A E \frac{y}{\rho} y dA = - \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = - \frac{E}{\rho} I_z = - EI_z \frac{\varepsilon_x}{y} = - E \frac{\sigma_x}{Ey} I_z = - \frac{\sigma_x I_z}{y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sigma_x = - \frac{M_z y}{I_z} \end{aligned} \quad [8.5]$$

La expresión [8.5], conocida como *ley de Navier*, permite obtener las tensiones que se producen en la sección debido al momento flector  $M_z$ . Las tensiones varían linealmente con la distancia a la fibra neutra,  $y$ , y es inversamente proporcional al momento de inercia de la sección según un eje perpendicular al plano de cálculo,  $I_z$ . Si el momento flector es positivo, se produce tensión normal positiva,  $\sigma_x > 0$ , por debajo de la línea neutra y se produce tensión normal negativa,  $\sigma_x < 0$ , por encima de la línea neutra. A esta conclusión se podía haber llegado desde el momento que se indicó cómo el signo del momento flector influye en la curvatura de la deformada.

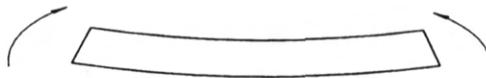
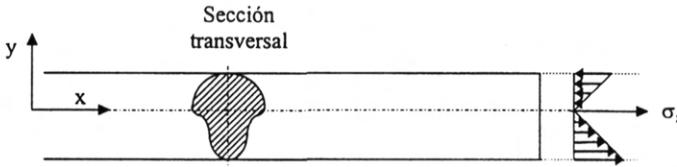


Figura 8.15. Deformada de una barra sometida a momento flector positivo.

La representación gráfica de la distribución de tensiones a lo largo de la sección queda patente en la figura 8.16 .



**Figura 8.16.** Distribución de tensiones en la sección de una barra sometida a momento flector positivo.

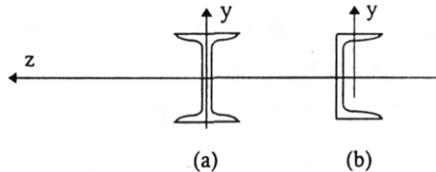
La tensión máxima de la sección aparece en los puntos más alejados de la línea neutra:

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_z y_{\max}}{I_z}$$

La fracción  $\frac{I_z}{y_{\max}}$  se denomina *módulo resistente de la sección* y se designa por  $W_z$ . Así pues:

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_z}{W_z} \quad [8.6]$$

Las secciones más resistentes a flexión serán aquellas en las que el módulo resistente sea muy grande. Para que el módulo resistente sea grande debe ser grande el momento de inercia y la  $y_{\max}$  más pequeña. Estas dos condiciones no se podrán dar al mismo tiempo, si aumenta  $y_{\max}$  aumenta el momento de inercia  $I_z$ , ahora bien el momento de inercia aumenta con  $y_{\max}^3$ , luego después de todo interesa aumentar la  $y_{\max}$ . En general grandes secciones transversales tendrán grandes módulos resistentes pero grandes áreas supone gran coste económico, luego interesan áreas que, aún siendo no muy grandes tengan un gran módulo resistente. Para ello se debe ubicar el área de la sección lo más alejado posible de la línea neutra. De ahí el gran uso de los perfiles de pared delgada en doble T y en U, figura 8.17.



**Figura 8.17.** Perfiles frecuentes en barras sometidas a flexión: a) perfil doble T, b) perfil en U.

### 8.3. TENSIONES EN LA BARRA SOMETIDA A FLEXIÓN SIMPLE

En el caso de flexión simple, además del momento flector  $M_z$  que surgía en la flexión pura, aparece el esfuerzo cortante  $V_y$ , que es la resultante de las fuerzas interiores que, según el eje OY, actúan en la sección transversal. Por lo tanto, en este caso, además de las tensiones normales, que por estar todas en la dirección del eje x se puede prescindir del subíndice ( $\sigma_x = \sigma$ ), que se producían en el caso anterior también se producen tensiones tangenciales, en las que se puede prescindir análogamente del subíndice ( $\tau_{xy} = \tau$ ). Las tensiones tangenciales van acompañadas de unas tensiones recíprocas en la dirección del eje x que producen un alabeo de la sección, o lo que es lo mismo la sección transversal deja de ser plana: la viga de la figura 8.18 se encuentra sometida a esfuerzo cortante negativo, por lo tanto a tensión tangencial positiva, ver figura 6.9.a, y el alabeo de la sección lo provoca las tensiones  $\tau_{yx}$ . En el caso particular de que el esfuerzo cortante sea uniforme a lo largo de la longitud de la barra el alabeo de todas las secciones resulta igual y la expresión obtenida para las tensiones normales a partir del momento flector no varía. Si el esfuerzo cortante no es constante, al ser el alabeo distinto para cada sección se produce una diferencia en el cálculo de las tensiones normales; sin embargo se puede demostrar que esta diferencia es del orden de  $h/L$  siendo  $h$  la dimensión transversal característica de la sección y  $L$  la longitud de la barra. Si estamos ante una barra prismática, el cociente  $h/L$  es una cantidad muy pequeña y el error que se comete al desprestigiar el esfuerzo cortante en el cálculo de las tensiones normales también.

Se puede extraer la conclusión de que las secciones transversales además de desplazarse y girar sufren un alabeo; pero éste es despreciable frente a las deformaciones debidas al momento flector.

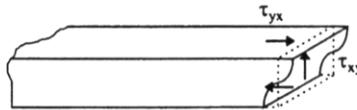


Figura 8.18. Alabeo de la sección debido al esfuerzo cortante.

Para obtener las tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante considérese un diferencial de longitud de barra que se halla sometida a esfuerzo cortante y a momento flector, figura 8.19. En esta figura se ha considerado la reciprocidad de las tensiones tangenciales. En el borde superior de la sección transversal la tensión tangencial es nula cuando no existen fuerzas rasantes en la parte superior de la barra, lema de Cauchy.

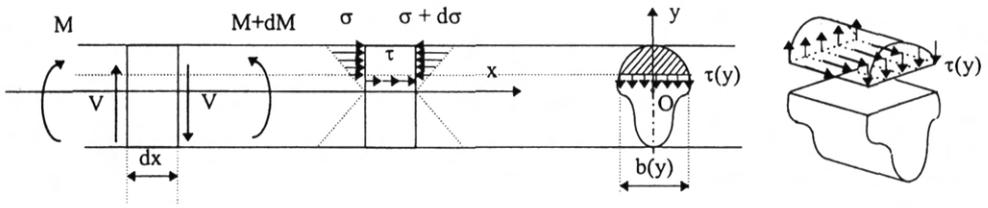


Figura 8.19. Rebanada sometida a flexión simple.

Aplicando equilibrio de fuerzas según el eje longitudinal de la barra en la rebanada de la figura 8.19:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_{A(y)} \sigma dA - \int_{A(y)} (\sigma + d\sigma) dA + \tau b(y) dx = 0 \Rightarrow \int_{A(y)} (d\sigma) dA = \tau b(y) dx$$

Aplicando la ley de Navier y teniendo en cuenta [8.2]:

$$\int_{A(y)} dM \frac{y}{I_z} dA = \tau b(y) dx \Rightarrow \tau = \frac{\int_{A(y)} \frac{dM}{dx} y dA}{I_z b(y)} = \frac{\int_{A(y)} V y dA}{I_z b(y)} = \frac{V \int_{A(y)} y dA}{I_z b(y)} = \frac{VS(y)}{I_z b(y)}$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que el esfuerzo cortante, V, es una característica de la sección y que, como tal, puede salir de la integral. En esa expresión A(y) es la el área de la parte de sección transversal que va desde un punto genérico y hasta el extremo superior, b(y) es el ancho de la sección en ese punto genérico, ver figura 8.19, y S(y) es el momento estático de la sección respecto al centro de gravedad de la sección transversal completa. Ahora se va a analizar el signo de la tensión tangencial. El esfuerzo cortante y la tensión tangencial son positivas en los casos que indica la figura 8.20.

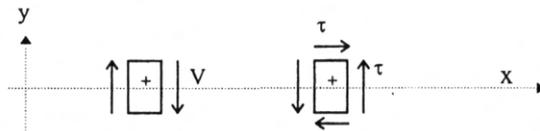


Figura 8.20. Esfuerzo cortante y tensión tangencial positivas.

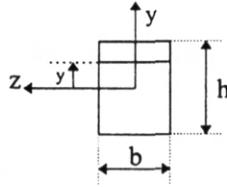
Los signos de esfuerzos cortantes y tensiones tangenciales son opuestos, luego la expresión de la tensión tangencial debida a esfuerzo cortante viene afectada por un signo negativo.

$$\tau = -\frac{VS(y)}{I_z b(y)} \quad [8.7]$$

A continuación se va a estudiar la distribución de tensiones tangenciales en varias secciones.

**Sección rectangular**

Teniendo en cuenta las características geométricas de la sección, figura 8.21.



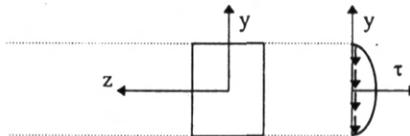
**Figura 8.21.** Sección rectangular.

$$b(y) = b; S(y) = \int_{A(y)} ydA = \int_y^{\frac{h}{2}} yb dy = b\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right); I_z = \frac{bh^3}{12}$$

La tensión tangencial da:

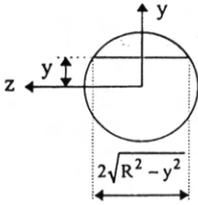
$$\tau = -\frac{VS(y)}{I_z b(y)} = -\frac{Vb\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)}{b \frac{bh^3}{12}} = -\frac{3V\left(\frac{h^2}{2} - 2y^2\right)}{bh^3}$$

Obsérvese que la distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular es parabólica, figura 8.22, encontrando su valor máximo en  $y = 0$  y siendo nula en los extremos; hecho éste que deriva de aplicar condiciones de contorno en los extremos a las tensiones recíprocas correspondientes.



**Figura 8.22.** Distribución de tensiones tangenciales en una sección rectangular.

### Sección circular



Características geométricas:

$$S(y) = \int_{A(y)} y dA = \int_y^R \sqrt{R^2 - y_1^2} dy_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$b(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2} ; I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

**Figura 8.23.** Sección circular.

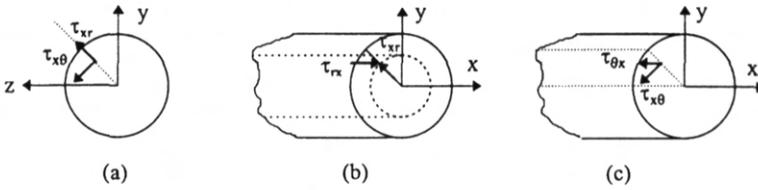
En cuanto a las tensiones:

$$\tau = -\frac{VS(y)}{I_z b(y)} = -\frac{V \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\pi R^4}{4} 2\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4V(R^2 - y^2)}{3\pi R^4}$$

La distribución de tensiones tangenciales es, también, parabólica en el caso de la sección circular siendo nula en los extremos  $y = R$  y máxima en el centro del círculo. Pero esta distribución de tensiones tangenciales supone que tienen la misma dirección que el esfuerzo cortante, sin embargo esto no es cierto. Se puede ver que en los puntos del perímetro la tensión tangencial debe ser tangente a dicho perímetro.

Así se puede ver en la figura 8.24.a que las tensiones tangenciales que actúan sobre una sección transversal pueden llevar la dirección del radio o una dirección circunferencial y ambas tienen unas tensiones recíprocas. Las dos tensiones recíprocas tienen la dirección longitudinal de la barra; pero la recíproca de la tensión tangencial radial estará contenida en un cilindro, figura 8.24.b, que en el caso de que el punto sea perimetral, ese cilindro corresponde a la superficie externa de la barra, y la recíproca de la tensión tangencial circunferencial está contenida en un plano que contiene al radio y al eje longitudinal de la barra, figura 8.24.c. Si la superficie externa está libre de cargas, las tensiones asociadas a ella son nulas. Por tanto en el perímetro las tensiones tangenciales radiales son nulas y sólo existen tensiones circunferenciales, luego la dirección de las tensiones tangenciales, al menos en la superficie no son verticales, no llevan la dirección del esfuerzo cortante.

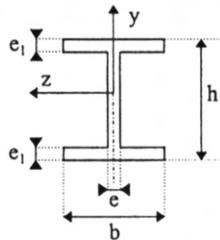
En general, este razonamiento se puede extender a cualquier sección, *en el perímetro de la sección las tensiones tangenciales son tangentes al contorno.*



**Figura 8.24.** Tensiones tangenciales en coordenadas polares que pueden aparecer en un círculo: a), tensiones radiales recíprocas: b), tensiones circunferenciales recíprocas: c).

### Sección en doble T

El perfil en doble T, figura 8.25, presenta doble simetría.



**Figura 8.25.** Sección en doble T.

Para el cálculo de las tensiones tangenciales habrá que distinguir si el punto de cálculo pertenece al ala o al alma.

### Tensión tangencial del ala

Para obtener el momento estático,  $S(y)$ , hay que considerar un área como la mostrada en la figura 8.26.

$$b(y) = b; \quad S(y) = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right)\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

$$\tau = -\frac{VS(y)}{I_x b(y)} = -\frac{V \frac{b}{2} \cdot \left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)}{b \cdot I_x}$$

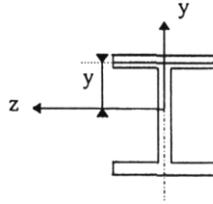
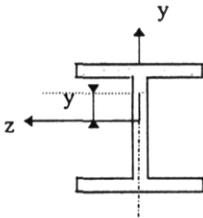


Figura 8.26. Área para el momento estático del ala.

**Tensión tangencial del alma**

En este caso hay que considerar otro área para determinar el momento estático. Para determinar el momento estático se considera el área como un área compuesta formada por el ala y la parte del alma sombreada, figura 8.27.



$$\begin{aligned}
 b(y) &= e; \\
 S(y) &= b \cdot e_1 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{e_1}{2}\right) + e \cdot \left(\frac{h}{2} - e_1 - y\right) \cdot \left(y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - e_1 - y\right)\right) = \\
 &= \frac{b \cdot e_1}{2} \cdot (h - e_1) + \frac{e}{2} \left(\left(\frac{h}{2} - e_1\right)^2 - y^2\right)
 \end{aligned}$$

Figura 8.27. Área para el momento estático del ala.

$$\tau = -\frac{VS(y)}{I_x b(y)} = -\frac{\left(\frac{b \cdot e_1}{2} \cdot (h - e_1) + \frac{e}{2} \left(\left(\frac{h}{2} - e_1\right)^2 - y^2\right)\right) V}{e \cdot I_x}$$

La distribución de tensiones tangenciales es parabólica en el ala y en el alma. En la unión ala-alma las tensiones tangenciales son:

$$\tau_{\text{ala}} = -\frac{\frac{b \cdot e_1}{2} \cdot (h - e_1) V}{b \cdot I_x}; \quad \tau_{\text{alma}} = -\frac{\frac{b \cdot e_1}{2} \cdot (h - e_1) V}{e \cdot I_x}$$

Obsérvese que en lo único que se diferencian las tensiones es en el término del espesor que en el ala es  $b$  y el alma  $e$ , teniendo en cuenta que  $b \gg e$  se produce un salto de tensiones tangenciales del ala al alma, figura 8.28.

En este perfil y, concretamente en la distribución de tensiones tangenciales en las alas, surgen la misma problemática que en el perfil circular: en la periferia del perfil la tensión

tangencial deberá ser tangente al contorno, esto supone que en la parte inferior de las alas la tensión tangencial  $\tau_{xy}$  debe ser nula y la distribución de tensiones tangenciales anteriores no es correcta. Esta cuestión se tratará más profundamente en el tema 13.

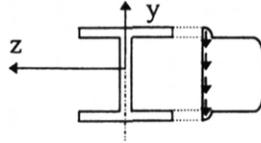


Figura 8.28. Distribución de tensiones tangenciales en una sección en doble T.

#### 8.4. TENSIONES PRINCIPALES EN LA BARRA DEBIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

Como se dijo en el tema de introducción, de las seis componentes del tensor de tensiones, en la Resistencia de Materiales son despreciables  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ; quedando como posibles tensiones no nulas  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ . En flexión simple, con un eje de simetría, son distintas de cero  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$ ; aunque se ha visto que dependiendo del contorno la dirección de la tensión tangencial puede variar y en realidad puede que sean distintas de cero las tres componentes del tensor  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$ . Si se considera un eje por el que pase la resultante de las tensiones tangenciales  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$ , eje  $OY'$  de la figura 8.29, y el eje  $OX$ , se pueden tratar los problemas de Resistencia de Materiales como problemas de tensión plana cuyo tensor de tensiones sería:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy'} \\ \tau_{xy'} & 0 \end{bmatrix} \quad [8.8]$$

Las tensiones tangenciales son las que aparecen en la figura 8.29.

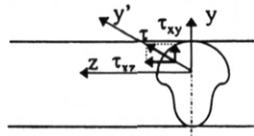


Figura 8.29. Tensiones tangenciales en una sección transversal.

Las tensiones principales de este tipo de problemas se obtienen de la misma forma que se obtuvieron las tensiones principales en tensión plana:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy'}^2}; \quad \sigma_{II} = 0; \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy'}^2} \quad [8.9]$$

### 8.5. DIMENSIONAMIENTO DE BARRAS SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE

Para dimensionar cualquier sólido hay que asegurar que la tensión equivalente de todos los puntos sobrepase la tensión de trabajo. En el caso de los aceros se suele usar como tensión equivalente la tensión de Von-Mises.

La fórmula de la tensión equivalente de Von-Mises es:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2]} \quad [8.10]$$

Teniendo en cuenta que las tensiones principales vienen dadas por la expresión [8.9]. la expresión [8.10] se transforma en:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad [8.11]$$

Donde  $\sigma$  es la tensión normal obtenida a partir del momento flector mediante la expresión [8.5] y  $\tau$  es la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante definida mediante [8.7]. Para dimensionar se iguala la tensión equivalente máxima a la tensión de trabajo:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad [8.12]$$

Y se obtienen las características geométricas de la sección:  $I_z$ , momento de inercia,  $W_z$ , módulo resistente,  $S_{m\acute{a}x}$ , momento estático máximo. Esto no es siempre fácil hay que iterar. Sin embargo en las vigas de grandes luces, grandes longitudes entre apoyos, se cumple que  $\sigma \gg \tau$  y se puede despreciar la tensión tangencial frente a la normal quedando reducida la tensión de Von-Mises a la tensión normal. Sin embargo una vez dimensionado sólo con el flector máximo es recomendable comprobar, mediante Von-Mises, en aquellos puntos, de la sección y del eje longitudinal de la viga, que pudieran ser peligrosos. Se recuerda que mientras que la tensión normal máxima se encuentra en el extremo de la sección, la tensión tangencial máxima está en el centro de gravedad de la misma.

Se puede hacer un dimensionamiento por envolvente consistente en tomar la tensión tangencial máxima total (en la sección de máximo cortante y en el centro de gravedad de esta sección) y la tensión normal máxima total (en la sección de máximo momento flector y en el extremo) y combinar ambas. Este tipo de dimensionamiento, aunque está bastante del lado de la seguridad, no siempre es recomendable por ser muy ineconómico.



## Capítulo 9

### FLEXIÓN. DEFORMACIONES

#### 9.1. ECUACIÓN GENERAL DE LA ELÁSTICA

En el capítulo anterior se obtuvieron las tensiones que se producen en flexión simple y su relación con los esfuerzos, cortantes y flectores. Las tensiones son necesarias acotarlas para que no se produzca el fallo. El conocimiento de las deformaciones también es necesario para asegurar que se cumplan las hipótesis de pequeñas deformaciones y para impedir que se produzcan deformaciones excesivas inadmisibles desde un punto de vista funcional y/o estético. En el capítulo anterior se vio que las secciones transversales experimentan un giro debido al momento flector y las fibras longitudinales flectan de forma que siempre permanecen perpendiculares a la sección transversal. Las fibras longitudinales se curvan variando su longitud, unas se acortan y otras se alargan, habiendo una fibra que ni se acorta ni se alarga, la línea neutra, que está constituida por el lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones.

Se define la línea elástica como la curva deformada de la fibra neutra, o sea el eje de la viga ya deformado. Ahora bien si se calculan desplazamientos de la línea neutra; esto ¿supone que sólo es posible conocer los desplazamientos de esta fibra y que no es posible el conocimiento del resto de los puntos de la sección?. Esto no es así, lo que sucede es que se puede establecer la hipótesis de que la sección transversal no cambia su forma en el proceso de flexión y por tanto todos los puntos de la sección van a sufrir el mismo desplazamiento según el eje OY.

Con la expresión [8.3] y la [8.5] y teniendo en cuenta que estamos en flexión plana con un único flector  $M_z = M$  y un momento de inercia  $I_z = I$ , se llega a:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad [9.1]$$

Sabiendo que  $\rho$  es el radio de curvatura de la elástica y que  $\frac{1}{\rho}$  es la curvatura. En la expresión [9.1] no se ha puesto el signo, que se analizará más adelante. La curvatura de una línea se puede definir como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [9.2]$$

Como se adopta la hipótesis de pequeñas deformaciones los ángulos,  $\theta$ , de la deformada son pequeños y su tangente,  $\text{tang } \theta = y'$ , también y se pueden despreciar frente a la unidad, por lo tanto se puede prescindir de  $y'^2$  frente a uno, considerando estas cuestiones se llega a que la curvatura de la deformada es:

$$\frac{1}{\rho} = y''$$

Con lo que se obtiene la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad [9.3]$$

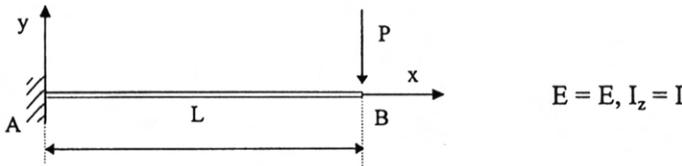
La ecuación de la elástica muestra que la curvatura de la deformada está proporcionalmente relacionada con el momento flector. En cuanto al signo hay que recordar la relación entre el momento flector y la curvatura de una viga: si el momento flector es positivo la curvatura de la deformada también lo es, o lo que es lo mismo la deformada es cóncava, con los "cuernos" para arriba, y si el momento flector es negativo la deformada es convexa; un momento flector nulo supone un punto de inflexión en la deformada.

El producto  $EI$  se conoce como rigidez de la viga a flexión, entendiéndose como tal la "oposición" que muestra la viga a ser deformada en el proceso de flexión.

La expresión [9.3] representa una ecuación diferencial lineal de grado dos, luego para ser resuelta se necesita disponer de dos condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno se determinan conociendo el desplazamiento y/o el giro de algunos puntos de la viga como se verá en los ejemplos siguientes.

A continuación se hallará la ecuación de la elástica a distintos tipos de vigas bajo distintos tipos de cargas:

**Voladizo con carga puntual aplicada en el extremo libre, figura 9.1.**



**Figura 9.1.** Voladizo sometido a carga puntual.

Lo primero que hay que hacer para determinar las deformaciones es obtener los esfuerzos y, más concretamente, el momento flector. Si se corta por un plano genérico y se aísla la parte derecha de la viga se obtiene, tomando el sistema de coordenadas de la figura anterior:

$$\left. \begin{array}{l}
 \sum F_y = 0 \Rightarrow P - V = 0 \\
 \sum M_B = 0 \Rightarrow -M - P(L-x) = 0
 \end{array} \right\} V = P; \quad M = -P(L-x) \quad [9.4]$$

A continuación se aplicará la ecuación diferencial de la elástica y se integra:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} = -\frac{P(L-x)}{EI} \Rightarrow y = \frac{P}{EI} \frac{(x-L)^3}{6} + Ax + B$$

Los valores A y B son constantes de integración que se obtienen aplicando condiciones de contorno en desplazamiento. Las condiciones de contorno en desplazamientos son los desplazamientos, desplazamientos lineales y o giros, conocidos debido a los apoyos de la viga. En esta viga se conocen el desplazamiento y el giro  $\theta$  del punto A:

$$\begin{aligned}
 y_A &= 0 \\
 \theta_A &= 0
 \end{aligned}$$

Como se trata de pequeños desplazamientos también los giros son pequeños y se puede aproximar el valor del giro al de la tangente:  $\theta_A \approx \text{tang}\theta_A = y'_A$ .

$$\begin{aligned}
 y(x=0) = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{P}{EI} \frac{(0-L)^3}{6} + A \cdot 0 + B \Rightarrow B = \frac{P}{EI} \frac{L^3}{6} \\
 y'(x=0) = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{P}{EI} \frac{(0-L)^2}{2} + A \Rightarrow A = -\frac{P}{EI} \frac{L^2}{2}
 \end{aligned}$$

Con lo cual ya se ha obtenido la expresión completa de la elástica:

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left( \frac{(x-L)^3}{6} - \frac{L^2}{2}x + \frac{L^3}{6} \right) \quad [9.5]$$

### Viga biapoyada sometida a carga distribuida constante

Los diagramas de esfuerzos de la viga de la figura 9.2 se obtuvieron en el tema 8. Para determinar la ecuación de la elástica interesa conocer el momento flector.

$$M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

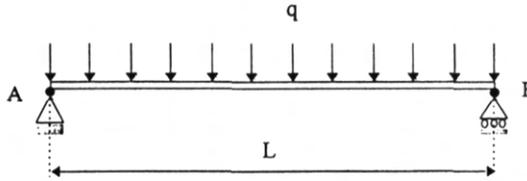


Figura 9.2. Viga biapoyada sometida a carga distribuida.

La ecuación de la elástica queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{\frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}}{EI} \Rightarrow y = \frac{q}{2EI} \left( \frac{x^3L}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + Ax + B = \frac{qx^3}{12EI} \left( L - \frac{x}{2} \right) + Ax + B$$

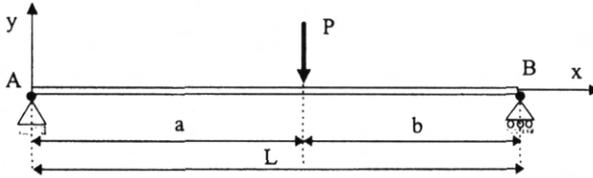
Las condiciones de contorno que hay que aplicar son los desplazamiento lineales nulos en ambos extremos de la viga:

$$y_A = 0 \Rightarrow y(x=0) = 0 \Rightarrow \frac{q \cdot 0^3}{12EI} \left( L - \frac{0}{2} \right) + A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

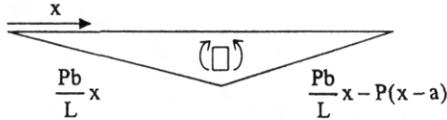
$$y_B = 0 \Rightarrow y(x=L) = 0 \Rightarrow \frac{qL^3}{12EI} \left( L - \frac{L}{2} \right) + AL = 0 \Rightarrow A = -\frac{qL^3}{24EI}$$

Quedando la ecuación de la elástica:

$$y = \frac{qx}{24EI} (L^3 - 2Lx^2 + x^3) \quad [9.6]$$

**Viga biapoyada sometida a carga puntual, figura 9.3.****Figura 9.3.** Viga biapoyada sometida a carga puntual.

La distribución de momentos flectores de este problema, figura 9.4, también se obtuvo en el capítulo 8.

**Figura 9.4.** Diagrama de momentos flectores de la viga figura 9.3.

Como el dominio de definición del momento flector viene separado en dos partes distintas, habrá que determinar la ecuación de la elástica en cada una de estas dos partes:

$$0 < x < a$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{Pb}{EI} \frac{x}{L} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{Pb}{2EI} \frac{x^2}{L} + A_1 \Rightarrow y_1 = \frac{Pb}{6EI} \frac{x^3}{L} + A_1 x + B_1$$

$$a < x < L$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_2}{dx^2} &= \frac{Pb}{EI} \frac{x}{L} - \frac{P}{EI} (x-a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy_2}{dx} &= \frac{Pb}{2EI} \frac{x^2}{L} - \frac{P}{2EI} (x-a)^2 + A_2 = \frac{P}{2EI} \left( \frac{b}{L} x^2 - (x-a)^2 \right) + A_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_2 &= \frac{P}{6EI} \left( \frac{b}{L} x^3 - (x-a)^3 \right) + A_2 x + B_2 \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno que se pueden aplicar son las mismas que en el ejemplo anterior. Esto supone aplicar dos condiciones de contorno para obtener cuatro incógnitas, las cuatro constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ . Sin embargo se puede aplicar otras dos condiciones y

son la continuidad de la elástica y de su derivada, o sea del giro: si la elástica y su derivada no fueran continuas la viga estaría "rota":

$$y_A = 0 \Rightarrow y_1(x=0) = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{Pb}{6EI} \frac{0^3}{L} + A_1 \cdot 0 + B_1 \Rightarrow B_1 = 0;$$

$$\frac{dy_1}{dx}(x=a) = \frac{dy_2}{dx}(x=a) \Rightarrow \frac{Pb}{2EI} \frac{a^2}{L} + A_1 = \frac{P}{2EI} \left( \frac{b}{L} a^2 - (a-a)^2 \right) + A_2 \Rightarrow A_2 = A_1$$

$$y_1(x=a) = y_2(x=a) \Rightarrow \frac{Pb}{6EI} \frac{a^3}{L} + A_1 a + B_1 = \frac{P}{6EI} \left( \frac{b}{L} a^3 - (a-a)^3 \right) + A_2 a + B_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow B_2 = B_1 = 0;$$

$$y_B = 0 \Rightarrow y(x=L) = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{P}{6EI} \left( \frac{b}{L} L^3 - (L-a)^3 \right) + A_2 L + B_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1 = A_2 = -\frac{P}{6EIL} \left( \frac{b}{L} L^3 - (L-a)^3 \right)$$

Concretando, la elástica viene definida en dos tramos de la siguiente forma:

$$0 < x < a;$$

$$y_1 = \frac{Pb}{6EI} \left( a^2 - 2aL + x^2 \right) \frac{x}{L} \quad [9.7]$$

$$a < x < L$$

$$y_2 = \frac{Pa}{6EI} \left( a^2 - 2Lx + x^2 \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \quad [9.8]$$

## 9.2. TEOREMAS DE MÖHR PARA EL CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN FLEXIÓN

Los teoremas de Möhr van a permitir la obtención de desplazamientos y giros de puntos determinados de la deformada a partir del diagrama de momentos flectores.

**1<sup>er</sup> Teorema de Möhr:** El ángulo finito  $\theta$  que forman las tangentes a la elástica en dos puntos cualesquiera A y B es igual al área del diagrama de flectores, comprendida entre las verticales correspondientes, dividida entre la rigidez a flexión de la viga.

La demostración de este teorema es inmediata a partir de la expresión de la ecuación de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dx} \right|_B - \left. \frac{dy}{dx} \right|_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx$$

$\frac{dy}{dx}$  es la pendiente a la deformada, que se puede asimilar al giro:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}\theta \approx \theta$$

Con lo que:

$$\theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI} dx \quad [9.9]$$

El signo del giro coincide con el signo de la pendiente de la deformada.

**2º) Teorema de Möhr:** La distancia vertical de un punto B de la elástica a la tangente a la misma en otro punto A es igual al momento estático del área de momentos flectores comprendida entre las verticales de A y B, con relación a la vertical de B, dividido entre la rigidez EI.

La demostración de este segundo teorema de Möhr se puede realizar a partir de la figura 9.5 en la que se ha representado un trozo de elástica.

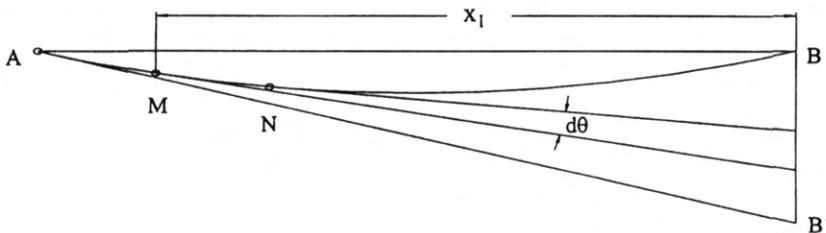


Figura 9.5. Elástica de una viga cualquiera

Si M y N son dos puntos situados entre A y B, infinitamente próximos, siendo el ángulo que forman sus tangentes  $d\theta$ , y la distancia de esos puntos a la vertical de B,  $x_1$ , la distancia entre los dos puntos de corte de esas dos tangentes con la vertical a B es  $x_1 d\theta$ :

$$x_1 d\theta = x_1 \frac{M dx}{EI}$$

Para obtener el valor de  $\overline{BB'}$  se integra la expresión anterior:

$$\overline{BB'} = \int_{x_A}^{x_B} x_1 \frac{M dx}{EI} \quad [9.10]$$

En esta expresión  $\overline{BB'}$  es negativo cuando el momento flector es positivo, según se desprende de la curvatura de la deformada, y la distancia  $x_1$  va de izquierda a derecha.

Para aclarar que estos teoremas se pueden utilizar para el cálculo de desplazamientos y giros se implementará con los mismos ejemplos que se han utilizado para ilustrar la ecuación de la elástica.

### Desplazamiento y giro del extremo de un voladizo sometido a una carga puntual en su extremo

Se va a obtener la flecha y el giro en el voladizo de la figura 9.1 mediante los teoremas de Mörh. Ya se obtuvo la ecuación de momentos flectores de esa viga:  $M = -P(L - x)$ , expresión [9.4]; cuyo diagrama es el de la figura 9.6.



Figura 9.6. Diagrama de flectores del voladizo de la figura 9.1.

En el voladizo de la figura 9.1 se conoce el giro y el desplazamiento vertical del punto A:  $\theta_A = 0$ ;  $y_A = 0$ ; sabiendo esto, se puede obtener el desplazamiento y el giro del punto B aplicando el primer y el segundo teorema de Mörh respectivamente.

#### 1<sup>er</sup> Teorema de Mörh

$EI\theta_B - EI\theta_A = \int_A^B M(x) dx = -\frac{ML}{2}$ . Para obtener este resultado basta con considerar que la

integral representa el área del triángulo formado por el diagrama de flectores y el eje de abscisas. El área es negativa al ser la integral de una curva negativa. Como el giro en el punto A, por condiciones de contorno es cero, el giro en B es:

$$EI\theta_B = -\frac{ML}{2} \quad [9.11]$$

El signo del giro en B es negativo lo cual supone que la pendiente de la deformada también lo es.

## 2° Teorema de Möhr

Como el punto A tiene pendiente nula la distancia del punto B, situado sobre la deformada, a la tangente a la deformada de A es el desplazamiento vertical del punto B luego el desplazamiento vertical de B se puede obtener, directamente, mediante el segundo teorema de Möhr. Para obtener el momento estático se puede proceder igual que para obtener el área, se puede obtener directamente del dibujo sin necesidad de realizar una integración, teniendo en cuenta que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra a 1/3 de altura de la base. En cuanto al signo es de lógica que sea negativo porque el desplazamiento es hacia abajo, también se desprende de la expresión [9.10].

$$EIy_B = \frac{2L}{3} \frac{ML}{2} = -\frac{ML^2}{3} \quad [9.12]$$

## Desplazamiento en un punto cualquiera y giro de los extremo de una viga biapoyada sometida a carga uniforme

Ahora se va a estudiar la viga de la figura 9.2, cuya deformada aparece en la figura 9.7.

Al igual que sucedía con el voladizo del ejemplo anterior, el diagrama y la expresión del momento flector correspondientes a esta viga ya han sido calculados en el tema 8. La

expresión del momento flector es  $M = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}$ .

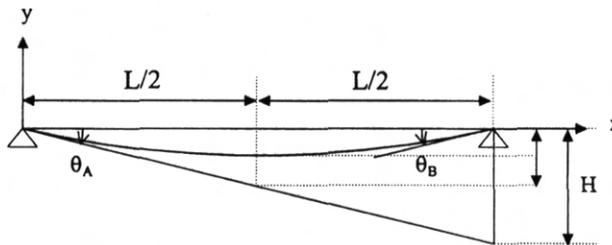


Figura 9.7. Elástica de la viga de la figura 9.2.

En este caso no se conoce el giro de ningún punto, luego no se pueden obtener los giros directamente del primer teorema de Möhr: hay que recurrir al segundo teorema de Möhr para la obtención de los giros. Si se observa la figura 9.7 y se tiene en cuenta el 2° teorema de Möhr:

$$EIH_A = \int_0^L (L-x) * \left( \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{q}{2} \int_0^L (L-x)^2 \cdot x dx = \frac{qL^4}{24}$$

$$\theta_A \approx \text{tang}\theta_A = \frac{H_A}{L} \Rightarrow EI\theta_A = EI \frac{H_A}{L} = \frac{qL^3}{24}$$

El valor que se ha obtenido para el giro en A es un valor absoluto pues se puede ver en la figura 9.7 que es negativo: es un sentido a favor de las agujas del reloj; por consiguiente:

$$EI\theta_A = - \frac{qL^3}{24} \quad [9.12]$$

Para obtener el giro en B se aplica el primer teorema de Mohr entre los punto A y B.

$$EI\theta_B - EI\theta_A = \int_A^B M(x)dx = \frac{q}{2} \int_0^L (Lx - x^2)dx = \frac{qL^3}{12}$$

$$EI\theta_B = EI\theta_A + \frac{qL^3}{12} = -\frac{qL^3}{24} + \frac{qL^3}{12} = \frac{qL^3}{24} \quad [9.13]$$

Este cculo hubiera sido innecesario en este ejemplo, en particular, debido a la simetría del problema: Los giros en A y B deben ser iguales y de sentido contrario.

A continuacin se va a determinar el desplazamiento del punto medio de la viga que, por simetría, debe ser el punto de máximo desplazamiento.

Por el segundo teorema de Mohr:

$$EIh = \frac{q}{2} \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} - x\right)(L-x)xdx = \frac{qL^4}{128}$$

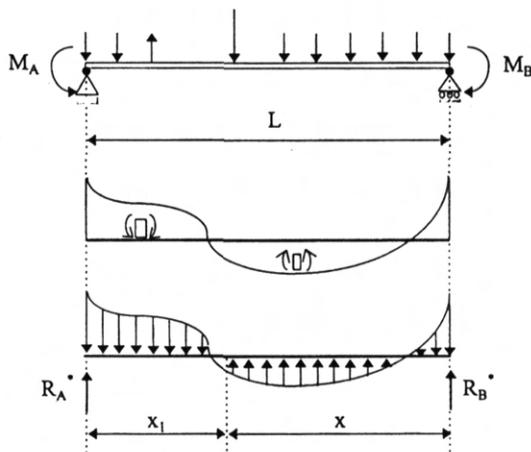
Por otra parte  $H = \text{tang}\theta_A \frac{L}{2} \approx \theta_A \frac{L}{2} \Rightarrow EIH = \frac{qL^4}{48}$

$$EIy = EIH - EIh = \frac{qL^4}{48} - \frac{qL^4}{128} = \frac{5qL^4}{384} \quad [9.14]$$

### 9.3. TEOREMAS DE LA VIGA CONJUGADA PARA EL CÁLCULO DE DEFORMACIONES EN FLEXIN.

Los teoremas de la viga conjugada se obtienen a partir de los teoremas de Mohr para el cculo de deformaciones. Considérese una viga biapoyada de rigidez EI, a la que se

denominará *viga principal*, sometida a un sistema de cargas cualesquiera, se considera la *viga conjugada* de esta viga a la misma viga sometida a un sistema de cargas igual al diagrama de momentos flectores de la viga principal y dividido entre  $EI$ . Si el momento flector de la viga principal es positivo, las cargas en la viga conjugada irán hacia arriba y viceversa, figura 9.8.



**Figura 9.8.** Viga sometida a una distribución de cargas cualquiera: a), diagrama de flectores de la misma: b) y viga conjugada: c).

Existe una correspondencia entre los esfuerzos, esfuerzos cortantes y momentos flectores, de la viga conjugada y las deformaciones, giros y flechas, de la viga principal. Esta correspondencia se engloba en los dos teoremas de la viga conjugada. En lo que sigue a las magnitudes correspondientes a la viga conjugada se les afectará por un asterisco (\*).

**1<sup>er</sup> Teorema de la Viga Conjugada:** Los giros de la viga principal coinciden con los esfuerzos cortantes en la viga conjugada.

La demostración de este teorema es inmediata:

Los giros en los extremos de la viga principal se pueden obtener a partir del segundo teorema de M $\ddot{o}$ hr:

$$\theta_A = -\frac{\int_0^L M(L-x)dx}{EIL}; \quad \theta_B = \frac{\int_0^L Mx dx}{EIL}$$

Los resultados anteriores son los que se obtendrían para obtener las reacciones en la viga conjugada a partir de la regla de la palanca:

$$R_A^* = -\frac{\int_0^L M(L-x)dx}{EIL}; \quad R_B^* = -\frac{\int_0^L Mxdx}{EIL}$$

En el resultado anterior se ha tenido en cuenta que las fuerzas distribuidas de la viga conjugada coinciden con el momento flector cambiado de signo de la viga principal. No hay que perder de vista, tampoco, que el primer teorema de la viga conjugada dice que el giro de la viga principal coincide con el esfuerzo cortante en la viga conjugada, no con la reacción. Esto supone que en el apoyo de la izquierda, el apoyo A, el signo del giro coincidirá con el de la reacción en A y en el apoyo de la derecha, apoyo en B, el signo del giro será contrario al de la reacción. Para entender esto hay que recordar el signo del esfuerzo cortante:



En cuanto a los giros en un punto cualquiera se pueden obtener a partir del primer teorema de Möhr :

$$\theta = \theta_A + \frac{\int_0^L Mdx}{EI_z}$$

Este resultado es análogo al obtenido para el esfuerzo cortante en la viga conjugada:

$$\frac{dV^*}{dx} = -q^* = M \Rightarrow V^* = V^*(x=0) + \frac{\int_0^L M dx}{EI_z} \Rightarrow V = R_A^* + \frac{\int_0^L Mdx}{EI_z}$$

La igualdad anterior también se puede obtener si se aplica equilibrio de fuerzas verticales entre 0 y x.

**2º Teorema de la Viga Conjugada:** Las flechas de la viga principal coinciden con los momentos flectores en la viga conjugada.

En los extremos de la viga principal la flecha es cero porque hay sendos apoyos. En los extremos de la viga conjugada los momentos flectores son nulos porque es una viga biapoyada que no tiene momentos puntuales aplicados.

En cuanto a la flecha de la viga principal en cualquier punto se puede obtener a partir del segundo teorema de Möhr y tal como se vio en [9.10]:

$$\delta = \theta_A x + \frac{\int_0^x M(x-x_1) dx_1}{EI_z}$$

Este resultado es análogo al que se obtendría para obtener el momento flector en un punto cualquiera de la viga conjugada, así si se toma momento en una coordenada  $x$ :

$$M^*(x) - R_A^* x + \frac{\int_0^x q^*(x-x_1) dx_1}{EI_z} = 0 \Rightarrow M^*(x) = R_A^* x + \frac{\int_0^x M(x-x_1) dx_1}{EI_z}$$

Esta analogía entre los esfuerzos de la viga conjugada y las deformaciones de la viga principal permiten establecer una correspondencia entre los enlaces de la viga principal y conjugada:

- A un apoyo extremo de la viga principal corresponde un apoyo extremo de la viga conjugada.
- A un empotramiento de la viga principal corresponde un extremo libre de la viga conjugada.
- A un extremo libre de la viga principal corresponde un empotramiento de la viga conjugada.
- A un apoyo intermedio de la viga principal corresponde una rótula de la viga conjugada.
- A una rótula de la viga principal le corresponde un apoyo intermedio de la viga conjugada.

La viga conjugada de una viga cualquiera queda reflejada en la figura 9.9.

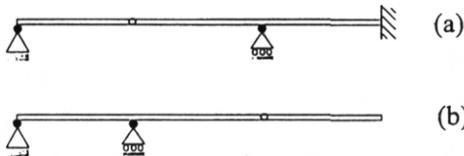


Figura 9.9. Equivalencia entre viga principal a) y viga conjugada b).

La viga conjugada que, en principio, podría parecer la forma más simple de obtener los desplazamientos no es tal. No hay que olvidar que el esfuerzo cortante es de un orden mayor que la carga distribuida y el momento flector es, a su vez, de un orden superior al del

esfuerzo cortante. Esto se traduce en que para obtener la flecha de la viga original a partir de los momentos flectores de la viga conjugada hay que integrar cuatro veces la carga distribuida, que es, en definitiva, lo se hace mediante la ecuación de la elástica. Sin embargo la viga conjugada es bastante útil para el cálculo de giros en los extremos de las vigas.

### Giro de los extremo de una viga biapoyada sometida a carga uniforme mediante los cálculos de la viga conjugada

Nuevamente se van a calcular los giros y desplazamientos de la viga de la figura 9.2, esta vez mediante los teoremas de la viga conjugada.

La viga conjugada correspondiente a la viga de la figura 9.2 es:

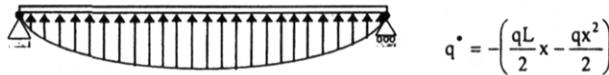


Figura 9.10. Viga conjugada de la viga de la figura 9.2.

Para obtener las reacciones en los extremos basta aplicar la regla de la palanca:

$$R_A^* = -\frac{\int_0^L M(L-x)dx}{EI_z} = -\frac{\int_0^L \left(\frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)(L-x)dx}{EI_z} = -\frac{qL^3}{24EI_z}$$

$$R_B^* = -\frac{\int_0^L Mx dx}{EI_z} = -\frac{\int_0^L \left(\frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)x dx}{EI_z} = -\frac{qL^3}{24EI_z}$$

Como ya se indicó, el giro en el extremo izquierdo coincide en valor y signo con la reacción de la viga conjugada y el giro del extremo derecho coincide en valor pero no en signo:

$$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI_z}; \quad \theta_B = \frac{qL^3}{24EI_z}$$

Los resultados anteriores son los mismos que se obtuvieron en 9.2

#### 9.4. EFECTO DEL ESFUERZO CORTANTE EN LA DEFORMACIÓN DE LAS VIGAS

Hasta ahora sólo se ha tenido en cuenta el momento flector para obtener el desplazamiento transversal de los puntos de una viga. Pero parece lógico que el esfuerzo cortante, que tiene componente transversal, provoque desplazamiento en esa dirección. En efecto el esfuerzo cortante provoca un desplazamiento relativo de las secciones transversales contiguas.

Debido a la reciprocidad de las tensiones tangenciales, éstas provocan un alabeo de la sección transversal, tal como se muestra en la figura 9.11.

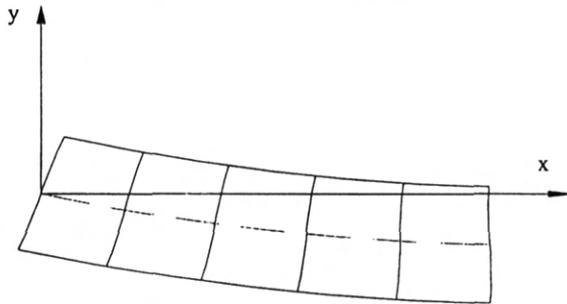


Figura 9.11. Alabeo de la sección debido al esfuerzo cortante.

Los centros de gravedad de cada sección sufren sólo un desplazamiento vertical, no hay desplazamiento según la dirección longitudinal de la viga para estos puntos. Recuérdese que no se consideran deformaciones de segundo orden en la Resistencia de Materiales; al menos en lo que a este libro compete.

La distorsión de la sección viene caracterizada por la distorsión del centro de gravedad de la misma. Si se representa por  $y_1$  la flecha producida por el esfuerzo cortante:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dy} \quad [9.15]$$

Como en el centro de gravedad  $\frac{du}{dy} = 0$ , la deformación angular queda:

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{dy_1}{dx} = -\frac{VS_{\max}}{b(0)I_z G} \Rightarrow \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{S_{\max}}{b(0)I_z G} \frac{dV}{dx} = \frac{S_{\max} q}{b(0)I_z G}$$

Obsérvese que la pendiente de la elástica y el cortante tienen signo contrario; esto es lógico porque un cortante positivo como el de la figura provoca una pendiente negativa.

Uniéndolo los efectos del momento flector y del esfuerzo cortante se obtiene la ecuación de la elástica completa:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \left( M + \frac{S_{\max}q}{b(0)} 2(1+\nu) \right) \quad [9.16]$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta la relación entre constantes elásticas:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Se pueden aplicar los teoremas de Mörh y los teoremas de la viga conjugada considerando el efecto del cortante sin más que considerar en lugar del momento flector la expresión:

$$M + \frac{S_{\max}q}{b(0)} 2(1+\nu)$$

Para ver la contribución despreciable del esfuerzo cortante en la expresión del elástica se va a hacer un análisis dimensional de las dos expresiones anteriores. En este análisis se va a considerar las dimensiones características siguientes:

dimensión característica de la sección transversal:  $h$

longitud de la viga:  $L$

carga característica, por unidad de longitud:  $Q$

Con estas dimensiones características se tiene que el orden de cada término es el siguiente:

$$M \approx QL^2; \quad S_{\max} \approx h^3; \quad q \approx Q; \quad b(0) \approx h; \quad 2(1+\nu) \approx 1$$

Con lo que la relación entre los dos términos de la elástica queda:

$$\frac{\frac{S_{\max}q}{b(0)} 2(1+\nu)}{M} \approx \frac{h^3Q}{hQL^2} \approx \frac{h^2}{L^2} \ll 1$$

Con la relación anterior queda demostrada que la deformada por cortante tiene una influencia despreciable en la deformada total de la viga.

## Capítulo 10

## FLEXIÓN. HIPERESTATICIDAD

## 10.1. INTRODUCCIÓN

La definición que se dio en el tema de tracción y compresión sobre problemas estáticamente determinados y problemas estáticamente indeterminados es igualmente válida en flexión:

**Problemas estáticamente determinados:** La sola aplicación de las ecuaciones de equilibrio permiten obtener todas las reacciones y los esfuerzos del problema.

**Problemas estáticamente indeterminados:** Para obtener las reacciones y esfuerzos del problema es necesario aplicar, además de las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento.

La diferencia entre este tipo de sollicitación y la tracción y compresión es que mientras que en tracción y compresión la ecuación de equilibrio que se necesita es:  $\sum F_x = 0$ ; en flexión serán necesarias:  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M = 0$ . Además cambian los desplazamientos: en tracción y compresión son longitudinales y en flexión serán desplazamientos transversales y giros.

## 10.2. VIGA EMPOTRADA POR UN EXTREMO Y APOYADA POR EL OTRO

Se va a considerar una viga en la que actúa una sola carga concentrada  $P$ , como se muestra en la figura 10.1.

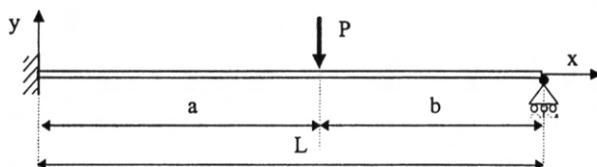


Figura 10.1. Viga apoyada-empotrada sometida a carga puntual.

El proceso que se debe seguir para obtener los diagramas de esfuerzos empieza igual que en el caso de las vigas isostáticas:

1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares, figura 10.2:

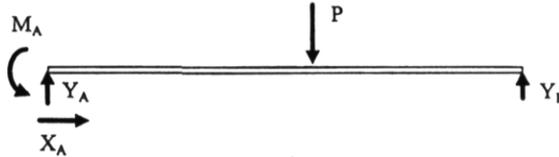


Figura 10.2. Reacciones vinculares de la viga de la figura 10.1.

2) Obtener las reacciones vinculares mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow X_A = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - P = 0 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow M_A + Y_B L - Pa = 0\end{aligned}$$

Obsérvese que se tiene, como viene siendo habitual, tres ecuaciones de equilibrio:  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  y  $\sum M_A = 0$ ; pero en este caso hay cuatro incógnitas:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $M_A$ . Se define el grado de hiperestaticidad como el número de ecuaciones menos el número de incógnitas. En este caso el grado de hiperestaticidad:

$$\text{grado de hiperestaticidad} = n^\circ \text{ de incógnitas} - n^\circ \text{ de ecuaciones} = 4 - 3 = 1$$

El número de ecuaciones no siempre es tres; puede ocurrir que existan ecuaciones de equilibrio interno, como en el caso de una rótula interna en la que se puede imponer que el momento flector en esa rótula es cero; así si en el problema anterior se coloca una rótula interior la viga deja de ser hiperestática, figura 10.3.

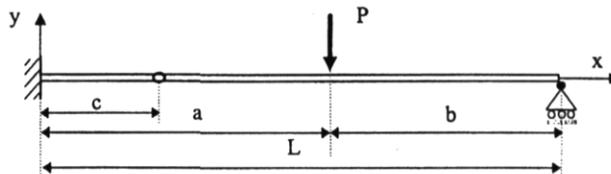


Figura 10.3. Viga de la figura 10.1a la que se le ha colocado una rótula.

Si se liberan los vínculos, figura 10.4: las ecuaciones de equilibrio son (en las ecuaciones de equilibrio se ha tomado momento en C, de la parte derecha de la viga):

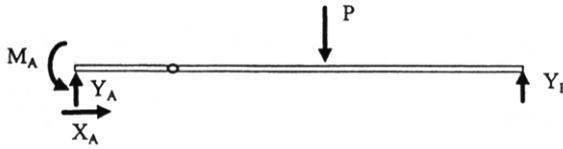


Figura 10.4. Reacciones vinculares de la viga de la figura 10.3.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow X_A = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow Y_A + Y_B - P = 0 \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow M_A + Y_B L - Pa = 0 \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow Y_B(L-c) - P(a-c) = 0 \end{aligned} \right\} Y_A = \frac{Pb}{L-c}; Y_B = \frac{P(a-c)}{L-c}; M_A = \frac{L-a}{L-c} P c$$

Una vez obtenidas las reacciones se pueden obtener los esfuerzos, luego el caso anterior se puede tratar como cualquier viga isostática. Pero el problema de la figura 10.1 sí es hiperestático y como se ha mencionado, de grado de hiperestaticidad 1. El proceso que se debe seguir a partir de ahora diverge del proceso desarrollado para luego volver a confluir al mismo fin:

3) Liberar tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad tenga el problema.

En este caso el grado de hiperestaticidad es uno, luego habrá que liberar una incógnita hiperestática.

Lo primero que hay que especificar es en qué consiste liberar una incógnita hiperestática. Lo que hay que hacer es quitar la coacción que entraña esa incógnita hiperestática y sustituirla por la reacción correspondiente. En este problema existen tres posibilidades: liberar  $Y_A$ ,  $Y_B$ , ó  $M_A$ , figura 10.5., no se puede liberar  $X_A$  porque esta incógnita no se relaciona con las otras tres a través de las ecuaciones de equilibrio y es un valor ya conocido. Una vez liberada la hiperestática la viga se transforma en isostática.

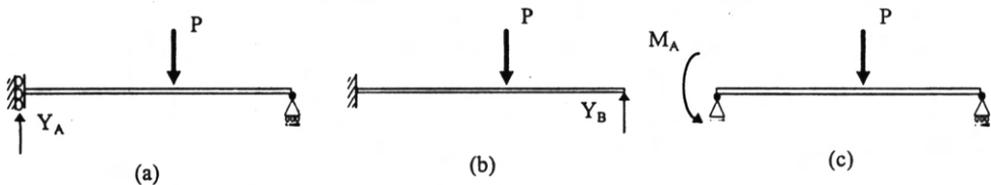


Figura 10.5. Posibles transformaciones de la viga de la figura 10.1 en vigas isostáticas.

Para elegir de las tres posibilidades cuál es la idónea se va a estudiar el siguiente paso:

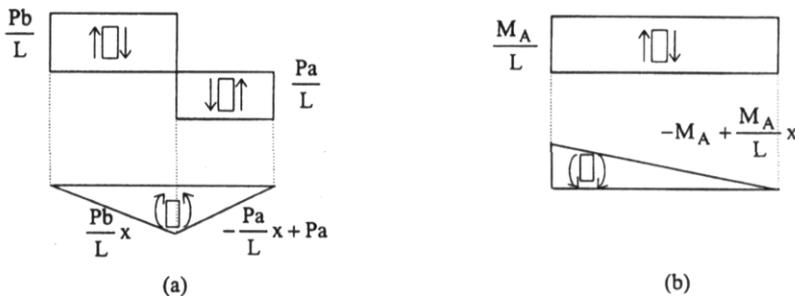
4) Aplicar compatibilidad en la dirección de la incógnita liberada. Esto supone, bien obtener la flecha en A, figura 10.5.a, o la flecha en B, figura 10.5.b, o bien obtener el giro en A, figura 10.5.c. Debido a que el cálculo de giros es más fácil que el de flecha se va a optar por esta última opción, o sea por la opción 10.5.c. Este apartado se puede descomponer a su vez en varios subapartados:

4.a) Descomponer el problema en dos: el isostático con las cargas externas y el isostático con la incógnita hiperestática como carga externa, figura 10.6.



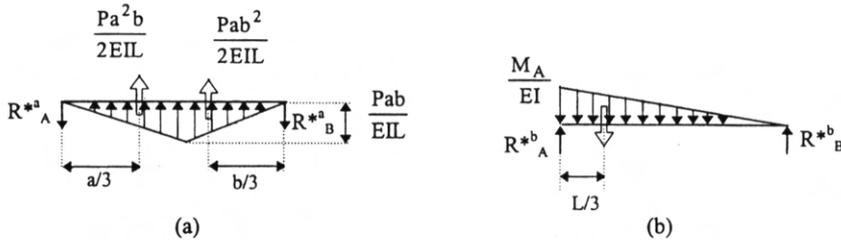
**Figura 10.6.** Descomposición del problema 10.5.c. en dos problemas isostáticos: a) con las cargas externas, b) con la reacción vincular como carga externa.

4.b) Obtener el giro de cada uno de los subproblemas. Como es un giro en un punto extremo se va a obtener la reacción en la viga conjugada. Los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores vienen representados en la figura 10.7



**Figura 10.7.** Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de las vigas de la figura 10.6: a) corresponde a 10.6.a. y b) corresponde a 10.6.b.

A partir de los diagramas de flectores se puede obtener las vigas conjugadas correspondientes, figura 10.8. Para la obtención de reacciones vinculares en la viga conjugada se procede igual que en la viga principal: se sustituye la fuerza distribuida por una fuerza puntual situada en el centro de gravedad de la distribución de la fuerza.



**Figura 10.8.** Vigas conjugadas correspondientes a las vigas principales de la figura 10.6: a) corresponde a la 10.6.a) y b) corresponde a 10.6.b)

Si se aplica equilibrio para cada una de las vigas conjugadas de la figura 10.8 se obtiene:

$$R_A^* = \frac{Pab(L+a)}{6EI}; R_B^* = \frac{Pab(L+b)}{6EI}; R_A^* = \frac{M_A L}{3EI}; R_B^* = \frac{M_A L}{6EI}$$

Una vez obtenidas las reacciones y teniendo en cuenta la equivalencia entre giros y esfuerzo cortante se tienen los giros en los extremos:

$$\theta_A^a = -\frac{Pab(L+a)}{6EI}; \theta_B^a = \frac{Pab(L+b)}{6EI}; \theta_A^b = \frac{M_A L}{3EI}; \theta_B^b = -\frac{M_A L}{6EI} \quad [10.1]$$

Para el signo de los giros se ha tenido en cuenta el signo del esfuerzo cortante de la viga conjugada.

4.c) Obtener el giro total como suma de los giros de los dos problemas:

$$\theta_A = \theta_A^a + \theta_A^b = -\frac{Pab(L+a)}{6EI} + \frac{M_A L}{3EI} \quad [10.2]$$

$$\theta_B = \theta_B^a + \theta_B^b = \frac{Pab(L+b)}{6EI} - \frac{M_A L}{6EI} \quad [10.3]$$

4.d) Por último se aplica compatibilidad en la dirección de la incógnita hiperestática liberada; o sea hay que especificar cuál es el desplazamiento conocido en esa dirección:

En la dirección de  $M_A$  el desplazamiento es el giro  $\theta_A$  que es nulo, para la viga original de la figura 10.1.:

$$\theta_A = \theta_A^a + \theta_A^b = -\frac{Pab(L+a)}{6EI} + \frac{M_A L}{3EI} = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = \frac{Pab(L+a)}{2L^2} \quad [10.4]$$

Al salir el momento positivo, se entiende que el sentido del momento coincide con el representado. Se puede hacer un análisis cualitativo de esta cuestión teniendo en cuenta la curvatura previsible de la deformada. Si la viga fuese biapoyada, o sea el subproblema representado en la figura 10.6.a, todo el diagrama de momentos flectores sería positivo, luego la curvatura de la deformada también sería positiva, como, además la deformada irá hacia abajo, la elástica tendrá la forma que se indica en la figura 10.9.



Figura 10.9. Elástica de la viga de la figura 10.6.a.

El efecto del empotramiento en el extremo radica en que el giro en el extremo A es nulo, para ello el sentido del momento  $M_A$  debe ser como se indica en la figura 10.10 que es el sentido que, matemáticamente, se había obtenido.



Figura 10.10. Elástica de la viga de la figura 10.1.

5) Obtención de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en cada sección de la viga. En este caso se podría hacer como en la viga isostática: una vez conocido el valor de  $M_A$  se puede "cortar" por cada sección representativa de la viga, sustituyendo el resto de la viga por su efecto, y establecer equilibrio a un lado de la sección de corte; aunque se pueden simplificar bastante los cálculos aplicando superposición a los problemas (a) y (b).

El valor de los esfuerzos es:

$0 < x < a$ :

$$V = V^a + V^b = \frac{Pb}{L} + \frac{Pab(L+a)}{2L^3} \quad [10.5]$$

$$M = M^a + M^b = -\frac{Pab(L+a)}{2L^2} + \left(\frac{Pb}{L} + \frac{Pab(L+a)}{2L^3}\right)x \quad [10.6]$$

$a < x < L$

$$V = V^a + V^b = -\frac{Pa}{L} + \frac{Pab(L+a)}{2L^3} \tag{10.7}$$

$$M = M^a + M^b = Pa - \frac{Pab(L+a)}{2L^2} + \left(-\frac{Pa}{L} + \frac{Pab(L+a)}{2L^3}\right)x \tag{10.8}$$

Los diagramas de esfuerzos se muestran en la figura 10.11.

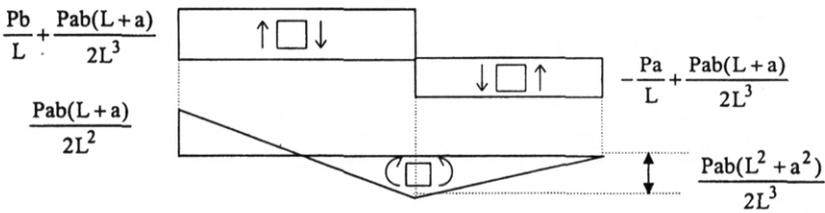


Figura 10.11. Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 10.1.

### 10.3. VIGA CON LOS DOS EXTREMOS EMPOTRADOS

Aunque, en principio el grado de hiperestaticidad es de tres, las reacciones horizontales son despreciables y no se van a tener en cuenta.

#### Viga biempotrada con carga puntual.

Se va a considerar una viga con la misma carga puntual del apartado anterior pero empotrada en los dos extremos, figura 10.12.

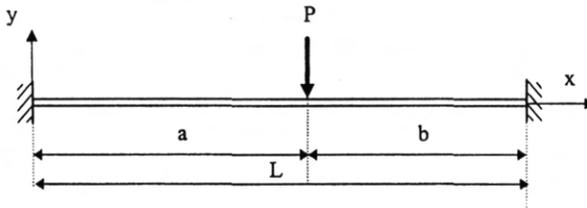


Figura 10.12. Viga biempotrada sometida a carga puntual.

El proceso de cálculo es el mismo:

1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares, no se van a poner las reacciones horizontales, figura 10.13:

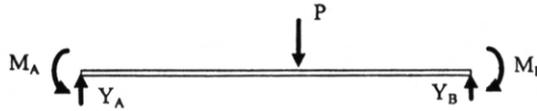


Figura 10.13. Viga de la figura 10.12 con las reacciones vinculares liberadas.

2) Obtener las reacciones vinculares mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - M_B + Y_B L - Pa = 0$$

En este problema se tienen cuatro incógnitas:  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $M_A$  y  $M_B$ ; por lo que el grado de hiperestaticidad es:

$$\text{grado de hiperestaticidad} = n^\circ \text{ de incógnitas} - n^\circ \text{ de ecuaciones} = 4 - 2 = 2$$

3) Liberar tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad tenga el problema.

En este caso el grado de hiperestaticidad es dos; luego habrá que liberar dos incógnitas hiperestática. En este problema existen seis posibilidades: liberar las parejas  $Y_A$ ,  $M_A$ ;  $Y_B$ ,  $M_B$ ;  $Y_A$ ,  $M_B$ ;  $Y_B$ ,  $M_A$ ; y por último  $M_A$ ,  $M_B$ . Hay que tener mucho cuidado de no liberar una pareja de hiperestáticas que transformen el problema en un mecanismo; así no se puede liberar el conjunto  $Y_A$ ,  $Y_B$  porque una vez liberadas estas dos incógnitas el sistema que queda es un mecanismo, figura 10.14.

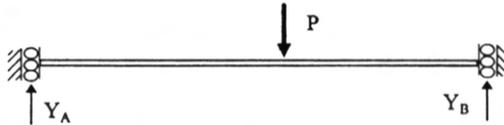
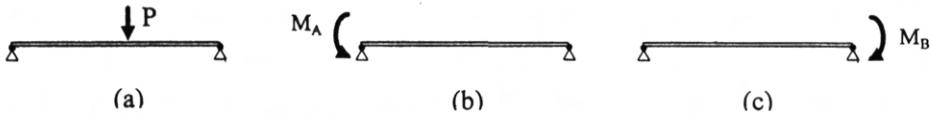


Figura 10.14. Mecanismo obtenido a partir de liberar dos incógnitas hiperestáticas a la viga de la figura 10.12.

De las seis posibilidades que se indican se elegirá  $M_A$ ,  $M_B$ , porque a la hora de aplicar el paso siguiente se van a calcular giros y no desplazamientos.

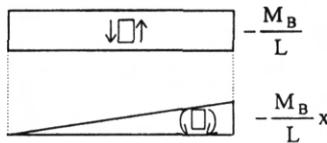
4) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas liberadas.

4.a) Descomponer el problema en tres: el isostático con las cargas externas, el isostático con una incógnita hiperestática como carga externa y el isostático con la otra incógnita hiperestática como carga externa, figura 10.15.



**Figura 10.15.** *Descomposición del problema 10.12 en tres problemas isostáticos: a) con las cargas externas, b) con el momento vincular  $M_A$  como carga externa, c) con el momento vincular  $M_B$  como carga externa.*

**4.b)** Obtener el giro de cada uno de los subproblemas. Como ya se han obtenido los giros de los subproblemas (a) y (b); sólo se van a obtener los giros del subproblema (c), para ello se obtienen los diagramas de esfuerzos correspondientes, figura 10.16.



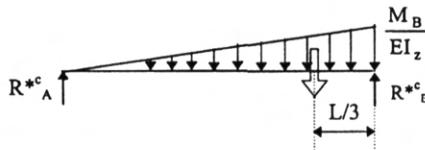
**Figura 10.16.** *Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores del subproblema de la figura 10.15.c*

Igualmente se va a obtener la viga conjugada, sólo para el subproblema (c). Las reacciones de la viga conjugada de la figura 10.17 son:

$$R^*{}_A = \frac{M_B L}{6EI}; \quad R^*{}_B = \frac{M_B L}{3EI}$$

Una vez conocidas las reacciones de la viga conjugada se pueden determinar los giros de la viga principal:

$$\theta_A^c = \frac{M_B L}{6EI}; \quad \theta_B^c = -\frac{M_B L}{3EI}$$



**Figura 10.17.** *Viga conjugada del subproblema de la figura 10.15.c*

**4.c)** Obtener el giro total de los extremos como suma de los giros de los tres problemas:

$$\theta_A = \theta_A^a + \theta_A^b + \theta_A^c = -\frac{Pab(L+a)}{6EIL} + \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} \quad [10.10]$$

$$\theta_B = \theta_B^a + \theta_B^b + \theta_B^c = \frac{Pab(L+b)}{6EIL} - \frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} \quad [10.11]$$

4.d) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas hiperestáticas liberadas. En este caso los desplazamientos conocidos son los giros nulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$ :

$$\theta_A = -\frac{Pab(L+b)}{6EIL} + \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} = 0$$

$$\theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6EIL} - \frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} = 0$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $M_A$  y  $M_B$ :

$$\left. \begin{aligned} 2M_A + M_B &= \frac{Pab(L+a)}{L^2} \\ M_A + 2M_B &= \frac{Pab(L+b)}{L^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_A = \frac{Pa^2b}{L^2}; \quad M_B = \frac{Pab^2}{L^2} \quad [10.12]$$

Los dos momentos tienen el sentido que, inicialmente, se le dio, figura 10.18. Se puede hacer un análisis cualitativo similar al que se hizo en el apartado anterior.



Figura 10.18. Elástica del problema 10.12.

5) Obtención de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en cada sección de la viga. Se pueden obtener aplicando superposición a los problemas (a), (b) y (c).

El valor de los esfuerzos es:

$$0 < x < a$$

$$V = V^a + V^b + V^c = \frac{Pb}{L} + \frac{Pa^2b}{L^3} - \frac{Pab^2}{L^3} \quad [10.13]$$

$$M = M^a + M^b + M^c = -\frac{Pa^2b}{L^2} + \left(\frac{Pb}{L} + \frac{Pa^2b}{L^3} - \frac{Pab^2}{L^3}\right)x \quad [10.14]$$

$a < x < L$

$$V = V^a + V^b + V^c = -\frac{Pa}{L} + \frac{Pa^2b}{L^3} - \frac{Pab^2}{L^3} \quad [10.15]$$

$$M = M^a + M^b + M^c = Pa - \frac{Pa^2b}{L^2} + \left(-\frac{Pa}{L} + \frac{Pa^2b}{L^3} - \frac{Pab^2}{L^3}\right)x \quad [10.16]$$

Los diagramas de esfuerzos se reflejan en la figura 10.19.

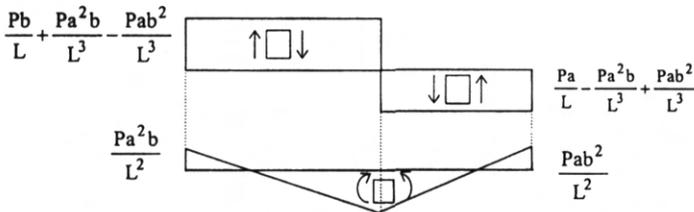


Figura 10.19. Diagrama de esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 10.11

**Viga biempotrada con carga distribuida, figura 10.20.**

Al igual que en el caso anterior, se va a considerar que las cargas transversales no influyen en el alargamiento de la viga, con lo que no se van a considerar las cargas horizontales.

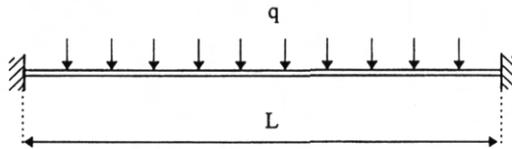


Figura 10.20. Viga biempotrada sometida a cargas distribuidas

1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares. Como se ha dicho no se van a considerar las cargas horizontales, figura 10.21.

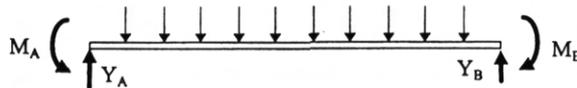


Figura 10.21. Viga de la figura 10.20 en la que se ha sustituido sus apoyos por reacciones vinculares.

2) Obtener las reacciones vinculares mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto. Tampoco se va a considerar equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A + Y_B - qL = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - M_B + Y_B L - \frac{qL^2}{2} = 0$$

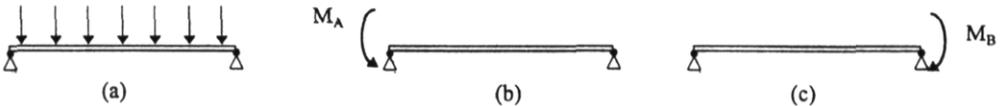
En este problema, al igual que en el ejemplo anterior, se tienen cuatro incógnitas:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ ,  $M_A$  y  $M_B$ ; por lo que el grado de hiperestaticidad es:

$$\text{grado de hiperestaticidad} = n^\circ \text{ de incógnitas} - n^\circ \text{ de ecuaciones} = 4 - 2 = 2$$

3) Liberar tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad tenga el problema. Se liberarán  $M_A$  y  $M_B$ .

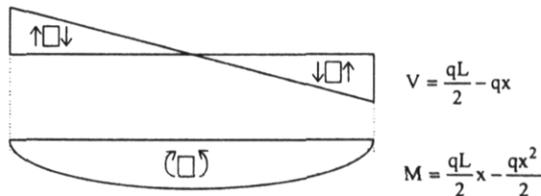
4) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas liberadas.

4.a) Descomponer el problema en tres: el isostático con las cargas externas, el isostático con una incógnita hiperestática como carga externa y el isostático con la otra incógnita hiperestática como carga externa, figura 10.22.



**Figura 10.22.** Descomposición del problema 10.20 en tres problemas isostáticos: a) con las cargas externas, b) con el momento vincular  $M_A$  como carga externa, c) con el momento vincular  $M_B$  como carga externa.

4.b) Obtener el giro de cada una de los subproblemas. Como ya se han obtenido los giros de los subproblemas (b) y (c), sólo se van a obtener los giros del subproblema (a). Ahora bien, el giro del subproblema (a) ya se obtuvo en el capítulo 9 y los diagramas de esfuerzos cortantes y flectores en el capítulo 8, figura 10.23.



**Figura 10.23.** Esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 10.22.a.

$$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI} \qquad \theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

4.c) Obtener el giro total como suma de los giros de los tres problemas:

$$\theta_A = \theta_A^a + \theta_A^b + \theta_A^c = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} \quad [10.17]$$

$$\theta_B = \theta_B^a + \theta_B^b + \theta_B^c = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} \quad [10.18]$$

4.d) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas hiperestáticas liberadas. En este caso los desplazamientos conocidos son los giros nulos  $\theta_A$  y  $\theta_B$ :

$$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_A L}{3EI} + \frac{M_B L}{6EI} = 0$$

$$\theta_B = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} = 0$$

Se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $M_A$  y  $M_B$ :

$$\left. \begin{aligned} 2M_A + M_B &= \frac{qL^2}{4} \\ M_A + 2M_B &= \frac{qL^2}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_A = \frac{qL^2}{12}; \quad M_B = \frac{qL^2}{12} \quad [10.19]$$

En este caso se podía suponer, desde el principio, por simetría de la viga, que los dos momentos,  $M_A$  y  $M_B$ , son iguales y se podían haber reducido los cálculos.

5) Obtención de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en cada sección de la viga aplicando superposición a los problemas (a), (b) y (c), figura 10.24.

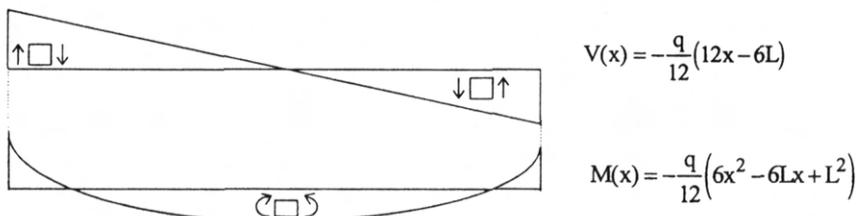


Figura 10.24. Esfuerzos cortantes y momentos flectores de la viga de la figura 10.20.

### 10.4. VIGAS CONTINUAS

Una viga continua es una viga que presenta varios apoyos interiores. Se denomina *vano* al tramo de la viga continua situado entre dos apoyos. El grado de hiperestaticidad, supuestas despreciables las fuerzas horizontales, depende del número de apoyos intermedios, de las condiciones de los apoyos externos y de las rótulas intermedias siendo igual al grado de hiperestaticidad externa, debida a los apoyos externos, más el número de apoyos intermedios menos el número de rótulas intermedias. Así el grado de hiperestaticidad de la viga de la figura 10.25 es:

$$\text{grado de hiperestaticidad} = n^\circ \text{ de apoyos intermedios} + \text{hiperestaticidad externa} - n^\circ \text{ de rótulas} = 2 + 1 = 3$$

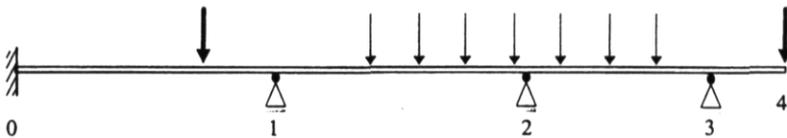


Figura 10.25. Viga continua.

Para la resolución de estos problemas hiperestáticos se puede seguir un proceso parecido al de los casos anteriores.

1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares. En este caso se puede pensar en sustituir, además, los apoyos intermedios, para luego, en el apartado 4) aplicar compatibilidad obligando que la flecha en estos apoyos intermedios sea nula; esto, aunque se puede hacer, no es lo más aconsejable por la dificultad que supone la obtención de flechas frente al cálculo de giros. Para resolver esta cuestión se separa la viga continua en sus diferentes vanos sustituyendo el resto de la viga por su efecto: un momento, figura 10.26.

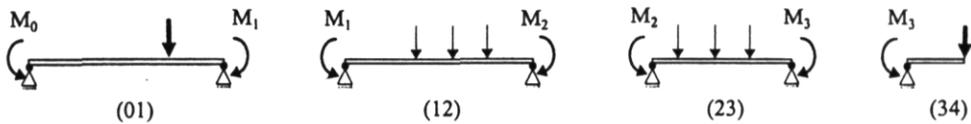


Figura 10.26. Descomposición de la viga continua de la figura 10.25 en sus vanos: 01, 12, 23 y 34.

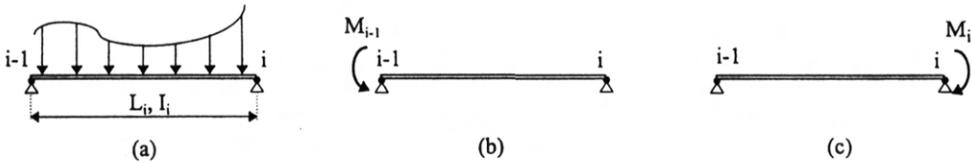
Si se observa la figura 10.26, en virtud del principio de acción-reacción, en los nodos intermedios y, para los vanos adyacentes, los momentos intermedios son iguales y de sentido contrario

2) Obtener las reacciones vinculares mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto. Recuérdese que este paso nos sirve para saber el grado de hiperestaticidad del problema. Este paso no es necesario al conocerse el grado de hiperestaticidad.

3) Liberar tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad tenga el problema. Se liberarán los momentos en los apoyos, sean intermedios o extremos.

4) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas liberadas.

4.a) Descomponer cada vano en tres problemas: el isostático con las cargas externas, el isostático con una incógnita hiperestática como carga externa y el isostático con la otra incógnita hiperestática como carga externa. Para un vano genérico se tiene la descomposición de la figura 10.27.



**Figura 10.27.** Descomposición cada vano de una viga continua en los problemas a) debido a las cargas externas, b) debido al momento de la izquierda, c) debido al momento de la derecha.

4.b) Obtener el giro de cada uno de los subproblemas. Como ya se han obtenido los giros de los subproblemas (b) y (c); sólo se van a obtener los giros del subproblema (a).

Obsérvese que el giro del subproblema (a) se puede obtener fácilmente al ser un problema isostático mediante cualesquiera de los métodos estudiados en el capítulo anterior: ecuación de la elástica, teoremas de Möhr o teoremas de la viga conjugada. Si se estudia el teorema de la viga conjugada la expresión de los giros para el subproblema (a) son:

$$\theta_{i-1}^a = -\frac{S_{i,i}^M}{EI_i} \quad [10.20]$$

$$\theta_i^a = \frac{S_{i,i-1}^M}{EI_i} \quad [10.21]$$

Donde:

$S_{i,i}^M$ : Momento estático del área encerrada por el diagrama de momentos flectores del vano  $i$  'visto' desde el punto  $i$ ; o sea el área encerrada por el diagrama de flectores por la distancia del centro de gravedad de este área al punto  $i$ .

$S_{i,i-1}^M$ : Momento estático del área encerrada por el diagrama de momentos flectores del vano  $i$  'visto' desde el punto  $i-1$ ; o sea el área encerrada por el diagrama de flectores por la distancia del centro de gravedad de este área al punto  $i-1$ .

Los giros de los subproblema (b) y (c) han sido calculados en los apartados anteriores:

$$\theta_{i-1}^b = \frac{M_{i-1}L_i}{3EI_i} \quad \theta_i^b = -\frac{M_{i-1}L_i}{6EI_i}$$

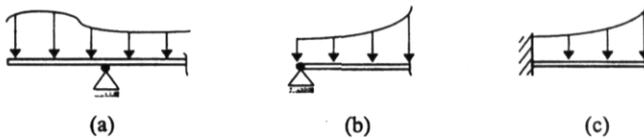
$$\theta_{i-1}^c = \frac{M_iL_i}{6EI_i} \quad \theta_i^c = -\frac{M_iL_i}{3EI_i}$$

4.c) Obtener el giro total como suma de los giros de los tres problemas:

$$\theta_{i-1} = \theta_{i-1}^a + \theta_{i-1}^b + \theta_{i-1}^c = -\frac{S_{i,i}^M}{EI_i} + \frac{M_{i-1}L_i}{3EI_i} + \frac{M_iL_i}{6EI_i}$$

$$\theta_i = \theta_i^a + \theta_i^b + \theta_i^c = \frac{S_{i,i-1}^M}{EI_i} - \frac{M_{i-1}L_i}{6EI_i} - \frac{M_iL_i}{3EI_i}$$

4.d) Aplicar compatibilidad en la dirección de las incógnitas hiperestáticas liberadas. Hay que hacer una distinción entre nudos intermedios y nudos extremos, figura 10.28.



**Figura 10.28.** Nudos en una viga continua: a) nudo intermedio, b) nudo extremo articulado, c) nudo extremo empotrado.

Si el nudo es intermedio, figura 10.28.a, hay que igualar el giro obtenido mediante el cálculo en el vano de la izquierda al giro obtenido mediante el cálculo en el vano de la derecha. Así supóngase que el nudo  $i$  es un nudo intermedio:

$$\theta_i^{\text{izq}} = \theta_i^{\text{der}}$$

$$\frac{S_{i,i-1}^M}{EI_i} - \frac{M_{i-1}L_i}{6EI_i} - \frac{M_iL_i}{3EI_i} = -\frac{S_{i+1,i+1}^M}{EI_{i+1}} + \frac{M_iL_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI_{i+1}}$$

Si se desarrolla la igualdad anterior se obtiene una expresión que liga los tres momentos  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  y  $M_{i+1}$  y que se conoce como *teorema de los tres momentos* que se muestra a continuación, en el caso de que los vanos tengan la misma inercia:

$$M_{i-1}L_i + 2M_i(L_i + L_{i+1}) + M_{i+1}L_{i+1} = 6(S_{i,i-1}^M + S_{i+1,i+1}^M) \quad [10.22]$$

Si el nudo es extremo se deben distinguir dos casos:

Figura 10.28.b. Se conoce el momento, éste es el caso de un apoyo simple en el que el momento extremo es nulo o el caso de un voladizo en el que el momento es el producido por las cargas del voladizo en el apoyo. En este caso bastará con sustituir el momento por su valor.

Figura 10.28.c. Se conoce el giro. Este es el caso de un empotramiento en el que el giro es nulo. En este caso:

$$\frac{S_{i,1}^M}{EI} - \frac{M_0 L_1}{6EI} - \frac{M_1 L_1}{3EI} = 0$$

Al final se obtiene un sistema de ecuaciones con tantas ecuaciones e incógnitas como momentos en los apoyos tenga la viga continua, siendo las incógnitas estos momentos. Si existe alguna rótula intermedia se debe aplicar que el momento en esa rótula sea nulo. Una vez obtenidos los momentos en los apoyos se pueden obtener los esfuerzos cortantes y momentos flectores aplicando superposición en cada vano, de forma análoga a como se hizo en el apartado anterior de viga biempotrada.

Si la inercia de la viga continua es variable el proceso es exactamente igual, lo único que hay que especificar es la inercia de cada apoyo y para cada apoyo distinguir entre un vano y otro por si hubiera cambio brusco de inercia al pasar de un apoyo a otro.

## 10.5. PÓRTICOS Y CUADROS.

**Pórtico:** Sistema de barras cuyas directrices se encuentran en un plano y que, fundamentalmente, se encuentran sometidas a flexión y a compresión, figura 10.29.a.

**Cuadro:** Es un pórtico que carece de ligaduras externas y que, por lo tanto tiene sus cargas externas autoequilibradas, figura 10.29.b.

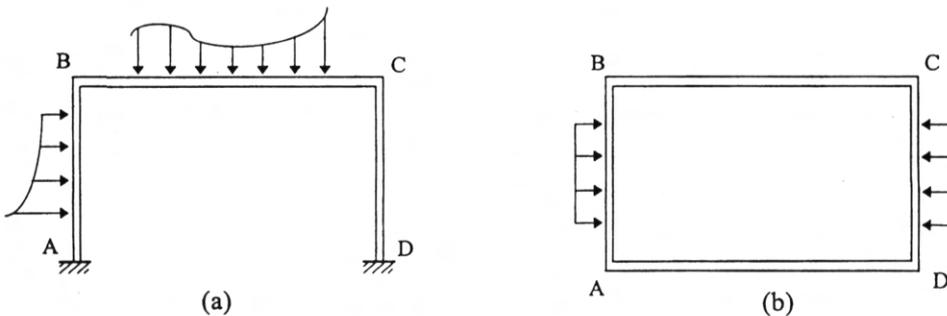


Figura 10.29. a) Pórtico y b) Cuadro

Hasta ahora se han determinado los esfuerzos de los sistemas hiperestáticos mediante *métodos de compatibilidad*; esto es, se han dejado como incógnitas los esfuerzos en puntos externos o intermedios y se ha aplicado compatibilidad de desplazamientos en la dirección de esos esfuerzos. Recuérdese que los esfuerzos coinciden, en los puntos extremos, con las reacciones y, en el caso de vigas continuas, los momentos en el apoyo coinciden con el momento flector en ese punto. Sin embargo, en este apartado, se va a aplicar un *método de equilibrio*. En los métodos de equilibrio se invierte el proceso: se dejan como incógnitas los desplazamientos, lineales o giros, y se aplica equilibrio de fuerzas exteriores o interiores en los puntos en los que el desplazamiento es una incógnita.

Hay que resaltar que se pueden aplicar métodos de equilibrio para resolver vigas continuas y métodos de compatibilidad para resolver pórticos y cuadros, todos estos métodos los estudia la teoría de estructuras. Pero en este caso concreto, la atención no debe centrarse en la bondad de la metodología sino en la comprensión de la base teórica.

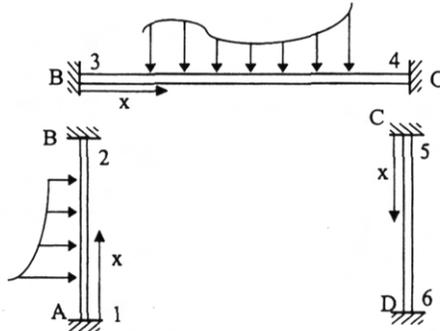
En líneas generales la diferencia primordial entre los métodos de equilibrio y los métodos de compatibilidad es que, como ya se ha visto, en los métodos de equilibrio se van liberando las incógnitas hiperestáticas con la finalidad de resolver problemas isostáticos mientras que en los métodos de compatibilidad se coacciona, en el mayor grado posible, los nudos de la estructura para impedir todo posible movimiento, entendiendo por nudo de la estructura los extremos de las barras. Luego, esas coacciones, impedimentos de los nudos a ser movidos, de más hay que ir liberándolas.

Una barra tiene todos los movimientos de sus puntos extremos impedidos si esa barra está biempotrada, luego lo primero que se supone es que todas las barras de la estructura están biempotradas. Como esto no es verdad, hay que ir liberando los posibles desplazamientos de los nudos extremos, esto es, los giros y flecha relativa entre ambos extremos. No se pueden considerar los desplazamientos de cada nudo extremo como dos movimientos independientes puesto que no se consideran desplazamientos como sólido rígido.

El proceso que se va a seguir para resolver el pórtico es el siguiente.

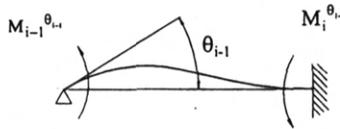
1) Se va a coger cada una de las barras, que va a estar sometida a un estado de cargas y sujeta a unos apoyos extremos cualesquiera y se va a seguir el proceso que, anteriormente se ha esbozado:

1.a) Lo primero que se va a hacer es “agarrar” en todo lo posible la barra; o sea suponer que está biempotrada y calcular los momentos de empotramiento de los puntos extremos, figura 10.30. Se deben calcular los momentos de empotramiento  $M_1^e$ ,  $M_2^e$ ,  $M_3^e$ ,  $M_4^e$ ,  $M_5^e$  y  $M_6^e$  como se efectuó en el caso de vigas biempotradas.



**Figura 10.30.** Pórtico de la figura 10.29.a. en el que cada barra ha sido considerada biempotrada.

**1.b)** A continuación se libera el giro del extremo izquierdo de cada barra, figura 10.31. Antes habría que saber cómo se establece el sistema de coordenadas en cada barra del pórtico. Aunque se puede considerar cada barra por separado tomando en cada una de ellas el sistema de coordenadas que se desee, lo habitual es “mirar” el pórtico desde dentro y seguir cada barra siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj tal y como se muestra en la figura 10.30, coincidiendo el extremo izquierdo de cada barra con el origen de la coordenada x.



**Figura 10.31.** Barra cualquiera del pórtico 10.29 al que se le ha liberado el giro izquierdo  $\theta_{i-1}$ .

Si se libera el giro  $\theta_{i-1}$ , ese giro debe estar provocado por un momento aplicado en ese punto, además se provoca un momento de empotramiento en el extremo opuesto. El valor del giro  $\theta_{i-1}$  debido a los momentos extremos, según se desprende de los apartados anteriores, es:

$$EI_i \theta_{i-1} = \frac{M_{i-1}^{\theta_{i-1}} L_i}{3} - \frac{M_i^{\theta_{i-1}} L_i}{6}$$

El extremo en i, al seguir siendo un empotramiento presenta giro nulo:

$$EI_i \theta_i = \frac{M_i^{\theta_{i-1}} L_i}{3} - \frac{M_{i-1}^{\theta_{i-1}} L_i}{6} = 0 \Rightarrow M_i^{\theta_{i-1}} = \frac{M_{i-1}^{\theta_{i-1}}}{2}$$

Con lo que el giro en  $i-1$  queda definitivamente:

$$EI_i \theta_{i-1} = \frac{M_{i-1}^{\theta_{i-1}} L_i}{4}$$

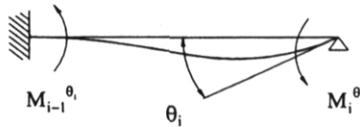
Eso supone que debido al giro en  $i-1$  aparecen un momento en  $i-1$  y otro en  $i$  de valores:

$$M_{i-1}^{\theta_{i-1}} = \frac{4EI_i \theta_{i-1}}{L_i} \quad M_i^{\theta_{i-1}} = \frac{2EI_i \theta_{i-1}}{L_i}$$

Al cociente  $K = \frac{4EI}{L}$  se le conoce como rigidez a flexión de la viga y representa el cociente entre el esfuerzo, momento flector, y el desplazamiento correspondiente, giro. Con lo que se pueden poner los momentos en función de los giros y de la rigidez.

$$M_{i-1}^{\theta_{i-1}} = K_i \theta_{i-1} \quad M_i^{\theta_{i-1}} = \frac{K_i}{2} \theta_{i-1}$$

1.c) Se libera el giro del extremo derecho, figura 10.32.



**Figura 10.32.** Barra cualquiera del pórtico 10.29 al que se le ha liberado el giro derecho  $\theta_i$ .

Si se libera el giro  $\theta_i$ , ese giro debe estar provocado por un momento aplicado en ese punto, además se provoca un momento de empotramiento en el extremo opuesto. El valor del giro  $\theta_i$  debido a los momentos extremos es:

$$EI_i \theta_i = \frac{M_i^{\theta_i} L_i}{3} - \frac{M_{i-1}^{\theta_i} L_i}{6}$$

El extremo en  $i-1$ , al seguir siendo un empotramiento presenta giro nulo:

$$EI_i \theta_{i-1} = \frac{M_{i-1}^{\theta_i} L_i}{3} - \frac{M_i^{\theta_i} L_i}{6} = 0 \Rightarrow M_{i-1}^{\theta_i} = \frac{M_i^{\theta_i}}{2}$$

Con lo que el giro en  $i$  queda definitivamente:

$$EI_i \theta_i = \frac{M_{i-1}^{\theta} L_i}{4}$$

Eso supone que debido al giro en  $i-1$  aparecen un momento en  $i-1$  y otro en  $i$  de valores:

$$M_i^{\theta} = \frac{4EI_i \theta_i}{L_i} = K_i \theta_i \quad M_{i-1}^{\theta} = \frac{2EI_i \theta_i}{L_i} = \frac{K_i}{2} \theta_{i-1}$$

**1.d)** Se permite el desplazamiento relativo entre los puntos extremos de la viga, figura 10.33.



**Figura 10.33.** Barra cualquiera del pórtico 10.29 a la que se le ha permitido el desplazamiento transversal relativo entre sus extremos  $\Delta$ .

En la figura 10.33 se ha descendido el apoyo  $i$ , resultado análogo se habría obtenido si asciende el apoyo  $i-1$ : en ambos casos este desplazamiento se traduce en un giro positivo de los extremos. Este giro valdrá:

$$\theta_{i-1} = \theta_i = \frac{\Delta_i}{L_i}$$

Al ser el giro igual en ambos extremos iguales serán los momentos extremos:  $M^\Delta = M_{i-1}^\Delta = M_i^\Delta$  y el giro de los puntos extremos se puede obtener a partir de estos momentos:

$$EI_i \theta_{i-1} = \frac{M_{i-1}^\Delta L_i}{3} - \frac{M_i^\Delta L_i}{6} = \frac{M^\Delta L_i}{6} = EI_i \theta_i = EI_i \frac{\Delta_i}{L_i}$$

$$M_{i-1}^\Delta = M_i^\Delta = M^\Delta = \frac{6EI_i \Delta_i}{L_i^2} = \frac{3}{2} \frac{4EI_i}{L_i} \frac{\Delta_i}{L_i} = \frac{3}{2} K_i \frac{\Delta_i}{L_i}$$

**1.e)** Se aplica superposición a los problemas (a), (b) y (c), obsérvese que en los métodos de compatibilidad no se aplica superposición a las cargas sino a los desplazamientos y se obtienen los esfuerzos como la suma de los esfuerzos de cada problema, en particular se va a aplicar esto a los momentos extremos:

$$M_{i-1} = M_{i-1}^{\theta_{i-1}} + M_{i-1}^{\theta_i} + M^\Delta = K_i \theta_{i-1} + \frac{K_i}{2} \theta_i + \frac{3}{2} K_i \frac{\Delta_i}{L_i}$$

$$M_i = M_i^{\theta_{i-1}} + M_i^{\theta_i} + M^\Delta = K_i \theta_i + \frac{K_i}{2} \theta_{i-1} + \frac{3}{2} K_i \frac{\Delta_i}{L_i}$$

- 2) Se aplica equilibrio de momentos en los nudos cuyos giros se desconocen y se aplica equilibrio de fuerzas en la dirección de los desplazamientos incógnitas.
- 3) De la aplicación de equilibrio de momentos y de fuerzas se obtiene un sistema de ecuaciones que tiene tantas ecuaciones e incógnitas como giros y desplazamientos relativos se hayan liberado.
- 4) Una vez obtenidos los giros y desplazamientos se obtienen los momentos extremos.
- 5) A partir de los momentos extremos se pueden determinar los esfuerzos de cada barra sin más que aplicar superposición en cada barra: primero se obtienen los esfuerzos considerando cada barra como isostática y luego se obtienen los esfuerzos debido a los momentos extremos, al igual que se hizo con las vigas hiperestáticas.

Por último se van a hacer unas consideraciones sobre los posibles desplazamientos  $\Delta$  de las barras de la estructura. En principio hay que hacer notar que se va a hacer la hipótesis de que las barras de la estructuras no van a variar su longitud, o sea que se supone que no se van a alargar ni a acortar, se va a despreciar la deformación debida al esfuerzo axil frente a la debida a la flexión. En base a eso un semipórtico como el de la figura 10.34.a. tiene todos los desplazamientos  $\Delta$  de las barras nulos: al no poderse alargar las barras y, éstas tener que permanecer unidas, es imposible que pueda haber un desplazamiento transversal de ninguna de ellas, este tipo de pórticos se denominan *intraslacionales*. En el pórtico de la figura 10.34.b. sólo son posibles los desplazamientos transversales de las barras verticales, pilares, que, además, deben ser iguales para que se cumpla la incompresibilidad de la barra horizontal, dintel. En general un pórtico de N pisos tendrá N posibles desplazamientos. Los pórticos. Los pórticos en los que hay desplazamiento en alguna de las barras se denominan *traslacionales*.

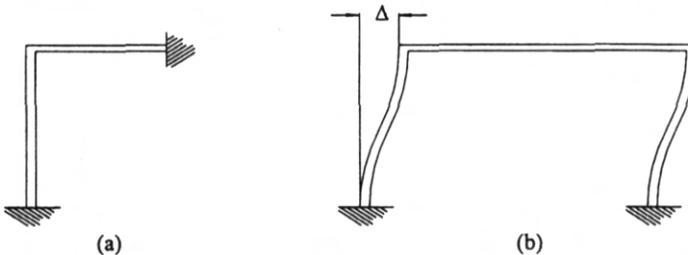


Figura 10.34. Pórtico intraslacional: a) y traslacional: b).

## Capítulo 11

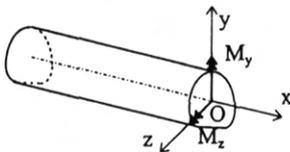
# FLEXO-COMPRESIÓN DESVIADA

### 11.1. INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha estudiado la barra prismática sometida solamente a un esfuerzo, excepto el caso de flexión simple en el que se ha considerado el esfuerzo cortante junto al momento flector debido a la relación que existe entre ambos. En el caso de flexión pura se ha estudiado la flexión según un eje de simetría de la sección transversal. En este capítulo se considerará la barra sometida a un momento flector que no actúa según un eje de simetría, o incluso en secciones que no disponen de simetría, a esto se le conoce como *flexión desviada, esviada o disimétrica*. A continuación se estudiará la combinación de momento flector con esfuerzo axial: *flexión compuesta*. Finalmente se verá qué ocurre cuando se aplica una fuerza áxica en un punto que no es el centro de gravedad de la sección transversal y cómo ésta origina una flexión: *compresión excéntrica*.

### 11.2. FLEXIÓN DISIMÉTRICA EN BARRAS QUE TIENEN, AL MENOS, UN EJE DE SIMETRÍA.

Se va a estudiar una barra con uno o dos ejes de simetría en la que actúa un momento flector según cada uno de esos ejes, o sea una barra sometida a flexión disimétrica.



**Figura 11.1.** Barra prismática sometida a momentos flectores según dos ejes.

En esta figura 11.1 se observa una barra prismática que presenta un eje de simetría, el eje OY, y que está sometida a un momento flector según ese eje,  $M_y$ , y otro momento flector según el eje OZ,  $M_z$ .

Para obtener las tensiones producidas por ambos momentos se puede aplicar superposición, figura 11.2.

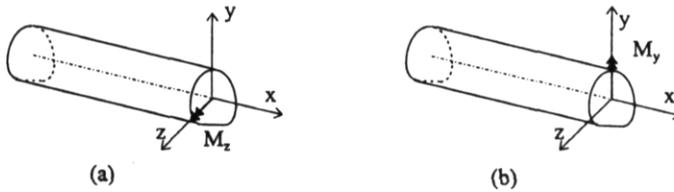


Figura 11.2. Descomposición en la barra de la figura 11.1.

Debido al esfuerzo  $M_z$  de la barra 11.2.a. se produce el siguiente estado tensional en la barra:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \quad [11.1]$$

En cuanto al estado tensional en la barra debido al momento flector  $M_y$  de la barra de la figura 11.2.b.

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} \quad [11.2]$$

La justificación de estas fórmulas es inmediata: la expresión de  $\sigma_x$  en función de  $M_z$  es la que ya se vio en el tema de tensiones debida a la flexión, [8.5]; en cuanto a la fórmula que liga  $\sigma_x$  con  $M_y$  es análoga, únicamente difieren en el signo. Esta diferencia en el signo se debe a que para un momento flector  $M_z$  positivo se produce la tracción en aquellas fibras que tienen una componente  $y$  negativa y la compresión se produce en fibras que tienen la componente  $y$  positiva; esto es, la tensión tiene sentido contrario que el eje  $y$ , y para un momento  $M_y$  positivo se produce la tracción para las  $z$  positivas y la compresión para las  $z$  negativas: la tensión presenta el mismo signo que la componente  $z$ . En la figura 11.3 se aclaran estas afirmaciones.

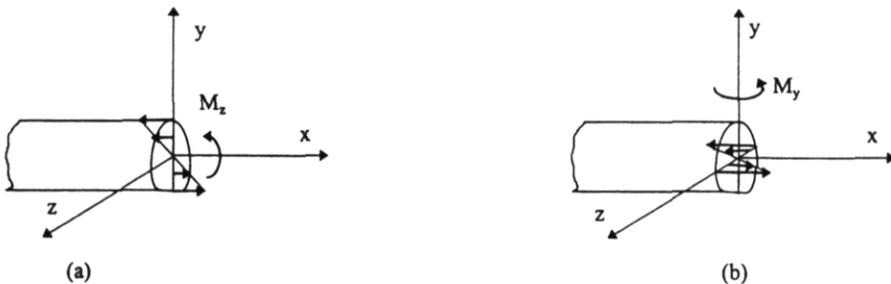


Figura 11.3. Sentido de las tensiones normales para momentos flectores positivos: a) debido a  $M_z$  y b) debido a  $M_y$ .

Una vez obtenidas las tensiones debidas a cada momento flector para obtener la tensión total sólo hay que sumar:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad [11.3]$$

De la expresión de la tensión en flexión disimétrica se desprende que, en cuanto a tensión se refiere, se debe buscar un perfil que tenga valores de módulos resistentes proporcionales a los momentos que actúen en cada eje para que el perfil en ambas direcciones se agote por igual.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad [11.4]$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} \quad [11.5]$$

Al igual que sucedía en flexión plana, existe una línea neutra que se caracteriza por ser la fibra de la barra que ni se acorta ni se alarga: su deformación longitudinal y, por tanto, su tensión normal son nulas. La ecuación de la línea neutra es, pues:

$$0 = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \Rightarrow y = \frac{I_z}{I_y} \frac{M_y}{M_z} z \quad [11.6]$$

Obsérvese que la línea neutra sigue pasando por el centro de gravedad de la sección pero no se encuentra sobre la línea de acción del momento flector resultante como sucede en flexión plana, si sólo actúa  $M_z$  la línea neutra coincide con el eje OZ y si sólo actúa  $M_y$  la línea neutra coincide con el eje OY, pues la línea de acción de la resultante de los momentos flectores es la línea de ecuación:  $y = \frac{M_y}{M_z} z$ : si se sustituye  $z$  por  $M_z$  e  $y$  por  $M_y$  se cumple la identidad. Esto se manifiesta en la figura 11.4.

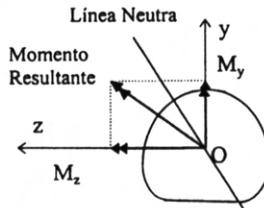


Figura 11.4. Línea neutra y momento resultante.

La pendiente de la recta, que define la línea neutra, viene afectada por el cociente de los momentos de inercias de la sección en ambas direcciones. Fijese que si  $I_z \ll I_y$  la línea neutra será bastante cercana al eje OZ ante valores similares de los dos momentos.

En cuanto a las deformaciones también se puede aplicar el principio de superposición pudiéndose calcular un desplazamiento según el eje OY, debido al momento  $M_z$ , y otro desplazamiento según el eje OZ, debido al momento  $M_y$ . En concreto, mediante la ecuación de la elástica:

$$EI_z y = M_z \quad EI_y z = -M_y \quad [11.7]$$

En las expresiones anteriores se ha tenido en cuenta que el signo del momento flector se corresponde con el signo de la curvatura de la elástica. Para aplicar superposición no se debe efectuar una suma algebraica como en el caso de las tensiones sino una suma vectorial, válida tanto para desplazamientos como para giros:

$$\delta = \sqrt{\delta_z^2 + \delta_y^2} \quad \theta = \sqrt{\theta_z^2 + \theta_y^2} \quad [11.8]$$

Para que las deformaciones según ambos ejes sea similar deben ser proporcionales los momentos de inercia de cada eje a los momentos flectores correspondientes.

### 11.3. FLEXIÓN EN BARRAS SOMETIDAS A DOS MOMENTOS SEGÚN DOS EJES CUALESQUIERA

En principio se va a considerar la barra que se estudió en el apartado anterior con, al menos, un eje de simetría, el eje  $\xi$ . Sobre esta barra actúa un momento flector según el eje perpendicular al de simetría, el eje  $\eta$ . Este momento flector se puede descomponer en dos ejes coordenados cualesquiera, los ejes  $y, z$ , figura 11.5.

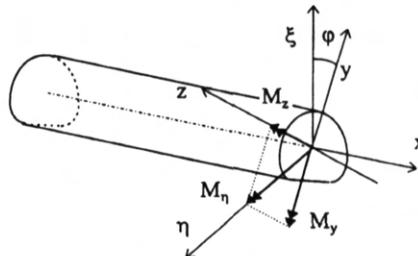


Figura 11.5. Momentos flectores según ejes distintos a los de simetría.

Al ser  $\xi$  un eje de simetría, para el cálculo de tensiones se puede hacer uso de la ley de Navier, [8.5]. Si además se descompone la coordenada  $\xi$  según los ejes  $y, z$ :

$$\sigma_x = \frac{E\xi}{\rho} = \frac{E}{\rho}(y \cos\varphi + z \operatorname{sen}\varphi) = C_1 y + C_2 z \quad [11.9]$$

En la expresión anterior se han tomado las constantes  $C_1 = \frac{E}{\rho} \cos\varphi$  y  $C_2 = \frac{E}{\rho} \operatorname{sen}\varphi$  para la tensión  $\sigma_x$  se introduce en la fórmula de definición del momento flector:

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA = - \int_A (C_1 y + C_2 z) y dA = -C_1 I_z - C_2 I_{yz}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \int_A (C_1 y + C_2 z) z dA = C_1 I_{yz} + C_2 I_z$$

En la expresión anterior se ha considerado la definición de momento de inercia según los ejes  $y$ ,  $I_y$ ,  $z$ ,  $I_z$ , y el producto de inercia,  $I_{yz}$ . Si se resuelve el sistema anterior se obtiene:

$$C_1 = \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$C_2 = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Una vez obtenidas las constantes  $C_1$  y  $C_2$  y sustituyéndolas en la expresión [11.9] se obtiene el valor de la tensión:

$$\sigma_x = \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \quad [11.10]$$

Obsérvese que la expresión anterior da el valor de la tensión normal de una barra cualquiera sometida a momentos flectores según dos ejes normales cualesquiera. Si además de un momento según el eje  $\eta$  hay un momento según el eje  $\xi$  se obtiene un resultado análogo y no habría más que aplicar superposición. Aunque se ha supuesto que hay un eje de simetría se obtendría el mismo resultado si no existe tal simetría.

Si esos ejes son ejes principales de inercia de la sección transversal, en particular si uno de ellos o los dos son ejes de simetría, el producto de inercia  $I_{yz}$  es nulo y las expresión anterior se transforma en:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

siendo ésta la expresión [11.3] que se obtuvo para flexión en piezas simétricas.

En cuanto a la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante, si sólo se tiene  $V_y$  la obtención de la tensión tangencial sería análoga a la que se obtuvo en flexión plana: pero en vez de sustituir la expresión de la tensión normal dada en [11.1] se debe sustituir la dada en [11.10] imponiendo que  $M_y = 0$ . En cualquier caso se demostrará más adelante la expresión de la tensión tangencial  $\tau_{xz}$ , que es totalmente análoga.

Se obtendrá, por tanto, que la tensión tangencial debido a un esfuerzo cortante  $V_y$  y en unos ejes cualesquiera es:

$$\tau_{xy} = \frac{-I_y S_z(y) + I_{yz} S_y(y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{V_y}{b(y)} \quad [11.11]$$

En la expresión [11.11]  $S_z(y)$  es el momento estático del área de la figura 11.6.a. según el eje OZ y  $S_y(y)$  es el momento estático del mismo área pero según el eje OY.

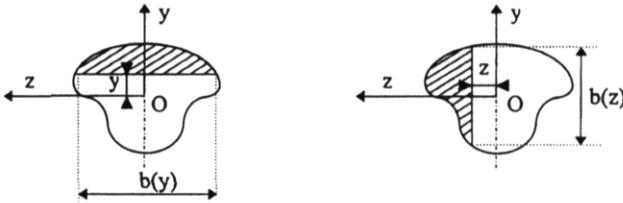


Figura 11.6. Área respecto a la que se toma momento estático: a)  $A(y)$ , para  $S_y(y)$  y  $S_z(y)$ , b)  $A(z)$ , para  $S_y(z)$  y  $S_z(z)$ .

Para un esfuerzo cortante  $V_z$  hay que establecer equilibrio en un diferencial de longitud de barra, figura 11.7, y con un área que va desde una  $z$  cualquiera hasta el extremo, figura 11.6.b:

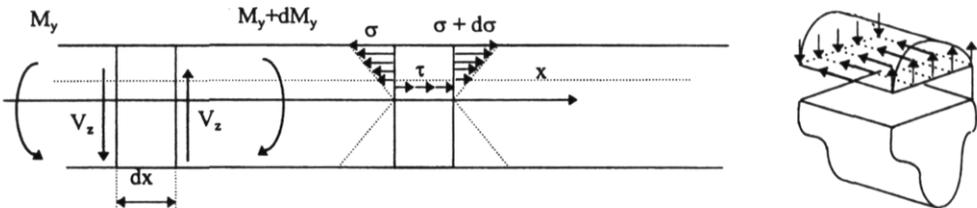


Figura 11.7. Rebanada sometida a  $M_y$  y  $V_z$ .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow - \int_{A(z)} \sigma dA + \int_{A(z)} (\sigma + d\sigma) dA - \tau_{xz} b(z) dx = 0 \Rightarrow \int_{A(z)} (d\sigma) dA = \tau_{xz} b(z) dx$$

$$\int_{A(z)} \frac{d(-I_{yz}M_y y + I_z M_y z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} dA = \tau_{xz} b(z) dx \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{\int \frac{dM_y}{dx} (-I_{yz}y + I_z z) dA}{(I_y I_z - I_{yz}^2) b(y)}$$

Con lo que se obtiene:

$$\tau_{xz} = \frac{-I_{yz}S_z(z) + I_z S_y(z)}{(I_y I_z - I_{yz}^2) b(y)} V_z \quad [11.12]$$

En la expresión [11.12]  $S_z(z)$  es el momento estático del área de la figura 11.6.b según el eje OZ y  $S_y(z)$  es el momento estático del mismo área pero según el eje OY. para obtener la expresión anterior se ha tenido en cuenta que  $\frac{dM_y}{dx} = V_z$ , esta igualdad se puede obtener si se aplica momentos según el eje OY a una rebanada de longitud  $dx$ , como la que aparece a la izquierda de la figura 11.7. En esta figura se han representado los flectores  $M_y$  positivos, hay que tener en cuenta que el sentido positivo del eje OY es hacia dentro del papel.

#### 11.4. FLEXIÓN COMPUESTA

Se denomina flexión compuesta al estado de esfuerzos en el que se combina esfuerzo axial y momento flector, figura 11.8.

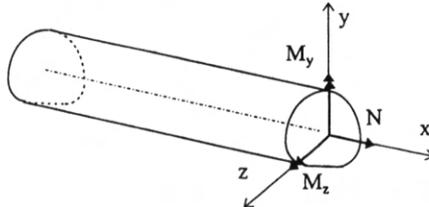


Figura 11.8. Barra prismática sometida a  $M_y$ ,  $M_z$  y a  $N$ .

Para la obtención de tensiones se puede aplicar, también, superposición. En un caso general:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \quad [11.13]$$

En el caso de que la sección sea simétrica, o simplemente que los ejes OY y OZ sean los ejes principales de inercia de la sección:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad [11.14]$$

En cuanto a los desplazamientos existirán desplazamientos en los tres ejes del espacio, debido a la flexión según los ejes OY y OZ y debido al esfuerzo axil según el eje OX.

La ecuación de la línea neutra es:

$$0 = \frac{N}{A} + \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

En este caso la línea neutra no pasa por el centro de gravedad al no pasar por el punto de coordenadas (0,0); pues no hay que olvidar que el centro de gravedad es el centro del sistema de coordenadas que se viene usando.

### 11.5. COMPRESIÓN EXCÉNTRICA. NÚCLEO CENTRAL

Puede ser éste considerado un caso particular de la flexión compuesta en el que el momento flector es provocado por el esfuerzo axil al encontrarse éste situado con una cierta excentricidad respecto del centro de gravedad de la sección. Se habla de compresión excéntrica pero podría tratarse de tracción excéntrica, el hecho de que la mayoría de los textos hable de compresión se debe a que es más frecuente.

Considérese una barra prismática de sección cualquiera sometida a una cierta fuerza de compresión situada con excentricidad respecto del centro de gravedad de la sección, figura 11.9.

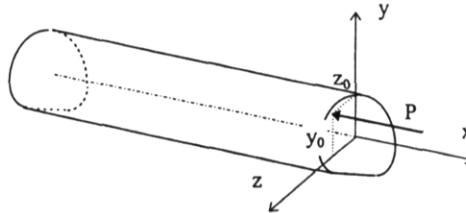


Figura 11.9. Barra prismática sometida a compresión excéntrica.

Debido a esta excentricidad aparece un momento según el eje OY de valor  $M_y = -Pz_0$  y un momento según el eje OZ de valor  $M_z = Py_0$ , ambos son momentos flectores. Estos momentos, junto con el esfuerzo axil, originan una tensión normal:

$$0 = -\frac{P}{A} + P \frac{-y_0 I_y + z_0 I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + P \frac{-z_0 I_z + y_0 I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z$$

que, cuando se da la circunstancia de que los ejes coordenados son ejes de simetría de la sección se transforma en:

$$\sigma_x = -\frac{P}{A} - P \frac{y_0 y}{I_z} - P \frac{z_0 z}{I_y}$$

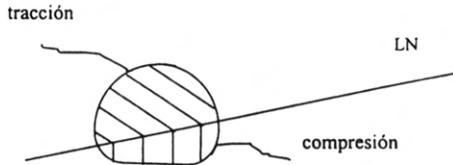
La ecuación de la línea neutra es:

$$0 = -\frac{P}{A} - \frac{P y_0 y}{I_z} - \frac{P z_0 z}{I_y}$$

$$0 = 1 + \frac{y_0 y}{i_z^2} + \frac{z_0 z}{i_y^2} \quad [11.15]$$

Donde  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$  e  $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$  son los radios de giro de la sección respecto a los ejes OZ y OY respectivamente. Obsérvese que la ecuación de la línea neutra depende de la geometría de la sección y del punto de aplicación de la carga pero no del valor de ésta.

El conocimiento de la línea neutra en el caso de compresión excéntrica es fundamental en el caso de materiales frágiles que no soportan la tracción o, al menos, tienen una resistencia a la tracción mucho menor que a la compresión. No hay que olvidar que la línea neutra separa la sección en dos partes: una sometida a tracción y otra a compresión, figura 11.10.

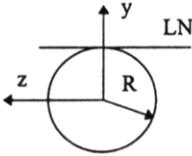


**Figura 11.10.** División de la sección en una zona de tracción y otra de compresión mediante la línea neutra.

Por todo ello se usa el concepto de núcleo central. Se define el *núcleo central* como el lugar geométrico de los puntos de la sección transversal de una barra prismática, donde, aplicada una carga de tracción o compresión, se obtiene tracción o compresión, respectivamente, en todos los puntos de la sección. El concepto de núcleo central adquiere especial importancia en el caso de piezas de material frágil sometidas a compresión ya que si la carga de compresión se encuentra situada en el núcleo central toda la sección se encuentra sometida a compresión. Para hallar el núcleo central se determinan sus límites obligando a que la línea neutra pase por la frontera de la sección. Se va a calcular el núcleo central de algunas piezas de geometría sencilla para aclarar este concepto.

### Núcleo central de una barra de sección circular

La barra circular va a tener un núcleo central que, por simetría, va a ser un círculo. Para hallarlo bastará con considerar una línea neutra tangente al contorno y ver a qué punto corresponde, figura 11.11.



**Figura 11.11.** Línea neutra tangente al contorno de una sección circular.

En este caso se ha tomado la línea neutra de ecuación  $y = R$  por comodidad; aunque se podría haber tomado cualquier otra línea recta tangente al contorno. A continuación se debe comparar la ecuación de esta recta con la ecuación genérica de la línea neutra en compresión excéntrica. Para compararla se debe poner la ecuación de esta recta en la misma forma que la de la expresión [11.15].

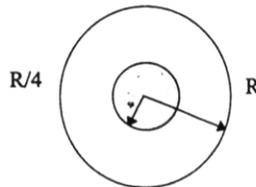
Lo primero que hay que hacer es hallar los radios de giro de esta sección. Ambos radios de giro son iguales por simetría:

$$i_y^2 = i_z^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\pi R^2} = \frac{R^2}{4}$$

$R - y = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{R}y = 0$ . Comparando los coeficientes de esta expresión con los coeficientes de la ecuación [11.15] se obtiene:

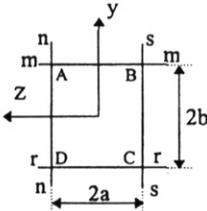
$$-\frac{1}{R} = \frac{y_0}{\frac{R^2}{4}}; \quad 0 = \frac{z_0}{\frac{R^2}{4}} \Rightarrow y_0 = -\frac{R}{4}; \quad z_0 = 0$$

Así se ha obtenido el punto al que le corresponde la línea neutra anterior. Por simetría, como ya se ha dicho, el núcleo central es una circunferencia de radio  $\frac{R}{4}$ , figura 11.12.



**Figura 11.12.** Núcleo central de una sección circular

### Núcleo central de una barra de sección rectangular



Lo primero que se va a calcular son los radios de giro de la sección de la figura 11.13:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{16ba^3}{12 \cdot 4ab} = \frac{a^2}{3}; \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{16ab^3}{12 \cdot 4ab} = \frac{b^2}{3}$$

Figura 11.13. Sección rectangular.

A continuación se va a calcular el punto cuya línea neutra correspondiente es la línea \$mm\$, línea de ecuación \$y = b\$, que se debe poner de forma canónica, todos los términos iguales a cero y el término independiente igual a 1, y se procede igual que con la línea neutra que se estudió en el perfil circular.

$$y = b \Rightarrow 1 - \frac{1}{b}y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{b} = \frac{y_0}{\frac{b^2}{3}}; \quad 0 = \frac{z_0}{\frac{a^2}{3}} \Rightarrow y_0 = -\frac{b}{3}; \quad z_0 = 0; \quad M\left(-\frac{b}{3}, 0\right)$$

Una vez determinado este punto \$M\$, se va a obtener el punto asociado a la línea neutra \$nn\$, la línea de ecuación \$z = a\$.

$$z = a \Rightarrow 1 - \frac{1}{a}z = 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} = \frac{z_0}{\frac{a^2}{3}}; \quad 0 = \frac{y_0}{\frac{b^2}{3}} \Rightarrow z_0 = -\frac{a}{3}; \quad y_0 = 0; \quad N\left(0, -\frac{a}{3}\right)$$

Se han obtenido dos puntos, \$M\$ y \$N\$, correspondientes al límite exterior del núcleo central. Entre esos dos puntos hay infinitos puntos correspondientes a las infinitas líneas rectas que pasan por el punto \$A\$ y que van de \$mm\$ a \$nn\$. Hay que tener en cuenta que \$A\$ es un punto anguloso y que, por lo tanto, tiene infinitas rectas tangentes. A continuación se va a demostrar que si hay infinitas líneas neutras que pasan por un punto sus puntos correspondientes forman una línea recta.

Si hay una línea neutra correspondiente a un punto de coordenadas \$(y\_0, z\_0)\$ que pase por un punto de coordenadas \$(y', z')\$ se debe verificar:

$$1 + \frac{y'y_0}{i_z^2} + \frac{z'z_0}{i_y^2} = 0$$

Si se consideran las coordenadas \$(y\_0, z\_0)\$ como las variables de la ecuación de la recta y \$(y', z')\$ como el punto fijo por el que pasan las infinitas líneas neutras, se ve que los puntos

correspondientes a líneas neutras que se cortan en un punto forman una línea recta, como se quería demostrar.

Por lo tanto todos los puntos que se encuentran uniendo los punto M y N mediante una línea recta son puntos límites del núcleo central.

Por simetría, se puede ver que los puntos correspondientes a las líneas neutras  $rr$  y  $ss$  son los puntos  $R\left(\frac{b}{3}, 0\right)$  y  $S\left(0, \frac{a}{3}\right)$ , respectivamente. Con lo que se obtiene finalmente el núcleo central de la figura 11.14.

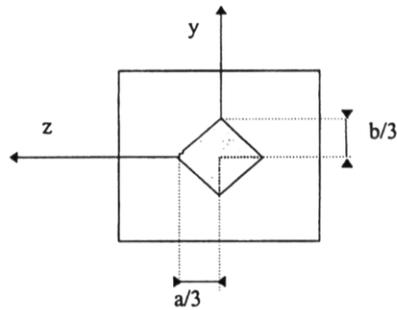


Figura 11.14. Núcleo central de la sección de la figura 11.13.

Para terminar el capítulo se va a hacer una indicación para la resolución de secciones cóncavas como la T que se muestra en la figura 11.15.

En esta sección no se debe emplear la línea  $mm$  como línea neutra correspondiente a un punto del contorno del núcleo central, pues esta línea divide la sección en dos partes: una sometida a tracción y otra a compresión. Sí se debe usar la línea  $nn$ . A la vista de esta figura también debe hacerse constar que los momentos de inercia y por tanto los radios de giro se deben obtener referidos al centro de gravedad de la sección.

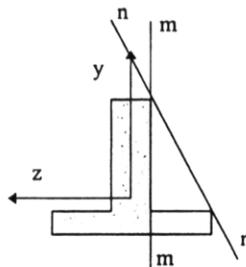


Figura 11.15. Sección cóncava.

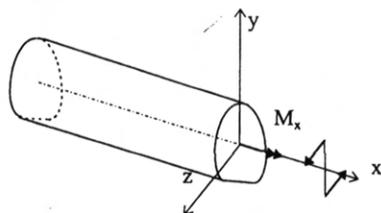
## Capítulo 12

## TORSIÓN EN PERFILES CIRCULARES

## 12.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiarán las barras prismáticas sometidas a momento torsor. El momento torsor es un momento según el eje longitudinal de la barra. Se hará un estudio particular de las barras de sección circular por su simplicidad y porque este tipo de barras son las que más habitualmente se encuentran trabajando a torsión por lo bien que se comportan ante esta sollicitación. También se estudiarán los perfiles de pared delgada a torsión por la importancia práctica de estos perfiles y porque existe un método simplificado para tratar estos perfiles a torsión, pero esto será en el capítulo siguiente.

Se tomará el criterio de signos que se vio en el capítulo de introducción:



**Figura 12.1.** Barra prismática sometida a torsión.

En la figura 12.1 se ha representado el momento según el eje longitudinal de la barra de dos formas: como un único vector y como un par de fuerzas, en los dos casos está representado un momento positivo.

A continuación se van a mostrar algunos diagramas de momentos torsores isostáticos: se pueden determinar sólo aplicando equilibrio, sin tener que recurrir a las ecuaciones de compatibilidad y comportamiento.

Se va a resolver la barra de la figura 12.2. Los apoyos van a permitir el giro a torsión. Se precede el valor del momento por su signo por la dificultad que la representación tridimensional añade al entendimiento del sentido de los momentos.

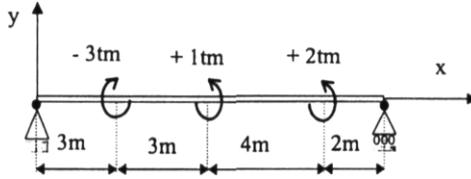
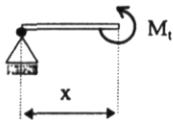


Figura 12.2. Ejemplo 1 de barra prismática sometida a torsión isostática.

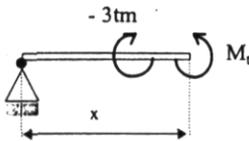
Aplicar equilibrio a este tipo de problema se traduce en aplicar la nulidad de la suma de momentos longitudinales:  $\sum M_x = 0 \Rightarrow -3 + 2 + 1 = 0$ . Para obtener el diagrama de torsores se procederá a “cortar” la barra y sustituir la parte eliminada por los momentos internos. Habrá que realizar la partición a cada lado de los momentos puntuales aplicados.

$0 < x < 3$



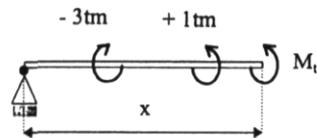
$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_t = 0$

$3 < x < 6$



$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_t - 3tm = 0 \Rightarrow M_t = 3tm$

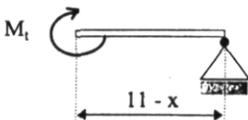
$6 < x < 9$



$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_t - 3 + 1 = 0 \Rightarrow M_t = 2tm$

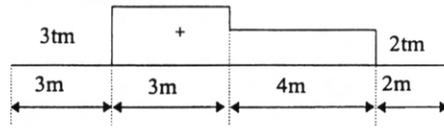
$9 < x < 11$

En este caso es más fácil “cortar” por la derecha:



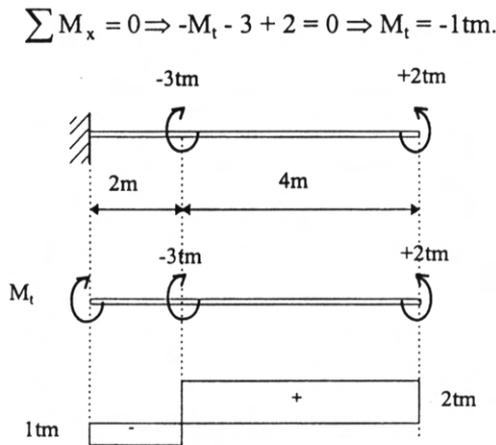
$\sum M_x = 0 \Rightarrow M_t = 0$

Ya queda completamente determinado el diagrama de momentos torsores, figura 12.3.



**Figura 12.3.** Diagrama de momentos torsores de la barra representada en la figura 12.2.

Si se observa el diagrama de la figura 12.3. se ve que, al no haber momentos distribuidos, los torsores son constantes a tramos y cada momento puntual aplicado supone un salto en el diagrama de torsores. El próximo ejemplo, figura 12.4, se va a realizar directamente; sin embargo se va a aplicar equilibrio de momentos a la barra completa para obtener el momento en el empotramiento aunque no sea necesario para obtener el diagrama.



**Figura 12.4.** Ejemplo 2 de barra prismática sometida a torsión isotática. Diagrama de momentos torsores

## 12.2. TORSIÓN EN PERFILES CIRCULARES. TENSIONES Y GIROS

Considérese una barra circular solicitada por dos momentos extremos, iguales y de sentido contrario, figura 12.5. Al igual que se hizo en tracción y en flexión se va a admitir una hipótesis acorde con los resultados experimentales acerca del mecanismo de deformación de las barras circulares a torsión: las secciones permanecen planas y paralelas en el transcurso de la deformación produciéndose sólo un giro relativo entre las secciones. Esta hipótesis es válida, solamente, en barras de sección circular.

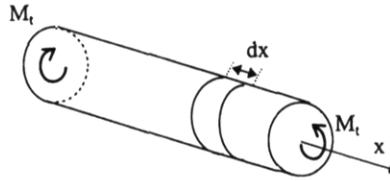


Figura 12.5. Barra circular sometida a momento torsor.

La barra de sección circular de la figura 12.5 está sometida a un momento torsor constante  $M_t$ .

Se va a aislar un elemento de barra de longitud  $dx$ , como se indica en la figura y dentro de éste un anillo circular limitado por dos planos cilíndricos de radios  $r$  y  $r + dr$ , figura 12.6.

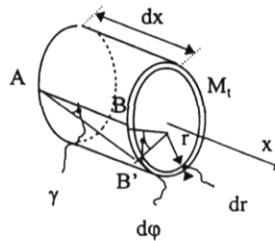


Figura 12.6. Rebanada de barra circular sometida a momento torsor.

La sección de la derecha sufre un giro relativo respecto a la sección de la izquierda de  $d\phi$ . La generatriz del cilindro  $AB$  girará un ángulo  $\gamma$  (deformación angular) pasando a ocupar la posición  $AB'$ .

$$BB' = \gamma dx = rd\phi \Rightarrow$$

$$\gamma = r \frac{d\phi}{dx} \quad [12.1]$$

La magnitud  $\frac{d\phi}{dx}$  se denota por  $\theta$ :  $\theta = \frac{d\phi}{dx}$  y se denomina *ángulo de torsión unitario*. La magnitud  $\theta$  es equivalente al alargamiento unitario de longitud en tracción y compresión  $\left(\frac{\Delta l}{l}\right)$ . Introduciendo la notación  $\theta$ :

$$\gamma = r\theta \quad [12.2]$$

Aplicando la ley de Hooke para tensión tangencial y deformación angular:

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \quad [12.3]$$

siendo  $\tau$  la tensión tangencial que surge en la sección transversal de la barra y que, por simetría, debe ser tangente a la circunferencia; o sea es perpendicular al radio. Si se multiplica la tensión tangencial,  $\tau$ , por un diferencial de área,  $dA$ , se obtiene un diferencial de fuerza,  $\tau dA$ , y si se toma momento respecto al centro del círculo la resultante es igual al momento torsor:

$$M_t = \int_A \tau r dA = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p \quad [12.4]$$

En la ecuación anterior se ha encontrado la relación entre el momento torsor,  $M_t$ , y el ángulo de torsión unitario,  $\theta$ , siendo  $A$  el área de la sección circular,  $I_p$  el momento de inercia polar y  $G$  el módulo transversal de Elasticidad. El producto  $GI_p$  se denomina rigidez de la barra a torsión.

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \quad [12.5]$$

Integrando la expresión anterior y, teniendo en cuenta que  $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ , se puede obtener la diferencia entre giros a torsión:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_t}{GI_p} dx \quad [12.6]$$

La expresión anterior relaciona la diferencia de giros entre dos puntos de la barra sometida a torsión con el área encerrada por el diagrama de momentos torsores y la rigidez a torsión. Esta relación es análoga al primer teorema de Möhr para flexión.

También se puede obtener la tensión tangencial debida a torsión a partir del momento torsor, mediante las expresiones [12.3] y [12.5]:

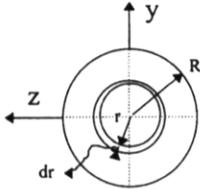
$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \quad [12.7]$$

Al igual que la expresión [12.6] ésta última ecuación, [12.7], también tiene una análoga en flexión: la ecuación de Navier. La expresión anterior también nos permite conocer la tensión tangencial máxima:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t r_{\max}}{I_p} \quad [12.8]$$

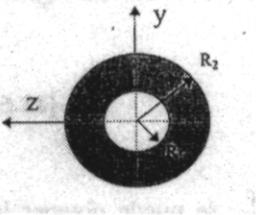
Obsérvese que la tensión tangencial máxima se da en la superficie del cilindro. A continuación se van a dar los valores del momento polar de inercia:

Cilindro



$$I_P = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} \quad [12.9]$$

Corona Circular



$$I_P = \int_A r^2 dA = \int_{R_1}^{R_2} r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) \quad [12.10]$$

### 12.3. TORSIÓN HIPERESTÁTICA

En el apartado 12.1 se pusieron algunos ejemplos de diagramas isostáticos de torsores. Para determinar diagramas de torsores en el caso de barras isostáticas sólo es necesario aplicar las ecuaciones de equilibrio y por tanto son independientes de la geometría del perfil y del tipo de material.

Sin embargo en la torsión hiperestática, al igual que se vio en flexión hiperestática y, anteriormente, en tracción y compresión, hay que hacer uso de las ecuaciones de compatibilidad y de las ecuaciones de comportamiento.

En las ecuaciones de compatibilidad habrá que hacer consideraciones sobre las condiciones de contorno, en este caso sobre el giro longitudinal y, en las ecuaciones de comportamiento, hay que tener en cuenta la ecuación [12.6], naturalmente para el caso de perfiles circulares. Se considerará el siguiente ejemplo aclarativo:

#### Barra biempotrada sometida a un momento puntual

Se seguirá un proceso análogo al que se siguió para resolver la barra biempotrada en flexión. Se considerará la barra de la figura 12.7.

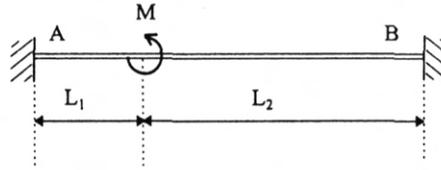


Figura 12.7. Barra circular hiperestática sometida a torsión.

1) Sustituir los apoyos por reacciones vinculares, figura 12.8.

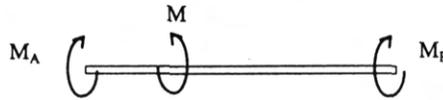


Figura 12.8. Barra circular de la figura 12.7 en la que se han sustituido los apoyos por reacciones vinculares.

2) Encontrar una relación entre las reacciones vinculares y los momentos externos mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio a todo el conjunto.

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow -M_A + M - M_B = 0$$

En el caso anterior sólo es necesario utilizar una ecuación de equilibrio, la concerniente a la suma de momentos longitudinales, como hay dos incógnitas,  $M_A$  y  $M_B$ , el grado de hiperestaticidad es uno.

3) Liberar tantas incógnitas hiperestáticas como grado de hiperestaticidad tenga el problema, figura 12.9.

En este caso el problema es tan simple que no es necesario aplicar todos los pasos concienzudamente pero por esquematizar el problema se va a hacer así.

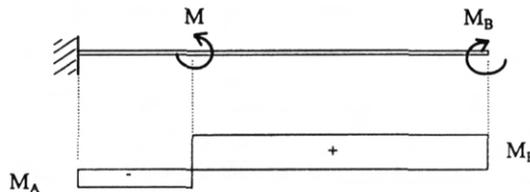


Figura 12.9. Barra de la figura 12.7 en la que se ha liberado una incógnita hiperestática.

4) Aplicar compatibilidad en la dirección de la incógnita liberada. En este caso se debe imponer que el giro en el punto B sea nulo. De la expresión [12.6]:

$$\varphi_B - \varphi_A = \int_0^L \frac{M_t}{GI_P} dx = -\frac{M_A L_1}{GI_P} + \frac{M_B L_2}{GI_P} = \frac{1}{GI_P} (-M_A L_1 + M_B L_2)$$

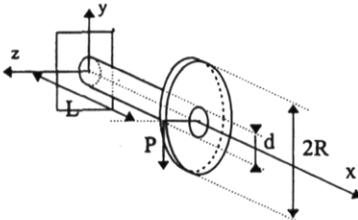
Como  $\varphi_A = 0$  y  $\varphi_B = 0 \Rightarrow -M_A L_1 + M_B L_2 = 0$ , que con la ecuación de equilibrio constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} M_A + M_B &= M \\ -M_A L_1 + M_B L_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_A = \frac{M L_2}{L}; M_B = \frac{M L_1}{L}$$

Una vez conocidos los momentos de los empotramientos queda completamente determinado el diagrama de momentos torsores.

#### 12.4. TORSIÓN COMBINADA CON FLEXIÓN. ESTUDIO DE EJES.

En los casos anteriores se ha considerado que la torsión es simple. En la práctica es fácil encontrar un momento torsor que actúa junto a un momento flector. Por ejemplo las fuerzas transmitidas a un eje por un volante o por una polea producen momento flector y momento torsor, figura 12.10.



$$\text{Momento flector: } M_z = -P(L-x)$$

$$\text{Momento torsor: } M_t = PR$$

Figura 12.10. Eje circular.

En este caso las tensiones que presenta el eje son:

$$\text{Tensión normal debida a la flexión: } \sigma = -\frac{M_z y}{I_z} = \frac{P(L-x)y}{I}$$

$$\text{Tensión tangencial debida al esfuerzo cortante: } \tau = -\frac{VS(y)}{b(y)I_z} = -\frac{PS(y)}{b(y)I_z}$$

Tensión tangencial debida al momento torsor: 
$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{PRr}{2I_z}$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que  $2I_z = I_p$ . Para dimensionar el perfil hay que acotar la tensión equivalente máxima por la tensión de trabajo. En el caso de materiales dúctiles y en el caso concreto del acero, se utiliza el criterio de Von-Mises que toma como tensión equivalente  $\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ . Para ello habrá que ver en qué punto se encuentran las tensiones normales y tangenciales máximas:

- Tensión normal máxima debida a la flexión. Se encuentra en el empotramiento y, dentro de la sección, lo más alejado posible de la línea neutra:  $\sigma_{max} = \frac{PLd}{2I_z}$ .
- Tensión tangencial máxima debida al esfuerzo cortante. Al ser el esfuerzo cortante constante no importa la sección que se considere y, dentro de la sección, se encuentra en la línea neutra:  $\tau_{max} = \frac{PS(0)}{dI_z}$ .
- Tensión tangencial máxima debida al momento torsor. Al igual que sucede con el esfuerzo cortante da igual en que sección se tome pero dentro de la sección se debe tomar el contorno:  $\tau_{max} = \frac{PRd}{4I_z}$ .

Luego tanto el momento flector como el momento torsor producen tensiones máximas en el contorno, mientras que el esfuerzo cortante en el centro de la sección. Ahora bien, las tensiones debidas al esfuerzo cortante suelen ser pequeñas luego podrían despreciarse en una primera fase del dimensionamiento.

$$\sigma_{eq}|_{max} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3\tau_{max}^2} = \frac{Pd}{2I_z} \sqrt{L^2 + 3\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sigma_t \Rightarrow I_z = \frac{Pd \sqrt{L^2 + 3\left(\frac{R}{2}\right)^2}}{2\sigma_t}$$

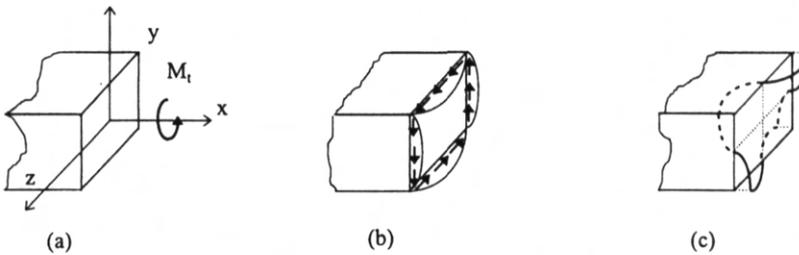
Una vez obtenido el momento de inercia de la sección se conoce su diámetro con lo que queda determinado el perfil. Finalmente debe comprobarse el perfil considerando todas las tensiones.

## 12. 5. TORSIÓN LIBRE EN PERFILES NO CIRCULARES

Hasta ahora sólo se hace alusión a la sección transversal sometida a torsión. Pero, ¿qué le hace a la sección circular tan especial? En principio hay que tener en cuenta que es muy

usual encontrarse barras circulares sometidas a torsión y, en segundo lugar, el estudio de la torsión en barras circulares es mucho más simple que en barras de geometría cualquiera. La razón de esta simplicidad se debe a que en barras circulares se puede hacer la hipótesis de Bernoulli en torsión: las secciones permanecen planas y paralelas después de la deformación y la única deformación posible consiste en un giro relativo entre secciones.

En general una sección sometida a torsión sufre alabeo. Se va a considerar, por simplicidad, una sección rectangular y en ella las líneas del contorno. La distribución de tensiones tangenciales ha de ser, cualitativamente, como la mostrada en la figura 12.11.b. debiendo ser cero en las esquinas (hay que tener en cuenta que las tensiones tangenciales son recíprocas y que las tensiones tangenciales en el contorno son nulas). El alabeo de la sección, figura 12.11.c, se debe al efecto de las tensiones tangenciales recíprocas, en la dirección del eje  $x$ , que toman, obviamente, el mismo valor que las tensiones tangenciales representadas en la figura 12.11.b. En esta figura se ve que las tensiones tangenciales son nulas en las esquinas, lo cual se traduce en que en éstas no hay alabeo (el plano tangente a la sección transversal en estos puntos son paralelos a la sección original) mientras que el alabeo será máximo en la mitad de los lados.



**Figura 12.11.** Barra de rectangular sometida a torsión: a), tensiones en el contorno: b), deformaciones longitudinales: c).

El comportamiento de una barra a torsión depende de que este alabeo esté o no impedido. Se denomina torsión libre o uniforme cuando se dan las condiciones siguientes:

- El momento torsor es constante a lo largo de la barra.
- No existe ninguna restricción al alabeo de la sección.

Cuando alguna de estas condiciones no se verifica se produce la torsión restringida o no uniforme. Una barra de sección circular no alabea luego no existe torsión restringida en perfiles circulares.

El problema de torsión libre en perfiles no circulares se puede reducir a un problema de potencial que puede ser bastante difícil de resolver dependiendo de lo complicada que sea la geometría del perfil; pero este estudio se escapa del alcance de estos apuntes que se limitarán a hacer un estudio cualitativo de la torsión en perfiles rectangulares.

Un estudio detenido del problema de la torsión libre en perfiles rectangulares permite establecer que la tensión tangencial máxima se presenta en el punto medio de los lados más largos de la sección. En el próximo capítulo, cuando se hable de analogía de la membrana, se insistirá sobre esta cuestión. Esta tensión máxima viene dada por la expresión:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha bc^2} \quad [12.11]$$

donde  $b$  es el mayor y  $c$  el menor de los lados de la sección y  $\alpha$  es un factor numérico que depende de la relación  $\frac{b}{c}$ .

En cuanto al ángulo de torsión por unidad de longitud, en el caso de una sección rectangular, viene dado por:

$$\theta = \frac{M_t}{\beta bc^3 G} \quad [12.12]$$

Donde  $\beta$  es un factor que depende de la relación  $\frac{b}{c}$  y la expresión  $\beta bc^3 G$  es la rigidez a torsión para perfiles rectangulares.

En la tabla 12.1 se dan algunos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

$b/c$	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00	4.00	6.00	8.00	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

**Tabla 12.1.** Valores de  $\alpha$  y de  $\beta$  en función de la geometría de la sección rectangular.

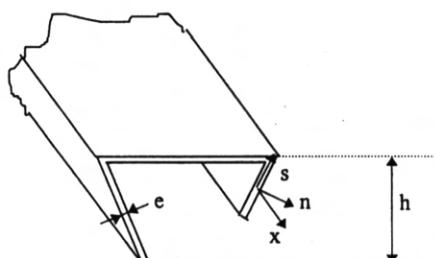


## Capítulo 13

TRACCIÓN, FLEXIÓN Y TORSIÓN  
EN PERFILES DE PARED DELGADA

## 13.1. INTRODUCCIÓN

Muchas de las secciones de las barras que se utilizan en las estructuras presentan una característica peculiar: tiene una dimensión, el espesor  $e$ , que es mucho menor que el resto de las dimensiones. Se les denomina perfiles de pared delgada y como valor indicativo se puede dar un valor de  $e/h \leq 0.1$ , siendo  $h$  la dimensión característica de la sección, figura 13.1.



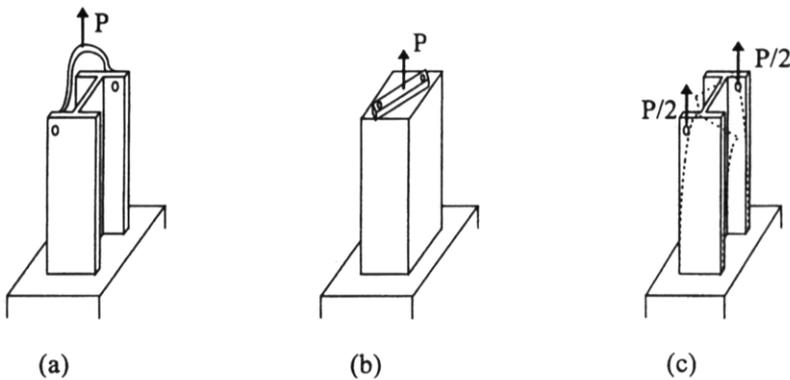
**Figura 13.1.** Perfil abierto. Características geométricas.

Dada la forma en que se reparte la masa en un perfil de pared delgada es conveniente usar un sistema de coordenadas curvilíneas como se define en la figura 13.1: sobre la línea media del espesor se define una coordenada  $s$ . Para cada valor de  $s$  existirá un eje  $s$  tangente a la línea media, un eje  $n$  normal a ella y el eje longitudinal  $x$ .

Muchos de los resultados que se obtuvieron para el cálculo de tensiones y de deformaciones, debido a los diferentes esfuerzos, son válidos para estos perfiles. Sin embargo las barras de pared delgada, como consecuencia de sus propiedades geométricas, tiene propiedades diferentes de las barras de sección maciza. Así, por ejemplo, no está tan claro que se pueda considerar el principio de Saint-Venant en virtud del cual se puede admitir la hipótesis de Bernouilli en el cálculo de tensiones en tracción y compresión. Como

ejemplo, en la figura 13.2 se ha representado dos barras sometidas a tracción: una de sección llena y la otra de sección de pared delgada.

Mientras que en la barra maciza el efecto local del punto de aplicación de la carga sólo afecta al entorno de este punto, en el caso de la sección de pared delgada afecta a toda la barra porque cada ala se comporta como una barra sometida a flexión, pues cada una de ellas está sometida a una tracción excéntrica de valor  $P/2$ . Este efecto también se produce en la barra de sección llena, que se puede considerar como una barra en doble T con un alma de gran espesor, pero es ese espesor el que rigidiza la unión de las "alas" y limita este efecto al entorno de la aplicación de la carga. En general en las barras de perfiles de pared delgada hay que tener muy presente que cada elemento de la misma puede comportarse como un elemento aislado.



**Figura 13.2.** Influencia de la geometría de la sección en una barra sometida a tracción: a) perfil de pared delgada, b) sección llena, c) deformación en un perfil de pared delgada.

### 13.2. TENSIONES NORMALES DEBIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA

Para la obtención de tensiones normales, tanto debido a esfuerzo axial como a momento flector no se hizo ninguna hipótesis acerca de la geometría de la sección, luego es válida la expresión que se obtuvo en el tema 11 y en concreto todos los resultados que se obtuvieron en cuanto a tensiones normales se refiere. Para el caso más general de flexo-compresión eviada referido a unos ejes no principales de inercia se tiene:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{-M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \quad [13.1]$$

También son válidos los resultados que se obtuvieron para la elástica. En cuanto a la obtención de línea neutra y núcleo central tampoco hay variación.

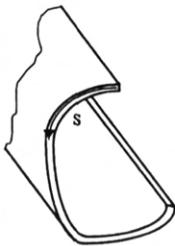
**13.3. TENSIONES TANGENCIALES DEBIDAS A LOS ESFUERZOS CORTANTES**

Para la obtención de tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante si que se debe hacer una distinción notable. Baste recordar la objeción que se hizo para el cálculo de tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante en una doble T: la tensión tangencial deberá ser tangente al contorno, esto supone que en el contorno inferior y en el superior de las alas la tensión tangencial  $\tau_{xy}$  debe ser cero y, como el espesor de las alas es pequeño,  $\tau_{xy}$  es prácticamente nula. Ahora bien, como las tensiones tangenciales son tangentes al contorno se puede suponer que la distribución de tensiones tangenciales sigue la coordenada curvilínea  $s$ , es una tensión  $\tau_{xs}$ , al ser la componente de la tensión según la coordenada  $s$  en un plano perpendicular al eje  $x$ .

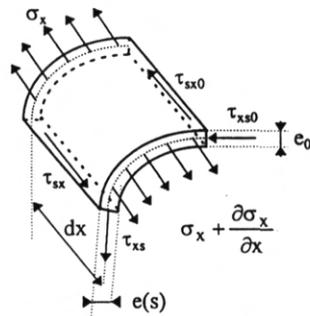
Para obtener las tensiones tangenciales en un perfil de pared delgada hay que imponer equilibrio de fuerzas longitudinales en un trozo de rebanada, de forma análoga a como se hizo en el apartado 8.3, para la obtención de tensiones tangenciales debidas a esfuerzo cortante en secciones llenas. La diferencia estriba en que en secciones llenas se aplica equilibrio a un trozo de barra que comprende un diferencial de longitud y una parte de la sección que va desde una coordenada y cualquiera hasta la parte superior del perfil y ahora se va a establecer equilibrio en un trozo de barra constituida por un diferencial de longitud y dentro de la sección una parte de ésta que va desde el origen de coordenadas de la coordenada  $s$  hasta un valor de  $s$  cualquiera.

**a) Perfiles abiertos**

Son perfiles en los que existe un extremo libre, en el que se va a tomar el origen de la coordenada  $s$ , figura 13.3.



**Figura 13.3.** Perfil abierto. Coordenada natural.



**Figura 13.4.** Perfil abierto. Equilibrio en la rebanada.

Teniendo en cuenta la reciprocidad de las tensiones tangenciales  $\tau_{xs} = \tau_{sx}$  y  $\tau_{xs0} = \tau_{sx0}$  y que, por condiciones de contorno, se supone que no hay fuerzas rasantes actuando sobre el contorno de la barra,  $\tau_{sx0} = 0$ , se tiene que  $\tau_{xs0} = 0$ .

Aplicando equilibrio de fuerzas en la dirección longitudinal de la barra, a la rebanada de la figura 13.4:

$$\int_0^s \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) e(s) ds - \int_0^s \sigma_x e(s) ds + \tau_{xs} e(s) dx = 0 \Rightarrow \left( \int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} e(s) ds \right) dx + \tau_{xs} e(s) dx = 0$$

La tensión normal  $\sigma_x$  de la expresión anterior se debe al momento flector. Suponiendo que sólo actúa momento flector  $M_z$  y que se está trabajando en ejes principales de inercia:

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y}{I_z} = -\frac{V_y y}{I_z}$$

donde  $e(s)$  es el espesor del perfil que puede variar con la coordenada  $s$ . Por tanto  $e(s)ds$  es el diferencial de área transversal.

$$\int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} e(s) ds = -\frac{V_y}{I_z} \int_{A(s)} y dA = -\frac{V_y S_z(s)}{I_z}$$

donde  $S_z(s)$  es el momento estático de la sección transversal comprendida entre 0 y  $s$  respecto al eje  $z$ .

Con lo que se tendrá:

$$\tau_{xs}(s) = \frac{V_y S_z(s)}{e(s) I_z} \quad [13.2]$$

La expresión anterior es muy parecida a la que se obtuvo para secciones llenas. Si los ejes que se consideran no son principales de inercia y suponiendo que exista flexión esviada la expresión de la tensión normal es la [11.10], se llega a que la expresión de la tensión tangencial es:

$$\tau_{xs} = \left[ (V_y I_y + V_z I_{yz}) S_z(s) + (V_z I_z + V_y I_{yz}) S_y(s) \right] \frac{1}{(I_y I_z - I_{yz}^2) e(s)} \quad [13.3]$$

Para llegar a [13.3] además de [11.10] se ha considerado  $\frac{\partial M_z}{\partial x} = V_y$ , y que  $\frac{\partial M_y}{\partial x} = V_z$ .

En cuanto a los signos, fijese que se ha recorrido el perfil de derecha a izquierdas y de arriba a abajo y que en este caso el signo es positivo. Por otra parte los términos  $S_y(s)$  y  $S_z(s)$  son los momentos estáticos de una parte de la sección respecto a los ejes  $OZ$  y  $OY$  respectivamente y obedecen a las expresiones:

$$S_z(s) = \int_0^s ye(s)ds \quad [13.4]$$

$$S_y(s) = \int_0^s ze(s)ds \quad [13.5]$$

La forma de  $\tau_{xs}$  en un perfil recuerda a un cierto fluido que recorriera el perfil considerado como un canal, por lo que las leyes de tensiones tangenciales en perfiles de pared delgada suelen darse en términos de flujo de tensiones tangenciales debidas a los esfuerzos cortantes, definiéndose el flujo  $q_{xs}$  como:

$$q_{xs} = \tau_{xs}e(s) \quad [13.6]$$

Para aclarar este concepto se ilustrará con dos ejemplos.

### Perfil en U

Considérese el perfil en U de la figura 13.5.

Se van a obtener las tensiones tangenciales debidas a un cortante  $V_y$  aplicando la expresión [13.2]. Lo primero que se hará es calcular el momento de inercia de la sección según el eje OZ,  $I_z$ .

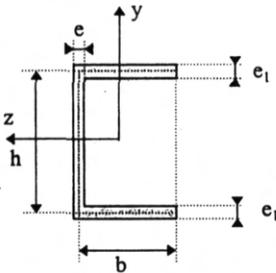


Figura 13.5. Perfil en U.

El momento de inercia, respecto al eje OZ, se calculará como el de una sección compuesta por tres secciones simples (rectángulos): las dos alas y el alma.

$$I_z = I_{z\text{alma}} + 2 I_{z\text{ala}}$$

$$I_{z\text{alma}} = \frac{1}{12} e(h + e_1)^3$$

$$I_{z\text{ala}} = \frac{1}{12} \left( b - \frac{e}{2} \right) e_1^3 + \left( b - \frac{e}{2} \right) e_1 \left( \frac{h}{2} \right)^2$$

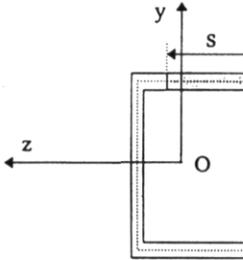
Para el cálculo del momento de inercia del ala se ha aplicado el teorema de Steiner. El momento de inercia de la sección completa es:

$$I_z = \frac{1}{12} e(h + e_1)^3 + 2 \left( b - \frac{e}{2} \right) \left[ \frac{1}{12} e_1^3 + e_1 \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \quad [13.7]$$

Una vez obtenido el momento de inercia de la sección completa se procede a la obtención de la tensión tangencial en cada parte de la sección.

**Ala**

Se toma una  $s$  genérica con origen en el extremo del ala, figura 13.6.



El momento estático del área sombreada, respecto de OZ, es:

$$S_z(s) = se_1 \frac{h}{2} \quad [13.8]$$

Teniendo en cuenta que el espesor del ala es  $e_1$ :

$$\tau_{xs}^{\text{ala}} = \frac{V_y se_1 \frac{h}{2}}{e_1 I_z} = \frac{V_y h}{2I_z} s \quad [13.9]$$

**Figura 13.6.** Perfil en U. Área genérica para el cálculo del momento estático cuando la coordenada  $s$  recorre el ala.

La expresión de la tensión tangencial en el ala es lineal con la coordenada natural  $s$ . En cuanto al flujo cortante:

$$q_{xs}^{\text{ala}} = \tau_{xs}^{\text{ala}} e_1 = \frac{V_y h e_1}{2I_z} s \quad [13.10]$$

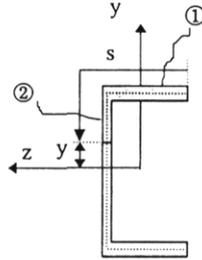
**Alma**

Se toma una  $s$  genérica que, al igual que sucedía en el cálculo de la tensión tangencial en el ala tiene su origen en el extremo de ésta.

Hay que hallar el momento estático respecto a OZ del área sombreada en la figura 13.7. Este área es compuesta y como tal, el momento estático se hallará como la suma de los momentos estáticos de cada una de las áreas simples, tal y como se muestra en la ecuación [13.11].

$$\begin{aligned} S_z(s) &= S_{\text{I}} + S_{\text{II}} = be_1 \frac{h}{2} + \left( \frac{(h-e_1)}{2} - y \right) e \left[ y + \frac{1}{2} \left( \frac{(h-e_1)}{2} - y \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_z(s) = be_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{(h-e_1)}{2} \right)^2 - y^2 \right] \end{aligned} \quad [13.11]$$

El momento estático de la expresión [13.11] se ha referido a  $y$  en vez de a  $s$ , por comodidad.



**Figura 13.7.** Perfil en U. Área genérica para el cálculo del momento estático cuando la coordenada  $s$  recorre el alma.

La tensión tangencial en el alma, teniendo en cuenta que el espesor es  $e$ , es:

$$\tau_{xs}^{\text{alma}} = \frac{V_y \left( be_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h-e_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right)}{eI_z} \quad [13.12]$$

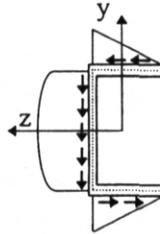
Mientras que la expresión de la tensión tangencial en el ala es lineal, en el alma es parabólica. El flujo cortante viene dado por la ecuación [13.13].

$$q_{xs}^{\text{alma}} = \tau_{xs}^{\text{alma}} e = \frac{V_y \left( be_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h-e_1}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right)}{I_z} \quad [13.13]$$

Obsérvese en la expresión [13.14] que los flujos cortantes del ala y del alma coinciden en la unión ala-alma.

$$q_{xs}^{\text{ala}} (s = b) = \frac{V_y b h e_1}{2I_z} = q_{xs}^{\text{alma}} \left( y = \frac{h-e_1}{2} \right) \quad [13.14]$$

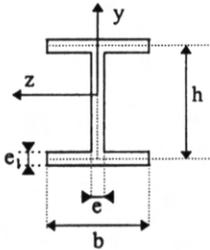
En la figura 13.8 se muestra una representación gráfica de las tensiones tangenciales. Para entender la figura tiene en cuenta que la resultante de las tensiones tangenciales debe ser igual al esfuerzo cortante, por eso el sentido de las tensiones tangenciales en el alma debe ir hacia abajo y en las alas debe ser tal que haya continuidad en el flujo.



**Figura 13.8.** Distribución de tensiones tangenciales en un perfil en U debido a un esfuerzo cortante  $V_y$

### Perfil en doble T

Ahora se va a seguir el mismo proceso para el perfil en doble T de la figura 13.9. Se obtendrá, mediante la teoría de flujo de cortante, una distribución de tensiones similar a la que se obtuvo en el apartado 8.3.



Lo primero que hay que hacer es calcular el momento de inercia de la sección respecto al eje OZ como la inercia de una sección compuesta:

$$I_z = I_{z\text{alima}} + 2 I_{z\text{ala}}$$

$$I_{z\text{alima}} = \frac{1}{12} e(h + e_1)^3; \quad I_{z\text{ala}} = \frac{1}{12} (b - e)e_1^3 + (b - e)e_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

**Figura 13.9.** Perfil en doble T.

Se obtiene el mismo momento de inercia que en el perfil en U:

$$I_z = \frac{1}{12} e(h + e_1)^3 + 2 \left[ \frac{1}{12} (b - e)e_1^3 + (b - e)e_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] \quad [13.15]$$

Una vez obtenido el momento de inercia de la sección completa se calculará la tensión tangencial en el ala y en el alma.

### Ala

Se toma una  $s$  genérica con origen en el extremo de cualquiera de las alas, figura 13.10.

El momento estático respecto al eje OZ del área sombreada es:

$$S_z(s) = se_1 \frac{h}{2} \quad [13.16]$$

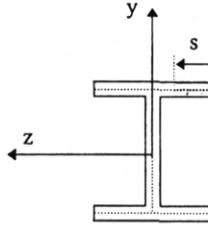


Figura 13.10. Área genérica para el cálculo del momento estático del ala en un perfil en doble T.

Teniendo en cuenta que el espesor del ala es  $e_1$ :

$$\tau_{xs}^{ala} = \frac{V_y s e_1 \frac{h}{2}}{e_1 I_z} = \frac{V_y h}{2 I_z} s \tag{13.17}$$

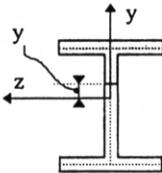
La expresión de la tensión tangencial es el ala es lineal. En cuanto al flujo cortante:

$$q_{xs}^{ala} = \tau_{xs}^{ala} e_1 = \frac{V_y h e_1}{2 I_z} s \tag{13.18}$$

**Alma**

Se toma una  $s$  genérica que tenga su origen en el extremo del ala.

El área sombreada en la figura 13.11 es compuesta y para determinar su momento estático, respecto de OZ, se hallará como la suma de los momentos estáticos de cada una de las áreas simples, expresión [13.19]



$$\begin{aligned} S_z(s) &= S_{\text{O}} + S_{\text{O}} = b e_1 \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2} - y\right) e \left[ y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \right] = \\ &= b e_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] \end{aligned} \tag{13.19}$$

Figura 13.11. Área genérica para el cálculo del momento estático del ala en un perfil en doble T.

La tensión tangencial en el alma, teniendo en cuenta su espesor  $e$ , es:

$$\tau_{alma} = \frac{V_y \left( b e_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] \right)}{e I_z} \tag{13.20}$$

Al igual que en el perfil en U, la tensión tangencial en el ala es lineal y en el alma es parabólica. El flujo cortante es:

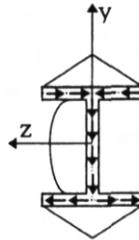
$$q_{xs}^{\text{alma}} = \tau_{xs}^{\text{alma}} e = \frac{V_y \left( be_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right)}{I_z} \quad [13.21]$$

Obsérvese que la suma de los flujos cortantes de las alas es igual al flujo cortante del alma en la unión ala-alma:

$$q_{xs}^{\text{ala}} \left( s = \frac{b}{2} \right) = \frac{V_y b h e_1}{4 I_z}; \quad q_{xs}^{\text{alma}} \left( y = \frac{b}{2} \right) = \frac{V_y b h e_1}{2 I_z} \Rightarrow$$

$$q_{xs}^{\text{ala}} \left( s = \frac{b}{2} \right) = q_{xs}^{\text{alma}} \left( y = \frac{h}{2} \right)$$

La representación gráfica de las tensiones tangenciales con su sentido aparece en la figura 13.12. Obsérvese que en el alma las tensiones tangenciales van hacia abajo, igual que el esfuerzo cortante  $V_y$ , y la distribución de tensiones tangenciales en las alas es tal que hay continuidad de flujo con el de las tensiones del alma. Las tensiones tangenciales en las alas están autoequilibradas.



**Figura 13.12.** Distribución de tensiones tangenciales en un perfil en doble T debido a un esfuerzo cortante  $V_y$ .

La distribución de tensiones tangenciales en el alma coincide, tanto si se considera la sección llena como aplicando la teoría de flujo de cortante. Pero la tensión tangencial en el ala es distinta.

### b) Perfiles cerrados

Son perfiles en los que es difícil establecer un origen para la coordenada natural  $s$ , al no existir un extremo libre, figura 13.13. Luego hay que tomar un origen cualquiera, pero en el origen que se elija el flujo de cortante, en general, no será nulo sino un valor cualquiera.

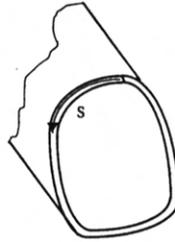


Figura 13.13. Perfil cerrado.

Para obtener la distribución de tensiones tangenciales se establece equilibrio en una rebanada igual que se hizo con los perfiles abiertos. La rebanada de la figura 13.4 sigue siendo válida. Se tomará equilibrio de fuerzas en la dirección del eje longitudinal de la barra pero, en este caso, la tensión tangencial, y por tanto el flujo, no serán nulos en la coordenada  $s = 0$ . Teniendo esto en cuenta, tomando equilibrio de fuerzas según el eje OX:

$$\int_0^s \left( \phi + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) e(s) ds - \int_0^s \phi e(s) ds + \tau_{xs} e(s) dx - \tau_{x0} e(0) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} e(s) ds \right) dx + q(s) dx - q_0 dx = 0$$

Al igual que en el perfil abierto, si el perfil es simétrico o bien si estamos trabajando en ejes principales de inercia, se verifica que:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = - \frac{\partial M_z}{\partial x} \frac{y}{I_z} = - \frac{V_y y}{I_z}$$

Con lo que la expresión anterior se reduce a:

$$- \left( \int_0^s \frac{V_y y}{I_z} e(s) ds \right) dx + q(s) dx - q_0 dx = 0 \Rightarrow q(s) = q_0 + \frac{V_y S_z(s)}{I_z}$$

La expresión del flujo de cortante anterior es igual a la del perfil abierto más el término  $q_0$ , que es desconocido. La expresión general del flujo de tensiones tangenciales en un perfil cerrado es, con independencia del sistema de ejes elegido:

$$q_c = q_a + q_0 \quad [13.22]$$

En la expresión anterior  $q_a$  es el flujo del perfil abierto correspondiente, el mismo perfil cerrado que se "abre". Para determinar este término  $q_0$  se va a imponer, sobre la integral de

la deformación angular  $\gamma_{xs}$  que el desplazamiento según el eje OX de un punto es igual en  $s = 0$ , que en  $s = S$ , que es cuando se ha dado una vuelta completa al perfil. Esto no sucede en perfiles abiertos.

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \Rightarrow u_x(s=S) - u_x(x=0) = 0 = \int_0^S \gamma_{xs} ds - \int_0^S \frac{\partial u_s}{\partial x} ds$$

Como la sección transversal no gira según el eje OX y permanece indeformada en el plano OYZ se tiene que los desplazamientos según los ejes OY y OZ son iguales para todos los puntos de la sección, o lo que es lo mismo para cualquier  $s$ . El desplazamiento  $u_s$  se puede descomponer según los ejes OY y OZ como se ve en la figura 13.14.

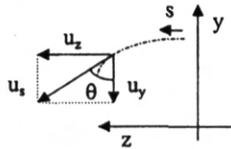


Figura 13.14. Desplazamiento según la coordenada  $s$ .

$$\int_0^S \frac{\partial u_s}{\partial x} ds = \int_0^S \frac{\partial}{\partial x} (u_z \text{sen } \theta - u_y \text{cos } \theta) ds = \frac{\partial u_z}{\partial x} \int_0^S \text{sen } \theta d\theta - \frac{\partial u_y}{\partial x} \int_0^S \text{cos } \theta d\theta = 0$$

En la expresión anterior  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial u_y}{\partial x}$  pueden salir de la integral al no depender ni  $u_y$  ni  $u_z$  de  $s$ . La integrales de las variables trigonométricas son nulas porque al recorrerse el perfil cerrado completo  $\theta$  varía entre 0 y  $2\pi$ .

De lo anterior se deduce que:

$$\int_0^S \gamma_{xs} ds = 0 \Rightarrow \int_0^S \frac{\tau_{xs}}{G} ds = \frac{1}{G} \int_0^S \frac{q_c(s)}{e(s)} ds = \frac{1}{G} \left( \int_0^S \frac{q_s(s)}{e(s)} ds + \int_0^S \frac{q_0}{e(s)} ds \right)$$

De la expresión anterior y teniendo en cuenta que  $q_0$  es constante se puede deducir que:

$$q_0 = - \frac{\int_0^S \frac{q_s(s)}{e(s)} ds}{\int_0^S \frac{1}{e(s)} ds} \tag{13.23}$$

El cálculo anterior es innecesario cuando la sección es simétrica, pues en este caso se conoce el flujo en el eje de simetría: debe ser nulo, esto se va a ver en el siguiente ejemplo.

### Flujo de cortante en un perfil rectangular

Se va a calcular la distribución de tensiones tangenciales debida a un esfuerzo cortante  $V_y$  en el perfil de la figura 13.15. El rectángulo de la figura 13.15 es igual a dos perfiles en U como los de la figura 13.5. El origen de la coordenada natural  $s$  se tomará en el eje OY, como se ve en la figura 13.15. En el origen el flujo de cortante  $q_0$  es nulo, por simetría, luego sólo habría que hallar  $q_a$ . Para ello se debería calcular el momento de inercia de la sección que sería el doble del del momento del perfil de la figura 13.5. En cuanto al momento estático y al espesor habría que distinguir entre los rectángulos horizontales, equivalentes a las alas de la U, y los rectángulos verticales equivalentes al alma de la U. Las tensiones serían las mismas que en el perfil en U pero divididas entre dos debido a que el momento de inercia es el doble; en concreto, la tensión tangencial de los rectángulos horizontales sigue la expresión [13.9] y la tensión de los rectángulos verticales tiene la expresión [13.12]. La única diferencia es que la expresión del momento de inercia es el doble del que se muestra la expresión [13.7].

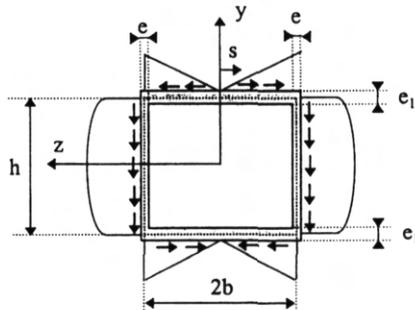


Figura 13.15. Perfil rectangular cerrado. Flujo de tensiones tangenciales.

### 13.4. CENTRO DE ESFUERZOS CORTANTES

La resultante de las tensiones tangenciales que actúan en la sección transversal, como se definió en el capítulo de introducción, es igual al esfuerzo cortante:

$$V_y = - \int_A \tau_{xy} dA \quad [13.24]$$

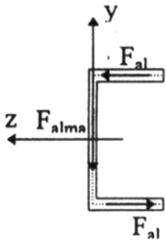
$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad [13.25]$$

En cuanto al momento resultante de esas tensiones tangenciales es igual al momento torsor:

$$M_x = \int_A (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dA \tag{13.26}$$

El momento calculado anteriormente se definió en el centro de gravedad de la sección. Una carga transversal aplicada en la barra supone un esfuerzo cortante para la sección o sea una distribución de tensiones tangenciales. Estas tensiones tangenciales, según se acaba de indicar, se reducen a una resultante igual al esfuerzo cortante y a un momento resultante; pero existe un punto en el que, si se reduce el sistema de tensiones tangenciales, este momento resultante es nulo: este punto es el *centro de esfuerzos cortantes*, a partir de ahora C.E.C. Se van a hallar los C.E.C. de determinadas secciones.

**Perfil en U**



En la sección 13.3 se calcularon las tensiones tangenciales en un perfil en U, debida a un esfuerzo cortante  $V_y$ , ahora se va a calcular un punto en el que el momento debido a estas tensiones tangenciales sea nulo. En principio se va a calcular la fuerza resultante en las alas y en las almas como se muestra en la figura 13.16.

**Figura 13.16.** Resultante en las alas y el alma en un perfil en U debido a  $V_y$ .

$$F_{ala} = \int_0^b q_{ala} ds = \int_0^b \frac{V_y h e_1}{2I_z} s ds = \frac{V_y h e_1 b^2}{4I_z} \tag{13.27}$$

$$F_{alma} = \int_{h/2}^{-h/2} q_{xs}^{alma} dy = \int_{h/2}^{-h/2} \frac{V_y}{I_z} \left( b e_1 \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] \right) dy = V_y$$

El resultado de  $F_{alma}$  es previsible porque la resultante de las tensiones tangenciales ha de ser el esfuerzo cortante y al ser el esfuerzo cortante vertical sólo puede ser absorbido por las tensiones del alma, las alas poseen tensiones tangenciales horizontales. Las fuerzas en las dos alas son iguales y de sentido contrario, luego constituyen un par de fuerzas, el momento de este par de fuerzas es:

$$M_{ala} = F_{ala} \cdot h = \frac{V_y h^2 e_1 b^2}{4I_z} \tag{13.28}$$

El momento total producido por las tensiones tangenciales de la sección será igual al momento producido por las alas más el momento producido por el alma. Como la fuerza que actúa sobre el alma es vertical, la distancia que afecta a ese momento es horizontal; se

le llamará  $c$  a esta distancia horizontal según el sentido positivo del eje OZ. Tomando momento en el origen de coordenadas representado en la figura 13.16 (Obsérvese que en la figura 13.16 se ha colocado el eje OY en la línea media del alma, para facilitar los cálculos).

$$M = M_{\text{ala}} + M_{\text{alma}} = \frac{V_y h^2 e_1 b^2}{4I_z} - c V_y = 0 \quad [13.29]$$

$$c = \frac{h^2 b^2 e_1}{4I_z} \quad [13.30]$$

En la expresión anterior se ha eliminado el carácter vectorial del momento porque, al ser las fuerzas en las alas un sistema de fuerzas plano, su momento es perpendicular al plano, según la dirección del eje OX, luego coincide con la dirección del momento torsor. El sentido que se toma es, también, el del eje OX, hacia afuera del papel.

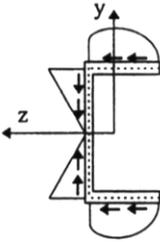
Hasta ahora se ha determinado la posición de un punto de la sección donde las tensiones tangenciales debidas a un esfuerzo cortante  $V_y$  producen un momento nulo. A continuación se va a describir qué sucede si el esfuerzo cortante tiene la dirección del eje OZ,  $V_z$ .

La distribución de tensiones tangenciales tendría la forma indicada en la figura 13.17 lo que daría lugar a unas fuerzas resultantes en las alas y en el alma como se ve en la figura 13.18. Esta distribución de tensiones tangenciales tiene resultante vertical nula y resultante horizontal igual al esfuerzo cortante  $V_z$ . La distribución de tensiones tangenciales en el ala es parabólica y en el alma lineal; hay que tener en cuenta que el momento estático se calcula respecto al eje OY que ahora sí se ha tomado de tal forma que pase por el centro de gravedad de la sección. La fuerza del alma no produce momento al ser dos fuerzas con la misma línea de acción, iguales y de sentido contrario y las fuerzas de las alas son iguales por tanto no producen momento: en el eje OZ.

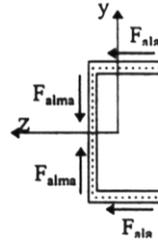
Resumiendo:

- Si hay esfuerzo cortante  $V_y$  el C.E.C. se encuentra a una distancia  $c$  del eje OY.
- Si hay esfuerzo cortante  $V_z$  el C.E.C se encuentra en el eje OZ.

Como consecuencia si hay esfuerzo cortante  $V_y$  y  $V_z$  el C.E.C. se encuentra en el punto de coordenadas  $(y, z) = (0, c)$ .



**Figura 13.17.** Distribución de tensiones tangenciales en un perfil en U debido a un esfuerzo cortante  $V_x$ .



**Figura 13.18.** Fuerzas resultantes en las alas y en el alma debido a un esfuerzo cortante  $V_x$ .

Para obtener el C.E.C en un perfil cualquiera se procederá de la siguiente forma:

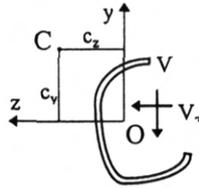
- Se obtendrá la distribución de tensiones tangenciales debida a los esfuerzos cortantes  $V_y$  y  $V_z$ .
- Se calculará el momento en un punto cualquiera O, que no tiene por qué coincidir con el centro de gravedad de la sección.
- Se tendrá en cuenta la relación que, en Mecánica Racional, permite relacionar el momento respecto a un punto con el momento respecto a otro punto. Así considerando que C es el C.E.C.:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{CO} \wedge \vec{R} = 0 \quad [13.31]$$

Teniendo en cuenta que la resultante es el esfuerzo cortante y considerando las componentes del vector  $\vec{CO}$  que se muestran en la figura 13.19, la expresión anterior se reduce a:

$$V_y \cdot c_z + V_z \cdot c_y = M_O \quad [13.32]$$

Como  $M_O$  depende de las tensiones tangenciales y éstas, a su vez, dependen de los esfuerzos cortantes  $V_y$  y  $V_z$ ,  $M_O$  depende de  $V_y$  y de  $V_z$ . Habría por lo tanto que igualar el coeficiente de  $V_z$  de la expresión de  $M_O$  a  $c_y$  e igualar el coeficiente de  $V_y$  a  $c_z$ . Esto genera un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $c_y$  y  $c_z$  y una vez resuelto queda determinada la posición del C.E.C. Luego para determinar la distancia del C.E.C. al eje OZ es necesario conocer la distribución de tensiones tangenciales debido al esfuerzo cortante  $V_y$  y para determinar la distancia al eje OY hay que obtener la distribución de tensiones tangenciales debido al esfuerzo cortante  $V_z$ .

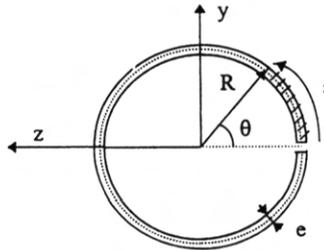


**Figura 13.19.** Posición relativa en el perfil de pared delgada del punto genérico O y del centro de esfuerzos cortantes C.

Para aclarar este cálculo vamos a ver un ejemplo.

**Perfil circular abierto**

Considérese un perfil circular abierto como el que se muestra en la figura 13.20. Aunque se aprecia la apertura se supone que ambos extremos están infinitamente cerca.



**Figura 13.20.** Perfil circular abierto. Área genérica para una coordenada s cualquiera

Para la obtención del C.E.C. se procederá como se mencionó anteriormente, pero en este caso se va a proceder primero a calcular la coordenada horizontal, o sea se va a trabajar con  $V_y$ .

La distribución de tensiones tangenciales debidas al esfuerzo cortante  $V_y$  es:

$$\tau_{xs} = \frac{V_y S_z(\theta)}{e(\theta) I_z} \tag{13.33}$$

En la expresión [13.33] se ha puesto la variable  $\theta$  en lugar de la variable  $s$  porque la variable natural  $s$  va ligada a la variable angular:  $s = R\theta$

El momento estático del área rallada en la figura 13.20 es:

$$S_z(\theta) = \int_0^\theta R \operatorname{sen} \theta e R d\theta = R^2 e (1 - \cos\theta) \quad [13.34]$$

El momento de inercia de la sección circular abierta es igual que el de la misma sección cerrada:

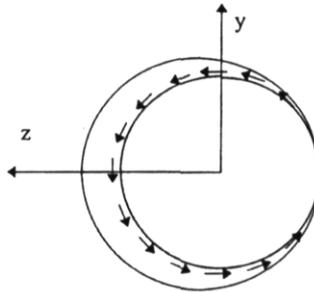
$$I_z = \frac{\pi \left(R + \frac{e}{2}\right)^4}{4} - \frac{\pi \left(R - \frac{e}{2}\right)^4}{4} \approx \pi R^3 e \quad [13.35]$$

En el valor final del momento de inercia se ha tenido en cuenta la definición de perfil de pared delgada: el espesor es mucho menor que la dimensión característica de la sección ( $e \ll R$ ).

Un vez obtenidos el momento estático y el momento de inercia, la expresión de las tensiones tangenciales en la sección es:

$$\tau_{xs}(\theta) = \frac{V_y R^2 e (1 - \cos\theta)}{\pi R^3 e^2} = \frac{V_y (1 - \cos\theta)}{\pi R e} \quad [13.36]$$

La expresión [13.36] corresponde a una distribución de tensiones como se muestra en la figura 13.21.



**Figura 13.21.** Distribución de tensiones tangenciales debido a un esfuerzo cortante  $V_y$ .

A partir de la tensión tangencial se calculará el momento en un punto cualquiera O que, en este caso, va a ser el centro de la circunferencia, por simplicidad:

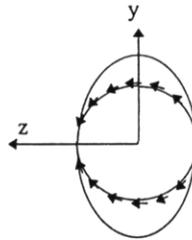
$$M_O = \int_0^{2\pi} \tau_{xs} R dA = \int_0^{2\pi} \frac{V_y (1 - \cos\theta)}{\pi R e} R e R d\theta = 2R V_y \quad [13.37]$$

Considerando que  $C(c_y, c_z)$  es el C.E.C.:

$$M_o = c_z V_y \Rightarrow c_z = 2R \quad [13.38]$$

Una vez obtenida la posición horizontal del C.E.C. se obtendrá la posición vertical para lo cual se considera la sección sometido a un esfuerzo cortante  $V_z$ . Pero hay que considerar que esta sección, como el perfil en U estudiado antes, es simétrico según el eje OZ y si se encuentra sometido a un esfuerzo cortante horizontal, aplicado en este eje, presenta simetría de geometría y de carga: la distribución de tensiones también será simétrica. Por lo tanto el momento será nulo por tratarse del momento que produce una distribución de tensiones simétrica según uno de los puntos de su eje de simetría.

Obsérvese en la figura 13.22 que al ser la distribución de tensiones tangenciales simétrica respecto al eje OZ, la tensión tangencial en cualquiera de los puntos del eje es cero.



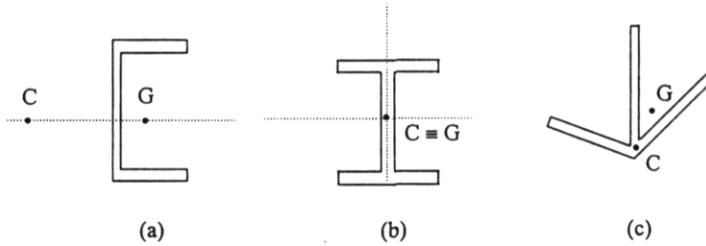
**Figura 13.22.** Distribución de tensiones tangenciales en un perfil circular abierto debido a un esfuerzo cortante  $V_z$ .

De los ejemplos anteriores se pueden extraer los siguientes resultados con referencia a la posición del C.E.C.:

- Si el perfil tiene un eje de simetría el C.E.C. se encuentra en él, figura 13.23.a.
- Si el perfil tiene dos ejes de simetría el C.E.C. se encuentra en la intersección de ambos ejes. Así en un perfil en doble T el C.E.C. coincide con su centro de gravedad, figura 13.23.b.

Además de estas dos propiedades se puede deducir otra más:

- Si el perfil está formado por una serie de rectángulos concurrentes el C.E.C. se encuentra en la confluencia de éstos, figura 13.23.c. Este resultado es lógico pues el flujo de tensiones tangenciales confluye en este punto de intersección y el momento que provocan en ese punto es nulo.



**Figura 13.23.** Influencia de la geometría de la sección en la posición del centro de esfuerzos cortantes (C) y del centro de gravedad (G): a) un eje de simetría, b) dos ejes de simetría y c) rectángulos concurrentes.

La determinación del C.E.C. es muy importante a la hora de la obtención de esfuerzos. Si una barra está sometida a una fuerza transversal aplicada en un punto que no es su C.E.C. está sometida, además, a un momento torsor de valor igual al momento que provoca la fuerza en el C.E.C. A la hora del diseño hay que evitar el momento torsor procurando que las fuerzas transversales actúen en el C.E.C., para que el momento de las fuerzas transversales se contrarresten con el momento de las tensiones tangenciales.

### 13.5. PERFILES DE PARED DELGADA SOMETIDOS A TORSIÓN LIBRE. ANALOGÍA DE LA MEMBRANA

Como se vio en el apartado 5 del tema 12 la torsión de una sección cualquiera provoca un alabeo de sus puntos, además de un giro de la sección. El comportamiento de una barra a torsión depende de que este alabeo esté o no impedido.

En esta sección se pretende estudiar perfiles abiertos sometidos a torsión pura; o sea, barras prismáticas de sección de pared delgada en las que su sección esté sometida a un sistema de fuerzas que tenga resultante nula y momento resultante según la dirección del eje longitudinal de la barra que pase por el C.E.C. Si el sistema de fuerzas tiene resultante nula es indiferente el punto donde se calculen momentos; pero si, por el contrario, además de momento torsor, actúan en la sección esfuerzos cortantes hay que reducirlos al C.E.C.

En los problemas de torsión de secciones de forma arbitraria la simplificación propia de la Resistencia de Materiales que permite establecer un modelo monodimensional no es del todo viable. Se puede construir un modelo monodimensional; pero para su planteamiento hace falta hacer uso del problema general de la Teoría de la Elasticidad. Sin embargo sí se podrán obtener soluciones explícitas que permitirán establecer un modelo monodimensional para perfiles de pared delgada, mediante el cual se podrán obtener las tensiones y los desplazamientos en barras de secciones de pared delgada.

En Física se recurre muchas veces a las analogías. Dos problemas físicos son análogos cuando obedecen a ecuaciones matemáticas formalmente iguales. Si uno de ellos es fácilmente observable, y se pueden extraer fácilmente algunas conclusiones, éstas pueden ser

extrapoladas al otro fenómeno de más difícil observabilidad. Esta analogía se da entre la distribución de tensiones tangenciales en una sección, como consecuencia de la torsión libre y la deformada que adquiriría una lámina o membrana que, teniendo la misma forma que el contorno exterior de la sección, estuviera sometida a una presión transversal uniforme  $P$  y a una tracción uniforme  $N$  en todo el contorno. Esto es lo que se conoce como *analogía de la membrana*. Puede demostrarse que la ecuación de la deformada de esta lámina tiene la misma forma que la ecuación que gobierna la distribución de tensiones tangenciales en la sección como consecuencia al momento torsor. Recordando que  $\theta$  es el ángulo unitario de torsión, ambas ecuaciones son iguales si:

$$\frac{P}{N} = 2G\theta \tag{13.39}$$

Si se cumple la condición anterior se pueden establecer las siguientes conclusiones de la analogía de la membrana:

- a) La tangente a una línea de nivel en cualquier punto de la membrana deformada da la dirección de la tensión tangencial en el punto correspondiente de la sección sometida a torsión.
- b) La pendiente máxima de la membrana en cualquier punto es igual al valor de la tensión tangencial en el punto correspondiente de la sección, a torsión.
- c) El doble del volumen comprendido entre la superficie deformada de la membrana y el plano de su contorno es igual al momento torsor que solicita la sección.

Estas correspondencias pueden ser fácilmente probadas en el caso de un perfil circular. Considere un trozo de membrana circular traccionada uniformemente mediante una fuerza  $N$  y sometida a una presión uniforme  $P$ . Por simetría, cada círculo concéntrico es una curva de nivel de la deformada y según se dedujo en el apartado 12.2 la tensión tangencial en secciones circulares sólo depende del radio, luego queda demostrada la condición a).

Para demostrar la condición b) se aplicará equilibrio de fuerzas en la dirección vertical a un círculo concéntrico de radio  $r$  como se muestra en la figura 13.24.

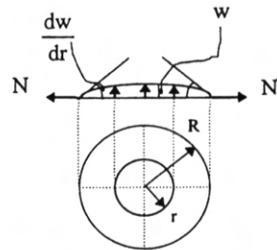


Figura 13.24. Membrana circular sometida a presión interior y tracción en el contorno. Deformada.

La resultante vertical de la presión es  $\pi r^2 P$  y la tracción de la membrana tiene fuerza vertical total de  $2\pi r N \frac{dw}{dr}$ . Hay que tener en cuenta que la fuerza de tracción es tangente a la membrana y su componente horizontal por unidad de longitud es  $N$ .

De aplicar equilibrio se extrae:

$$-\frac{dw}{dr} = \frac{Pr}{2N} \quad [13.40]$$

Sustituyendo el resultado de [13.39] en la expresión [13.40] se obtiene:

$$-\frac{dw}{dr} = G\theta r \quad [13.41]$$

El segundo miembro de la igualdad [13.41] corresponde al valor de la tensión tangencial en un perfil circular debido a un momento torsor; luego la pendiente radial de la deformada de la lámina corresponde al valor de la tensión tangencial debida al momento torsor. El valor  $\frac{dw}{dr}$  es la pendiente máxima de la membrana en contraposición con la pendiente circunferencial, que es nula. Así se ha demostrado la condición b) para membranas circulares. A continuación se va a probar la condición c), también para perfiles circulares. Para calcular el volumen encerrado por la membrana y el plano horizontal se calculará primero la cota de la deformada integrando la expresión [13.41].

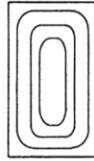
$$w(r) = - \int_R^r G\theta r dr = -G\theta \left[ \frac{r^2}{2} \right]_R^r = G\theta \frac{R^2 - r^2}{2} \quad [13.42]$$

y posteriormente hay que integrar la cota  $w(r)$  a lo largo de toda la proyección horizontal de la membrana:

$$V = \int_0^R 2\pi r w dr = \pi G\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{1}{2} G\theta I_p = \frac{M_t}{2} \quad [13.43]$$

Donde hemos usado [12.5]. Queda demostrado que el volumen encerrado por la membrana y el plano horizontal es equivalente a la mitad del momento torsor.

Para otros tipos de sección es fácil de imaginar la forma de la superficie deformada y por tanto las propiedades cualitativas de la distribución de tensiones tangenciales debidas a un momento torsor. Por ejemplo en una sección rectangular las líneas de nivel de la deformada de la membrana presentan la forma representada en la figura 13.25 y las tensiones tangenciales serán tangentes a estas líneas de nivel. Además cuanto más cerca del borde de la sección mayor será la pendiente radial de la deformada y por tanto mayor será la tensión tangencial. En los extremos mayores la pendiente es mayor al haber una variación de la deformada en un espacio más pequeño que en el lado menor por esto la tensión tangencial alcanza el valor máximo de tensión en la mitad del lado mayor, como se dijo en el apartado 12.5.



**Figura 13.25.** *Curvas de nivel en una membrana rectangular.*

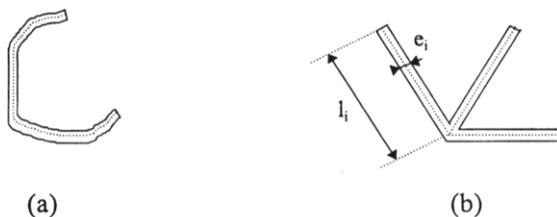
Si el perfil es rectangular, pero con una dimensión mucho mayor que la otra, las curvas de nivel tendrán la misma forma; pero debido a la singular geometría serán líneas prácticamente rectas y paralelas a la dimensión mayor figura 13.26.a.

Las curvas de nivel de la deformada de la membrana da una idea de la dirección de las tensiones tangenciales, figura 13.26.b. El sentido de las tensiones tangenciales viene determinado por el cambio de pendiente de la deformada, como se ve en la figura 13.26.a. Este resultado va a ser fundamental a la hora de estudiar la torsión en perfiles de pared delgada abiertos.



**Figura 13.26.** *Rectángulo con una dimensión mucho menor que la otra: curvas de nivel de la deformada de la membrana a) y tensión tangencial en torsión b).*

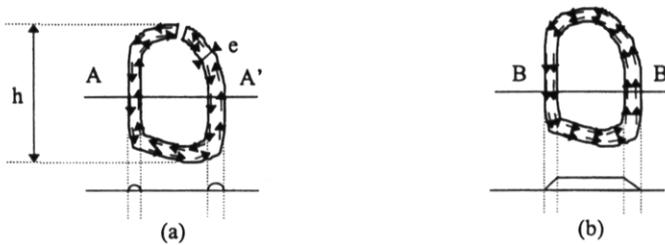
Un perfil de pared delgada abierto es un rectángulo con una dimensión mucho mayor que la otra, en el que la línea media puede no ser recta, o una serie de rectángulos de este tipo, figura 13.27.a. y 13.27.b. respectivamente.



**Figura 13.27.** *Perfiles de pared delgada abiertos: a) formados por un sólo rectángulo de línea media no recta y b) formado por varios rectángulos.*

En cuanto a los perfiles de pared delgada cerrados, la deformada de la membrana es totalmente distinta. Una comparación entre perfiles abiertos y cerrados se hará más adelante.

En general, los perfiles abiertos trabajan mucho peor a torsión que los perfiles cerrados de similares características; esto es, frente al mismo momento torsor presentan mayores tensiones tangenciales y giros. Este resultado se puede deducir fácilmente mediante la analogía de la membrana. Así, si se compara el mismo perfil abierto y cerrado, sometidos al mismo momento torsor, su distribución de tensiones tangenciales sería la mostrada en la figura 13.28.



**Figura 13.28.** Distribución cualitativa de tensiones según la analogía de la membrana para a) perfiles abiertos y b) perfiles cerrados con forma idéntica.

En el perfil abierto, las tensiones tangenciales a lo largo del espesor cambian de sentido, y en el perfil cerrado, son del mismo sentido. Esto hace que el brazo de la tensión en perfiles abiertos, del orden del espesor, sea más pequeña que en los perfiles cerrados, del orden de la dimensión característica de la sección. La razón de esto se desprende de la analogía de la membrana: en la misma figura se representa también el perfil de la membrana; en el perfil abierto se produce un cambio de pendiente de la deformada a lo largo del espesor y en el perfil cerrado la pendiente de la deformada es prácticamente constante a lo largo del espesor.

La diferencia de brazo de un perfil a otro produce, en los perfiles abiertos, tensiones tangenciales mayores que en los perfiles cerrados. Para entender esto se va a hacer un análisis cualitativo del momento torsor en ambos perfiles. Se va a suponer dos perfiles exactamente iguales uno cerrado y otro que presenta una pequeña apertura que obliga a considerarlo como perfil abierto, ambos sometidos al mismo momento torsor  $M_t$

En los perfiles abiertos el momento será del orden de magnitud de la fuerza total por el brazo, que como ya se ha indicado es del orden de magnitud del espesor,  $e$ . A su vez la fuerza será la tensión característica por el área.

$$M_t \sim \tau_a Ae \quad [13.44]$$

De donde se deduce el orden de magnitud de la tensión tangencial es:

$$\tau_a \sim \frac{M_t}{Ae} \quad [13.45]$$

En los perfiles cerrados el brazo es del orden de magnitud de la dimensión característica de la sección,  $h$ , con lo que el orden de magnitud del momento es:

$$M_t \sim \tau_a A h \quad [13.46]$$

Y el de la tensión tangencial:

$$\tau_c \sim \frac{M_t}{Ah} \quad [13.47]$$

La relación entre ambas tensiones es:

$$\frac{\tau_c}{\tau_a} \sim \frac{\frac{M_t}{Ah}}{\frac{M_t}{Ae}} \sim \frac{e}{h} \ll 1 \quad [13.48]$$

De la relación [13.48] se deduce que la tensión tangencial en perfiles cerrados es mucho menor que en perfiles abiertos: los perfiles cerrados trabajan mejor a torsión.

### 13.6. PERFILES ABIERTOS Y CERRADOS SOMETIDOS A TORSIÓN LIBRE.

Se va a distinguir entre perfiles que se pueden considerar formados por un rectángulo y perfiles formados por varios rectángulos, distinción que se hizo en la figura 13.26.

#### Perfil abierto formado por un solo rectángulo

Este resultado es independiente de cómo sea la línea media: recta o curva. Se trata de un rectángulo de dimensiones  $e \times S$  con  $e/S \rightarrow \infty$  al ser el espesor mucho menor que la dimensión característica de la sección. Según se vio en la sección 12.5 la tensión tangencial máxima en un rectángulo de pequeño espesor, considerando que el valor de  $\alpha$  de la tabla 12.1 es 1/3, es:

$$\tau = \frac{3M_t}{Se^2} \quad [13.49]$$

Aunque la expresión anterior es la tensión tangencial máxima del perfil, correspondiente al punto medio del lado mayor, de la analogía de la membrana se puede deducir que la tensión tangencial es prácticamente constante y su valor será el que se muestra en la expresión [13.49].

En cuanto al giro por unidad de longitud,  $\theta$ , también en la sección 12.5 se vio que, con un valor de  $\beta = 1/3$ , su expresión es:

$$\theta = \frac{3M_t}{S e^3 G} \quad [13.50]$$

**Perfil abierto formado por varios rectángulos.**

Son perfiles del tipo representado en la figura 13.27.b.

En un perfil de este tipo sometido a un momento torsor,  $M_t$ , éste se reparte entre los rectángulos:

$$M_t = M_t^1 + M_t^2 + \dots + M_t^n = \Sigma M_t^i \quad [13.51]$$

siendo  $M_t^i$  el momento torsor que absorbe el rectángulo  $i$ . El giro es una característica de la sección siendo común a todos los rectángulos, en cada rectángulo se verificará la expresión [13.50]:

$$M_t^i = \frac{S_i e_i^3 G \theta}{3} \quad [13.52]$$

Teniendo en cuenta [13.50] y [13.51] se llega a:

$$M_t = \sum_{i=1}^n \frac{S_i e_i^3 G \theta}{3}$$

Con lo que se tiene la expresión del giro por unidad de longitud:

$$\theta = \frac{3M_t}{G \sum_{i=1}^n S_i e_i^3} \quad [13.53]$$

Para obtener la tensión en cada rectángulo se puede hacer uso de la expresión [13.49], en la que se obtuvo la tensión tangencial para un perfil abierto formado por un solo rectángulo, a la que se le añade [13.52] y de la [13.53]

$$\tau_i = \frac{3M_t^i}{S_i e_i^2} = \frac{3}{S_i e_i^2} \frac{S_i e_i^3 G \theta}{3} = e_i G \theta = \frac{3e_i G M_t}{G \sum_{i=1}^n S_i e_i^3}$$

Quedando una tensión tangencial en cada rectángulo de:

$$\tau_i = \frac{3e_i M_t}{\sum_{i=1}^n S_i e_i^3} \tag{13.54}$$

De la expresión [13.54] se desprende un resultado sorprendente: el rectángulo que posee mayor tensión tangencial es el que dispone de mayor espesor. Esto no quiere decir que interesa que todos los rectángulos del perfil sean de muy delgados para obtener tensiones pequeñas pues aparece un sumatorio en el denominador en el que el espesor permanece al cubo. Interesan, pues, rectángulos de espesor grande pero, de estos rectángulos, el que posea mayor espesor es el que presenta mayor tensión.

**Perfil cerrado**

Considérese un perfil cerrado como el que se muestra en la figura 13.29. Como ya se justificó en el apartado anterior mediante la analogía de la membrana, en estos perfiles la tensión tangencial debida al momento torsor es aproximadamente constante a lo largo del perfil.

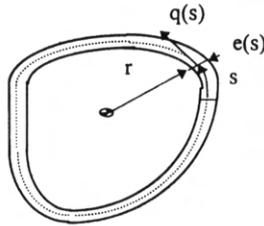


Figura 13.29. Perfil cerrado.

Se puede definir, al igual que se hizo con la tensión tangencial debida al esfuerzo cortante, un flujo de cortante. El flujo de cortante es constante para la variable natural  $s$ , la demostración de esto se pone de manifiesto al efectuar equilibrio de fuerzas, según la coordenada axial de la barra, a un diferencial de longitud de barra y entre dos coordenadas naturales,  $s_1$  y  $s_2$ , figura 13.30, de la misma forma utilizada para demostrar la fórmula de la tensión tangencial debido al esfuerzo cortante. También se tiene en cuenta la reciprocidad de tensiones tangenciales  $\tau_{xs}$  y  $\tau_{sx}$ .

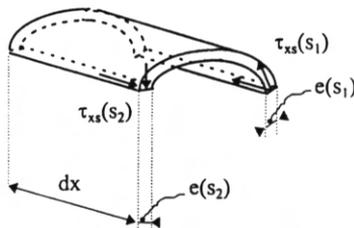


Figura 13.30. Diferencial de barra.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -\tau_{sx}(s_1)e(s_1)dx + \tau_{sx}(s_2)e(s_2)dx = 0 \Rightarrow \\ \tau_{xs}(s_1)e(s_1) &= \tau_{xs}(s_2)e(s_2) = q(s) = \text{cte} \end{aligned} \quad [13.55]$$

Para obtener este flujo constante se tiene en cuenta que el momento resultante según el eje OX de este flujo es el momento torsor:

$$M_t = \int q \cdot r ds = q \int r ds = q(s)2A^* = 2\tau(s)e(s)A^*$$

En la expresión anterior  $A^*$  representa la superficie encerrada por la línea media del perfil, de esta expresión se deduce que la tensión tangencial debida al momento torsor es:

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2e(s)A^*} \quad [13.56]$$

Para obtener el desplazamiento hay que recurrir al concepto de energía, este concepto se desarrollará en el tema siguiente; pero se puede adelantar que la energía potencial debida a las tensiones, en este caso tangenciales, es igual al trabajo externo provocado por el momento torsor sobre la sección, que será el momento por el giro por unidad de longitud, pues se está calculando trabajo por unidad de longitud.

$$\frac{1}{2} \int_A \tau(s)\gamma(s)dA = \frac{1}{2} M_t \theta$$

Si, además de la igualdad anterior, se tiene en cuenta que el diferencial de área es  $dA = e(s)ds$ , la ley de Hooke para tensiones tangenciales  $\tau(s) = G\gamma(s)$  y la expresión que relaciona las tensiones tangenciales con el momento torsor, [13.56], se deduce que:

$$\int \frac{M_t^2}{4GA^*e(s)} ds = M_t \theta$$

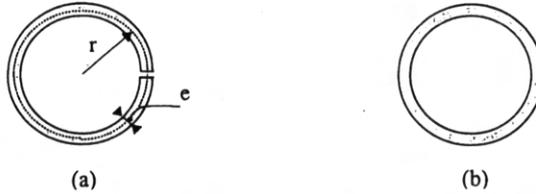
Con lo que el giro por unidad de longitud queda:

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^*} \int \frac{ds}{e(s)} \quad [13.57]$$

A continuación se van a calcular algunas tensiones tangenciales y giros en perfiles de pared delgada debido al momento torsor.

**Comparación perfil abierto vs perfil cerrado. Perfil circular**

Se van a calcular las tensiones y giros de dos perfiles circulares de pared delgada iguales: uno abierto y otro cerrado, del mismo material y geometría y sometidos al mismo momento torsor,  $M_t$ , figura 10.31.



**Figura 13.31.** Perfil circular de pared delgada abierto, (a), y cerrado, (b).

**Perfil abierto**

La apertura del perfil abierto se supone despreciable. Para obtener la tensión tangencial se aplica la expresión [13.49]

$$\tau_a = \frac{3M_t}{Se^2} = \frac{3M_t}{2\pi r e^2}$$

Y para obtener el giro por unidad de longitud se aplicará la [13.50]:

$$\theta_a = \frac{3M_t}{Se^3G} = \frac{3M_t}{2\pi r e^3G}$$

**Perfil cerrado**

Para obtener la tensión tangencial se aplica la expresión [13.56]:

$$\tau_c = \frac{M_t}{2e(s)A^*} = \frac{M_t}{2e\pi r^2}$$

Y para obtener el giro por unidad de longitud se aplicará la [13.57]:

$$\theta_c = \frac{M_t}{4GA^*} \int_0^s \frac{ds}{e(s)} = \frac{M_t 2\pi r}{4G(\pi r^2)^2 e} = \frac{M_t}{2\pi r^3 G e}$$

Si se comparan los resultados de ambos perfiles, se puede ver que las tensiones y los giros en el perfil abierto son mayores que en el perfil cerrado, como ya se había intuido con la analogía de la membrana:

$$\frac{\tau_a}{\tau_c} = \frac{\frac{3M_t}{2\pi r e^2}}{\frac{M_t}{2e\pi r^2}} = 3 \frac{r}{e} \gg 1$$

$$\frac{\theta_a}{\theta_c} = \frac{\frac{3M_t}{2\pi r e^3 G}}{\frac{M_t}{2e\pi r^3 G}} = 3 \left(\frac{r}{e}\right)^2 \gg 1$$

### Perfil rectangular abierto

Se trata de calcular las tensiones tangenciales y los giros del perfil de la figura 13.32.a, que es un perfil abierto formado por varios rectángulos, por tanto las tensiones se calcularán a partir de la expresión [13.54] y el giro por unidad de volumen a partir de la expresión [13.53].

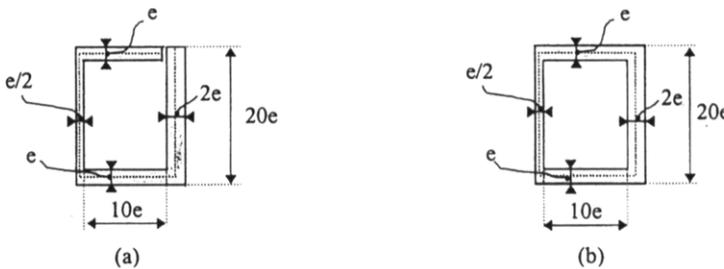


Figura 13.32. Perfil rectangular de pared delgada abierto, (a), y cerrado, (b).

$$\tau_i = \frac{3e_i M_t}{\sum_{i=1}^n S_i e_i^3} = \frac{3e_i M_t}{11.25e \cdot e^3 + 11.25e \cdot e^3 + 19e \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^3 + 19e \cdot (2e)^3} = \frac{24}{1415} \frac{e_i}{e^4} M_t$$

La tensión tangencial máxima se obtiene en el rectángulo de mayor espesor:

$$\tau_{\max} = \frac{24 \cdot 2e M_t}{1415e^4} = \frac{48 M_t}{1415e^3}$$

En cuanto al giro:

$$\theta = \frac{3M_t}{G \sum_{i=1}^n S_i e_i^3} = \frac{24 M_t}{1415 G e^4}$$

**Perfil rectangular cerrado**

Se estudiará el perfil de la figura 13.32.b. para el cual se utilizarán las mismas fórmulas que previamente se habían utilizado para el perfil circular cerrado.

$$\tau_i = \frac{M_t}{2e(s)A^*} = \frac{M_t}{2e_i(10e + e/4 + e)(20e - e/2 - e/2)} = \frac{2M_t}{855e^2e_i}$$

La tensión máxima se produce en el rectángulo en el que el espesor es mínimo:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{855(e/2)e^2} = \frac{4M_t}{855e^3}$$

El giro por unidad de longitud es:

$$\theta = \frac{M_t}{4GA^*{}^2} \int_s \frac{ds}{e(s)} = \frac{M_t}{4G\left(\frac{855}{4}e^2\right)^2} \left(\frac{45e}{4e} + \frac{45e}{4e} + \frac{19e}{e/2} + \frac{19e}{2e}\right) = \frac{280}{855^2} \frac{M_t}{Ge^4}$$



## Capítulo 14

# POTENCIAL ELÁSTICO DE BARRAS. MÉTODOS ENERGÉTICOS

### 14.1. INTRODUCCIÓN

En el apartado 4.6 de este texto se vio que el proceso de deformación conlleva a un incremento de energía potencial, esta variación de energía potencial es provocada por el trabajo producido por las fuerzas externas al actuar sobre los puntos del sólido elástico.

La introducción del concepto de energía potencial es doblemente importante: por una parte siempre es importante el conocimiento de los niveles energéticos que se llegan a alcanzar en cualquier proceso y por otra sirve como herramienta que para obtener desplazamientos en la barra prismática, convirtiéndose, a su vez, en un método alternativo para la obtención de incógnitas hiperestáticas. Estos métodos energéticos no son privativos de la Resistencia de Materiales pudiéndose haber introducidos en la Elasticidad, de hecho constituyen la base de los métodos numéricos para la resolución de problemas de Elasticidad. La razón de definirlos directamente en la Resistencia de Materiales se debe a que, prácticamente, sólo en ésta permite el planteamiento de problemas con una resolución analítica.

### 14.2. TRABAJO PRODUCIDO POR LAS FUERZAS EXTERNAS

Sea un sólido elástico, en principio de forma cualquiera como el que se muestra en la figura 14.1, al que se somete a una fuerza  $F_{si}$ , aplicada en un punto  $A_i$ , siendo las condiciones de apoyo del sólido de tal forma que impida el desplazamiento de éste como sólido rígido.

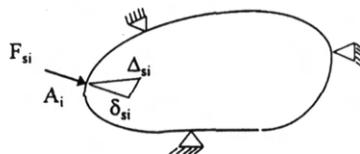


Figura 14.1. Sólido elástico.

La aplicación de esta fuerza debe efectuarse de forma gradual para impedir que se produzcan efectos dinámicos que hemos considerado despreciables. Debido a la hipótesis de la linealidad la relación entre la fuerza y el desplazamiento del punto en el que se aplica la fuerza es lineal, figura 14.2, esto supone que el trabajo es el área encerrada entre esta línea y el eje de abscisas; o sea el área de un triángulo. En el eje de abscisas se ha colocado la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.



Figura 14.2. Curva de comportamiento lineal.

Si  $\bar{\Delta}_{si}$  es el desplazamiento del punto  $A_i$  y  $\delta_{si}$  la proyección del desplazamiento sobre la dirección de la fuerza  $\bar{F}_{si}$ , el trabajo que realiza la fuerza es:

$$W = \frac{1}{2} \bar{F}_{si} \cdot \bar{\Delta}_{si} = \frac{F_{si} \delta_{si}}{2} \quad [14.1]$$

Si en vez de una fuerza actuando en un punto se tiene una distribución de fuerzas superficiales,  $\bar{F}_s$ , que actúan sobre una parte del contorno  $\partial S$ , el trabajo total producido por esta distribución de fuerzas se obtiene integrando el trabajo infinitesimal a lo largo de la superficie:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \bar{F}_s \cdot \bar{\Delta} dS$$

Si, además de esta distribución de fuerzas superficiales, aparece una distribución de fuerzas volumétricas,  $\bar{F}_v$ , éstas realizan un trabajo que se obtiene integrando el trabajo infinitesimal a lo largo del volumen  $\partial V$  sobre el que actúa las fuerzas volumétricas.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial V} \bar{F}_v \cdot \bar{\Delta} dV$$

El trabajo total que sobre un sólido realizan las fuerzas externas es:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \bar{F}_s \cdot \bar{\Delta} dS + \frac{1}{2} \int_{\partial V} \bar{F}_v \cdot \bar{\Delta} dV \quad [14.2]$$

En el caso de Resistencia de Materiales las fuerzas que se consideran no son superficiales ni volumétricas sino puntuales y lineales, considerando una barra sometida a una serie de

fuerzas puntuales  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ ; que actúan sobre los puntos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ; y a una distribución de fuerza lineal  $\bar{q}$ , que actúa sobre una parte de la longitud de la barra  $\partial L$ , el trabajo que estas fuerzas realizan en la barra es:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \cdot \bar{\Delta}_i + \frac{1}{2} \int_{\partial L} \bar{q} \cdot \bar{\Delta} dL \quad [14.3]$$

Cuando en la expresión anterior se habla de fuerzas y de momentos se hace en un sentido generalizado, incluyendo en las fuerzas los momentos y en los desplazamientos los giros. Esto debe entenderse así en lo que resta de teoría.

### 14.3. POTENCIAL ELÁSTICO Y ENERGÍA POTENCIAL

En el capítulo 4 de estos apuntes se definió el potencial elástico como la energía potencial por unidad de volumen y tomaba la expresión:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad [14.4]$$

Si se integra la expresión [14.4] sobre todo el sólido elástico se obtiene la variación de energía potencial que sufre el sólido durante el proceso de deformación. En el caso de que el sólido elástico se trate de una barra prismática habrá que considerar qué tipo de esfuerzos solicitan a la barra prismática: esfuerzo axil, momento flector, esfuerzo cortante o momento torsor.

#### Energía potencial de una barra sometida a esfuerzo axil

Si la barra se encuentra sólo sometida a esfuerzo axil, de las seis componentes del tensor de tensiones la única que es distinta de cero es  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Y teniendo en cuenta la ley de Hooke, la deformación  $\varepsilon_x$  se obtiene a partir de  $\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{N}{EA}$$

Existen otras componentes de la deformación  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  que son distintas de cero pero que no influyen en la expresión de la energía, al ser nulas las tensiones correspondientes. Las expresiones de la tensión y de la deformación debidas al esfuerzo axil se introducen en

[14.4] y se obtiene el potencial interno que se genera cuando una barra se halla sometida a esfuerzo axil:

$$U = \frac{1}{2} \frac{N}{A} \frac{N}{EA} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA^2} \quad [14.5]$$

Si se integra a lo largo del volumen se obtiene la energía potencial de deformación:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \frac{N^2}{EA^2} dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{N^2}{EA^2} \int_A dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx \quad [14.6]$$

En la integral anterior se ha tenido en cuenta que ni el área transversal,  $A$ , ni el módulo de elasticidad,  $E$ , ni el esfuerzo axil,  $N$ , varían en la propia área transversal y por ello se ha sacado fuera de la integral, si, además, el esfuerzo axil,  $E$  y  $A$  son constantes en toda la longitud de la barra, circunstancia ésta bastante habitual, la expresión [14.6] se reduce a:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{N^2 L}{EA} \quad [14.7]$$

### Energía potencial de una barra sometida a momento flector $M_z$

Por comodidad se va a considerar que la flexión es pura y simétrica. La única componente tensional distinta de cero, al igual que sucedía con el esfuerzo axil es la tensión  $\sigma_x$  y al igual que sucedía con el esfuerzo axil sólo interesa hallar la deformación  $\varepsilon_x$ :

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}; \quad \varepsilon_x = -\frac{M_z y}{EI_z}$$

Introduciendo los valores anteriores en [14.4] se obtiene el potencial interno en flexión:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} \quad [14.8]$$

Y la energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \int_A \frac{M_z^2 y^2}{EI_z^2} dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z^2} \left( \int_A y^2 dA \right) dx$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que el momento flector,  $M_z$ , el módulo de elasticidad,  $E$ , y el momento de inercia de la sección,  $I_z$ , son constantes en toda la sección y pueden salir de la integral. Además teniendo en cuenta la dirección del momento de inercia

$I_z$ , la expresión del potencial para una barra sometida a un momento  $M_z$ , siendo este eje principal de inercia queda:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx \quad [14.9]$$

El resultado para una barra sometida a un momento  $M_y$  es análogo:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx \quad [14.10]$$

### Energía potencial de una barra sometida a esfuerzo cortante $V_y$

Suponiendo que la sección sea simétrica y considerando que sólo se generan tensiones  $\tau_{xy}$ , aunque resultado análogo se puede extraer en perfiles de pared delgada en los que la tensión tangencial que aparece,  $\tau_{xs}$ , lleva la dirección de la línea media  $s$ , el potencial interno sería:

$$U = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Donde los valores de la tensión tangencial y de la distorsión angular son, respectivamente:

$$\tau_{xy} = -\frac{V_y S_z(y)}{b_z(y) I_z}; \quad \gamma_{xy} = -\frac{V_y S_z(y)}{b_z(y) G I_z}$$

Con lo que el potencial interno queda:

$$U = \frac{1}{2} \frac{V_y^2 S_z^2(y)}{G b_z^2(y) I_z^2} \quad [14.11]$$

Si se integra la expresión [14.11] a lo largo del volumen de la barra se obtiene la energía potencial debida al esfuerzo cortante:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_y^2}{G I_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b_z^2(y)} dA \quad [14.12]$$

Si la barra se encuentra sometida a esfuerzo cortante  $V_z$  la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_z^2}{GI_y^2} \int_A \frac{S_y^2(z)}{b_y^2(y)} dA \quad [14.13]$$

El resultado para una barra de pequeño espesor, supuestos los ejes principales de inercia, y que está sometida a un esfuerzo cortante  $V_y$ , que actúa en el centro de esfuerzos cortantes, es similar:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_y^2}{EI_z^2} \int_A \frac{S^2(s)}{b^2(s)} dA \quad [14.14]$$

### Energía potencial de una barra de sección circular sometida a momento torsor $M_t$

La torsión produce tensiones tangenciales que, en el caso de barras circulares, llevan la dirección perpendicular al radio. Estas tensiones tangenciales generan distorsiones angulares:

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p}; \quad \gamma = \frac{M_t r}{GI_p}$$

El potencial interno es:

$$U = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{M_t^2 r^2}{2GI_p^2} \quad [14.15]$$

Integrando a lo largo de toda la barra se obtiene la energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{M_t^2}{GI_p^2} \int_A r^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t}{GI_p} dx \quad [14.16]$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta la definición de momento polar de inercia.

Para obtener la energía potencial de una barra que se encuentre sometida a esfuerzo axial, momentos flectores  $M_z$  y  $M_y$ , esfuerzos cortantes,  $V_y$  y  $V_z$ , y momento torsor  $M_t$  se puede aplicar el principio de superposición:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_y^2}{GI_z^2} \int_A \frac{S_z^2(y)}{b_z^2(y)} dA +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^L \frac{V_z^2}{GI_y^2} \int_A \frac{S_y^2(z)}{b_y^2(y)} dA + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^2}{GI_p} dx \quad [14.17]$$

La energía potencial de deformación cuya expresión viene manifestada en [14.17] es producida por las fuerzas externas, al transformarse el trabajo producido por éstas, [14.3], en energía potencial de deformación. Si se dispone de un sistema de barras la energía potencial del sistema será la suma de la energía potencial de cada barra:

$$E_p = \sum_{i=1}^{i=n} E_{p_i} \quad [14.18]$$

El conocimiento de la energía de un sistema, además de su interés intrínseco, proporciona una ventaja adicional: permite aplicar una serie de teoremas, que se suelen denominar “teoremas energéticos” al hacer uso del concepto de energía y que van a facilitar la resolución del problema elástico, en general, y de las estructuras de barras, en particular. Los teoremas energéticos que se van a desarrollar en el actual capítulo serán los teoremas de reciprocidad, el principio de los trabajos virtuales y el teorema de Castigliano.

#### 14.4. TEOREMA DE RECIPROCIDAD O DE BETTI

Antes de definir el teorema de reciprocidad se van a considerar dos estados para un mismo sólido, el estado (a) de la figura 14.3, en el que se aplican las fuerzas  $F_i$  en los puntos  $A_i$  y el estado (b) de la figura 14.3 en el que se han aplicado una serie de fuerzas  $F_j$ , en los puntos  $B_j$ . Sean  $\delta_{A_i}$  y  $\delta_{B_j}$  los desplazamientos en los puntos  $A_i$  y  $B_j$ , para el estado (a) y  $\delta_{A_i}$  y  $\delta_{B_j}$  los desplazamientos en los puntos  $A_i$  y  $B_j$ , para el estado (b).



Figura 14.3. Sólido elástico que se ha sometido a dos sistemas de cargas distintos: (a) y (b).

El teorema de reciprocidad dice: *El trabajo correspondiente a las fuerzas del estado (a) para los desplazamientos del estado (b) es igual al trabajo producido por las fuerzas del estado (b) sobre los desplazamientos del estado (a).* En este caso cuando se habla de trabajo no es un trabajo real.

Para demostrar este teorema se va a considerar el carácter potencial de la energía de deformación. Así supóngase que se aplican primero las fuerzas del estado (a) para, a continuación, aplicarse las del estado (b), al aplicarse primero las fuerzas del estado (a), el trabajo producido por estas fuerzas es:

$$\frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai} \quad [14.19]$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta el carácter vectorial de fuerzas y desplazamientos.

Al aplicarse las fuerzas  $F^*$ , éstas producen trabajo sobre los puntos  $B_j$ :

$$\frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Bj}^* \cdot \bar{\delta}_{Bj}^* \quad [14.20]$$

Pero las fuerzas  $F$  también producen trabajo sobre los nuevos desplazamientos, aunque al no estar estos desplazamientos provocados por aquéllas no les afecta el coeficiente  $1/2$ , hay que tener en cuenta que en este caso la relación fuerza desplazamiento no sigue la linealidad como en la figura 14.2. Al ser la fuerza constante durante el desplazamiento el trabajo que se produce es igual al área del rectángulo de la figura 14.4.

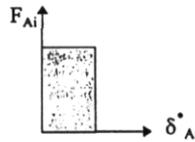


Figura 14.4: Fuerza frente a desplazamiento con fuerza constante.

$$\sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai}^* \quad [14.21]$$

Para obtener el trabajo total de todas las fuerzas se sumarán las cantidades expresadas en [14.19], [14.20] y [14.21]:

$$W_{ab} = \frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai} + \frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Bj}^* \cdot \bar{\delta}_{Bj}^* + \sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai}^* \quad [14.22]$$

Ahora supóngase que se llega al mismo estado de cargas pero invirtiendo el orden de aplicación de las mismas: primero se aplican las fuerzas  $F^*$  y luego las fuerzas  $F$ , si se sigue un razonamiento análogo al anterior el trabajo producido por estas cargas es:

$$W_{ba} = \frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai} + \frac{1}{2} \sum \bar{F}_{Bj}^* \cdot \bar{\delta}_{Bj}^* + \sum \bar{F}_{Bj}^* \cdot \bar{\delta}_{Bj} \quad [14.23]$$

Al transformarse todo el trabajo en energía potencial, éste no depende del camino seguido, sólo del estado inicial y final, luego las expresiones [14.22] y [14.23] deben ser iguales, de ahí se desprende la igualdad siguiente, que es el teorema de reciprocidad:

$$\sum \bar{F}_{Ai} \cdot \bar{\delta}_{Ai}^* = \sum \bar{F}_{Bj}^* \cdot \bar{\delta}_{Bj} \quad [14.24]$$

Algunas veces al teorema de reciprocidad de los trabajos se le atribuye un contenido más estrecho y se interpreta como el teorema de reciprocidad de los desplazamientos, para su demostración basta considerar que el estado (a) y el (b) vienen definidos por una única fuerza puntual aplicada en un punto y que las fuerzas  $F_A$  y  $F_B^*$  son iguales con lo que la expresión [14.24] se reduce a:

$$\delta_B^a = \delta_A^b \quad [14.25]$$

El principio de reciprocidad de los desplazamientos se puede enunciar como: el desplazamiento del punto A originado por una fuerza aplicada en B es igual al desplazamiento del punto B originado por una fuerza aplicada en A, siempre que ambas fuerzas sean iguales.

Se puede hacer un desglose según los ejes coordenados y los diferentes tipos de cargas con lo que el teorema de reciprocidad se puede enunciar como sigue:

$$\begin{aligned} & \sum F_{xi} \delta_{xi}^* + \int_0^L q_x \delta_x^* dx + \sum F_{yi} \delta_{yi}^* + \int_0^L q_y \delta_y^* dx + \sum F_{zi} \delta_{zi}^* + \int_0^L q_z \delta_z^* dx + \\ & \quad + \sum M_{zi} \theta_{zi}^* + \sum M_{yi} \theta_{yi}^* + \sum M_{ti} \phi_i^* = \\ & = \sum F_{xi}^* \delta_{xi} + \int_0^L q_x^* \delta_x dx + \sum F_{yi}^* \delta_{yi} + \int_0^L q_y^* \delta_y dx + \sum F_{zi}^* \delta_{zi} + \int_0^L q_z^* \delta_z dx + \\ & \quad + \sum M_{yi}^* \theta_{yi} + \sum M_{zi}^* \theta_{zi} + \sum M_{ti}^* \phi_i \end{aligned} \quad [14.26]$$

En la expresión [14.26] además de fuerzas y desplazamientos lineales se han considerado momentos y sus correspondientes desplazamientos; o sea los giros.

### Aplicación: Desplazamiento transversal producido en una viga por un momento aplicado en su extremo

Este teorema puede resultar útil para la obtención de desplazamientos, se va a ilustrar esta idea con un ejemplo. Se va a considerar una viga biapoyada de longitud  $L$ , en la que se va a definir su estado (a) de cargas como una carga puntual aplicada en un punto determinado, figura 14.5.a, y el estado (b) que viene definido por un momento puntual aplicado en su extremo, figura 14.5.b. Se desea obtener el desplazamiento transversal producido por el momento del estado (b) en el punto de aplicación de la carga del estado (a) y para ello se va a partir de que se conoce el giro en el extremo de la barra producido por una carga puntual, esta expresión se obtuvo en el capítulo 10, expresión [10.1]:

$$\theta = -\frac{Pab(L+b)}{6EI_zL} \tag{14.27}$$

La aplicación del teorema de reciprocidad implicaría:

$$P \cdot \delta^* = M^* \cdot \theta \tag{14.28}$$

Sustituyendo el valor de  $\theta$  en [14.28] como el obtenido de [14.27] se puede despejar el valor del desplazamiento:

$$\delta^* = -\frac{Mab(L+b)}{6EI_zL} \tag{14.29}$$

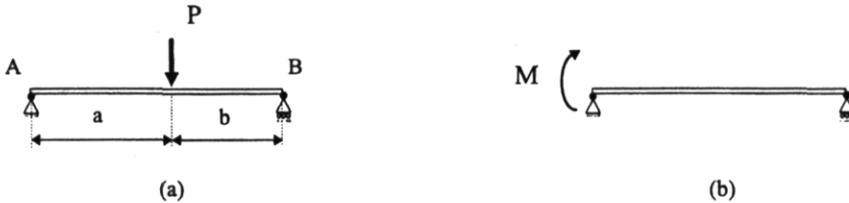


Figura 14.5. Viga biapoyada sometida a fuerza puntual (a) y a momento en su extremo (b).

### 14.5. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

El principio de los trabajos virtuales establece que *la condición necesaria y suficiente para que un sistema esté en equilibrio es que el trabajo producido por las fuerzas externas sobre cualquier campo de desplazamientos virtual compatible con las condiciones de contorno,  $W_e$ , sea igual al trabajo producido por los esfuerzos sobre unas deformaciones que van a ser compatibles con el campo de desplazamiento anterior,  $W_i$ .*

$$W_e = W_i \tag{14.30}$$

En los problemas de Mecánica Racional en los que se estudian sólidos rígidos el trabajo interno es cero y la expresión anterior se reduce a:

$$W_e = 0$$

Para demostrar este teorema se va a utilizar la expresión [14.26] que nos facilitó el teorema de reciprocidad para las barras y se van a considerar las relaciones que, para cada tipo de sollicitación, se han establecido entre las fuerzas externas y los esfuerzos. Se comenzará, en principio, con el esfuerzo axial:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

Se va a desarrollar la integral:

$$\int_0^L q_x \delta_x^* dx = - \int_0^L \frac{dN}{dx} \delta_x^* dx$$

mediante una integración por partes, en la que se van a hacer los cambios de variables siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dx} dx = dv \Rightarrow N = v \\ \delta_x^* = u \Rightarrow \frac{d\delta_x^*}{dx} dx = du \end{aligned} \right\} \int_0^L \frac{dN}{dx} \delta_x^* dx = N\delta_x^* \Big|_0^L - \int_0^L N \frac{d\delta_x^*}{dx} dx = F_{xL} \delta_{xL}^* + F_{x0} \delta_{x0}^* - \int_0^L \frac{NN^*}{EA} dx$$

En la igualdad anterior se ha tenido en cuenta que el esfuerzo axial en el extremo de la barra coincide con las fuerzas en los extremos, salvo el signo. Asimismo se ha considerado la definición de deformación,  $\frac{d\delta_x^*}{dx} = \epsilon_x^*$ , la ley de Hooke,  $\epsilon_x^* = \frac{\sigma_x^*}{E}$ , y la expresión de la tensión en función del esfuerzo axial,  $\sigma_x^* = \frac{N}{A}$ .

$$\int_0^L q_x \delta_x^* dx + \sum F_{xi} \delta_{xi}^* = \int_0^L \frac{NN^*}{EA} dl \tag{14.31}$$

En la expresión anterior se pone el subíndice i a las fuerzas puntuales para incluir tanto las fuerzas puntuales en los extremos como las situadas en un punto interno.

A continuación se va a proceder igual con el momento flector. Por comodidad se va a considerar que la sección es simétrica y sólo se va a demostrar para  $M_z$ , siendo análoga la demostración para  $M_y$ . La relación entre esfuerzo y fuerza es:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q_y \checkmark$$

Se desarrollará la igualdad:

---

✓ En esta expresión se han tenido en cuenta, al mismo tiempo, las relaciones  $\frac{dV_y}{dx} = -q_y$  y  $\frac{dM_z}{dx} = V_y$ .

$$-\int_0^L q_y \delta_y^* dx = \int_0^L \frac{d^2 M_z}{dx^2} \delta_y^* dx$$

Para desarrollar el segundo término de la integral se integra por partes dos veces:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 M_z}{dx^2} dx = dv \Rightarrow \frac{dM_z}{dx} = v \\ \delta_y^* = u \Rightarrow \frac{d\delta_y^*}{dx} dx = \theta_z^* dx = du \end{array} \right\} \int_0^L \frac{d^2 M_z}{dx^2} \delta_y^* dx = \left[ \frac{dM_z}{dx} \delta_y^* \right]_0^L - \int_0^L \frac{dM_z}{dx} \theta_z^* dx = \left[ V_y \delta_y^* \right]_0^L - \int_0^L \frac{dM_z}{dx} \theta_z^* dx$$

A la segunda integral se le aplica, nuevamente, integración por partes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dM_z}{dx} dx = dv \Rightarrow M_z = v \\ \theta_z^* = u \Rightarrow \frac{d\theta_z^*}{dx} dx = du \end{array} \right\} \int_0^L \frac{dM_z}{dx} \theta_z^* dx = \left[ M_z \theta_z^* \right]_0^L - \int_0^L M_z \frac{d\theta_z^*}{dx} dx$$

Al igual que sucedía con el esfuerzo axial, el esfuerzo cortante en el extremo de las barras coincide, salvo el signo, con la fuerza aplicada, y el momento flector con el momento aplicado, y si, además, se tiene en cuenta que el giro virtual  $\theta^*$  es producido por un momento  $M^*$ , según la ecuación de la elástica  $\frac{d\theta^*}{dx} = \frac{M_z^*}{EI_z}$ , la integral inicial es igual a:

$$-\int_0^L q_y \delta_y^* dx = -F_{y0} \delta_{y0}^* - F_{yL} \delta_{yL}^* - M_{z0} \theta_{z0}^* - M_{zL} \theta_{zL}^* + \int_0^L \frac{M_z M_z^*}{EI_z} dx$$

La integral anterior también se puede poner como:

$$-\int_0^L q_y \delta_y^* dx + \sum M_{zi} \theta_{zi}^* + \sum F_{yi} \delta_y^* = \int_0^L \frac{M_z M_z^*}{EI_z} dx \quad [14.32]$$

En la expresión anterior, al igual que en la [14.31], el subíndice  $i$  indica cualquier fuerza o momento puntual aplicado en la barra.

Si el momento que actúa fuese  $M_y$ , la expresión sería análoga:

$$-\int_0^L q_z \delta_z^* dx + \sum M_{yi} \theta_{yi}^* + \sum F_{zi} \delta_{zi}^* = \int_0^L \frac{M_y M_y^*}{EI_y} dx \quad [14.33]$$

Por último se va a considerar el momento torsor supuesto constante en toda la barra, además se va sólo a obtener el resultado para el caso de barras de sección circular.

Al ser el momento torsor constante se verificará:

$$\frac{dM_t}{dx} = 0$$

Se resolverá la integral siguiente:

$$\int_0^L \frac{dM_t}{dx} \varphi^* dx = 0$$

Para ello se realizará una integración por partes, como en los casos anteriores:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dM_t}{dx} dx = dv \Rightarrow M_t = v \\ \varphi^* = u \Rightarrow \frac{d\varphi^*}{dx} dx = du \end{array} \right\} \int_0^L \frac{dM_t}{dx} \varphi^* dx = M_t \varphi^* \Big|_0^L - \int_0^L M_t \frac{d\varphi^*}{dx} dx = M_{x0} \varphi_0 + M_{xL} \varphi_L - \int_0^L M_t \theta^* dx$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que los torsesores en los extremos de las barras coinciden con los momentos aplicados en los extremos, salvo el signo. Teniendo en cuenta que el giro por unidad de longitud se puede poner en función de un momento virtual:

$\theta^* = \frac{M_t^*}{GI_p}$ , la igualdad anterior se puede poner como:

$$\sum M_{xi} \varphi_i^* = \int_0^L \frac{M_t M_t^*}{GI_p} dx \quad [14.34]$$

En las expresiones anteriores, [14.31], [14.32], [14.33], [14.34]; se ha obtenido el principio de los trabajos virtuales para una barra sometida a esfuerzo axial, momento flector  $M_z$ , momento flector  $M_y$  y momento torsor, respectivamente. Si la barra se encuentra solicitada por todos los esfuerzos, al mismo tiempo, se puede aplicar superposición:

$$\sum F_{xi} \delta_{xi}^* + \sum F_{yi} \delta_{yi}^* + \sum F_{zi} \delta_{zi}^* + \sum M_{yi} \theta_{yi}^* + \sum M_{zi} \theta_{zi}^* + \sum M_{xi} \varphi_i^* + \int_0^L q_x \delta_x^* dx +$$

$$-\int_0^L q_y \delta_y^* dx + \int_0^L q_z \delta_z^* dx = \int_0^L \frac{NN^*}{EA} dx + \int_0^L \frac{M_y M_y^*}{EI_y} dx + \int_0^L \frac{M_z M_z^*}{EI_z} dx + \int_0^L \frac{M_t M_t^*}{GI_p} dx \quad [14.35]$$

En la demostración anterior no se han considerado los términos debidos a los esfuerzos cortantes porque, en la mayoría de los casos, son despreciables.

Si en lugar de una barra se estudia un sistema de  $N$  barras se puede aplicar la expresión anterior, pero aplicando un sumatorio para todas las barras.

$$\begin{aligned} & \sum F_{xi} \delta_{xi}^* + \sum F_{yi} \delta_{yi}^* + \sum F_{zi} \delta_{zi}^* + \sum M_{xi} \phi_i^* + \sum M_{yi} \theta_{yi}^* + \sum M_{zi} \theta_{zi}^* + \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_x \delta_x^* dx - \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_y \delta_y^* dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_z \delta_z^* dx = \\ & = \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{NN^*}{E_j A_j} dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_y M_y^*}{E_j I_{yj}} dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_z M_z^*}{E_j I_{zj}} dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_t M_t^*}{G_j I_{pj}} dx \quad [14.36] \end{aligned}$$

En la expresión anterior no se pone dos sumatorios a la expresión del trabajo producido por las fuerzas y los momentos puntuales porque con un solo sumatorio se consideran las fuerzas y momentos que actúan en todo el sistema. La expresión [14.36] recibe el nombre de principio de los desplazamientos virtuales porque representa el trabajo que las fuerzas reales realizan sobre un campo de desplazamiento virtual. Existe un teorema dual al anterior que recibe el nombre de principio de las fuerzas virtuales y que establece que *la condición necesaria y suficiente para que un sistema esté en equilibrio es que el trabajo producido por cualquier sistema de fuerzas en equilibrio que solicite al sistema sobre el campo de desplazamientos reales es igual al trabajo producido por los esfuerzos internos que genera estas fuerzas virtuales sobre las deformaciones reales*. Este teorema viene expresado en la expresión [14.37] y su demostración es análoga a la que se utilizó para obtener [14.36]. Ambos teoremas se pueden enunciar bajo el epígrafe de principio de los trabajos virtuales.

$$\begin{aligned} & \sum F_{xi}^* \delta_{xi} + \sum F_{yi}^* \delta_{yi} + \sum F_{zi}^* \delta_{zi} + \sum M_{xi}^* \phi_i + \sum M_{yi}^* \theta_{yi} + \sum M_{zi}^* \theta_{zi} + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_x \delta_x dx + \\ & - \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_y \delta_y dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} q_z \delta_z dx = \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{N^* N}{E_j A_j} dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_y^* M_y}{E_j I_{yj}} dx + \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_z^* M_z}{E_j I_{zj}} dx + \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \frac{M_t^* M_t}{G_j I_{pj}} dx \quad [14.37] \end{aligned}$$

✓ Puede parecer que la expresión anterior no considera las fuerzas y los momentos puntuales aplicados en un punto que no sea un extremo de la barra, pero eso no ocurre así si la integración se efectúa a un lado y a otro de la fuerza o del momento puntual.

El principio de los trabajos virtuales, al igual que el teorema de reciprocidad, se puede utilizar para la obtención de desplazamientos y para la obtención de incógnitas hiperestáticas.

**Cálculo de desplazamientos: Desplazamiento horizontal del apoyo B**

Se pretende hallar el desplazamiento horizontal del apoyo B del pórtico isostático de la figura 14.6, en el que todas las barras tienen la misma sección transversal, de área A, momento de inercia I y módulo de elasticidad E.

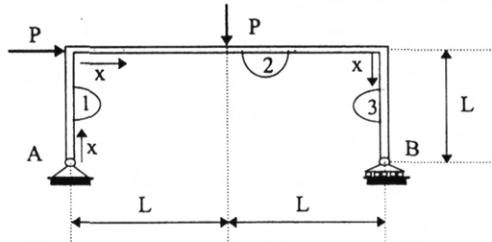


Figura 14.6. Pórtico isostático.

En el pórtico de la figura 14.6 se han señalado los sentidos de las coordenadas de cada barra. Como el pórtico es isostático, se pueden obtener sus esfuerzos de la aplicación de las ecuaciones de equilibrio, facilitándose el cálculo si se obtiene previamente, mediante equilibrio también, las reacciones. Los diagramas de esfuerzos se indican en la figura 14.7.

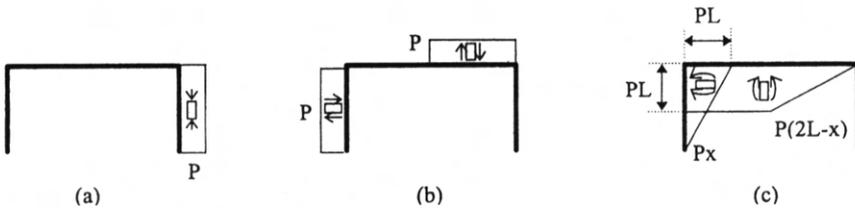


Figura 14.7: Diagramas de esfuerzos reales: a) axiales, b) cortantes, c) momentos flectores.

Se aplicará el teorema de fuerzas virtuales para lo cual se debe colocar una fuerza ficticia en el punto y en la dirección del desplazamiento que se desea calcular y se obtendrán los esfuerzos correspondientes. Por comodidad la fuerza ficticia se toma de valor unidad, figura 14.8. Los esfuerzos se recogen en la figura 14.9.

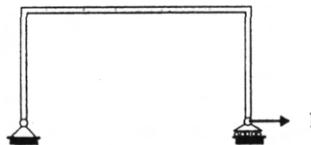


Figura 14.8. Pórtico isostático sometido a una carga ficticia.

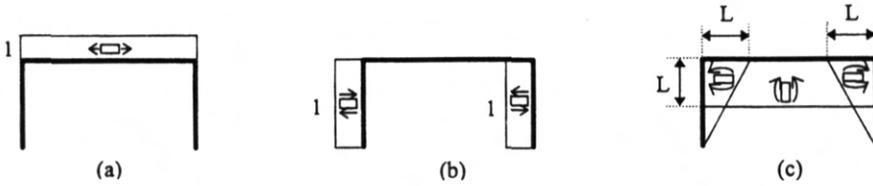


Figura 14.9. Diagramas de esfuerzos ficticios: a) axiales, b) cortantes, c) momentos flectores.

En la tabla 14.1 se representan todos los esfuerzos, reales y ficticios, del pórtico excepto el esfuerzo cortante que suele ser despreciable. Los esfuerzos ficticios se distinguen por llevar un asterisco (\*).

Barra	Longitud	N	N*	M	M*
1	L	0	0	Px	x
2	2L	0	1	0 < x < L: PL L < x < 2L: P(2L-x)	L
3	L	-P	0	0	L-x

Tabla 14.1: Tabla de esfuerzos reales y ficticios del pórtico isostático.

Para obtener el desplazamiento horizontal del apoyo B quedará reducida la expresión [14.37] a:

$$F_{xB}^* \delta_{xb} = \sum_{j=1}^3 \int_0^{L_j} \frac{N^* N}{E_j A_j} dx + \sum_{j=1}^3 \int_0^{L_j} \frac{M_z^* M_z}{E_j I_{zj}} dx \tag{14.38}$$

Tomando  $F_{xB}^* = 1$  y teniendo en cuenta los esfuerzos de la tabla 14.1, la expresión [14.38] se reduce a:

$$\delta_{xb} = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L Px \cdot x dx + PL^2 \int_0^L dx + PL \int_L^{2L} (2L - x) dx \right] = \frac{11 PL^3}{6 EI}$$

**Cálculo de hiperestáticas**

Se va a considerar el mismo pórtico de la figura 14.6 al que se le va a añadir una nueva ligadura que lo va a hacer hiperestático, figura 14.10.

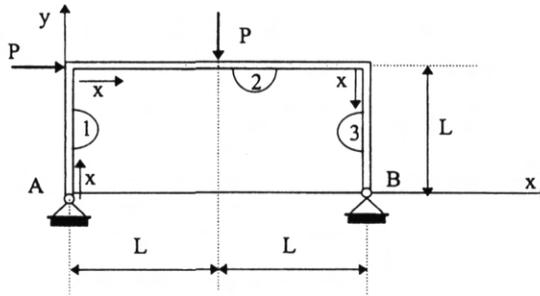


Figura 14.10: Pórtico hiperestático.

El grado de hiperestaticidad del pórtico anterior es de uno pues tiene cuatro incógnitas: las cuatro reacciones en los apoyos A y B,  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ , frente a las tres ecuaciones que proporciona las ecuaciones de equilibrio. Como tiene una hiperestática se debe liberar una incógnita y, por comodidad se va a liberar  $X_B$ , para que se transforme en el pórtico isostático anterior. Una vez liberada la incógnita, sustituida la restricción que representa por la reacción, ver figura 14.11.a. se descompone el problema en dos: el problema isostático con las fuerzas externas aplicadas, figura 14.11.b, que en este caso coincide con el pórtico isostático de la figura 14.6, y el problema isostático solicitado por la reacción liberada, figura 14.10.c. Posteriormente se calculan los esfuerzos de los problemas b y c. Los esfuerzos del problema b son los representados en la figura 14.7 y los del problema c son los representados en la figura 14.9 multiplicados por  $X_B$ .

Por regla general los pórticos solicitados por incógnitas hiperestáticas suelen calcularse para la incógnita igual a la unidad para ser multiplicados posteriormente por el valor real de ésta. Si se denota por el superíndice cero "0" los esfuerzos del problema b y por el superíndice uno "I" los esfuerzos del problema c con la hiperestática igual a la unidad, cualquier esfuerzo real E será igual a:

$$E = E^0 + X_B E^I \tag{14.39}$$

La expresión [14.39] da la expresión general de los esfuerzos que solicitan las barras. Todos los esfuerzos de las mismas vienen especificados en la tabla 14.2.

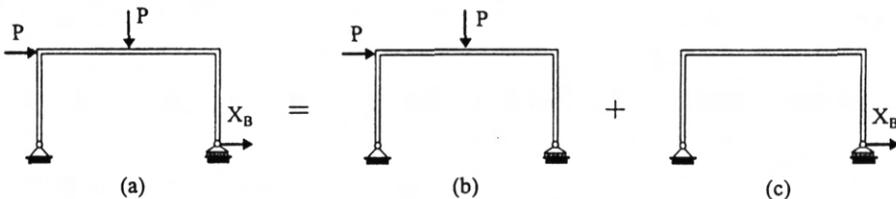


Figura 14.11. Descomposición del problema hiperestático de la figura 14.10 en dos problemas isostáticos.

Barra	Longitud	N <sup>0</sup>	N <sup>1</sup>	N	M <sup>0</sup>	M <sup>1</sup>	M
1	L	0	0	0	Px	x	Px + X <sub>B</sub> x
2	2L	0	1	X <sub>B</sub>	0 < x < L: PL L < x < 2L: P(2L-x)	L	0 < x < L: PL + X <sub>B</sub> L L < x < 2L: P(2L-x) + X <sub>B</sub> L
3	L	-P	0	-P	0	L-x	X <sub>B</sub> (L-x)

**Tabla 14.1.** Tabla de esfuerzos reales y ficticios del pórtico de la figura 14.10.

Por último se aplica compatibilidad en la dirección de la incógnita liberada, esto es, se impone que en B el desplazamiento horizontal, que se va a obtener mediante el principio de las fuerzas virtuales, es nulo. Hay que tener presente que aquí los esfuerzos reales vienen dados por [14.39] y los esfuerzos ficticios son los que se representaron en esta expresión mediante E.

$$\delta_{x_B} = \frac{1}{EA} \int_0^{2L} X_B \cdot 1 dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (Px + X_B x) \cdot x dx + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L [PL + X_B L] L dx + \int_L^{2L} [P(2L-x) + X_B L] L dx \right] = 0$$

De la expresión anterior se obtiene:

$$X_B = -\frac{11PL^2A}{12I + 14L^2A}$$

El signo negativo de la expresión indica que la reacción tiene sentido contrario al que se había supuesto. En la deducción del principio de los trabajos virtuales se había supuesto despreciable la deformación debida al esfuerzo cortante frente a la deformación debida a los otros esfuerzos. En este tipo de problemas, suele ser despreciable, incluso, la deformación debida al esfuerzo axil, con esta aproximación la incógnita hiperestática sería:

$$X_B = -\frac{11}{14}P$$

Si se tuvieran dos incógnitas hiperestáticas, por ejemplo si se sustituye el apoyo B por un empotramiento, habría que liberar las dos, con lo que aparecerían las incógnitas, X<sub>B</sub> y M<sub>B</sub> de la figura 14.12.a, se descompondrá, por tanto, el problema en tres; los dos primeros ya han sido calculados y queda por determinar los esfuerzos del tercero que, al igual que se hizo antes se resolverá para la unidad: M<sub>B</sub> = 1. Estos esfuerzos vienen determinados en la figura 14.13 y la tabla completa de esfuerzos es la tabla 14.3.

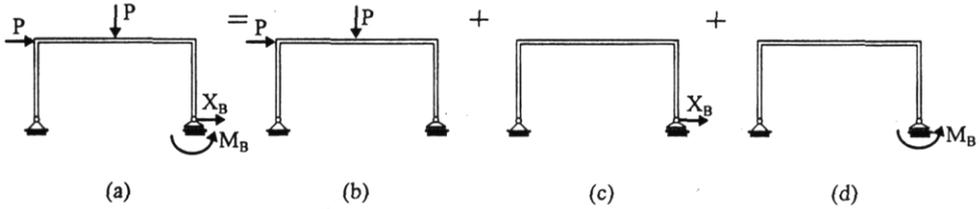


Figura 14.12. Descomposición de un problema con dos hiperestáticas en tres isostáticos.

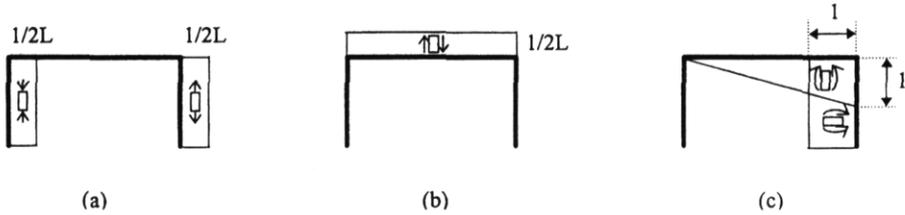


Figura 14.13. Diagramas de esfuerzos ficticios, debidos a  $M_B = 1$ : a) axiales, b) cortantes, c) flectores.

Barra	Long.	$N^0$	$N^1$	$N^2$	$N$	$M^0$	$M^1$	$M^2$	$M$
1	L	0	0	$-\frac{1}{2L}$	$-\frac{M_B}{2L}$	Px	x	0	$Px + X_B x$
2	2L	0	1	0	$X_B$	$0 < x < L$ : PL $L < x < 2L$ : P(2L-x)	L	$\frac{1}{2L} x$	$0 < x < L$ : $PL + X_B L + \frac{M_B}{2L} x$ $L < x < 2L$ : $P(2L-x) + X_B L + \frac{M_B}{2L} x$
3	L	-P	0	$\frac{1}{2L}$	$-\left(\frac{2P - M_B/L}{2}\right)$	0	L-x	1	$X_B(L-x) + M_B$

Tabla 14.3. Tabla de esfuerzos reales y ficticios del pórtico de la figura 14.12.

Para determinar las dos incógnitas hiperestáticas se calculan los desplazamientos en la dirección de las mismas y se igualan a cero:

$$\delta_{x_B} = \frac{1}{EA} \int_0^{2L} X_B \cdot l dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (Px + X_B x) \cdot x dx + \frac{1}{EI} \int_0^L (L-x) [M_B + X_B(L-x)] \cdot x dx + \frac{1}{EI} \left[ \int_0^L \left[ PL + X_B L + \frac{M_B}{2L} x \right] L dx + \int_0^{2L} \left[ P(2L-x) + X_B L + \frac{M_B}{2L} x \right] L dx \right] = 0$$

$$\theta_B = \frac{1}{EA} \left[ \int_0^L \frac{1}{2L} \frac{M_B}{2L} dx + \int_0^L \left( -\frac{1}{2L} \right) \frac{1}{2} \left( 2P - \frac{M_B}{L} \right) dx \right] + \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ PL + X_B L + \frac{M_B}{2L} x \right] \frac{x}{2L} dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ P(2L - x) + X_B L + \frac{M_B}{2L} x \right] \frac{x}{2L} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ X_B(L - x) + M_B \right] dx = 0$$

De las expresiones anteriores se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $X_B$  y  $M_B$ :

$$\left( \frac{2}{EA} + \frac{8L^2}{3EI} \right) X_B + \frac{3L}{2EI} M_B = -\frac{11PL^2}{6EI} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_B = \frac{(36I^2 + 6AIL^2 + 43A^2L^4)L}{36I^2 + 168AIL^2 + 79A^2L^4} P \\ \\ X_B = \frac{(120I + 157AL^2)AL^2}{72I^2 + 336AIL^2 + 158A^2L^4} P \end{array}$$

Una vez obtenidas las incógnitas hiperestáticas quedan completamente determinados los esfuerzos mediante las expresiones  $N = N^0 + X_B N^I + M_B N^{II}$  y  $M = M^0 + X_B M^I + M_B M^{II}$ . Al ser las incógnitas fuerzas y aplicarse condiciones de compatibilidad, este método de cálculo es un *método de compatibilidad*.

## 14.6. PRINCIPIO DE CASTIGLIANO

Este teorema, al igual que los anteriores, se utiliza para el cálculo de desplazamientos y para el cálculo de incógnitas hiperestáticas. Se basa en el principio de mínima energía y se puede enunciar: *el desplazamiento generalizado de cualquier punto de un sólido según una dirección puede determinarse como la derivada parcial de la energía potencial total del sólido según la fuerza generalizada que actúa en el punto en cuestión y según la dirección indicada*. Así, para el pórtico de la figura 14.14 el desplazamiento en el punto  $A_n$  según la dirección mostrada será:

$$\delta_n = \frac{\partial E_P}{\partial F_n} \quad [14.40]$$

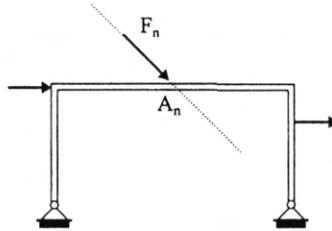


Figura 14.14: Sistema de barras.

La demostración de este teorema es inmediato: sea un sólido, que puede ser un sistema de barras sometido a un sistema de fuerzas  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . La energía de este sólido será  $E_p(F_1, F_2, \dots, F_n)$ , si se aumenta infinitesimalmente una fuerza del sólido, por ejemplo  $F_n$ , la energía del sólido ahora será  $E_p + \frac{\partial E_p}{\partial F_n} dF_n$ . Debido, precisamente, al carácter potencial de la

energía ésta no depende del camino, sólo del estado inicial y final, y será lo mismo aplicar primero las fuerzas finitas y luego la infinitesimal que al revés. Si se aplica primero la fuerza infinitesimal la energía será:  $dF_n \cdot \delta_n + E_p$ . El término  $dF_n \cdot \delta_n$  no va afectado del cociente  $\frac{1}{2}$  porque la relación fuerza desplazamiento aquí no es lineal al estar actuando la fuerza en todo el periodo en que actúa el desplazamiento, si se representara  $dF_n$  frente a  $\delta_n$ , se obtendría una gráfica análoga a la de la figura 14.4. Habría un término más que sería  $\frac{1}{2} dF_n \cdot d\delta_n$ , que se puede despreciar al ser un infinitesimo de segundo orden. Si se igualan las dos expresiones para la energía:

$$E_p + \frac{\partial E_p}{\partial F_n} dF_n = dF_n \cdot \delta_n + E_p$$

se obtiene la expresión [14.40].

### Cálculo de desplazamiento: desplazamiento según la carga P

Primero se va a hallar el desplazamiento de un punto según la dirección de una carga real y luego se hallará el desplazamiento según otra dirección cualquiera. Se ha considerado la barra acodada de la figura 14.15. El perfil de la barra va a ser circular, hueco o macizo, para facilitar los cálculos sobre todo de la torsión.

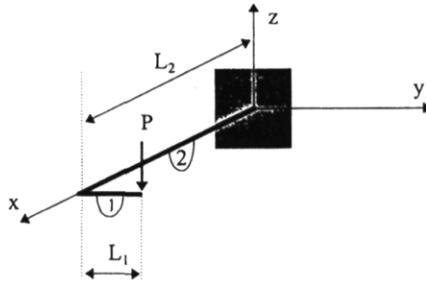


Figura 14.15. Barra acodada tridimensional.

Lo primero que hay que determinar son los esfuerzos, que vienen representados en la figura 14.16. No se han representado los esfuerzos cortantes, pues se va a considerar despreciable su influencia en el cálculo de desplazamientos. Obsérvese que se han representado los momentos flectores en los planos perpendiculares a su eje. Así el momento flector al que está sometida la barra 1 es un momento  $M_x$ , luego se representa en un plano perpendicular al eje OX: el plano OYZ. Además se representa el diagrama en la parte traccionada de la barra, que, fíjese, es lo mismo que se hace en flexión plana.

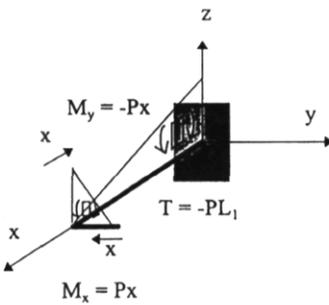


Figura 14.16: Diagramas de esfuerzos de la barra de la figura 14.15.

El momento torsor no se ha representado, al no poderse representar según un plano perpendicular a la barra. Por ello se ha puesto su valor numérico. Al momento torsor de la barra 2 se le ha dado un valor negativo porque se considera momento torsor positivo si sale de la barra y en este caso entra. En cuanto al valor numérico de los momentos flectores, lo primero que hay que fijar es el sentido de la coordenada axial x, que se considera que en las dos barras va hacia el empotramiento, como se muestra en la figura 14.16. En cuanto al signo del flector se mirará la barra siguiendo la dirección de la x y de izquierda a derecha, si el momento flector queda abajo es positivo y si queda arriba negativo, al igual también que se hace en flexión plana.

Es importante observar que en la unión de dos barras debe haber continuidad en los momentos, así el momento flector de la barra 1, en la unión de ambas barras, toma el valor:  $M_x = PL_1$ , que es, justamente el valor del momento torsor de la barra 2; los signos no tienen por qué coincidir. Con todo esto, la energía potencial total que encierra la barra es:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^{L_1} \frac{(Px)^2}{EI_x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \frac{(Px)^2}{EI_y} dx + \frac{1}{2} \frac{(PL_1)^2}{GI_p}$$

Se debe tener cuidado en no confundir la coordenada  $x$  de cada barra con la coordenada  $x$  del sistema OXYZ; los momentos de inercia  $I_x$  se refieren a la coordenada  $x$  del sistema OXYZ. Como la sección es circular la inercia es igual sea cual sea el eje, y la inercia polar es el doble de esa inercia, además las constantes elásticas  $E$  y  $G$  están relacionadas.

$$I_x = I_y = I; \quad I_p = 2I; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Con lo que la expresión de la energía se simplifica a:

$$E_p = \frac{1}{2EI} \left( \int_0^{L_1} (Px)^2 dx + \int_0^{L_2} (Px)^2 dx + (1 + \nu)(PL_1)^2 L_2 \right)$$

Con lo que para obtener el desplazamiento según la dirección de  $P$  no hay más que derivar respecto a esta fuerza:

$$\delta_p = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{L_1} Px^2 dx + \int_0^{L_2} Px^2 dx + (1 + \nu)PL_1^2 L_2 \right) = \frac{P}{EI} \left( \frac{L_1^2}{3} + \frac{L_2^2}{3} + (1 + \nu)L_1^2 L_2 \right)$$

El principio de Castigliano se puede expresar de una segunda forma, deducida de la primera, y que toma la misma expresión que el principio de los trabajos virtuales. Si en la expresión de la energía de un sistema de  $N$  barras se desprecian los términos debidos al esfuerzo cortante se obtiene:

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \int_0^{L_i} \frac{N_i^2}{E_i A_i} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{yi}^2}{E_i I_{yi}} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{zi}^2}{E_i I_{zi}} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{ti}^2}{G_i I_{pi}} dx \right) \quad [14.41]$$

Si ahora se deriva respecto a  $P$ :

$$\delta_p = \sum_{i=1}^N \left( \int_0^{L_i} \frac{N_i}{E_i A_i} \frac{\partial N_i}{\partial P} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{yi}}{E_i I_{yi}} \frac{\partial M_{yi}}{\partial P} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{zi}}{E_i I_{zi}} \frac{\partial M_{zi}}{\partial P} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{ti}}{G_i I_{pi}} \frac{\partial M_{ti}}{\partial P} dx \right) \quad [14.42]$$

Por el principio de superposición cualquier esfuerzo puede expresarse como una combinación lineal de las cargas exteriores, por ejemplo el esfuerzo axial en una barra determinada  $i$  podría expresarse:

$$N_i = \alpha_{i0}P_0 + \alpha_{i1}P_1 + \alpha_{i2}P_2 + \dots + \alpha_{in}P_n$$

donde  $\alpha_{ij}$  sería el axil que tiene la barra  $i$  cuando la carga  $P_j = 1$  y las cargas restantes son nulas.

Teniendo presente la expresión anterior podemos escribir:

$$\frac{\partial N_i}{\partial P_j} = \alpha_{ij}$$

Si denotamos por un asterisco (\*) los esfuerzos de esos estados de cargas ficticias en que una de las cargas vale 1 siendo cero las restantes, se puede poner la expresión [14.42] como:

$$\delta_p = \sum_{i=1}^N \left( \int_0^{L_i} \frac{N_i N_i^*}{E_i A_i} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{y_i} M_{y_i}^*}{E_i I_{y_i}} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{z_i} M_{z_i}^*}{E_i I_{z_i}} dx + \int_0^{L_i} \frac{M_{t_i} M_{t_i}^*}{G_i I_{p_i}} dx \right) \quad [14.43]$$

donde la carga que vale la unidad es la que aparece en el subíndice de  $\delta$ . La expresión anterior es similar a la expresión [14.37].

**Desplazamiento de un punto en una dirección en la que no hay carga aplicada**

Para obtener el desplazamiento en un punto y en una dirección cualquiera se supone una fuerza unidad en ese punto y en esa dirección y se calculan los esfuerzos, que serán los esfuerzos \* que aparecen en la expresión [14.43]. Por ejemplo se va a calcular el desplazamiento del punto donde está aplicada la carga  $P$ , pero en otra dirección, por ejemplo según  $OX$ . Para hallar el desplazamiento según el eje  $Ox$  se debe aplicar la fórmula [14.43], siendo los esfuerzos reales los de la figura 14.16 y los ficticios los de la figura 14.17.b.

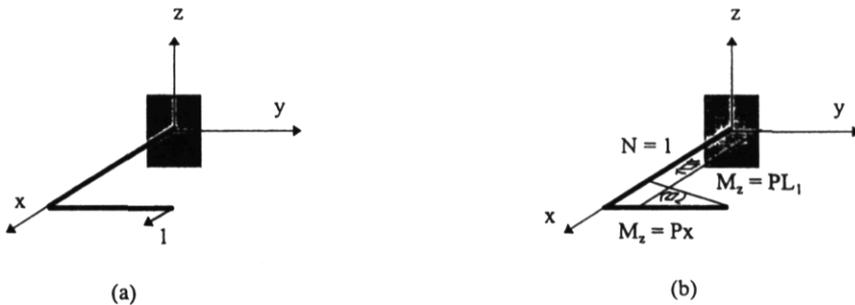


Figura 14.17. Fuerza ficticia en la dirección del eje  $OX$ , (a), y esfuerzos debidos a ella, (b).

En la expresión [4.43] se ve que los esfuerzos reales se multiplican por los ficticios correspondientes, obsérvese que mientras que los momentos reales, figura 14.16, sólo tienen momento según el eje  $OX$  y según el eje  $OY$ , los esfuerzos ficticios son momentos según el

eje OZ y un esfuerzo axial, figura 14.17.b, por ello el desplazamiento según el eje OX es nulo. No siempre va a ser así; aunque sólo existan fuerzas en una dirección puede haber desplazamiento según los otros ejes del espacio.

### **Cálculo de hiperestáticas. Teorema de Menabrea**

Al igual que se usa el principio de los trabajos virtuales para la obtención de incógnitas hiperestáticas también se puede emplear el teorema de Castigliano. Para obtener estas incógnitas se determinará la energía potencial del sólido,  $E_p$ , que estará en función de las incógnitas hiperestáticas, y se calcularán los desplazamiento en las direcciones de éstas, imponiéndose a los desplazamientos la condición adecuada. Así si se quiere determinar la incógnita  $X_B$  del pórtico de la figura 14.10 se obtendrá el desplazamiento en la dirección de  $X_B$ ,  $\delta_{XB}$ , según el principio de Castigliano, y se impondrá que este desplazamiento sea nulo:

$$\frac{\partial E_p}{\partial X_B} = 0$$

Debido a que la condición anterior que se va a cumplir, en general, para todas las reacciones hiperestáticas se puede enunciar el principio de Castigliano para la resolución de problemas hiperestáticos como sigue: *las fuerzas de reacción hiperestática toman los valores necesarios para que sea mínima la energía de deformación del sistema.* Este principio así enunciado recibe el nombre de *teorema de Menabrea*.



## Capítulo 15

# INESTABILIDAD DE BARRAS PRISMÁTICAS: PANDEO

### 15.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo viene en algunos textos bajo el epígrafe de compresión excéntrica en piezas esbeltas estando incluido en el capítulo 9. En estos apuntes se ha preferido, sin embargo, considerar un capítulo para tratar el problema del pandeo. La razón que ha motivado esta decisión es que, en el fenómeno del pandeo, no se pueden considerar las hipótesis que se habían considerado en los capítulos anteriores de la Resistencia de Materiales; esto es, no se conserva la linealidad entre fuerza y desplazamiento y no se puede admitir la hipótesis de pequeñas deformaciones, por estos dos motivos no se puede aplicar el principio de superposición. Además se hará un estudio del pandeo por encima de los límites de la elasticidad.

Una vez justificada la existencia de un capítulo específico para estudiar el pandeo habría que describirlo. Aunque los fenómenos que se van a estudiar pueden darse en todas las barras, se ponen especialmente de manifiesto en las barras esbeltas en las que la relación entre la dimensión característica de la sección transversal y la longitud es una cantidad muy pequeña.

Hasta ahora se ha admitido que la compresión provoca un acortamiento de la barra y la flexión una deformación transversal de la misma estando ambos efectos desacoplados. Pues bien el pandeo consiste en un desplazamiento transversal de la barra debido a la acción de una fuerza de compresión. El hecho de que se produzca un desplazamiento transversal debido a un esfuerzo axial es otro factor que hace que este capítulo sea tan especial. Esto sucede especialmente en las barras esbeltas y, en la práctica, hay que tener especial cuidado con las barras de las estructuras trianguladas que están sometidas a compresión, en los pilares de los edificios y en los arcos.

El pandeo se produce a partir de un determinado valor de la carga de compresión, carga crítica, y es un fenómeno inestable.

A continuación se recuerdan los distintos tipos de equilibrio: *equilibrio estable*, figura 15.1.a, cuando el sistema, si se separa ligeramente de la posición de equilibrio, vuelve a la posición de equilibrio nuevamente: *equilibrio inestable*, figura 15.1.b, si el sistema se separa ligeramente de su situación inicial, tiende a separarse cada vez más del mismo; por último, *equilibrio indiferente*, figura 15.1.c, si, separado ligeramente de su posición inicial, ni vuelve a ésta ni tiende a alejarse de la misma, sino que se queda en una posición análoga.

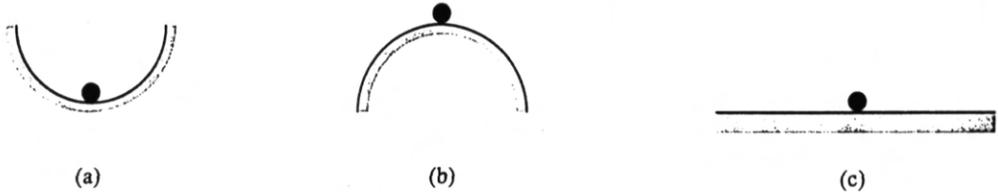


Figura 15.1. *Equilibrio estable, (a), inestable, (b), e indiferente, (c).*

El fenómeno de pandeo puede verse seriamente favorecido por defectos de los sistemas resistentes tales como inhomogeneidades de los materiales, falta de rectitud de las barras, descentramiento inesperado de alguna carga y otros. Sin embargo, a continuación se verá que este fenómeno puede aparecer en sistemas sin defecto alguno.

## 15.2. TEORÍA CLÁSICA. PROBLEMA DE EULER

Considérese una barra biapoyada, completamente recta, y sometida a una carga de compresión perfectamente centrada, tal y como se muestra en la figura 15.2.a. Se pretende obtener la carga mínima a partir de la cual se produce un desplazamiento transversal. Esta carga recibe el nombre de carga crítica de Euler pues fue este científico quien la estudió en 1744.

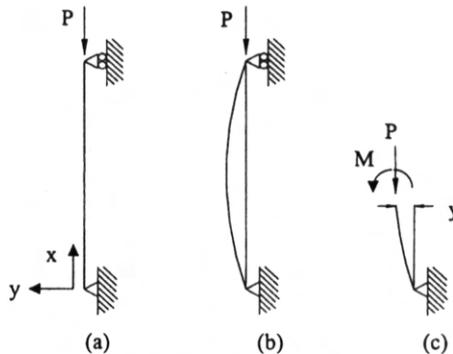


Figura 15.2. *Barra biapoyada sometida a una carga de compresión, a), que ha sufrido el fenómeno de pandeo, b) y parte de esta misma barra en equilibrio, c).*

Se va a suponer que las deformaciones transversales son pequeñas, esta hipótesis no se va a cumplir en pandeo pero los resultados que se van a obtener no difieren de los resultados reales. Si las deformaciones son pequeñas la deformada verifica la ecuación de la elástica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad [15.1]$$

En cuanto al momento flector  $M$  si se aplica equilibrio a una parte de la barra, figura 15.2.c, se obtiene:

$$M = -Py \quad [15.2]$$

Con lo que la ecuación [15.1] queda:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad [15.3]$$

Llamando:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad [15.4]$$

La ecuación [15.3] es una ecuación diferencial lineal de solución:

$$y = C_1 \text{sen}kx + C_2 \text{cos}kx \quad [15.5]$$

Las constantes de la expresión [15.5],  $C_1$  y  $C_2$ , se obtienen de aplicar condiciones de contorno. Como en este caso se trata de una viga biapoyada las condiciones de contorno que hay que aplicar son desplazamiento lateral nulo en ambos extremos:

En  $x = 0, y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$  y en  $x = L, y = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 \text{sen}kL = 0 \quad [15.6]$$

Para que se verifique [15.6] se ha de cumplir que  $C_1 = 0$ , o bien que  $\text{sen}kL = 0$ , la primera opción implica que no hay desplazamiento lateral luego se puede descartar y para que la segunda opción sea cierta se tiene que verificar:

$$kL = n\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad [15.7]$$

Con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De los resultados anteriores se obtiene la expresión de la deformada:

$$y = C_1 \operatorname{sen} n \frac{\pi x}{L} \quad [15.8]$$

La expresión [15.8] toma distintos valores para cada valor de  $n$ , en concreto se han representado las deformadas para los valores de  $n = 1, 2$  y  $3$  en la figura 15.3.

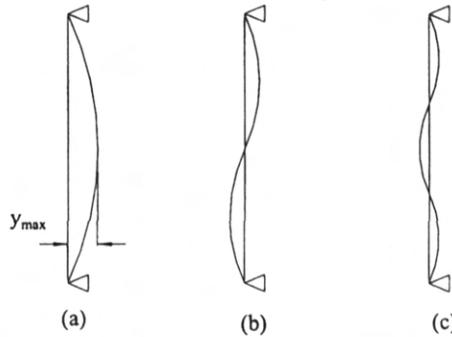


Figura 15.3. Modos de pandeo: a)  $n = 1$ , b)  $n = 2$ , c)  $n = 3$ .

En la expresión [15.7] se ha obtenido un valor de  $P$  que depende de  $n$ , en concreto el valor más pequeño corresponde a  $n = 1$  y es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad [15.9]$$

El valor definido en [15.9] recibe el nombre de *carga crítica* y corresponde al valor mínimo de carga a partir del cual comienza el pandeo. En cuanto a la expresión de la deformada queda en función de la constante de integración  $C_1$ , tal y como queda patente en la expresión [15.8], donde  $C_1$  corresponde al valor máximo de la deformada que tiene lugar en el punto medio de la barra.

La representación gráfica de esta expresión, figura 15.4, muestra que el pandeo, al menos visto desde la teoría de Euler, presenta un equilibrio indiferente: mientras la carga no alcance el valor de la carga crítica la deformación lateral máxima es nula y por tanto toda deformación lateral; luego, cuando alcanza la carga crítica, si se somete la barra a una ligera perturbación, alcanza un determinado nivel de deformación que no pierde aunque desaparezca la perturbación. Este proceso es análogo para la segunda carga crítica correspondiente a  $n = 2$  y lo mismo sucede para las cargas críticas posteriores.

Los resultados obtenidos mediante la teoría de Euler no están de acuerdo con la experiencia: el hecho de que nada más que exista pandeo para valores discretos de carga y para valores de cargas intermedios no exista no está de acuerdo con la realidad. Otra consecuencia de esta teoría, también disconforme con la observación del fenómeno, es que para un mismo valor de carga crítica existan infinitos valores posibles de deformada. La razón de esta

diferencia entre la teoría y la experiencia radica en que se ha partido de una teoría de pequeñas deformaciones, teoría ésta que no es aplicable al fenómeno del pandeo; por ello se va a estudiar que sucede si se considera la teoría de grandes deformaciones.

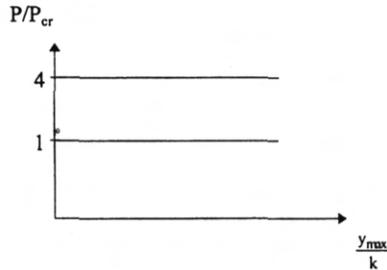


Figura 15.4. Desplazamiento lateral máximo en función la carga longitudinal de compresión,  $k = EI$  es la rigidez a flexión de la barra prismática.

### 15.3. INFLUENCIA DE LAS GRANDES DEFORMACIONES EN EL PANDEO

Se va a estudiar una barra sometida a flexión en la que se consideran las grandes deformaciones. En la figura 15.5 se representa una parte de esa barra.

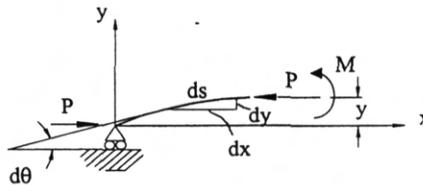


Figura 15.5. Deformada de un trozo de barra sometida a pandeo, en la que se consideran las grandes deformaciones.

Para que la teoría del pandeo acepte las grandes deformaciones en vez de aplicar directamente la expresión [15.1] se debería de aplicar la siguiente expresión [15.10]:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI} \quad [15.10]$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de giro y  $s$  es la coordenada que va en la dirección de la deformada, tal y como se ve en la figura 15.5; no hay que olvidar que [15.1] se obtiene a partir de [15.10] si se admite la hipótesis de pequeñas deformaciones. Considerando el valor de  $M$  y la expresión de  $k$  del apartado anterior se llega a:

$$\frac{d\theta}{ds} + k^2 y = 0 \quad [15.11]$$

Derivando la expresión [15.11] respecto a  $s$  de nuevo:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \frac{dy}{ds} = 0 \quad [15.12]$$

De la figura 15.5 se llega a que:

$$dy = \text{sen}\theta ds \quad [15.13]$$

Partiendo de [15.12] y considerando [15.13] se llega a:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \text{sen}\theta = 0$$

Si ahora se aplica la fórmula del ángulo doble:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0$$

La expresión anterior se puede transformar en:

$$d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -\left(k^2 2 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\right) ds$$

Si los dos términos de la igualdad anterior se multiplican por  $\frac{d\theta}{ds}$ :

$$\int \frac{d\theta}{ds} d\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = -2k^2 \int \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{ds} ds$$

La expresión anterior se puede integrar, fácilmente:

$$\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 4k^2 \left(m^2 - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad [15.14]$$

Donde  $m^2$  es una constante de integración. Haciendo la sustitución:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = -m \operatorname{sen} \varphi \quad [15.15]$$

Se obtiene:

$$\frac{d\theta}{ds} = 2km \cos \varphi \quad [15.16]$$

Y derivando la expresión [15.15] respecto a s:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{m \cos \varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{ds} \quad [15.17]$$

Igualando los términos segundos de [15.16] y [15.17]:

$$k ds = -\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad [15.18]$$

Integrando [15.18]:

$$ks = -\int_{\pi/2}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad [15.19]$$

Los límites de integración de la integral definida en [15.19] se pueden deducir como sigue: Para el valor de s igual a cero, o sea en el apoyo izquierdo, el momento flector es nulo, por tanto de [15.10] se deduce que es nula la expresión  $\frac{d\theta}{ds}$  y de [15.16]  $\cos \varphi$  también lo es de donde se infiere que  $\varphi = \pi/2$ .

La integral de [15.19] se puede descomponer en dos:

$$ks = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad [15.20]$$

En la mitad de la barra, por simetría, el giro es nulo,  $\theta = 0$ , y, según [15.15],  $\varphi$  también lo es, luego la expresión anterior, para el centro de la barra se reduce a:

$$k \frac{L}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad [15.21]$$

La integral anterior es una integral elíptica de primer género. Estas integrales vienen tabuladas y toma el valor mínimo para  $m = 0$ , luego se verifica la desigualdad:

$$k \frac{L}{2} \geq \frac{\pi}{2}$$

De la desigualdad anterior y teniendo en cuenta la definición de  $k$ :

$$P \geq \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_{cr}$$

De la expresión anterior se deduce que cuando la carga supera el valor de la carga crítica que se obtuvo para pequeñas deformaciones la barra abandona su forma rectilínea. En este desarrollo se ha supuesto giro nulo en  $x = L/2$  es decir una deformada como la de la figura 15.3.a. Si suponemos la deformada de la figura 15.3.b. tendríamos que imponer giro nulo en  $x = L/4$ , en este caso:

$$k \frac{L}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}} \geq \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

Siendo la expresión anterior la carga crítica que se obtuvo para  $n = 2$  bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones. Para valores posteriores de  $n$  se obtienen también las mismas tensiones críticas. Sin embargo, si se hace un estudio de estabilidad, se observa que las únicas formas estables son las correspondientes a  $n = 1$ .

Una vez obtenida la carga crítica se va a proceder al cálculo de desplazamientos. De la figura 15.5 se puede establecer que:

$$dx = \cos\theta \, ds, \quad dy = \sen\theta \, ds$$

y utilizando las expresiones del ángulo doble:

$$dx = \left(1 - 2 \sen^2 \frac{\theta}{2}\right) ds = 2 \left(1 - \sen^2 \frac{\theta}{2}\right) ds - ds$$

$$dy = 2 \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} ds$$

Recurriendo a las expresiones [15.15] y [15.18] se llega a:

$$dx = -\frac{2}{k}\sqrt{1-m^2\text{sen}^2\varphi}d\varphi - ds, \quad dy = \frac{2m}{k}\text{sen}\varphi d\varphi$$

Integrando las expresiones anteriores se obtiene la ecuación paramétrica de la línea elástica:

$$x = -\frac{2}{k}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1-m^2\text{sen}^2\varphi}d\varphi - s, \quad y = \frac{2m}{k}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\text{sen}\varphi d\varphi$$

Teniendo en cuenta que  $\varphi_0 = \pi/2$ :

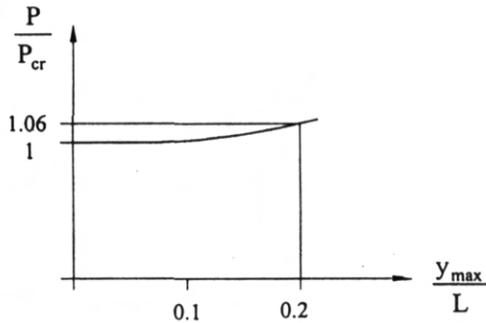
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2}{k}\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-m^2\text{sen}^2\varphi}d\varphi - \int_0^{\varphi}\sqrt{1-m^2\text{sen}^2\varphi}d\varphi\right) - s \\ y &= -\frac{2m}{k}\cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad [15.22]$$

El valor máximo de la  $y$  anterior se da para  $\cos\varphi = \pm 1$ , prescindiendo del signo:

$$y_{\max} = \frac{2m}{k} \quad [15.23]$$

Para obtener la flecha máxima se necesita también conocer el valor de  $m$  que puede ser obtenido de [15.21]; se procederá de la siguiente forma:

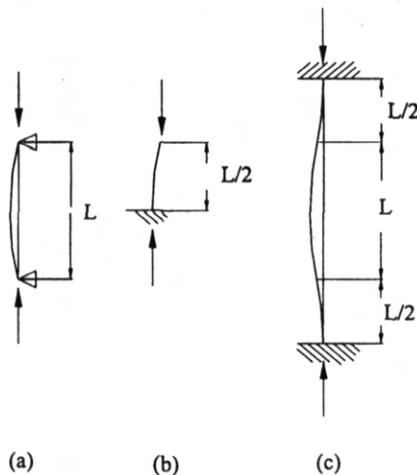
Se supone el valor de  $m$  y se resuelve la integral elíptica descrita en [15.21] con lo que se obtiene el valor de  $k$ , con esta  $m$  y esta  $k$  se obtienen los valores de  $y_{\max}$ , según la ecuación [15.23]. Si se repite el proceso para distintos valores de  $k$  se puede obtener una curva que relacione  $P$  con  $y_{\max}$ , tal y como se representa en la figura 15.6 en la que se observa que la función  $\frac{P}{P_{cr}} = f\left(\frac{y_{\max}}{L}\right)$  viene representada por una curva que tiende asintóticamente a la correspondiente función que se obtuvo para pequeñas deformaciones, figura 15.4.



**Figura 15.6.** Desplazamiento lateral máximo en función de la carga longitudinal de compresión bajo la suposición de grandes deformaciones.

#### 15.4. DEPENDENCIA DE LA CARGA CRÍTICA CON LAS CONDICIONES DE APOYO

En el apartado anterior se estudiaba una barra biapoyada sometida a pandeo, figura 15.7.a. pero este fenómeno también puede acontecer a barras con otros sistemas de apoyos. Para estudiar estas barras se puede proceder igual que se hizo para las barras biapoyadas: partiendo de la ecuación de la elástica y considerando las condiciones de contorno correspondientes a ese sistema de apoyo. Resulta más cómodo, sin embargo, comparar la deformada de una barra biapoyada con la deformada de otra barra cualquiera. Este razonamiento carece de rigor suficiente para que sea considerado una demostración.



**Figura 15.7.** Deformada de algunas barras sometidas a pandeo: a) barra biapoyada, b) voladizo, c) barra biempotrada.

Así para un voladizo como el de la figura 15.7.b, que, como condiciones de apoyo, tiene un empotramiento en un extremo y el otro extremo libre, la deformada es como media deformada de una barra biapoyada; o sea que para tener una barra biapoyada deformada se deben anexionar dos voladizos deformados, luego si la longitud del voladizo es  $L$  la longitud de la barra biapoyada correspondiente es  $2L$ , con lo que la carga crítica en un voladizo es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad [15.24]$$

A una barra biempotrada, como la de la figura 15.7.c. le pasa al contrario que al voladizo: la deformada de una barra biempotrada consta de dos deformadas de una barra biapoyada, por ello la longitud de la barra biapoyada consta de media longitud de una barra biempotrada. Luego la carga crítica de una barra biempotrada es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} \quad [15.25]$$

Resultados análogos a los obtenidos en [15.24] y [15.25] se pueden obtener para otras condiciones de contorno, así para el caso de una barra articulada-empotrada:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} \quad [15.26]$$

En general se puede poner que la expresión general de carga crítica es:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad [15.27]$$

Donde  $\beta$  es una constante que depende de las condiciones de apoyo. En la tabla 15.1 se muestran algunos valores de  $\beta$  en función de las condiciones de apoyo.

	Apoyada-Apoyada	Empotrada-Libre	Empotrada-Empotrada	Apoyada-Empotrada	Biarticulada
$\beta$	1	2	0.5	0.7	1

Tabla 15.1. Distintos valores de  $\beta$  en función de las condiciones de apoyo.

## 15.5. INFLUENCIA DE LA EXCENTRICIDAD DE LA CARGA Y DE UNA DEFORMADA PREVIA EN EL FENÓMENO DEL PANDEO

En los ejemplos anteriores se ha supuesto que las barras son perfectamente rectas y alineadas con la carga, estas condiciones ideales son prácticamente inalcanzables: hay que

suponer que existen pequeñas excentricidades de carga y que el elemento presenta una deformación previa.

### Elemento con excentricidad de carga

Supóngase una barra perfectamente recta sometida a una carga de compresión  $P$ , que presenta una excentricidad  $e$ , respecto al eje de la barra, figura 15.8.

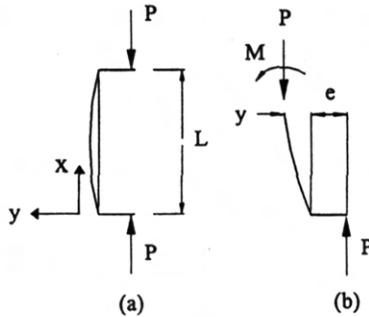


Figura 15.8. Barra sometida a una carga excéntrica (a), equilibrio de una parte de esa barra (b).

Si se efectúa equilibrio de momentos a una parte de la barra, figura 15.8.c, se obtiene:

$$M + P(y + e) = 0$$

Teniendo en cuenta [15.1] y la expresión de  $k$  definida en [15.4]:

$$y'' + k^2 y = -k^2 e \quad [15.28]$$

La solución de la ecuación diferencial anterior será la solución de la ecuación homogénea más la solución de la ecuación particular:

$$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \operatorname{cos} kx - e \quad [15.29]$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen aplicando condiciones de contorno; esto es  $y = 0$  en los extremos,  $x = 0$  y  $x = L$ , quedando la expresión anterior:

$$y = e \left( \frac{1 - \operatorname{cos} kL}{\operatorname{sen} kL} \operatorname{sen} kx + \operatorname{cos} kx - 1 \right) \quad [15.30]$$

La expresión anterior, a diferencia de la expresión [15.8], tiene los valores de  $y$  unívocamente determinados y no aparecen valores discretos de  $P$ . La flecha máxima tiene lugar en el centro:

$$y_{\max} = e \left( \frac{1}{\cos(kL/2)} - 1 \right) \quad [15.31]$$

Si se denomina  $\delta$  al movimiento transversal respecto al eje de actuación de las cargas:

$$\delta = y_{\max} + e = e \frac{1}{\cos(kL/2)} \quad [15.32]$$

La expresión anterior toma valor infinito cuando  $kL/2 = \pi/2$ , teniendo en cuenta el valor de  $k$ :

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad [15.33]$$

En la expresión anterior se ha obtenido nuevamente la carga crítica de Euler. Si se representa el cociente  $P/P_{cr}$  frente a la deflexión  $\delta$  para distintas excentricidades se observa, ver figura 15.9, que a medida que disminuye la excentricidad la curva se acerca a la carga crítica de Euler,  $e_1 > e_2$ .

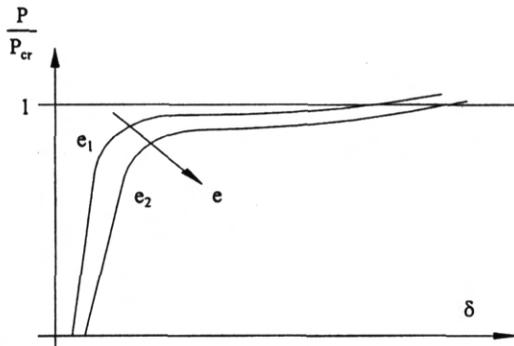


Figura 15.9. Deflexión en función de la carga para distintas excentricidades de cargas.

### Elemento con deformación previa

A continuación se considera que, aunque la carga no muestra excentricidad, la barra no es perfectamente recta sino que presenta una deformación previa. Se procederá como en el caso anterior, aplicando equilibrio a una parte de la barra, figura 15.10.b. Si  $y_i(x)$  es la deformada inicial, la aplicación del equilibrio da lugar a:

$$y'' + k^2 y = -y_i(x)$$

Supuesta la deformada inicial sinusoidal,  $y_i(x) = -a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$ , la expresión anterior se transforma en:

$$y'' + k^2 y = -k^2 a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx + \frac{a}{\frac{\pi^2}{k^2 L^2} - 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad [15.34]$$

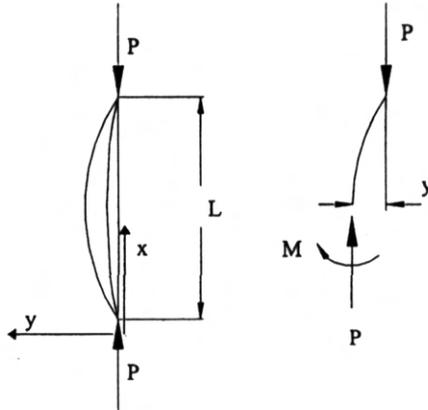


Figura 15.10. Barra con una deformación previa (a), equilibrio de una parte de esa barra (b).

Las constantes de integración se obtienen aplicando condiciones de contorno:

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(x=L) = 0 \Rightarrow C_1 \operatorname{sen} kL = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ ó } \operatorname{sen} kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2 EI}{L^2}.$$

Esta última solución sólo es válida para valores discretos de  $P$ , si se quiere obtener una solución continua se debe aceptar la solución  $C_1 = 0$ , con lo que la deformada toma el valor:

$$y = \frac{a}{\frac{\pi^2}{k^2 L^2} - 1} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad [15.35]$$

Considerando el valor de  $k$  y de la carga crítica de Euler, la expresión anterior se reduce a:

$$y = \frac{1}{\frac{P_{cr}}{P} - 1} a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

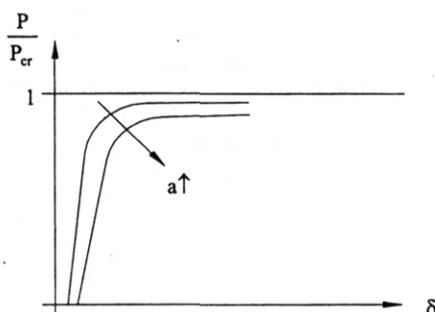
Y la deformada máxima se da en el centro de la barra, en  $x = L/2$ :

$$y_{\max} = \frac{a}{\frac{P_{cr}}{P} - 1}$$

Y la deflexión  $\delta$  total máxima, distancia entre la deformada y el eje indeformado en el que actúa la carga es:

$$\delta_{\max} = y_{\max} + a = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} a \quad [15.36]$$

Para  $P = P_{cr}$  se obtiene un valor infinito para  $\delta$ . Si se representa  $P/P_{cr}$  en función de  $\delta$ , figura 15.11. se observa que conforme disminuye la deformación previa; la curva se asemeja a la solución que se obtuvo cuando se consideró una barra recta perfecta, figura 15.4.



**Figura 15.11.** Deflexión en función de la carga para distintas deformaciones previas de barras.

Si se llama  $\sigma$  a la tensión debida a la compresión,  $\sigma = P/A$  y  $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ , la expresión [15.36] queda como:

$$\delta = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - \sigma} a \quad [15.37]$$

Es decir, se afecta la deformada previa máxima a por el cociente  $\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - \sigma}$ .

Del análisis precedente podemos extraer dos importantes conclusiones:

- Los dos procesos de deformación son muy similares, ya sea del tipo excentricidad o de deformación previa.
- Las pequeñas imperfecciones de los elementos no se dejan notar hasta que la carga se acerca al valor de la carga crítica de Euler, que es cuando la deformación se dispara.

En la práctica las piezas reales poseen imperfecciones, excentricidad o deformación previa, que se estudian mediante métodos empíricos.

### 15.6. TENSIÓN CRÍTICA. HIPÉRBOLA DE EULER

La tensión crítica se obtiene dividiendo la carga crítica entre el área. Luego en un caso general la carga crítica se puede poner como:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\beta L}{i_z}\right)^2} \quad [15.38]$$

En la expresión [15.38]:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad [15.39]$$

representa el radio de giro de la sección en la dirección del eje OZ y:

$$\lambda_z = \frac{\beta L}{i_z} \quad [15.40]$$

es la esbeltez mecánica de la barra, también según el eje OZ. Con lo que la tensión crítica se puede expresar en función de la esbeltez:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_z^2} \quad [15.41]$$

Si se representa la función [15.41], o sea la tensión crítica frente a la esbeltez, se obtiene la hipérbola representada en la figura 15.12, denominada *hipérbola de Euler*. En esta figura se

observa que para valores de esbeltez elevados disminuye la tensión crítica considerablemente, luego sería muy sencillo que se produjera pandeo. Para resolver este problema se podría aumentar el módulo de elasticidad del material, pero entonces habría que acudir a otro material puesto que los tratamientos encaminados a aumentar la resistencia del material prácticamente no afecta al módulo de Young del mismo.

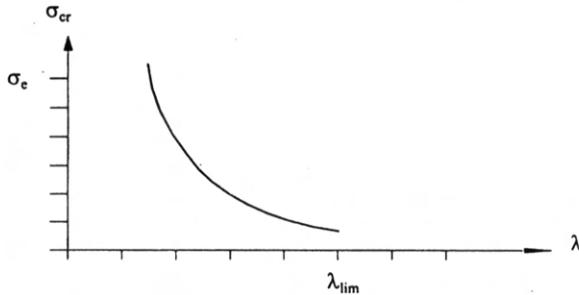


Figura 15.12. Tensión crítica frente a esbeltez.

La gráfica de la figura 15.12 tiene validez en régimen elástico pero cuando la pieza entra en plastificación ya no es adecuada y hay que tener presente cómo es la relación tensión-deformación después de que se alcance el límite elástico, para ello habría que estudiar las curvas de cada material. En el caso del acero se puede considerar comportamiento elástoplástico perfecto, tal como se muestra en la figura 15.13.

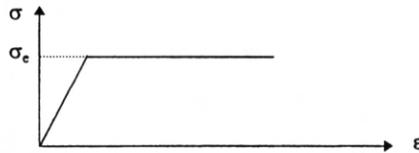


Figura 15.13. Ley de comportamiento elástoplástico perfecto.

En el caso de que se admita una ley de comportamiento elástoplástico perfecto, la tensión a partir del límite elástico es constante, luego la hipérbola de Euler se completa de la forma que se indica en la figura 15.14.

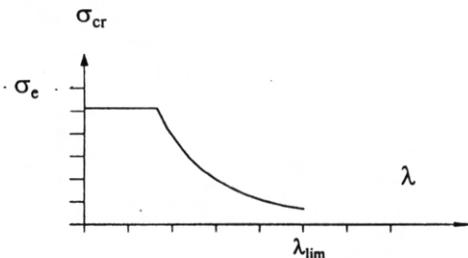


Figura 15.14. Relación teórica tensión-esbeltez en un material elástoplástico perfecto.

Si se somete una barra esbelta de acero a pandeo y se representa la tensión de la barra frente a la esbeltez la curva que se obtiene se encuentra por debajo de la curva teórica, la razón de ello estriba en el proceso de fabricación que genera tensiones residuales producidas por el enfriamiento no uniforme de las secciones producidas mediante laminación en caliente. Así en un perfil en doble T, como el de la figura 15.15, se empiezan enfriando las alas y la parte central del alma y la zona que rodea la unión ala-alma se enfría después y al intentar contraerse se traccionan mientras que las partes que se enfriaron antes se comprimen. Esta compresión facilita el pandeo.

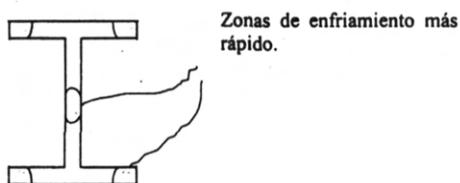


Figura 15.15. Diferentes zonas de enfriamiento en una doble T.

### 15.7. MÉTODO PRÁCTICO DE CÁLCULO A PANDEO. MÉTODO $\omega$

A lo largo del capítulo se ha visto como el pandeo es un fenómeno inestable. En un proceso de este tipo no se pueden admitir las hipótesis que se habían establecido para todo el problema elástico:

- No hay linealidad entre fuerza y desplazamiento.
- Se producen grandes deformaciones.
- Hay que considerar el pandeo en régimen plástico.
- Se producen deformaciones en una dirección que no es la habitual en esfuerzos axiales.
- Además de estos factores anteriores, hay que considerar la gran influencia que excentricidades y deformaciones previas de difícil eliminación pueden tener sobre el pandeo.

La falta de linealidad y de pequeñas deformaciones y, si se llegara, la plastificación, impiden que se pueda aplicar el principio de superposición, fijese que este principio se ha podido aplicar siempre hasta ahora, de hecho puede facilitar bastante la resolución de los problemas. Todos estos factores, en mayor o menor medida se pueden estudiar estadísticamente de forma que puedan facilitar los cálculos así, por ejemplo, la norma española de estructuras de acero, basada en las disposiciones alemanas y francesas. El método propuesto por Dutheil para cargas centradas, en el que se basa la norma alemana, considera todos los efectos de excentricidad y deformación previa, así como otros factores

que son capaces de variar la carga crítica, englobados en una deformación previa de forma senoidal cuya flecha máxima, conocida como "preflecha convencional", toma el valor:

$$f = C\sigma \frac{W}{P_{cr}} \quad [15.42]$$

Donde:

C: constante.

$\sigma$ : Tensión provocada por P ( $\sigma = P/A$ )

W: Módulo resistente.

Obsérvese que la expresión [15.42], que es una flecha previa al estado de carga depende de ésta, esto se debe a que la peflecha se manifiesta, precisamente, cuando la barra entra en carga.

La tensión se amplifica mediante el factor:

$$\frac{\sigma'_{cr}}{\sigma'_{cr} - \sigma} \quad [15.43]$$

En la expresión [15.43]  $\sigma'_{cr}$  es la tensión crítica real, frente a  $\sigma_{cr}$ , que es la tensión crítica teórica que se ha obtenido considerando que el módulo de elasticidad real es el módulo de Young teórico, E. Pero, debido a la falta de uniformidad del material, el módulo de elasticidad real, E', no es exactamente igual que el teórico, sino que se relacionan experimentalmente, mediante la fórmula:

$$E' = \frac{E}{1 + b} \quad [15.44]$$

en la fórmula [15.44], b es un coeficiente experimental. La relación entre las tensiones críticas real y teórica, en función de este coeficiente es análoga a la que sufren los módulos de elasticidad:

$$\sigma'_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{1 + b} \quad [15.45]$$

Teniendo en cuenta la relación anterior, el factor de amplificación de la carga queda:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - (1 + b)\sigma} \quad [15.46]$$

Con lo que la peflecha, ya amplificada, queda:

$$f_a = C\sigma \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - (1+b)\sigma} \frac{W}{P_{cr}} \quad [15.47]$$

Si se sustituye el valor de la tensión crítica,  $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ , y los valores de los coeficientes  $b$  y  $C$  obtenidos experimentalmente,  $b = C = 0.3$ , la expresión [15.47] queda:

$$f_a = \frac{0.3\sigma}{\sigma_{cr} - 1.3\sigma} \frac{W}{A}$$

Con la preflecha anterior se produce un momento flector máximo de:

$$M = Pf_a = \sigma Af_a = \frac{0.3\sigma^2}{\sigma_{cr} - 1.3\sigma} W$$

La tensión máxima es la suma de la tensión debida al esfuerzo axial más la tensión debida al momento flector:

$$\sigma_{max} = \sigma + \frac{M}{W} = \sigma + \frac{0.3\sigma^2}{\sigma_{cr} - 1.3\sigma} = \sigma \frac{\sigma_{cr} - \sigma}{\sigma_{cr} - 1.3\sigma}$$

Se considera que el estado límite de la pieza se alcanza cuando la tensión máxima anterior alcanza la tensión de fluencia  $\sigma_F$ :

$$\sigma_F = \sigma_s \frac{\sigma_{cr} - \sigma_s}{\sigma_{cr} - 1.3\sigma_s}$$

En la expresión anterior  $\sigma_s$  es la tensión amplificada debido al esfuerzo axial que produce el agotamiento de la pieza. Esta tensión se puede obtener de la ecuación anterior:

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_{cr} + 1.3\sigma_F) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{cr} + 1.3\sigma_F)^2 - \sigma_F\sigma_{cr}} \quad [15.48]$$

Obsérvese, de la expresión [15.48], que la tensión, debida al esfuerzo axial, que lleva al agotamiento de la pieza depende del tipo de material, a través de  $\sigma_E$ , y de la esbeltez, a través de  $\sigma_{cr}$ .

Obviamente, para que una pieza sometida a esfuerzo axial no pandee la tensión debida al axial no debe superar la tensión crítica de agotamiento  $\sigma_s$ :

$$\frac{N}{A} \leq \sigma_s$$

Se define el coeficiente  $\omega$  como la relación:

$$\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_s} \quad [15.49]$$

Luego la condición de no pandeo debe ser:

$$\omega \frac{N}{A} \leq \sigma_F \quad [15.50]$$

Los valores de  $\omega$  dependen de la esbeltez de la pieza y del material. En concreto los valores de  $\omega$  para acero se recogen en la norma EA95 de obligado cumplimiento en la actualidad para el cálculo de estructuras de acero en España. El efecto de considerar el coeficiente  $\omega$  se traduce en una amplificación de las tensiones debida al axil de forma que se engloben los factores enumerados anteriormente y que afectan al pandeo.

Si además de esfuerzo axil, también aparecen momentos flectores la tensión amplificada, y siempre según la norma EH95 queda:

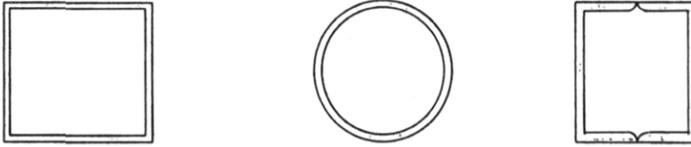
$$\sigma = \omega \frac{N}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \quad [15.51]$$

## 15.8. SECCIONES ÓPTIMAS A PANDEO

En el caso de que se pretenda disminuir la carga crítica lo más apropiado es disminuir la esbeltez. Para disminuir la esbeltez se puede optar por las siguientes premisas:

- Disminuir la longitud de la barra. Esta opción no siempre es posible pues la longitud de la barra puede venir impuesta por motivos de construcción.
- Cambiar las condiciones de apoyo. De las condiciones de apoyo depende el valor de  $\beta$ . Al igual que en el caso de la longitud este aspecto estructural no siempre se puede cambiar.
- Variar la sección de la barra de forma que aumente su radio de giro. Para aumentar el radio de giro se debe ir hacia momentos de inercia crecientes sin variar, en lo posible, el área. Para lograr este objetivo se deben conseguir áreas que tengan su masa concentrada lo más lejos posible del eje de la sección. Se podría pensar, por tanto, que los perfiles en U o en doble T serían, al igual que en el caso de flexión plana, perfiles idóneos. Pero esto no es así; la razón de esto es que el pandeo se puede dar con igual probabilidad en ambos ejes de la sección, OY y OZ, por lo tanto la sección debe tener su masa concentrada lejos

de ambos ejes: por ejemplo perfiles redondos, cuadrados, etc. según se muestra en la figura 15.16. Perfiles en doble T, en U etc. sólo son recomendables cuando está restringido el pandeo en la dirección en la que el radio de giro es menor. Sin embargo si se quiere disponer de un perfil en doble T siempre es preferible usar un perfil H, que tiene las alas de mayor longitud, a un I, porque el perfil H al tener su sección el mismo alto que ancho tiene momentos de inercia similares en ambas direcciones.



**Figura 15.16.** *Perfiles idóneos para pandeo.*

## BIBLIOGRAFÍA

1. "*Resistencia de Materiales*", V.I. Feodosiev, Mir, 1980
2. "*Cálculo de estructuras reticulares*", C. Fernández Casado, Dossat, 1967
3. "*Foundations of Solid Mechanics*" Y. C. Fung, Prentice-Hall, 1977
4. "*Elasticidad*", L. Ortiz Berrocal, Universidad Politécnica de Madrid, 1985
5. "*Resistencia de Materiales*", L. Ortiz Berrocal, McGraw-Hill, 1991
6. "*Teoría de la Elasticidad*", F. París, ETSII de Sevilla, 1996
7. "*Resistencia de Materiales*", R. Picón, ETSII de Sevilla, apuntes de clase, 1996
8. "*Resistencia de Materiales*", 2 tomos, F. Rodríguez Avial, Bellisco, 1989
9. "*Curso de Elasticidad*", A. Samartín, Bellisco, 1990
10. "*Resistencia de Materiales*", A. Samartín Quiroga, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 1995
11. "*Mathematics Applied to Continuum Mechanics*", Lee A. Segel, Dover Publications, Inc., New York, 1977
12. "*Teoría de la Elasticidad*", S. Timoshenko y J. N. Goodier, Urmo, 1972
13. "*Resistencia de Materiales*", 2 tomos, S. Timoshenko y J. N. Goodier, Espasa-Calpe, 1944
14. "*Resistencia de Materiales*", M. Vázquez, Noela, 1991





Este libro, orientado a alumnos de Escuela Técnicas o a profesionales que pretendan recordar los conocimientos adquiridos en su día, se presenta como una introducción a la Elasticidad y a la Resistencia de Materiales.

Ambas disciplinas, íntimamente ligadas, forman parte de la Mecánica de Medios Continuos. La Elasticidad se encarga del estudio del sólido elástico, sólido deformable al que se le imponen las hipótesis de la Elasticidad. En este estudio se pretende fundamentalmente determinar las tensiones y los desplazamientos que se generan en el sólido, debidos a la acción de sollicitaciones. La obtención de estas tensiones y desplazamientos conlleva la resolución de complicadas ecuaciones diferenciales, la mayoría de las veces no resolubles analíticamente; dificultad que puede ser salvada, en gran medida, centrandó el análisis en los sólidos de geometrías sencillas de mayor aplicación estructural, las barras prismáticas. Consecuencia de estas características geométricas son las hipótesis simplificativas que permiten obtener las ecuaciones de fácil resolución que constituyen la Resistencia de Materiales.

De lo anteriormente expuesto se deduce que Elasticidad y Resistencia de Materiales estudian lo mismo, sólo se diferencian en el objeto de estudio y el aparato matemático utilizado.

En las Escuelas Técnicas tradicionalmente se ha impartido la Resistencia de Materiales sin exigir conocimientos previos de Elasticidad. Para aquéllas personas sólo interesadas en la Resistencia de Materiales se puede seguir el texto empezando por el capítulo 1 y siguiendo por el capítulo 6.

Con objeto de aclarar los conceptos teóricos, en el texto se incluye gran cantidad de ejemplos prácticos.

ISBN 84-7496-719-8



**Servicio de Publicaciones**  
Universidad de Málaga